



Technische Universität Berlin

Fakultät II Mathematik und Naturwissenschaften

Nichtlineare Dynamik und Kontrolle SS 2015

**Projekt 2: Synchronisation in Netzwerken: Master Stability Function und
Permutationssymmetrien**

Autoren: Halgurd Taher
Felix Zimmermann
Paul-Rainer Affeld

Version vom: 15. Juli 2015

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Netzwerke	3
3	Synchronisation	4
4	Stabilität der Synchronisation	5
5	Symmetrien	5
6	Synchronisation in symmetrischen Netzwerken	6
7	Simulationsbeispiel	8
8	Fazit	12
	Literaturverzeichnis	13
	Anhang	14

1 Einleitung

Dynamische Netzwerke spielen in der heutigen Wissenschaft eine wichtige Rolle. So lassen sich beispielsweise Prozesse im Gehirn zwischen Neuronen über Netzwerke beschreiben und analysieren¹. Großflächige Stromnetze stellen ebenfalls ein klassisches Beispiel eines Netzwerkes dar². Es ist von großem Interesse Prozesse in solchen Systemen hinsichtlich ihrer Dynamik und Stabilität zu untersuchen. Ein bekanntes Hilfsmittel zur Analyse von Netzwerken ist die sogenannte Master Stability Function (MSF), mit deren Hilfe sich Aussagen über die Stabilität von globalen Synchronisationszuständen treffen lassen.

Bei der Betrachtung von real existierenden Netzwerken können allerdings (häufiger als globale Synchronisation) Cluster aus synchronen Knoten (Nervenzellen, Kraftwerke) beobachtet werden. So spielt bei verschiedenen Erkrankungen, wie fokaler Epilepsie, das Verhalten synchroner Areale im Gehirn eine entscheidende Rolle zur Pathogenese¹.

Ziel dieser Ausarbeitung ist es, eine Methode zu präsentieren und zu verifizieren mit der nicht nur eine globale Analyse des Netzwerkes möglich ist, sondern auch die Clusterbildung und lokales Verhalten dieser Cluster untersucht werden kann.

2 Netzwerke

Netzwerke setzen sich im allgemeinen aus N Knoten (Nodes) zusammen, die über gewichtete Verbindungen (Edges) miteinander verbunden sind. Besteht zwischen zwei Knoten eine Verbindung in beide Richtungen, so spricht man von einem ungerichteten Netzwerk (siehe Abb. 1). Die Verbindungen der Knoten lassen sich durch eine $M \times M$ Verbindungsmatrix \mathbf{A} darstellen, in der ein Eintrag von 1 an Position i, j eine Verbindung zwischen dem Knoten i und dem Knoten j , eine 0 keine Verbindung zwischen diesen Knoten bedeutet.

Dynamik auf Netzwerken

Um Prozesse auf Netzwerken zu beschreiben kann man jedem Knoten eine n -dimensionale dynamische Variable x_i zuordnen. Die Dynamik wird dann für jeden Knoten über eine Differentialgleichung beschrieben, die die Kopplung an die anderen Knoten enthält. Die allgemeine Form dieser Differentialgleichung ist in (2.1) gezeigt³.

$$\dot{\mathbf{x}}_i(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_i(t)) + \sigma \sum_j A_{ij} \mathbf{h}(\mathbf{x}_j(t)) \quad (2.1)$$

$i = 1, \dots, N$

σ allgemeine Kopplungsstärke

A_{ij} Element der Kopplungsmatrix

$\mathbf{f}, \mathbf{h} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

Die Verbindungsmatrix \mathbf{A} wird hierbei zu einer Kopplungsmatrix, die die Kopplung der Differentialgleichungen der Knoten untereinander beschreibt. Im Folgenden werden nur solche Systeme betrachtet, bei denen \mathbf{A} symmetrisch ist, das Netzwerk also ungerichtet. Die Funk-

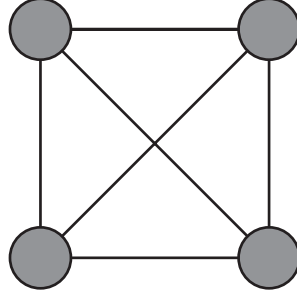


Abbildung 1: Beispiel eines ungerichteten Netzwerks aus vier Knoten, bei dem jeder Knoten mit jedem anderen verbunden ist.

tion \mathbf{h} beschreibt auf welche Art und Weise die Komponenten der Variablen \mathbf{x}_i aneinander koppeln. Das Differentialgleichungssystem in (2.1) lässt sich über das Kronecker-Produkt in einer einzigen Gleichung darstellen⁴,

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{X}(t)) + \sigma \mathbf{A} \otimes \mathbf{H}(\mathbf{X}(t)) \quad (2.2)$$

mit den Definitionen

$$\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)^T, \mathbf{F} = (\mathbf{f}(\mathbf{x}_1), \dots, \mathbf{f}(\mathbf{x}_N))^T, \mathbf{H} = (\mathbf{h}(\mathbf{x}_1), \dots, \mathbf{h}(\mathbf{x}_N))^T.$$

