

Synchronisation in Netzwerken: Master Stability Function und Permutationssymmetrien

Felix Zimmermann, Halgurd Taher, Paul-Rainer Affeld

Institut für Theoretische Physik, Technische Universität Berlin, Germany

6. Juli 2015



- 1 Einleitung
- 2 Synchronisation I
- 3 Simulationsbeispiel
- 4 Cluster und Permutationssymmetrien
- 5 Synchronisation II
- 6 Lokale Stabilitätsanalyse
- 7 Fazit

Einleitung

- 1 Einleitung
- 2 Synchronisation I
- 3 Simulationsbeispiel
- 4 Cluster und Permutationssymmetrien
- 5 Synchronisation II
- 6 Lokale Stabilitätsanalyse
- 7 Fazit

Dynamik auf Netzwerken

- N miteinander gekoppelte Knoten
- Jeder Knoten wird durch dynamische Gleichung beschrieben

$$\dot{\mathbf{x}}_i(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_i(t)) + \sigma \sum_j A_{ij} \mathbf{h}(\mathbf{x}_j) \quad (1)$$

$$i = 1, \dots, N$$

A_{ij} Kopplungsmatrix

$$\mathbf{f}, \mathbf{h} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Definiere

$$\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)^T, \mathbf{F} = (\mathbf{f}(\mathbf{x}_1), \dots, \mathbf{f}(\mathbf{x}_N))^T, \mathbf{H} = (\mathbf{h}(\mathbf{x}_1), \dots, \mathbf{h}(\mathbf{x}_N))^T$$

\Rightarrow äquivalente Gleichung zu (1)

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{X}(t)) + \sigma \mathbf{A} \otimes \mathbf{H}(\mathbf{X}(t))$$

Synchronisation I

- 1 Einleitung
- 2 Synchronisation I**
- 3 Simulationsbeispiel
- 4 Cluster und Permutationssymmetrien
- 5 Synchronisation II
- 6 Lokale Stabilitätsanalyse
- 7 Fazit

Synchronisation I

Globale Synchronisation liegt vor wenn

$$\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{x}_2(t) = \dots = \mathbf{x}_N(t) =: \mathbf{s}(t)$$

erfüllt ist.

Stabilität der Synchronisation :

- Wie entwickelt sich kleine Abweichung von $\mathbf{s}(t)$ zeitlich weiter?

Linearisierung um $\mathbf{s}(t) \Rightarrow$ Master Stability Equation (MSE) :

$$\delta \dot{\mathbf{X}}(t) = [D\mathbf{F}(\mathbf{s}(t)) + \sigma \mathbf{A} \otimes D\mathbf{H}(\mathbf{s}(t))] \delta \mathbf{X}(t)$$

Master Stability Function

Ljapunow-Exponenten λ_i

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left(\frac{|\delta \mathbf{x}_i(t)|}{|\delta \mathbf{x}_i(0)|} \right)$$

Master Stability Function (MSF) Λ ist größter Ljapunow Exponent

- $\Lambda > 0$, Synchronisation instabil, Fehler wächst, Bahnkurven $\mathbf{x}_i(t)$ entfernen sich von $\mathbf{s}(t)$
- $\Lambda < 0$, Synchronisation stabil, Fehler schrumpft, Bahnkurven $\mathbf{x}_i(t)$ nähern sich wieder $\mathbf{s}(t)$

Voraussetzungen für Synchronisation

- jeder Knoten benötigt gleichen Input
- setzt u.a. konstante Zeilensumme von \mathbf{A} voraus

Voraussetzungen für Synchronisation

- jeder Knoten benötigt gleichen Input
- setzt u.a. konstante Zeilensumme von \mathbf{A} voraus

Im Allgemeinen nicht erfüllt, z.B. :

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Zeilensumme NICHT konstant

Simulationsbeispiel

- 1 Einleitung
- 2 Synchronisation I
- 3 Simulationsbeispiel**
- 4 Cluster und Permutationssymmetrien
- 5 Synchronisation II
- 6 Lokale Stabilitätsanalyse
- 7 Fazit

Beispiel

- Diskretes System mit $N = 11$ Knoten
- Kopplungsmatrix \mathbf{A}_1
- Diskrete dynamische Gleichung gegeben durch

$$x_i^{t+1} = \left[\beta \mathcal{I}(x_i^t) + \sigma \sum_j^N A_{ij} \mathcal{I}(x_j^t) + \delta \right] \bmod 2\pi$$

