



Technische Universität Berlin

Fakultät II Mathematik und Naturwissenschaften

Nichtlineare Dynamik und Kontrolle

**Projekt 2: Synchronisation in Netzwerken: Master Stability Function und
Permutationssymmetrien**

Autoren: Halgurd Taher
Felix Zimmermann
Paul-Rainer Affeld

Version vom: 14. Juli 2015

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Netzwerke	3
3	Synchronisation	4
4	Stabilität der Synchronisation	5
5	Symmetrien	6
6	Synchronisation in symmetrischen Netzwerken	6
7	Simulationsbeispiel	9
8	Fazit	10
	Literaturverzeichnis	11
	Anhang	12
9	Anhang	12
9.1	Kopplungsmatrizen	12
9.2	Transformationsmatrizen	12

1 Einleitung

Dynamische Netzwerke spielen in heutigen Wissenschaft eine wichtige Rolle. So lassen sich beispielsweise Prozesse im Gehirn zwischen Neuronen über Netzwerke beschreiben und analysieren. Großflächige Stromnetze stellen ebenfalls ein klassisches Beispiel eines Netzwerkes dar. Es ist von großem Interesse Prozesse in solchen Systemen hinsichtlich Dynamik und Stabilität zu untersuchen.

Ziel dieser Ausarbeitung ist es, Methoden zu präsentieren, mit denen nicht nur eine globale Analyse des Netzwerkes möglich ist, sondern auch Clusterbildung und lokales Verhalten dieser Cluster untersucht werden können.

2 Netzwerke

Netzwerke setzen sich im allgemeinen aus N Knoten (Nodes) zusammen, die über gewichtete Verbindungen (Edges) miteinander verbunden sind. Besteht zwischen zwei Knoten eine Verbindung in beide Richtungen, so spricht man von einem ungerichteten Netzwerk. Wenn alle Knoten untereinander verbunden sind, so handelt es sich um ein vollständiges Netzwerk (siehe Abbildung 1). Die Verbindungen der Knoten lassen sich durch eine $M \times M$ Verbindungsmatrix \mathbf{A} darstellen, in der ein Eintrag von 1 an Position i, j eine Verbindung zwischen dem Knoten i und dem Knoten j , eine 0 keine Verbindung zwischen diesen Knoten bedeutet.

Dynamik auf Netzwerken

Um Prozesse auf Netzwerken zu beschreiben kann man jedem Knoten eine n -dimensionale dynamische Variable x_i zuordnen. Die Dynamik wird dann für jeden Knoten über eine Differentialgleichung beschrieben, die die Kopplung an die anderen Knoten enthält. Die allgemeine Form dieser Differentialgleichung ist in Gleichung (2.1) gezeigt.

$$\dot{\mathbf{x}}_i(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_i(t)) + \sigma \sum_j A_{ij} \mathbf{h}(\mathbf{x}_j(t)) \quad (2.1)$$

$$i = 1, \dots, N$$

σ allgemeine Kopplungsstärke

A_{ij} Element der Kopplungsmatrix

$$\mathbf{f}, \mathbf{h} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Die Verbindungsmatrix \mathbf{A} wird hierbei zu einer Kopplungsmatrix, die die Kopplung der Differentialgleichungen der Knoten untereinander beschreibt. Im folgenden werden nur solche Systeme betrachtet, bei denen \mathbf{A} symmetrisch ist, das Netzwerk also un-

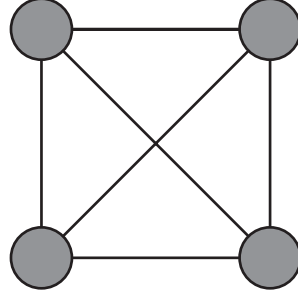


Abbildung 1: Beispiel eines ungerichteten Netzwerks aus vier Knoten, bei dem jeder Knoten mit jedem anderen verbunden ist.

gerichtet. Die Abbildung \mathbf{h} beschreibt auf welche Art und Weise die Komponenten der Variablen \mathbf{x}_i aneinander koppeln. Das Differentialgleichungssystem in (2.1) lässt sich auch über das Kronecker-Produkt in einer einzigen Gleichung darstellen¹,

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{X}(t)) + \sigma \mathbf{A} \otimes \mathbf{H}(\mathbf{X}(t)) \quad (2.2)$$

mit den Definitionen:

$$\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)^T, \mathbf{F} = (\mathbf{f}(\mathbf{x}_1), \dots, \mathbf{f}(\mathbf{x}_N))^T, \mathbf{H} = (\mathbf{h}(\mathbf{x}_1), \dots, \mathbf{h}(\mathbf{x}_N))^T$$

3 Synchronisation

Globale Synchronisation

Das Netzwerk wird als global synchron bezeichnet, wenn sich alle Variablen \mathbf{x}_i zeitlich gleich verhalten.