3 Synchronisation

Globale Synchronisation

Das Netzwerk wird als global synchron bezeichnet, wenn sich alle Variablen \mathbf{x}_i zeitlich gleich verhalten³.

$$\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{x}_2(t) = \dots = \mathbf{x}_N(t) =: \mathbf{s}(t) \quad (3.1)$$

Es spielt dabei keine Rolle, ob dieses Verhalten konstant, periodisch oder chaotisch ist. Voraussetzung für die Existenz globaler Synchronisation ist eine konstante Zeilensumme der Kopplungsmatrix \mathbf{A} . Liegt keine konstante Zeilensumme vor, so erhalten zwei Knoten von einer unterschiedlichen Anzahl Knoten Input. Seien nun alle Knoten zu einem Zeitpunkt t synchron, so entwickeln sich durch den unterschiedlichen Input, die beiden Knoten zeitlich unterschiedlich und die Synchronisation würde zwangsläufig aufgehoben.

Isolierte Synchronisation

Isolierte Synchronisation liegt vor, wenn eine Gruppe von Knoten (Cluster) oben genanntes Verhalten aufweist (3.1), während ein anderer Teil des Netzwerks nicht synchron mit dieser Gruppe ist³. Voraussetzung hierfür ist, analog zur globalen Synchronisation, eine konstante Zeilensumme innerhalb dieser Gruppe.

4 Stabilität der Synchronisation

Ein synchroner Zustand eines Netzwerks lässt sich hinsichtlich seiner Stabilität untersuchen. Dabei wird eine kleine Abweichung $\delta \mathbf{x}_i(t)$ der Anfangsbedingungen des synchronen Zustandes angenommen und berechnet, wie sich diese Störung zeitlich weiterentwickelt.

$$\delta \mathbf{x}_i(t) = \mathbf{x}_i - \mathbf{s}(t) \quad (4.1)$$

$$\delta \dot{\mathbf{x}}_i(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_i(t)) + \sigma \sum_j A_{ij} \mathbf{h}(\mathbf{x}_j(t)) - \dot{\mathbf{s}}(t) \quad (4.2)$$

Eine Linearisierung dieser Gleichung um die Bahnkurve $\mathbf{s}(t)$ liefert in der Kronecker-Produkt Schreibweise die Master Stability Equation (MSE) in (4.3).

$$\delta \dot{\mathbf{X}}(t) = [D\mathbf{F}(\mathbf{s}(t)) + \sigma \mathbf{A} \otimes D\mathbf{H}(\mathbf{s}(t))] \delta \mathbf{X}(t) \quad (4.3)$$

Ljapunow-Exponenten

Die Ljapunow-Exponenten beschreiben, wie weit sich Bahnkurven für große Zeiten von einander entfernen, verglichen mit der Abweichung zum Zeitpunkt $t = 0$. Eine mögliche Definition ist in (4.4) gegeben⁵.

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left(\frac{|\delta \mathbf{x}_i(t)|}{|\delta \mathbf{x}_i(0)|} \right) \quad (4.4)$$

Wird die Abweichung $\delta \mathbf{x}_i(t)$ im Vergleich mit $\delta \mathbf{x}_i(0)$ größer, so ist der Quotient größer als 1, sonst kleiner. Es gilt also folgende Unterscheidung für die Werte der Ljapunow-Exponenten.

$$\begin{cases} \lambda_i < 0, & \text{Abweichung vom synchronen Zustand verschwindet} \\ \lambda_i > 0, & \text{Abweichung vom synchronen Zustand wächst} \end{cases} \quad (4.5)$$

Positive Ljapunow-Exponenten weisen eine instabile Synchronisation nach und negative eine stabile. Der Stabilitätsbegriff bezieht sich hierbei auf die Invarianz der Bahnkurven, gegenüber den Änderungen der Anfangsbedingungen (für lange Zeiten).

Master Stability Function

Durch eine Diagonalisierung der Kopplungsmatrix, lässt sich bei Betrachtung entlang ihrer Eigenvektoren die Kopplungsmatrix in (4.3) durch ihre Eigenwerte $(\alpha + i\beta)$ darstellen. In dieser Form lassen sich die Ljapunow-Exponenten zu den Richtungen transversal zur Synchronisation berechnen. Da es für Instabilität genügt, wenn einer dieser Ljapunow-Exponenten größer als 0 ist, ist es sinnvoll, nur den größten zu betrachten. Dieser wird Master Stability Function (MSF) genannt³.

