Technische Universität Berlin

Fakultät II Mathematik und Naturwissenschaften

Nichtlineare Dynamik und Kontrolle SS 2015

Projekt 2: Synchronisation in Netzwerken: Master Stability Function und Permutationssymmetrien

Autoren: Halgurd Taher
Felix Zimmermann
Paul-Rainer Affeld

Version vom: 10. Juli 2015

Inhaltsverzeichnis

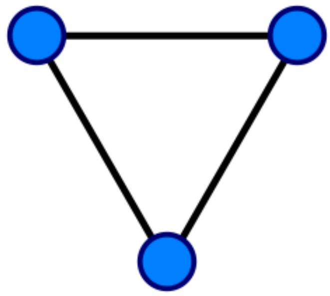

Abbildung 1: Beispiel eines ungerichteten Netzwerks aus drei Knoten, bei dem jeder Knoten mit jedem anderen Verbunden ist.

1 Einleitung

Dynamische Netzwerke spielen in heutigen Wissenschaft eine wichtige Rolle. So lassen sich beispielsweise Prozesse im Gehirn zwischen Neuronen über Netzwerke beschreiben und analysieren. Großflächige Stromnetze stellen ebenfalls ein klassisches Beispiel eines Netzwerkes dar. Es ist von großem Interesse Prozesse in solchen Systemen hinsichtlich Dynamik und Stabilität zu untersuchen.
Ziel dieser Ausarbeitung ist es, Methoden zu präsentieren, mit denen nicht nur eine globale Analyse des Netzwerkes möglich ist, sondern auch Clusterbildung und lokales Verhalten dieser Cluster untersucht werden können.

2 Netzwerke

Netzwerke setzen sich im allgmeinen aus N Knoten (Nodes) zusammen, die über gewichtete Verbindungen (Edges) miteinander Verbunden sind. Besteht zwischen zwei Knoten eine Verbindung in beide Richtungen, so spricht man von einem ungerichteten Netzwerk. Wenn alle Knoten untereinander verbunden sind, so handelt es sich um ein vollständiges Netzwerk (siehe Abbildung 1).

2.1 Dynamik auf Netzwerken

Um Prozesse auf Netzwerken zu beschreiben kann man jedem Knoten eine dynamische Variable zuordnen. Die Dynamik wird dann für jeden Knoten über eine Differentialgleichung beschrieben, die die Kopplung an die anderen Knoten enthält. Die allgemeine

Form dieser Differentialgleichung ist für ein System ohne Rückkopplung in Gleichung (2.1.1) gezeigt.

$$\dot{\boldsymbol{x}}_i(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_i(t)) + \sigma \sum_j A_{ij} \boldsymbol{h}\left(\boldsymbol{x}_j(t)\right) \tag{2.1.1}$$

$$i = 1, ..., N$$

σ allgemeine Kopplungsstärke

A_{ij} Kopplungsmatrix

$$\boldsymbol{f}, \boldsymbol{h} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

$\boldsymbol{A}$ ist dabei die Kopplungsmatrix, in der für ein Netzwerk, bei dem die Knoten alle gleich stark an einander koppeln, die Einträge entweder 0 oder 1 sind. Im folgenden werden nur solche Systeme betrachtete, bei denen $\boldsymbol{A}$ symmetrisch ist, das Netzwerk also ungerichtet. Die Abbildung $\boldsymbol{h}$ beschreibt auf welche Art und Weise die Komponenten der Variablen $\boldsymbol{x}_i$ aneinander koppeln. Das Differentialgleichungssystem in (2.1.1) lässt sich auch über das Kronecker-Produkt in einer einzigen Gleichung darstellen,

$$\dot{\boldsymbol{X}}(t) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}(t)) + \sigma \boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{H}(\boldsymbol{X}(t)) \tag{2.1.2}$$

mit den Definitionen:

$$\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_N)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{F} = (\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1), ..., \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_N))^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{H} = (\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}_1), ..., \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}_N))^{\mathrm{T}}$$

3 Synchronisation

3.1 Globale Synchronisation

Das Netzwerk wird als global synchron bezeichnet, wenn sich alle Variablen $\boldsymbol{x}_i$ zeitlich gleich verhalten.

$$\boldsymbol{x}_1(t) = \boldsymbol{x}_2(t) = ... = \boldsymbol{x}_N(t) =: \boldsymbol{s}(t)$$

Es spielt dabei keine Rolle, ob dieses Verhalten z.B konstant, periodisch oder chaotisch ist.