$$\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{x}_2(t) = \dots = \mathbf{x}_N(t) =: \mathbf{s}(t)$$

Es spielt dabei keine Rolle, ob dieses Verhalten z.B konstant, periodisch oder chaotisch ist. Voraussetzung für die Existenz globaler Synchronisation ist eine konstante Zeilensumme der Kopplungsmatrix \mathbf{A} . Liegt keine konstante Zeilensumme vor, so erhalten zwei Knoten von einer unterschiedlicher Anzahl Knoten Input. Seien nun alle Knoten zu einem Zeitpunkt t synchron, so entwickeln sich durch diesen unterschiedlichen Input die beiden Knoten zeitlich unterschiedlich und die Synchronisation würde zwangsläufig aufgehoben.

Isolierte Synchronisation

Isolierte Synchronisation liegt vor, wenn eine Gruppe von Knoten oben genanntes Verhalten aufweist, während ein anderer Teil des Netzwerks nicht synchron mit dieser

Gruppe ist. Voraussetzung ist (analog zur globalen Synchronisation) eine konstante Zeilensumme innerhalb dieser Gruppe.

4 Stabilität der Synchronisation

Ein synchroner Zustand eines Netzwerks lässt sich hinsichtlich seiner Stabilität untersuchen. Dabei wird eine kleine Abweichung $\mathbf{x}_i(t)$ der Anfangsbedingungen des synchronen Zustandes angenommen und berechnet, wie sich diese Störung zeitlich weiterentwickelt.

$$\delta \mathbf{x}_i(t) = \mathbf{x}_i - \mathbf{s}(t) \quad (4.1)$$

$$\delta \dot{\mathbf{x}}_i(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_i(t)) + \sigma \sum_j A_{ij} \mathbf{h}(\mathbf{x}_j(t)) - \dot{\mathbf{s}}(t) \quad (4.2)$$

Eine Linearisierung dieser Gleichung um die Bahnkurve $\mathbf{s}(t)$ liefert in der Kronecker-Produkt Schreibweise die Master Stability Equation (MSE) in Gleichung (4.3).

$$\delta \dot{\mathbf{X}}(t) = [D\mathbf{F}(\mathbf{s}(t)) + \sigma \mathbf{A} \otimes D\mathbf{H}(\mathbf{s}(t))] \delta \mathbf{X}(t) \quad (4.3)$$

Ljapunow-Exponenten

Die Ljapunow-Exponenten beschreiben, wie weit sich Bahnkurven für große Zeiten voneinander entfernen, verglichen mit der Abweichung zum Zeitpunkt $t = 0$. Eine mögliche Definition ist in Gleichung (4.4) gegeben.

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left(\frac{|\delta \mathbf{x}_i(t)|}{|\delta \mathbf{x}_i(0)|} \right) \quad (4.4)$$

Wird die Abweichung zu $\delta \mathbf{x}_i(0)$ größer, so ist der Quotient größer als 1, sonst kleiner. Es gilt also folgende Unterscheidung für die Werte der Ljapunow-Exponenten.

$$\begin{cases} \lambda_i < 0, & \text{Abweichung vom synchronen Zustand verschwindet} \\ \lambda_i > 0, & \text{Abweichung vom synchronen Zustand wächst} \end{cases} \quad (4.5)$$

Positive Ljapunow-Exponenten weisen eine instabile Synchronisation nach und negative eine stabile. Der Stabilitätsbegriff bezieht sich hierbei auf Invarianz der Bahnkurven gegenüber Änderungen der Anfangsbedingungen (für lange Zeiten).

Master Stability Function

Durch eine Diagonalisierung der Kopplungsmatrix lässt sich bei Betrachtung entlang ihrer Eigenvektoren die Kopplungsmatrix in (4.3) durch ihre Eigenwerte $\alpha + i\beta$ darstellen. In dieser Form lassen sich die Ljapunow-Exponenten zu den Richtungen trans-

versal zur Synchronisation berechnen. Da es für Instabilität genügt, wenn einer dieser Ljapunow-Exponenten größer als 0 ist, ist es sinnvoll nur den größten zu betrachten. Dieser wird Master Stability Function (MSF) genannt.