5 Symmetrien

Können in einem Graphen zwei Knoten miteinander vertauscht werden, ohne dass sich der Graph verändert, liegt eine Permutationssymmetrie vor⁶. Für die betrachteten Netzwerke

bedeutet dies, dass sich bei Vorliegen einer Permutationssymmetrie zwei Knoten tauschen lassen, indem sowohl die zugehörigen Spalten als auch Zeilen der Kopplungsmatrix getauscht werden, ohne dass sich die Dynamik des Systems verändert. Die Vertauschung der Knoten lässt sich durch eine Permutationsmatrix P darstellen. Voraussetzung für eine Permutationssymmetrie ist somit⁷

$$PAP^{-1} = A. \quad (5.1)$$

Zur Untersuchung eines Netzwerkes auf Symmetrien, eignet sich die Suche von Automorphismen des dem Netzwerk zugrunde liegenden Graphen mit Hilfe der Bibliothek *nauty*⁸. Mit dieser lassen sich neben den Generatoren der Permutationssymmetrien, auch die Orbits der Knoten bestimmen. Als Orbit werden hierbei die Positionen bezeichnet, an die ein Knoten durch Anwendung aller Permutationen gelangen kann. Alle Knoten eines Orbits lassen sich folglich durch eine Hintereinanderreihung der Permutationen vertauschen, ohne dass sich die Dynamik des Netzwerkes verändert. Eine solche Gruppe von Knoten wird als Cluster bezeichnet. Sollte bei der für die Vertauschung nötigen Hintereinanderreihung von Permutationen ebenfalls Knoten eines weiteren Clusters miteinander vertauscht werden, so liegt eine Verschränkung der Cluster vor (interwinded Clusters)⁷.

6 Synchronisation in symmetrischen Netzwerken

Da Knoten eines Clusters ohne Veränderung der Dynamik vertauschbar sind, erhalten diese den gleichen Input der anderen Knoten und können synchron laufen. In einem aus M Clustern C_m bestehenden Netzwerk existieren somit M Gruppen von Knoten, die isolierte Synchronisation aufweisen können mit synchronen Orbits s_m

$$x_i(t) = s_m(t) \text{ mit Knoten } i \in C_m. \quad (6.1)$$

Isolierte Desynchronisation

In einem symmetrischen Netzwerk können einzelne Cluster synchron sein, während andere nicht synchron sind. Die Desynchronisation scheint also die Synchronisation eines anderen Clusters nicht zwangsläufig zu stören⁷.

Unter einer Permutation π , eines Clusters A, mit Permutationsmatrix P_A , ändert sich die Dynamik eines Knotens i aus einem disjunkten Cluster B nicht, es gilt

$$\begin{aligned} \left[P_A \dot{\mathbf{X}} \right]_i &= \dot{\mathbf{x}}_i \\ [P_A \mathbf{F}(\mathbf{X})]_i + [P_A \mathbf{A} \mathbf{H}(\mathbf{X})]_i &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_i) + \sigma \sum_j A_{ij} \mathbf{h}(\mathbf{x}_j) \\ \mathbf{f}(\mathbf{x}_i) + \sigma \sum_j A_{ij} \mathbf{h}(\mathbf{x}_{\pi(j)}) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_i) + \sigma \sum_j A_{ij} \mathbf{h}(\mathbf{x}_j) \end{aligned} \quad (6.2)$$

Folglich muss jeder Knoten in A gleich an den Knoten i gekoppelt sein und dieser somit gleichstarken Input von allen Knoten aus A erhalten (siehe Abb. 2).

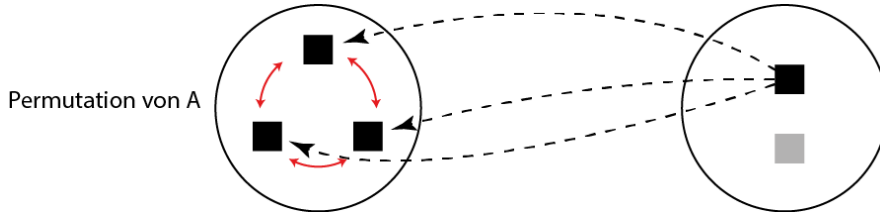


Abbildung 2: Es werden zwei Cluster A und B betrachtet. Eine Symmetriepermutation des Clusters A ändert die Dynamik eines Knotens in B nicht. Folglich muss dieser Knoten gleichstarken Input von jedem Knoten aus A erhalten.

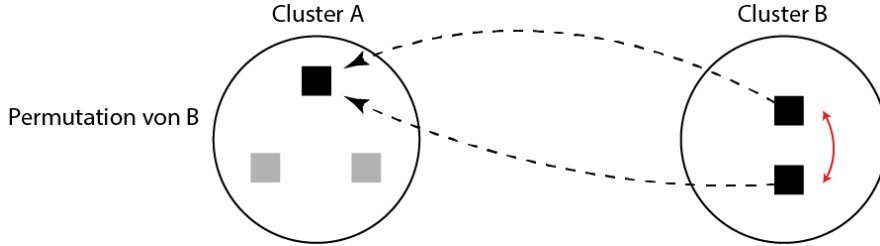


Abbildung 3: Bei Symmetriepermutation des Clusters B ändert sich die Dynamik eines Knotens aus B nicht. Somit muss jeder Knoten aus B gleichstarken Input von A erhalten.