3.2 Isolierte Synchronisation

Isolierte Synchronisation liegt vor, wenn eine Gruppe von Knoten oben genanntes Verhalten aufweist, während ein anderer Teil des Netzwerks nicht synchron mit dieser Gruppe ist.

4 Stabilität der Synchronisation

Ein synchroner Zustand eines Netzwerks lässt sich hinsichtlicht seiner Stabilität untersuchen. Dabei wird eine kleine Abweichung der Anfangsbedingungen des synchronen Zustandes angenommen und berechnet, wie sich diese Störung zeitlich weiterentwickelt.

$$\delta \boldsymbol{x}_i(t) = \boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{s}(t) \tag{4.0.1}$$

$$\delta \dot{\boldsymbol{x}}_i(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_i(t)) + \sigma \sum_j A_{ij} \boldsymbol{h}\left(\boldsymbol{x}_j(t)\right) - \dot{\boldsymbol{s}}(t) \tag{4.0.2}$$

Eine Linearisierung dieser Gleichung um die Bahnkurve $\boldsymbol{s}(t)$ liefert in der Kronecker-Produkt Schreibweise die Master Stability Equation (MSE) in Gleichung (4.0.3).

$$\delta \dot{\boldsymbol{X}}(t) = \left[D\boldsymbol{F}(\boldsymbol{s}(t)) + \sigma \boldsymbol{A} \otimes D\boldsymbol{H}(\boldsymbol{s}(t))\right] \delta \boldsymbol{X}(t) \tag{4.0.3}$$

4.1 Ljapunow-Exponenten

Die Ljapunow-Exponenten beschreiben, wie weit sich Bahnkurven für große Zeiten von einander entfernen, verglichen mit der Abweichung zum Zeitpunkt $t = 0$. Eine mögliche Definition ist in Gleichung (4.1.1) gegeben.

$$\lambda_i = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} ln \left(\frac{|\delta \boldsymbol{x}_i(t)|}{|\delta \boldsymbol{x}_i(0)|} \right) \tag{4.1.1}$$

Wird die Abweichung zu $\delta \boldsymbol{x}_i(0)$ größer, so ist der Quotient größer als 1, sonst kleiner. Es gilt also folgende Unterscheidung für die Werte der Ljapunow-Exponenten.

$$\begin{cases} \lambda_i < 0, & \text{Abweichung vom synchronen Zustand verschwindet} \\ \lambda_i > 0, & \text{Abweichung vom synchronen Zustand wächst} \end{cases} \tag{4.1.2}$$

Positive Ljapunow-Exponenten weisen eine instabile Synchronisation nach und negative eine stabile. Der Stabilitätsbegriff bezieht sich hierbei auf Invarianz der Bahnkurven gegenüber Änderungen der Anfangsbedingungen (für lange Zeiten).

4.2 Master Stability Function

Da es für Instabilität genügt, wenn einer der Exponenten größer als 0 ist, ist es sinnvoll nur den größten zu betrachten. Dieser wird Master Stability Function (MSF) gennant. Die MSF hat dabei als Parameter die Eigenschaften des Systems, z.b. die Kopplungsstärke σ.

5 Symmetrien

Können in einem Graphen zwei Knoten miteinander vertauscht werden, ohne dass sich der Graph verändert, liegt eine Permutationssymmetrie vor. Für die betrachteten Netzwerke bedeutet dies, dass sich bei Vorliegen einer Permutationssymmetrie zwei Knoten tauschen lassen, indem sowohl die zugehörigen Spalten als auch Zeilen der Kopplungsmatrix getauscht werden, ohne dass sich die Dynamik des Systems verändert. Die Vertauschung der Knoten lässt sich durch eine Permutationsmatrix P darstellen. Vorraussetzung für eine Permutationssymmetrie ist somit

$$PAP^{-1} = A \tag{5.0.1}$$

.