5 Symmetrien

Können in einem Graphen zwei Knoten miteinander vertauscht werden, ohne dass sich der Graph verändert, liegt eine Permutationssymmetrie vor. Für die betrachteten Netzwerke bedeutet dies, dass sich bei Vorliegen einer Permutationssymmetrie zwei Knoten tauschen lassen, indem sowohl die zugehörigen Spalten als auch Zeilen der Kopplungsmatrix getauscht werden, ohne dass sich die Dynamik des Systems verändert. Die Vertauschung der Knoten lässt sich durch eine Permutationsmatrix P darstellen. Voraussetzung für eine Permutationssymmetrie ist somit

$$PAP^{-1} = A. \quad (5.1)$$

Zur Untersuchung eines Netzwerkes auf Symmetrien eignet sich die Suche von Automorphismen des dem Netzwerk zugrunde liegenden Graphen mit Hilfe der Bibliothek *nauty*². Mit dieser lassen sich neben den Generatoren der Permutationssymmetrien auch die Orbits der Knoten bestimmen. Als Orbit werden hierbei die Positionen bezeichnet, an die ein Knoten durch Anwendung aller Permutationen gelangen kann. Alle Knoten eines Orbits lassen sich folglich durch eine Hintereinanderreihung der Permutationen vertauschen, ohne dass sich die Dynamik des Netzwerkes verändert. Eine solche Gruppe von Knoten wird als Cluster bezeichnet. Sollte bei der für die Vertauschung nötigen Hintereinanderreihung von Permutationen ebenfalls Knoten eines weiteren Clusters miteinander vertauscht werden, so liegt eine Verschränkung der Cluster vor (Pecora³ "*interwinded Clusters*").

6 Synchronisation in symmetrischen Netzwerken

Da Knoten eines Clusters ohne Veränderung der Dynamik vertauschbar sind, erhalten diese den gleichen Input der anderen Knoten und können synchron laufen. In einem aus M Clustern C_m bestehenden Netzwerk existieren somit M Gruppen von Knoten, die isolierte Synchronisation aufweisen können mit synchronen Orbits s_m

$$x_i(t) = s_m(t) \text{ mit Knoten } i \in C_m \quad (6.1)$$

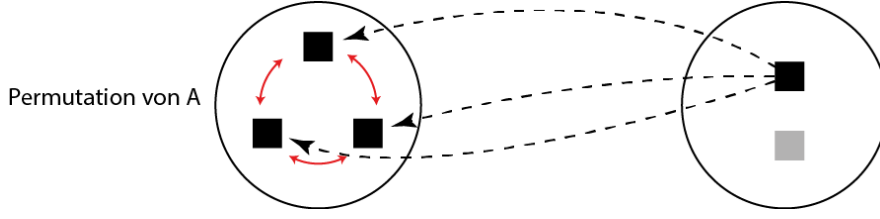


Abbildung 2: Es werden zwei Cluster A und B betrachtet. Eine Symmetriepermutation des Clusters A ändert die Dynamik eines Knotens in B nicht. Folglich muss dieser Knoten gleichstarken Input von jedem Knoten aus A erhalten.

isolierte Desynchronisation

In einem symmetrischen Netzwerk können einzelne Cluster synchron sein, während andere nicht synchron sind. Die Desynchronisation scheint also die Synchronisation eines anderen Clusters nicht zwangsläufig zu stören.

Unter einer Permutation π eines Clusters A mit Permutationsmatrix P_A ändert sich die Dynamik eines Knotens i aus einem disjunkten Cluster B nicht, es gilt

$$\begin{aligned} \left[P_A \dot{X} \right]_i &= \dot{x}_i \\ [P_A F(X)]_i + [P_A A H(X)]_i &= f(x_i) + \sigma \sum_j A_{ij} h(x_j) \\ f(x_i) + \sigma \sum_j A_{ij} h(x_{\pi(j)}) &= f(x_i) + \sigma \sum_j A_{ij} h(x_j) \end{aligned} \quad (6.2)$$

Folglich muss jeder Knoten in A gleich an den Knoten i gekoppelt sein und dieser somit gleichstarken Input von allen Knoten aus A erhalten. (siehe Abb. 2)

Eine analoge Betrachtung unter Permutation des den Knoten i enthaltenden Clusters B (A wird nicht verändert) führt auf die Beobachtung, dass jeder Knoten aus B gleich an die Knoten aus A gekoppelt ist (siehe Abb. 3).

Zusammen ergibt sich aus diesen Aussagen: Jeder Knoten in B bekommt in der Summe den gleichen Input vom Cluster A, egal ob dieser synchron oder asynchron ist, sofern Permutationsmatrizen existieren, die die Cluster getrennt permutieren. Isolierte Desynchronisation kann nicht bei "verschränkten" Clustern auftreten, da die Permutation beide Cluster verändert.

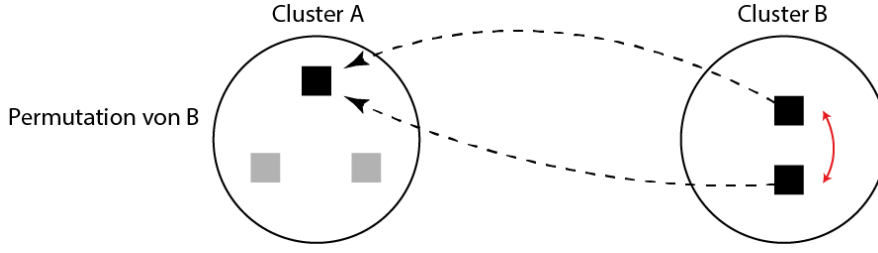


Abbildung 3: Bei Symmetriepermutation des Clusters B ändert sich die Dynamik eines Knotens aus B nicht. Somit muss jeder Knoten aus B gleichstarken Input von A erhalten.