Eine analoge Betrachtung unter Permutation des den Knoten i enthaltenden Clusters B (A wird nicht verändert) führt auf die Beobachtung, dass jeder Knoten aus B gleich an die Knoten aus A gekoppelt ist (siehe Abb. 3).

Zusammen ergibt sich aus diesen Aussagen: Jeder Knoten in B bekommt in der Summe den gleichen Input vom Cluster A, egal ob dieser synchron oder asynchron ist, sofern Permutationsmatrizen existieren, die die Cluster getrennt permutieren. Isolierte Desynchronisation kann nicht bei "verschränkten" Clustern auftreten, da die Permutation beide Cluster verändert.

Stabilität

Zur Betrachtung der Stabilität der isolierten Synchronisation lässt sich die MSE (4.3) unter Verwendung von Clustermatrizen \mathbf{E}^m (beschreiben die Zuordnung der Knoten zu den Clustern)

$$\mathbf{E}_{ii}^{(m)} = 1 \text{ wenn Knoten } i \in C_m. \quad (6.3)$$

umschreiben zu⁷:

$$\begin{aligned} \delta \dot{\mathbf{X}}(t) &= [\mathbf{D}\mathbf{F}(\mathbf{s}(t)) + \sigma \mathbf{A} \otimes \mathbf{D}\mathbf{H}(\mathbf{s}(t))] \delta \mathbf{X}(t) \\ &= \left[\sum_{m=1}^M \mathbf{E}^{(m)} \otimes \mathbf{D}\mathbf{F}(\mathbf{s}_m(t)) + \sigma \mathbf{A} \otimes \mathbf{I}_n \sum_{m=1}^M \mathbf{E}^{(m)} \otimes \mathbf{D}\mathbf{H}(\mathbf{s}_m(t)) \right] \mathbf{X}(t) \end{aligned} \quad (6.4)$$

Gleichung (6.4) lässt sich mithilfe der Gruppentheorie in eine neue Basis transformieren⁷. Hierbei wird die Basis der irreduziblen Darstellungen (IRR), der den Permutationssymmetrien zugrundeliegenden Gruppe gewählt. In dieser Basis nimmt die Kopplungsmatrix Block-

diagonalform an. Die oberen M Koordinaten $\eta(t)$ in der neuen Darstellung entsprechen einer Bewegung longitudinal innerhalb der Synchronisationsmannigfaltigkeit, die weiteren einer Bewegung transversal zur ihr. Die Transformationsmatrix \mathbf{T} lässt sich mit einer geeigneten Software für diskrete Mathematik (z.B. sage) bestimmen⁹. Diese Basistransformation entspricht einer Transformation in M Schwerpunktkoordinaten und $(N - M)$ Relativkoordinaten (die die Abweichung der Knoten eines Clusters zueinander beschreiben) mit orthogonalen Basisvektoren. Aus der so transformierten MSE (6.5) lässt sich die MSF berechnen um die Stabilität der Clustersynchronisation zu beurteilen,

$$\dot{\eta}(t) = \left[\sum_{m=1}^M \mathbf{J}^{(m)} \otimes D\mathbf{F}(\mathbf{s}_m(t)) + \sigma \mathbf{B} \otimes \mathbf{I}_n \sum_{m=1}^M \mathbf{J}^{(m)} \otimes D\mathbf{H}(\mathbf{s}_m(t)) \right] \eta(t) \quad (6.5)$$

mit der transformierten Kopplungsmatrix \mathbf{B} und den transformierten Clustermatrizen $\mathbf{J}^{(m)}$

$$\begin{aligned} \eta(t) &= \mathbf{T} \otimes \mathbf{I}_n \delta \mathbf{X}(t) \\ \mathbf{B} &= \mathbf{T} \mathbf{A} \mathbf{T}^{-1} \\ \mathbf{J}^{(m)} &= \mathbf{T} \mathbf{E}^{(m)} \mathbf{T}^{-1}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

7 Simulationsbeispiel

Die vorgestellten Methoden zur lokalen Stabilitätsanalyse eines Netzwerks werden, in diesem Abschnitt auf ein Beispiel angewendet. Bisher wurden nur dynamische Systeme mit kontinuierlichen Variablen betrachtet. Die zugrunde liegende Theorie lässt sich auch auf diskrete Systeme anwenden. Dabei ist die Dynamik nicht durch ein Differentialgleichungssystem gegeben, sondern durch eine Iterationsvorschrift. Das hier betrachtete Netzwerk folgt der Dynamik in (7.1)⁷.

