

# Synchronisation in Netzwerken: Master Stability Function und Permutationssymmetrien

Felix Zimmermann, Halgurd Taher, Paul-Rainer Affeld

Institut für Theoretische Physik, Technische Universität Berlin, Germany

6. Juli 2015



- 1 Einleitung
- 2 Synchronisation I
- 3 Simulationsbeispiel
- 4 Cluster und Permutationssymmetrien
- 5 Synchronisation II
- 6 Lokale Stabilitätsanalyse
- 7 Fazit

# Einleitung

- 1 Einleitung
- 2 Synchronisation I
- 3 Simulationsbeispiel
- 4 Cluster und Permutationssymmetrien
- 5 Synchronisation II
- 6 Lokale Stabilitätsanalyse
- 7 Fazit

# Dynamik auf Netzwerken

- $N$  miteinander gekoppelte Knoten
- Jeder Knoten wird durch dynamische Gleichung beschrieben

$$\dot{\mathbf{x}}_i(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_i(t)) + \sigma \sum_j A_{ij} \mathbf{h}(\mathbf{x}_j) \quad (1)$$

$$i = 1, \dots, N$$

$A_{ij}$  Kopplungsmatrix

$$\mathbf{f}, \mathbf{h} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Definiere

$$\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)^T, \mathbf{F} = (\mathbf{f}(\mathbf{x}_1), \dots, \mathbf{f}(\mathbf{x}_N))^T, \mathbf{H} = (\mathbf{h}(\mathbf{x}_1), \dots, \mathbf{h}(\mathbf{x}_N))^T$$

$\Rightarrow$  äquivalente Gleichung zu (1)

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{X}(t)) + \sigma \mathbf{A} \otimes \mathbf{H}(\mathbf{X}(t))$$

# Synchronisation I

- 1 Einleitung
- 2 Synchronisation I**
- 3 Simulationsbeispiel
- 4 Cluster und Permutationssymmetrien
- 5 Synchronisation II
- 6 Lokale Stabilitätsanalyse
- 7 Fazit

# Synchronisation I

Globale Synchronisation liegt vor wenn

$$\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{x}_2(t) = \dots = \mathbf{x}_N(t) =: \mathbf{s}(t)$$

erfüllt ist.

Stabilität der Synchronisation :

- Wie entwickelt sich kleine Abweichung von  $\mathbf{s}(t)$  zeitlich weiter?

Linearisierung um  $\mathbf{s}(t) \Rightarrow$  Master Stability Equation (MSE) :

$$\delta \dot{\mathbf{X}}(t) = [D\mathbf{F}(\mathbf{s}(t)) + \sigma \mathbf{A} \otimes D\mathbf{H}(\mathbf{s}(t))] \delta \mathbf{X}(t)$$

# Master Stability Function

Ljapunow-Exponenten  $\lambda_i$

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left( \frac{|\delta \mathbf{x}_i(t)|}{|\delta \mathbf{x}_i(0)|} \right)$$

Master Stability Function (MSF)  $\Lambda$  ist größter Ljapunow Exponent

- $\Lambda > 0$ , Synchronisation instabil, Fehler wächst, Bahnkurven  $\mathbf{x}_i(t)$  entfernen sich von  $\mathbf{s}(t)$
- $\Lambda < 0$ , Synchronisation stabil, Fehler schrumpft, Bahnkurven  $\mathbf{x}_i(t)$  nähern sich wieder  $\mathbf{s}(t)$

# Voraussetzungen für Synchronisation

- jeder Knoten benötigt gleichen Input
- setzt u.a. konstante Zeilensumme von  $\mathbf{A}$  voraus



# Voraussetzungen für Synchronisation

- jeder Knoten benötigt gleichen Input
- setzt u.a. konstante Zeilensumme von  $\mathbf{A}$  voraus

Im Allgemeinen nicht erfüllt, z.B. :

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Zeilensumme NICHT konstant

# Simulationsbeispiel

- 1 Einleitung
- 2 Synchronisation I
- 3 Simulationsbeispiel**
- 4 Cluster und Permutationssymmetrien
- 5 Synchronisation II
- 6 Lokale Stabilitätsanalyse
- 7 Fazit

# Beispiel

- Diskretes System mit  $N = 11$  Knoten
- Kopplungsmatrix  $\mathbf{A}_1$
- Diskrete dynamische Gleichung gegeben durch

$$x_i^{t+1} = \left[ \beta \mathcal{I}(x_i^t) + \sigma \sum_j^N A_{ij} \mathcal{I}(x_j^t) \right] \bmod 2\pi$$

$\beta, \sigma$  Kopplungsparameter

$$\mathcal{I}(x) = \frac{1 - \cos(x)}{2}$$

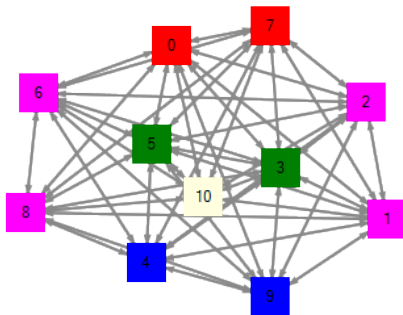
(aus Pecora et. al 2014)