β, σ Kopplungsparameter

$$\mathcal{I}(x) = \frac{1 - \cos(x)}{2}$$

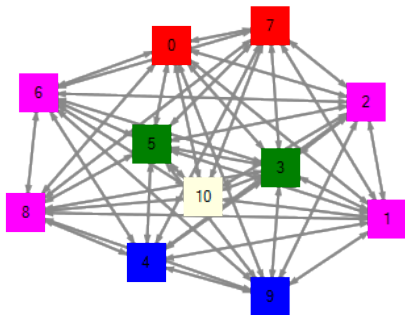
(aus Pecora et. al 2014)

Beispiel

Simulation des Beispiels

Beobachtungen

- Keine globale Synchronisation
- 5 Gruppen von Knoten die sich synchron verhalten
- \Rightarrow Cluster



Cluster und Permutationssymmetrien

- 1 Einleitung
- 2 Synchronisation I
- 3 Simulationsbeispiel
- 4 Cluster und Permutationssymmetrien**
- 5 Synchronisation II
- 6 Lokale Stabilitätsanalyse
- 7 Fazit

Cluster

\mathbf{A}_1 hat zwar global keine konstante Zeilensumme aber:

- Forderung nach gleichem Input für jeden Knoten kann innerhalb eines Cluster erfüllt werden
(da gleiche Zeilensumme innerhalb eines Clusters für z.b. \mathbf{A}_1)
- Knoten können vertauscht werden ohne Dynamik zu ändern

⇒ Netzwerk besitzt offensichtlich Symmetrien

Suche nach Permutationssymmetrien sinnvoll:

- mathematisch beschrieben durch Permutationsmatrizen \mathbf{P}_i
- $\mathbf{A} = \mathbf{PAP}^{-1} \Rightarrow \mathbf{A}$ bleibt unverändert bei Tauschen der Knoten

Permutationssymmetrien

Beispiele für Permutationssymmetrien:

- Knoten 1 und 2 vertauschbar
⇒ 1 und 2 im Cluster
- Knoten 1 und 2 vertauschbar bei gleichzeitiger Vertauschung von 3 und 4
⇒ Cluster (1,2) und (3,4) "verschränkt" (Pecora et al.: interwinded)

Cluster

- Clustersuche in der Regel numerisch
- Bibliothek nauty liefert M Cluster <http://pallini.di.uniroma1.it/>
- Nach Finden der Cluster kann Störung umgeschrieben werden:

$$\begin{aligned}\dot{\delta \mathbf{X}}(t) &= [D\mathbf{F}(\mathbf{s}(t)) + \sigma \mathbf{A} \otimes D\mathbf{H}(\mathbf{s}(t))] \delta \mathbf{X}(t) \\ &= \left[\sum_{m=1}^M \mathbf{E}^{(m)} \otimes D\mathbf{F}(\mathbf{s}_m(t)) + \sigma \mathbf{A} \otimes \mathbf{I}_n \sum_{m=1}^M \mathbf{E}^{(m)} \otimes D\mathbf{H}(\mathbf{s}_m(t)) \right] \mathbf{X}(t)\end{aligned}$$

$\mathbf{s}_m(t)$ ist synchroner Orbit des Clusters m

$\mathbf{E}_{ii}^{(m)} = 1$ wenn Knoten i zum Cluster m gehört

Synchronisation II

- 1 Einleitung
- 2 Synchronisation I
- 3 Simulationsbeispiel
- 4 Cluster und Permutationssymmetrien
- 5 Synchronisation II**
- 6 Lokale Stabilitätsanalyse
- 7 Fazit

Formen von Synchronisation

- globale Synchronisation
alle Knoten des Netzwerks synchron
- isolierte Synchronisation innerhalb eines Clusters
alle Knoten eines Clusters synchron
- gemeinsame Synchronisation zweier Cluster
zwei Cluster zeigen gleichzeitig isolierte Synchronisation

Isolierte Synchronisation

Warum kann ein Cluster synchron sein während andere nicht synchron sind?

- Betrachte Dynamik des Knoten i aus Cluster n . \mathbf{P}_m sei Permutationsmatrix zu Symmetriepermutation π des Clusters m .

$$\left[\mathbf{P}_m \dot{\mathbf{X}} \right]_i = \dot{\mathbf{x}}_i$$

$$[\mathbf{P}_m \mathbf{F}(\mathbf{X})]_i + [\mathbf{P}_m \mathbf{A} \mathbf{H}(\mathbf{X})]_i = \mathbf{f}(\mathbf{x}_i) + \sigma \sum_j A_{ij} \mathbf{h}(\mathbf{x}_j)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_i) + \sigma \sum_j A_{ij} \mathbf{h}(\mathbf{x}_{\pi(j)}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_i) + \sigma \sum_j A_{ij} \mathbf{h}(\mathbf{x}_j)$$

- Ein Knoten aus n ist gleich an jeden Knoten aus m gekoppelt.

Isolierte Synchronisation

Warum kann ein Cluster synchron sein während andere nicht synchron sind?

