Synchronisation in Netzwerken: Master Stability Function und Permutationssymmetrien

Felix Zimmermann, Halgurd Taher, Paul-Rainer Affeld

Institut fur Theoretische Physik, Technische Universitat Berlin, Germany

6. Juli 2015

Inhalt

Einleitung

Dynamik auf Netzwerken

- N miteinander gekoppelte Knoten
- Jeder Knoten wird durch dynamische Gleichung beschrieben

$$\dot{\mathbf{x}}_i(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_i(t)) + \sigma \sum_j A_{ij} \mathbf{h}(\mathbf{x}_j) \tag{1}$$

$$i = 1, \ldots, N$$

A_{ij} Kopplungsmatrix

$$\mathbf{f}, \mathbf{h} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

Definiere

$$\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_N)^{\mathrm{T}}, \mathbf{F} = (\mathbf{f}(\mathbf{x}_1), \ldots, \mathbf{f}(\mathbf{x}_N))^{\mathrm{T}}, \mathbf{H} = (\mathbf{h}(\mathbf{x}_1), \ldots, \mathbf{h}(\mathbf{x}_N))^{\mathrm{T}}$$

$\Rightarrow$ äquivalente Gleichung zu (1)

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{X}(t)) + \sigma \mathbf{A} \otimes \mathbf{H}(\mathbf{X}(t))$$

Synchronisation I

Synchronisation I

Globale Synchronisation liegt vor wenn

$$\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{x}_2(t) = ... = \mathbf{x}_N(t) =: \mathbf{s}(t)$$

erfüllt ist.
Stabilität der Synchronisation :

- Wie entwickelt sich kleine Abweichung von $\mathbf{s}(t)$ zeitlich weiter?

Linearisierung um $\mathbf{s}(t)$ $\Rightarrow$ Master Stability Equation (MSE) :

$$\delta\dot{\mathbf{X}}(t) = \left[D\mathbf{F}(\mathbf{s}(t)) + \sigma\mathbf{A} \otimes D\mathbf{H}(\mathbf{s}(t))\right]\delta\mathbf{X}(t)$$

Master Stability Function

Ljapunow-Exponenten λ_i

$$\lambda_i = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} ln \left(\frac{|\delta \mathbf{x}_i(t)|}{|\delta \mathbf{x}_i(0)|} \right)$$

Master Stability Function (MSF) Λ ist größter Ljapunow Exponent

- $\Lambda > 0$, Synchronisation instabil, Fehler wächst, Bahnkurven $\mathbf{x}_i$(t) entfernen sich von $\mathbf{s}$(t)
- $\Lambda < 0$, Synchronisation stabil, Fehler schrumpft, Bahnkurven $\mathbf{x}_i$(t) nähern sich wieder $\mathbf{s}$(t)

Voraussetzungen für Synchronisation

- jeder Knoten benötigt gleichen Input
- setzt u.a. konstante Zeilensumme von $\mathbf{A}$ voraus

Voraussetzungen für Synchronisation

- jeder Knoten benötigt gleichen Input
- setzt u.a. konstante Zeilensumme von $\mathbf{A}$ voraus

Im Allgemeinen nicht erfüllt, z.B. :

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Zeilensumme NICHT konstant

Simulationsbeispiel

Beispiel

- Diskretes System mit $N = 11$ Knoten
- Kopplungsmatrix $\mathbf{A}_1$
- Diskrete dynamische Gleichung gegeben durch

$$x_i^{t+1} = \left[\beta \mathcal{I}(x_i^t) + \sigma \sum_j^N A_{ij} \mathcal{I}(x_j^t) \right] \mod \quad 2\pi$$

β, σ Kopplungsparameter

$$\mathcal{I}(x) = \frac{1 - Cos(x)}{2}$$

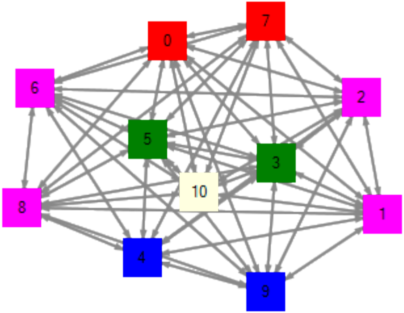
(aus Pecora et. al 2014)