# Beispiel

## Simulation des Beispiels

# Beobachtungen

- Keine globale Synchronisation
- 5 Gruppen von Knoten die sich synchron verhalten
- $\Rightarrow$  Cluster



# Cluster und Permutationssymmetrien

- 1 Einleitung
- 2 Synchronisation I
- 3 Simulationsbeispiel
- 4 Cluster und Permutationssymmetrien**
- 5 Synchronisation II
- 6 Lokale Stabilitätsanalyse
- 7 Fazit

# Cluster

$\mathbf{A}_1$  hat zwar global keine konstante Zeilensumme aber:

- Forderung nach gleichem Input für jeden Knoten kann innerhalb eines Cluster erfüllt werden  
(da gleiche Zeilensumme innerhalb eines Clusters für z.b.  $\mathbf{A}_1$ )
- Knoten können vertauscht werden ohne Dynamik zu ändern

⇒ Netzwerk besitzt offensichtlich Symmetrien

Suche nach Permutationssymmetrien sinnvoll:

- mathematisch beschrieben durch Permutationsmatrizen  $\mathbf{P}_i$
- $\mathbf{A} = \mathbf{PAP}^{-1} \Rightarrow \mathbf{A}$  bleibt unverändert bei Tauschen der Knoten

# Permutationssymmetrien

Beispiele für Permutationssymmetrien:

- Knoten 1 und 2 vertauschbar  
⇒ 1 und 2 im Cluster
- Knoten 1 und 2 vertauschbar bei gleichzeitiger Vertauschung von 3 und 4  
⇒ Cluster (1,2) und (3,4) "verschränkt" (Pecora et al.: interwinded)



# Cluster

- Clustersuche in der Regel numerisch
- Bibliothek nauty liefert  $M$  Cluster <http://pallini.di.uniroma1.it/>
- Nach Finden der Cluster kann Störung umgeschrieben werden:

$$\begin{aligned}\dot{\delta \mathbf{X}}(t) &= [D\mathbf{F}(\mathbf{s}(t)) + \sigma \mathbf{A} \otimes D\mathbf{H}(\mathbf{s}(t))] \delta \mathbf{X}(t) \\ &= \left[ \sum_{m=1}^M \mathbf{E}^{(m)} \otimes D\mathbf{F}(\mathbf{s}_m(t)) + \sigma \mathbf{A} \otimes \mathbf{I}_n \sum_{m=1}^M \mathbf{E}^{(m)} \otimes D\mathbf{H}(\mathbf{s}_m(t)) \right] \mathbf{X}(t)\end{aligned}$$

$\mathbf{s}_m(t)$  ist synchroner Orbit des Clusters  $m$

$\mathbf{E}_{ii}^{(m)} = 1$  wenn Knoten  $i$  zum Cluster  $m$  gehört

# Synchronisation II

- 1 Einleitung
- 2 Synchronisation I
- 3 Simulationsbeispiel
- 4 Cluster und Permutationssymmetrien
- 5 Synchronisation II**
- 6 Lokale Stabilitätsanalyse
- 7 Fazit

# Formen von Synchronisation

- globale Synchronisation  
alle Knoten des Netzwerks synchron
- isolierte Synchronisation innerhalb eines Clusters  
alle Knoten eines Clusters synchron
- gemeinsame Synchronisation zweier Cluster  
zwei Cluster zeigen gleichzeitig isolierte Synchronisation

# Isolierte Synchronisation

Warum kann ein Cluster synchron sein während andere nicht synchron sind?

- Betrachte Dynamik des Knoten  $i$  aus Cluster  $n$ .  $\mathbf{P}_m$  sei Permutationsmatrix zu Symmetriepermutation  $\pi$  des Clusters  $m$ .

$$\left[ \mathbf{P}_m \dot{\mathbf{X}} \right]_i = \dot{\mathbf{x}}_i$$

$$[\mathbf{P}_m \mathbf{F}(\mathbf{X})]_i + [\mathbf{P}_m \mathbf{A} \mathbf{H}(\mathbf{X})]_i = \mathbf{f}(\mathbf{x}_i) + \sigma \sum_j A_{ij} \mathbf{h}(\mathbf{x}_j)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_i) + \sigma \sum_j A_{ij} \mathbf{h}(\mathbf{x}_{\pi(j)}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_i) + \sigma \sum_j A_{ij} \mathbf{h}(\mathbf{x}_j)$$

- Ein Knoten aus  $n$  ist gleich an jeden Knoten aus  $m$  gekoppelt.

# Isolierte Synchronisation

Warum kann ein Cluster synchron sein während andere nicht synchron sind?