- Ein Knoten aus n ist gleich an jeden Knoten aus m gekoppelt.
- Analog führt Anwendung von \mathbf{P}_n auf "Jeder Knoten aus n ist gleich an einen Knoten aus m gekoppelt"
- Jeder Knoten in n bekommt in der Summe den gleichen Input vom Cluster m , egal ob dieser synchron oder nicht ist.
 \Rightarrow Wenn Permutationsmatrizen existieren die die Cluster getrennt permutieren, existiert isolierte Synchronisation
 \Rightarrow Isolierte Synchronisation nicht bei "verschränkten" Clustern

Lokale Stabilitätsanalyse

- 1 Einleitung
- 2 Synchronisation I
- 3 Simulationsbeispiel
- 4 Cluster und Permutationssymmetrien
- 5 Synchronisation II
- 6 Lokale Stabilitätsanalyse**
- 7 Fazit

Stabilität der Clustersynchronität

Stabilitätsanalyse:

- für einzelne Cluster schwierig:
in welche Richtung sollte $\delta \mathbf{X}$ betrachtet werden?
- \Rightarrow Basistransformation mit Transformationsmatrix \mathbf{T}
- \mathbf{T} blockdiagonalisiert \mathbf{A}
- oberer $M \times M$ Block beschreibt die Bewegung innerhalb der Synchronisationsmannigfaltigkeit

$$A = \begin{bmatrix} \text{10x10 grid of black squares} \\ \text{10x10 grid of black squares} \\ \text{10x10 grid of black squares} \\ \text{10x10 grid of black squares} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \text{10x10 grid with colored dots} \\ \text{10x10 grid with colored dots} \\ \text{10x10 grid with colored dots} \\ \text{10x10 grid with colored dots} \end{bmatrix}$$

(Pecora et al. 2014)

MSF für Cluster

Nach Transformation durch \mathbf{T} ergibt sich linearisierte Störung $\boldsymbol{\eta}$ in neuer Basis

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}(t) = \left[\sum_{m=1}^M \mathbf{J}^{(m)} \otimes D\mathbf{F}(\mathbf{s}_m(t)) + \sigma \mathbf{B} \otimes \mathbf{I}_n \sum_{m=1}^M \mathbf{J}^{(m)} \otimes D\mathbf{H}(\mathbf{s}_m(t)) \right] \boldsymbol{\eta}(t)$$

$$\boldsymbol{\eta}(t) = \mathbf{T} \otimes \mathbf{I}_n \delta \mathbf{X}(t)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{T} \mathbf{A} \mathbf{T}^{-1}$$

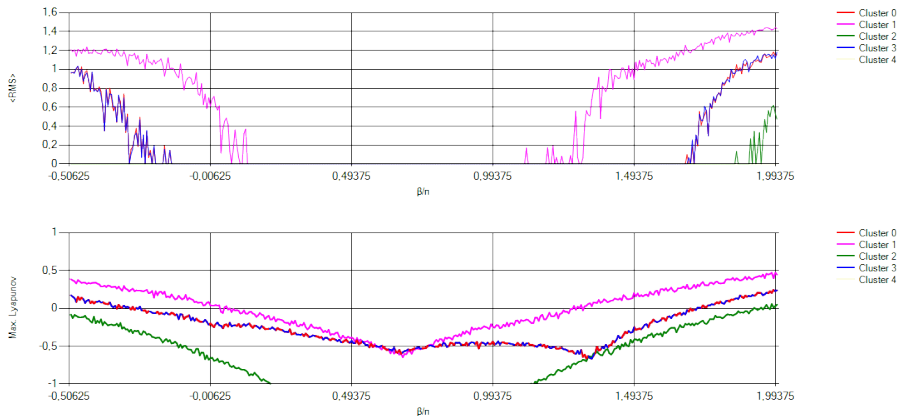
$$\mathbf{J}^{(m)} = \mathbf{T} \mathbf{E}^{(m)} \mathbf{T}^{-1}$$

aus dieser MSE kann MSF für jedes Cluster (lokal) berechnet werden

Simulation lokale MSF

Stabilitätsanalyse

Simulation lokale MSF



Fazit

- 1 Einleitung
- 2 Synchronisation I
- 3 Simulationsbeispiel
- 4 Cluster und Permutationssymmetrien
- 5 Synchronisation II
- 6 Lokale Stabilitätsanalyse
- 7 Fazit**

Fazit

- globale Stabilitätsanalyse über MSF setzt konstante Zeilensumme voraus
- In Netzwerken mit Symmetrien existieren Cluster
- Knoten eines Cluster können synchron laufen
- lokale Stabilitätsanalyse der Synchronisation durch Basistransformation möglich
- Isolierte Desynchronisation bei nicht verschränkten (non intertwined) Clustern möglich