Beispiel

Simulation des Beispiels

Beobachtungen

- Keine globale Synchronisation
- 5 Gruppen von Knoten die sich synchron verhalten
- ⇒ Cluster



Cluster und Permutationssymmetrien

Cluster

$\mathbf{A}_1$ hat zwar global keine konstante Zeilensumme aber:

- Forderung nach gleichem Input für jeden Knoten kann innerhalb eines Cluster erfüllt werden
  (da gleiche Zeilensumme innerhalb eines Clusters für z.b. $\mathbf{A}_1$)
- Knoten können vertauscht werden ohne Dynamik zu ändern

$\Rightarrow$ Netzwerk besitzt offensichtlich Symmetrien
Suche nach Permutationssymmetrien sinnvoll:

- mathematisch beschrieben durch Permutationsmatrizen $\mathbf{P}_i$
- $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1} \Rightarrow \mathbf{A}$ bleibt unverändert bei Tauschen der Knoten

Permutationssymmetrien

Beispiele für Permutationssymmetrien:

- Knoten 1 und 2 vertauschbar
  $\Rightarrow$ 1 und 2 im Cluster
- Knoten 1 und 2 vertauschbar falls 3 und 4 vertauschbar
  $\Rightarrow$ Cluster (1,2) und (3,4) "verschränkt"(Pecora et al.: interwinded)

Cluster

- Clustersuche in der Regel numerisch
- Bibliothek nauty liefert M Cluster http://pallini.di.uniroma1.it/
- Nach Finden der Cluster kann Störung umgeschrieben werden:

$$\begin{aligned}\delta\dot{\mathbf{X}}(t) &= [D\mathbf{F}(\mathbf{s}(t)) + \sigma\mathbf{A} \otimes D\mathbf{H}(\mathbf{s}(t))]\,\delta\mathbf{X}(t) \\ &= \left[\sum_{m=1}^{M} \mathbf{E}^{(m)} \otimes D\mathbf{F}(\mathbf{s}_m(t)) + \sigma\mathbf{A} \otimes \mathbf{I}_n \sum_{m=1}^{M} \mathbf{E}^{(m)} \otimes D\mathbf{H}(\mathbf{s}_m(t))\right] \mathbf{X}(t)\end{aligned}$$

$\mathbf{s}_m(t)$ ist synchroner Orbit des Clusters m

$\mathbf{E}_{ii}^{(m)} = 1$ wenn Knoten i zum Cluster m gehört

Synchronisation II

Formen von Synchronisation

- globale Synchronisation
  alle Knoten des Netzwerks synchron
- isolierte Synchronisation innerhalb eines Clusters
  alle Knoten eines Clusters synchron
- gemeinsame Synchronisation zweier Cluster
  zwei Cluster zeigen gleichzeitig isolierte Synchronisation

Isolierte Synchronisation

Warum kann ein Cluster synchron sein während andere nicht synchron sind?

- Betrachte Dynamik des Knoten i aus Cluster n. $\mathbf{P}_m$ sei Permutationsmatrix zu Symmetriepermutation π des Clusters m.

$$\left[\mathbf{P}_m \dot{\mathbf{X}}\right]_i = \dot{\mathbf{x}}_i$$

$$[\mathbf{P}_m \mathbf{F}(\mathbf{X})]_i + [\mathbf{P}_m \mathbf{A}\mathbf{H}(\mathbf{X})]_i = \mathbf{f}(\mathbf{x}_i) + \sigma \sum_j A_{ij} \mathbf{h}(\mathbf{x}_j)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_i) + \sigma \sum_j A_{ij} \mathbf{h}(\mathbf{x}_{\pi(i)}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_i) + \sigma \sum_j A_{ij} \mathbf{h}(\mathbf{x}_j)$$

- Ein Knoten aus n ist gleich an jeden Knoten aus m gekoppelt.

Isolierte Synchronisation

Warum kann ein Cluster synchron sein während andere nicht synchron sind?