Zur Untersuchung eines Netzwerkes auf Symmetrien eignen sich Algorithmen zur Suche von Automorphismen des dem Netzwerk zugrunde liegenden Graphen mit Hilfe der Bibliothek *nauty*[2]. Mit dieser lassen sich neben den Generatoren der Permutationssymmetrien auch die Orbits der Knoten bestimmen. Als Orbit werden hierbei die Positionen bezeichnet, an die ein Knoten durch Anwendung aller Permutationen gelangen kann. Alle Knoten eines Orbits lassen sich folglich durch eine Hintereinaderreihung der Permutationen vertauschen, ohne dass sich die Dynamik des Netzwerkes verändert. Eine solche Gruppe von Knoten wird als Cluster bezeichnet. Sollte bei der für die Vertauschung nötigen Hintereinanderreihung von Permutationen ebenfalls Knoten eines weiteren Clusters miteinander vertauscht werden, so liegt eine Verschränkung der Cluster vor (Pecora: ïnterwinded Clusters̈).

6 Synchronisation in symmetrischen Netzwerken

Da Knoten eines Clusters ohne Veränderung der Dynamik vertauschbar sind, erhalten diese den gleichen Input der anderen Knoten und können synchron laufen. In einem aus M Clustern C_m bestehenden Netzwerk existieren somit M Gruppen von Knoten, die isolierte Synchronisation aufweisen können mit synchronen Orbits s_m

$$x_i(t) = s_m(t)\text{mit Knoten}i \in C_m \tag{6.0.2}$$

.

Zur Betrachtung der Stabilität der isolierten Synchronisation lässt sich die MSE (**??**) umschreiben

$$
\begin{aligned}
\delta\dot{\boldsymbol{X}}(t) &= \left[D\boldsymbol{F}(\boldsymbol{s}(t)) + \sigma\boldsymbol{A} \otimes D\boldsymbol{H}(\boldsymbol{s}(t))\right]\delta\boldsymbol{X}(t) \\
&= \left[\sum_{m=1}^{M} \boldsymbol{E}^{(m)} \otimes D\boldsymbol{F}(\boldsymbol{s}_m(t)) + \sigma\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{I}_n \sum_{m=1}^{M} \boldsymbol{E}^{(m)} \otimes D\boldsymbol{H}(\boldsymbol{s}_m(t))\right]\boldsymbol{X}(t) \\
\boldsymbol{E}_{ii}^{(m)} &= 1 \text{ wenn Knoten } i \in C_m
\end{aligned}
$$

.

Gleichung 7.0.3 lässt sich unter Verwendung der Gruppentheorie in eine neue Basis transformieren. Hierbei wird die Basis der irreduziblen Darstellungen der den Permutationssymmetrien zugrunde liegenden Gruppe gewählt. In dieser Basis nimmt die Kopplungsmatrix Blockdiagonalform an.

7 Simulationsbeispiel

Die vorgestellten Methoden zur lokalen Stabilitätsanalyse eines Netzwerks werden in diesem Abschnitt auf ein Beispiel angewendet. Bisher wurden nur dynamische Systeme mit kontinuierlichen Variablen betrachtet. Die zugrunde liegende Theorie lässt sich auch auf diskrete Systeme anwenden. Dabei ist die Dynamik nicht durch ein Differentialgleichungssystem gegeben, sondern durch eine Iterationsvorschrift. Das hier betrachtete Netzwerk[4] folgt der Dynamik in Gleichung (7).

$$
\begin{aligned}
x_i^{t+1} &= \left[\beta\mathcal{I}(x_i^t) + \sigma\sum_{j}^{N} A_{ij}\mathcal{I}(x_j^t)\right] \mod \quad 2\pi \qquad (7.0.3) \\
&\beta, \sigma \text{ Kopplungsparameter} \\
\mathcal{I}(x) &= \frac{1 - Cos(x)}{2}
\end{aligned}
$$

8 Fazit

Literaturverzeichnis

[1] A. Hagerstorm. Network symmetries and synchronization, 2014. URL `https://sourceforge.net/projects/networksym/`.

[2] Brendan D. McKay and Adolfo Piperno. Practical graph isomorphism, {II}. *Journal of Symbolic Computation*, 60(0):94 – 112, 2014. ISSN 0747-7171.

[3] Louis M. Pecora and Thomas L. Carroll. Master stability functions for synchronized coupled systems. *Phys. Rev. Lett.*, 80:2109–2112, Mar 1998.

[4] Louis M Pecora, Francesco Sorrentino, Aaron M Hagerstrom, Thomas E Murphy, and Rajarshi Roy. Cluster synchronization and isolated desynchronization in complex networks with symmetries. *Nature communications*, 5, 2014.

Anhang

Simulationsbeispiel Kopplungsmatrizen

$$
\boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$