- Ein Knoten aus  $n$  ist gleich an jeden Knoten aus  $m$  gekoppelt.
- Analog führt Anwendung von  $\mathbf{P}_n$  auf "Jeder Knoten aus  $n$  ist gleich an einen Knoten aus  $m$  gekoppelt"
- Jeder Knoten in  $n$  bekommt in der Summe den gleichen Input vom Cluster  $m$ , egal ob dieser synchron oder nicht ist.  
 $\Rightarrow$  Wenn Permutationsmatrizen existieren die die Cluster getrennt permutieren, existiert isolierte Synchronisation  
 $\Rightarrow$  Isolierte Synchronisation nicht bei "verschränkten" Clustern

# Lokale Stabilitätsanalyse

- 1 Einleitung
- 2 Synchronisation I
- 3 Simulationsbeispiel
- 4 Cluster und Permutationssymmetrien
- 5 Synchronisation II
- 6 Lokale Stabilitätsanalyse**
- 7 Fazit

# Stabilität der Clustersynchronität

Stabilitätsanalyse:

- für einzelne Cluster schwierig:  
in welche Richtung sollte  $\delta \mathbf{X}$  betrachtet werden?
- $\Rightarrow$  Basistransformation mit Transformationsmatrix  $\mathbf{T}$
- $\mathbf{T}$  blockdiagonalisiert  $\mathbf{A}$
- oberer  $M \times M$  Block beschreibt die Bewegung innerhalb der Synchronisationsmannigfaltigkeit

$$A = \begin{bmatrix} \text{10x10 grid of black squares} \\ \text{10x10 grid of black squares} \\ \text{10x10 grid of black squares} \\ \text{10x10 grid of black squares} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \text{10x10 grid with colored dots} \\ \text{10x10 grid with colored dots} \\ \text{10x10 grid with colored dots} \\ \text{10x10 grid with colored dots} \end{bmatrix}$$

(Pecora et al. 2014)

# MSF für Cluster

Nach Transformation durch  $\mathbf{T}$  ergibt sich linearisierte Störung  $\boldsymbol{\eta}$  in neuer Basis

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}(t) = \left[ \sum_{m=1}^M \mathbf{J}^{(m)} \otimes D\mathbf{F}(\mathbf{s}_m(t)) + \sigma \mathbf{B} \otimes \mathbf{I}_n \sum_{m=1}^M \mathbf{J}^{(m)} \otimes D\mathbf{H}(\mathbf{s}_m(t)) \right] \boldsymbol{\eta}(t)$$

$$\boldsymbol{\eta}(t) = \mathbf{T} \otimes \mathbf{I}_n \delta \mathbf{X}(t)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{T} \mathbf{A} \mathbf{T}^{-1}$$

$$\mathbf{J}^{(m)} = \mathbf{T} \mathbf{E}^{(m)} \mathbf{T}^{-1}$$

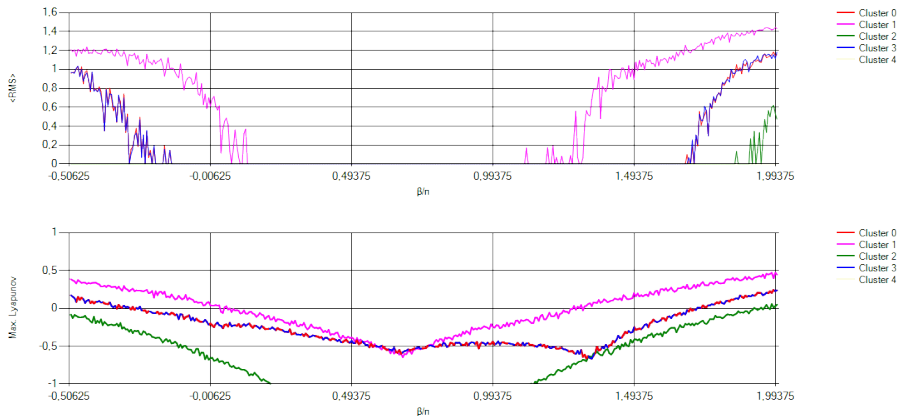
aus dieser MSE kann MSF für jedes Cluster (lokal) berechnet werden



# Simulation lokale MSF

Stabilitätsanalyse

## Simulation lokale MSF



# Fazit

- 1 Einleitung
- 2 Synchronisation I
- 3 Simulationsbeispiel
- 4 Cluster und Permutationssymmetrien
- 5 Synchronisation II
- 6 Lokale Stabilitätsanalyse
- 7 Fazit**

# Fazit

- globale Stabilitätsanalyse über MSF setzt konstante Zeilensumme voraus
- In Netzwerken mit Symmetrien existieren Cluster
- Knoten eines Cluster können synchron laufen
- lokale Stabilitätsanalyse der Synchronisation durch Basistransformation möglich
- Isolierte Desynchronisation bei nicht verschränkten (non intertwined) Clustern möglich