$$x_i^{t+1} = \left[\beta \mathcal{I}(x_i^t) + \sigma \sum_j^N A_{ij} \mathcal{I}(x_j^t) + \delta \right] \bmod 2\pi \quad (7.1)$$

β, σ Kopplungsparameter

δ Offset

$$\mathcal{I}(x) = \frac{1 - \cos(x)}{2}$$

Die betrachteten Netzwerke sind symmetrisch und bestehen aus $N = 11$ Knoten (Abb. 4). Die verwendeten Kopplungsmatrizen sind Pecora et al. entnommen und in Abb. 5 dargestellt (siehe auch Anhang)⁷. Für diese Netzwerke ergibt die Suche nach Automorphismen der zugrundeliegenden Graphen mit *Nauty* 0, 32 bzw. 5760 Symmetrien und 11 (triviale, nur aus einem Knoten bestehende), 5 bzw. 3 Cluster (Tab. 1). Zur Berechnung der Ljapunow-Exponenten für die verschiedenen Cluster wurde eine Basistransformation (siehe 6) mit den im Anhang dargestellten Transformationsmatrizen vorgenommen^{7,9}.

Für Netzwerk 1 erübrigt sich aufgrund des Fehlens von Clustern die Stabilitätsanalyse.

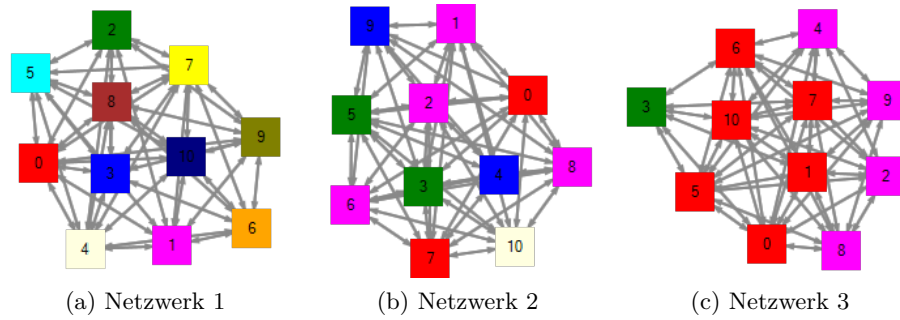


Abbildung 4: Die drei verwendeten Netzwerke. Die Knoten eines Cluster sind in der gleichen Farbe eingefärbt.

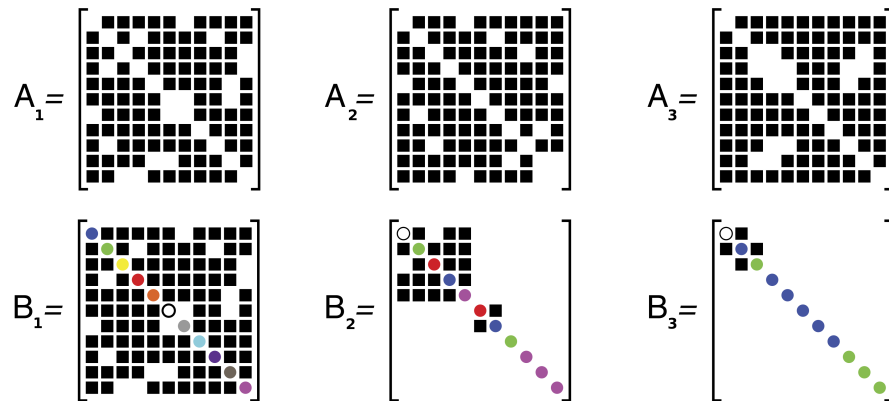


Abbildung 5: Kopplungsmatrizen A der in Abb. 4 dargestellten Netzwerke sowie die transformierte Kopplungsmatrizen B in der die Zeilen nach den zugehörigen Clustern markiert sind⁷.

Tabelle 1: Symmetrien und Cluster der betrachteten Netzwerke

Netzwerk	Symmetrien	Cluster
1	0	11 triviale Cluster
2	32	(1,8) (2,3,7,9) (4,6) (5,10) (11)
3	5760	(1,2,6,7,8,11) (3,5,9,10) (4)