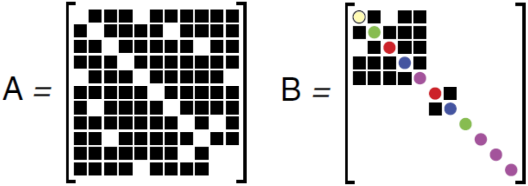
- Ein Knoten aus n ist gleich an jeden Knoten aus m gekoppelt.
- Analog führt Anwendung von $\mathbf{P}_n$ auf "Jeder Knoten aus n ist gleich an einen Knoten aus m gekoppelt"
- Jeder Knoten in n bekommt in der Summe den gleichen Input vom Cluster m, egal ob dieser synchron oder nicht ist.
  $\Rightarrow$ Wenn Permutationsmatrizen existieren die die Cluster getrennt permutieren, existiert isolierte Synchronisation
  $\Rightarrow$ Isolierte Synchronisation nicht bei "verschränkten"Clustern

Lokale Stabilitätsanalyse

Stabiltät der Clustersynchronität

Stabilitätsanalyse:

- für einzelne Cluster schwierig:
  in welche Richtung sollte $\delta \mathbf{X}$ betrachtet werden?
- $\Rightarrow$ Basistransformation mit Transformationsmatrix $\mathbf{T}$
- $\mathbf{T}$ blockdiagonalisiert $\mathbf{A}$
- oberer MxM Block beschreibt die Bewegung innerhalb der Synchronisationsmannigfaltigkeit



(Pecora et al. 2014)

MSF für Cluster

Nach Transformation durch $\mathbf{T}$ ergibt sich linearisierte Störung $\boldsymbol{\eta}$ in neuer Basis

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}(t) = \left[\sum_{m=1}^{M} \mathbf{J}^{(m)} \otimes D\mathbf{F}(\mathbf{s}_m(t)) + \sigma \mathbf{B} \otimes \mathbf{I}_n \sum_{m=1}^{M} \mathbf{J}^{(m)} \otimes D\mathbf{H}(\mathbf{s}_m(t))\right] \boldsymbol{\eta}(t)$$

$$\boldsymbol{\eta}(t) = \mathbf{T} \otimes \mathbf{I}_n \delta \mathbf{X}(t)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}$$

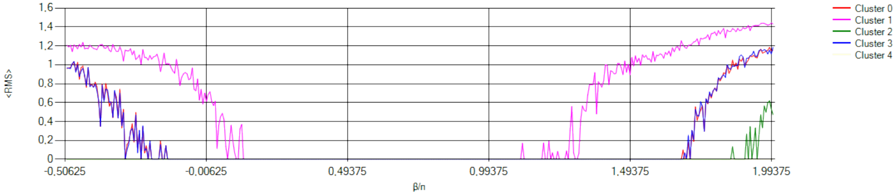
$$\mathbf{J}^{(m)} = \mathbf{T}\mathbf{E}^{(m)}\mathbf{T}^{-1}$$

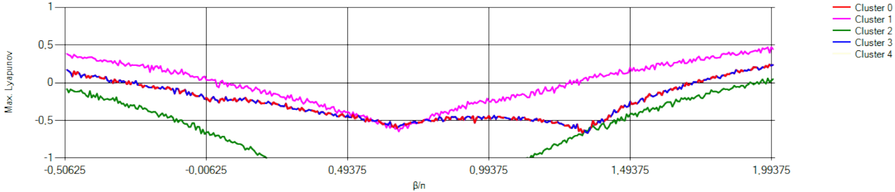
aus dieser MSE kann MSF für jedes Cluster (lokal) berechnet werden

Simulation lokale MSF

Stabilitätsanalyse

Simulation lokale MSF





Fazit

Fazit

- globale Stabilitätsanalyse über MSF setzt konstante Zeilensumme voraus
- In Netzwerken mit Symmetrien existieren Cluster
- Knoten eines Cluster können synchron laufen
- lokale Stabilitätsanalyse der Synchronisation durch Basistransformation möglich
- Isolierte Desynchronisation bei nicht verschränkten(non intertwined) Clustern möglich