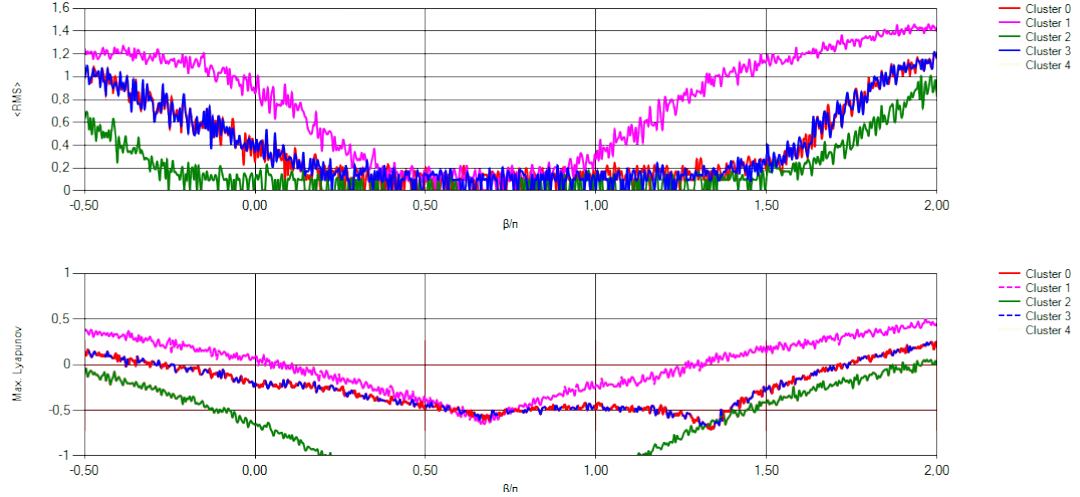


Abbildung 6: Ergebnisse der Simulation. Die obere Grafik zeigt die mittlere quadratische Abweichung vom Mittelwert für das jeweilige Cluster. Im unteren Bild ist der maximale Ljapunow-Exponent für die Cluster über β aufgetragen. Nach einer Transienten von 200 Zeitschritten wurden die mittleren Abweichungen über 1000 weitere Schritte gemittelt. β nimmt im Intervall $[-\frac{1}{2}\pi, 2\pi]$ 400 Werte an.

Abb. 6 zeigt exemplarisch die Simulationsergebnisse für das zweite Netzwerk bei Variation des Parameters β . Dabei beschreibt RMS die mittlere quadratische Abweichung vom Mittelwert für ein Cluster, also ein Maß für die Asynchronizität eines Clusters. Die Anfangswerte x_i^0 sind gaußverteilt um π mit einer Standardabweichung von $0,01\pi$ gewählt, also zunächst asynchron. Ein geringes Rauschen von 0,002 ist in jedem Iterationsschritt eingefügt, sodass die Synchronisation zusätzlich gestört wird. Die RMS-Abweichung von der Synchronisation geht gegen Null, sobald die MSF negativ wird. Dies stimmt mit den Überlegungen aus 6 überein, da die Bahnkurven sich für lange Zeiten wieder annähern, also synchron laufen. Alle Cluster außer 0 (Rot) und 3 (Blau) weisen eine isolierte Synchronisation auf. Die Synchronisation innerhalb eines Clusters ist unabhängig vom Zustand der anderen. Das blaue und rote Cluster hingegen verlieren (bzw. erreichen) die Synchronizität gemeinsam, sind also interwinded Cluster. Dies wird durch den identischen Verlauf der MSF deutlich.

Zusätzlich zur Variation über β kann der größte Ljapunow-Exponent auch für beliebige (β, σ) -Paare berechnet werden. Abb. 7 zeigt die größten Ljapunow-Exponenten für die verschiedenen Cluster aufgetragen über β und σ . Mithilfe dieser Darstellung kann direkt abgelesen werden, für welche Parameterpaare das synchrone Verhalten der einzelnen Cluster stabil oder instabil ist. Man erkennt auch hier wieder, dass Cluster 0 und Cluster 3 interwinded Cluster sind, da sich die Stabilität gleich verhält. Ist σ nahe 0, so sind die Knoten des Netzwerks näherungsweise ungekoppelt und die Dynamik für jeden Knoten (unabhängig von seiner Clusterzugehörigkeit) gleich. Die Ljapunow-Exponenten in diesem Bereich sind folglich in allen Clustern gleich und in Abb. 8 dargestellt.

Analoge Beobachtungen können bei dem dritten Netzwerk gemacht werden. Auch hier verschwindet die Asynchronizität der Cluster bei negativer MSF (nicht dargestellt). Die Methode zur Stabilitätsuntersuchung lässt sich auch bei diesem anwenden.

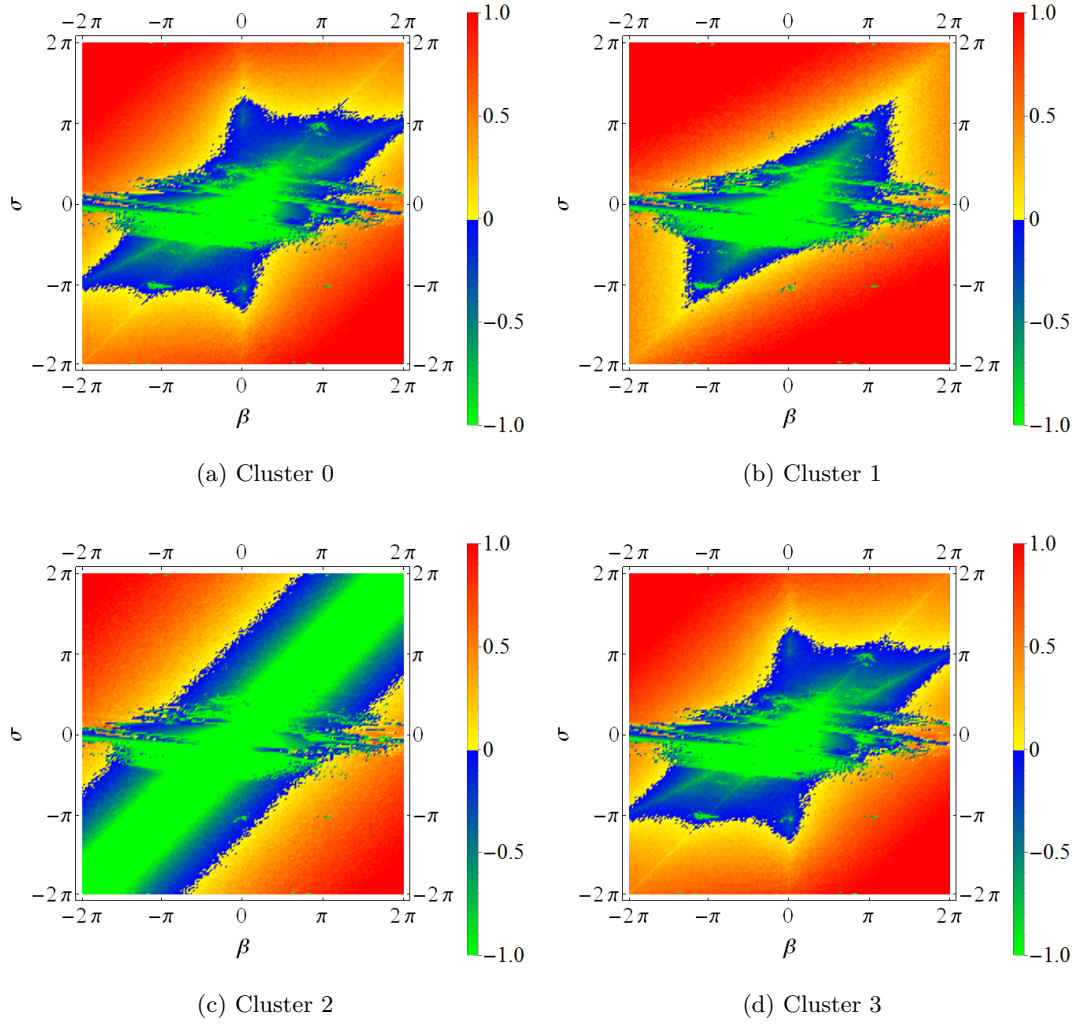


Abbildung 7: Größter Ljapunow-Exponent für die unterschiedlichen Cluster aufgetragen über β und σ . Die blau-grünen Bereiche sind stabil und die gelb-roten instabil. Nach einer Transienten von 100 Zeitschritten wurden 500 weitere Schritte für die Berechnung verwendet. β und σ nehmen jeweils 200 Werte im Intervall $[-2\pi, 2\pi]$ an.

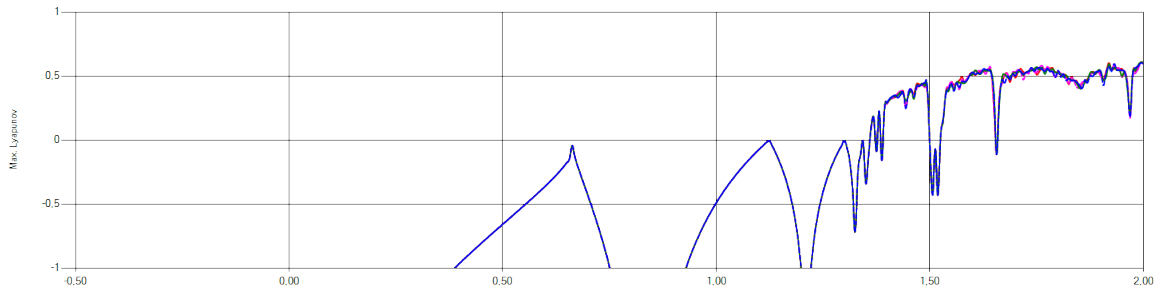


Abbildung 8: Ergebnisse der Simulation für $\sigma = 0$. Aufgetragen ist der größte Ljapunow-Exponent für einen beliebigen Knoten/ein beliebiges Cluster über 400 β Werte im Intervall $[-\frac{1}{2}\pi, 2\pi]$.

8 Fazit

Die Existenz von synchronisierenden Clustern in einem Netzwerk ergibt sich aus vorhandenen Symmetrien des Netzwerkes. Das Phänomen der isolierten Synchronisation einzelner Cluster lässt sich über die Betrachtung der Dynamik unter Symmetriepermutationen erklären. Die Master Stability Function ist ein bekanntes Hilfsmittel um die globale Synchronisation in Netzwerken hinsichtlich der Stabilität zu analysieren. Durch eine Basistransformation können mit der MSF darüber hinaus Aussagen über die Stabilität der lokalen Synchronisation innerhalb der Cluster getroffen werden.

Anhand eines Simulationsbeispiels wurden verschiedene Netzwerke mit diskreter Dynamik auf Permutationssymmetrien untersucht, darüber die vorhandenen Cluster identifiziert und die vorgestellte Methode zur Analyse der Stabilität der Synchronisation verifiziert.

Literaturverzeichnis

- [1] Premysl Jiruska, Marco de Curtis, John G. R. Jefferys, Catherine A. Schevon, Steven J. Schiff, and Kaspar Schindler. Synchronization and desynchronization in epilepsy: controversies and hypotheses. *The Journal of Physiology*, 591(4):787–797, 2013.
- [2] Adilson E. Motter, Seth A. Myers, Marian Anghel, and Takashi Nishikawa. Spontaneous synchrony in power-grid networks. *Nat Phys*, 9(3):191–197, March 2013.
- [3] Louis M. Pecora and Thomas L. Carroll. Master stability functions for synchronized coupled systems. *Phys. Rev. Lett.*, 80:2109–2112, Mar 1998.
- [4] Chai Wah Wu and Leon O Chua. Application of kronecker products to the analysis of systems with uniform linear coupling. *Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, IEEE Transactions on*, 42(10):775–778, 1995.
- [5] Marco Sandri. Numerical calculation of lyapunov exponents. *Mathematica Journal*, 6(3):78–84, 1996.
- [6] Diego Garlaschelli, Franco Ruzzenenti, and Riccardo Basosi. Complex networks and symmetry i: A review. *Symmetry*, 2(3):1683–1709, 2010.
- [7] Louis M Pecora, Francesco Sorrentino, Aaron M Hagerstrom, Thomas E Murphy, and Rajarshi Roy. Cluster synchronization and isolated desynchronization in complex networks with symmetries. *Nature communications*, 5, 2014.
- [8] Brendan D. McKay and Adolfo Piperno. Practical graph isomorphism, {II}. *Journal of Symbolic Computation*, 60(0):94 – 112, 2014.
- [9] A. Hagerstorm. Network symmetries and synchronization, 2014. URL <https://sourceforge.net/projects/networksym/>.

Kopplungsmatrizen

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Transformationsmatrizen⁹

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_2 = \begin{pmatrix} 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & -0.707 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & -0.707 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & -0.707 & 0.000 & -0.707 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 1.000 \\ -0.707 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & -0.707 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -0.500 & -0.500 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & -0.500 & 0.000 & -0.500 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & -0.707 & 0.000 & 0.707 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -0.500 & 0.500 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & -0.500 & 0.000 & 0.500 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & -0.707 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.707 & 0.000 \\ -0.707 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.707 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.707 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & -0.707 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.000 & -0.707 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.707 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \end{pmatrix}$$

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0.000 & 0.000 & 0.000 & -1.000 & -0.000 & 0.000 & -0.000 & -0.000 & 0.000 & 0.000 & -0.000 \\ -0.000 & -0.000 & 0.500 & 0.000 & 0.500 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.5000 & 0.5000 & 0.000 \\ -0.408 & -0.408 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & -0.408 & -0.408 & -0.408 & 0.000 & 0.000 & -0.408 \\ -0.000 & -0.000 & -0.500 & 0.000 & 0.500 & -0.000 & -0.000 & -0.000 & 0.500 & -0.500 & -0.000 \\ -0.000 & -0.0000 & -0.000 & -0.000 & -0.707 & 0.000 & -0.000 & -0.000 & 0.707 & -0.000 & -0.000 \\ -0.000 & -0.000 & -0.707 & 0.000 & -0.000 & -0.000 & -0.000 & -0.000 & -0.000 & 0.707 & -0.000 \\ -0.000 & -0.114 & -0.000 & 0.000 & 0.000 & -0.089 & 0.797 & -0.587 & 0.000 & 0.000 & -0.007 \\ 0.000 & -0.254 & -0.000 & -0.000 & 0.000 & -0.266 & 0.405 & 0.646 & 0.000 & 0.000 & -0.532 \\ 0.000 & 0.193 & -0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.689 & -0.031 & -0.176 & 0.000 & 0.000 & -0.675 \\ 0.000 & -0.828 & 0.000 & -0.000 & -0.000 & 0.497 & 0.000 & 0.083 & 0.000 & -0.000 & 0.248 \\ -0.913 & 0.183 & -0.000 & -0.000 & -0.000 & 0.183 & 0.183 & 0.183 & 0.000 & -0.000 & 0.183 \end{pmatrix}$$