Stabilität

Zur Betrachtung der Stabilität der isolierten Synchronisation lässt sich die MSE (Gleichung 4.3) unter Verwendung von Clustermatrizen \mathbf{E}^m (beschreiben die Zuordnung der Knoten zu den Clustern)

$$\mathbf{E}_{ii}^{(m)} = 1 \text{ wenn Knoten } i \in C_m. \quad (6.3)$$

umschreiben zu:

$$\begin{aligned} \delta \dot{\mathbf{X}}(t) &= [D\mathbf{F}(\mathbf{s}(t)) + \sigma \mathbf{A} \otimes D\mathbf{H}(\mathbf{s}(t))] \delta \mathbf{X}(t) \\ &= \left[\sum_{m=1}^M \mathbf{E}^{(m)} \otimes D\mathbf{F}(\mathbf{s}_m(t)) + \sigma \mathbf{A} \otimes \mathbf{I}_n \sum_{m=1}^M \mathbf{E}^{(m)} \otimes D\mathbf{H}(\mathbf{s}_m(t)) \right] \mathbf{X}(t) \end{aligned} \quad (6.4)$$

Gleichung 6.4 lässt sich unter Verwendung der Gruppentheorie in eine neue Basis transformieren. Hierbei wird die Basis der irreduziblen Darstellungen (IRRs) der den Permutationssymmetrien zugrunde liegenden Gruppe gewählt. In dieser Basis nimmt die Kopplungsmatrix Blockdiagonalform an. Die oberen M Koordinaten $\boldsymbol{\eta}(t)$ in der neuen Darstellung entsprechen einer Bewegung longitudinal innerhalb der Synchronisationsmannigfaltigkeit, die weiteren einer Bewegung transversal zur ihr. Die Transformationsmatrix \mathbf{T} lässt sich mithilfe einer geeigneten Software für diskrete Mathematik (z.B. sage) bestimmen⁴. Diese Basistransformation entspricht einer Transformation in M Schwerpunktkoordinaten und $(N - M)$ Relativkoordinaten (die die Abweichung der Knoten eines Clusters zueinander beschreiben) mit orthogonalen Basisvektoren.

Aus der so transformierten MSE (Gleichung 6.5) lässt sich die MSF berechnen um die Stabilität der Clustersynchronität zu beurteilen.

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}(t) = \left[\sum_{m=1}^M \mathbf{J}^{(m)} \otimes D\mathbf{F}(\mathbf{s}_m(t)) + \sigma \mathbf{B} \otimes \mathbf{I}_n \sum_{m=1}^M \mathbf{J}^{(m)} \otimes D\mathbf{H}(\mathbf{s}_m(t)) \right] \boldsymbol{\eta}(t) \quad (6.5)$$

mit der transformierten Kopplungsmatrix \mathbf{B} und den transformierten Clustermatrizen $\mathbf{J}^{(m)}$

$$\boldsymbol{\eta}(t) = \mathbf{T} \otimes \mathbf{I}_n \delta \mathbf{X}(t) \quad (6.6)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{T} \mathbf{A} \mathbf{T}^{-1}$$

$$\mathbf{J}^{(m)} = \mathbf{T} \mathbf{E}^{(m)} \mathbf{T}^{-1}.$$

7 Simulationsbeispiel

Die vorgestellten Methoden zur lokalen Stabilitätsanalyse eines Netzwerks werden in diesem Abschnitt auf ein Beispiel angewendet. Bisher wurden nur dynamische Systeme mit kontinuierlichen Variablen betrachtet. Die zugrunde liegende Theorie lässt sich auch auf diskrete Systeme anwenden. Dabei ist die Dynamik nicht durch ein Differentialgleichungssystem gegeben, sondern durch eine Iterationsvorschrift. Das hier betrachtete Netzwerk³ folgt der Dynamik in Gleichung (7.1).

$$x_i^{t+1} = \left[\beta \mathcal{I}(x_i^t) + \sigma \sum_j^N A_{ij} \mathcal{I}(x_j^t) + \delta \right] \bmod 2\pi \quad (7.1)$$

β, σ Kopplungsparameter

δ Offset

$$\mathcal{I}(x) = \frac{1 - \cos(x)}{2}$$

Die betrachteten Netzwerke (siehe Abb. 4) sind symmetrisch und bestehen aus $N = 11$ Knoten. Die verwendeten Kopplungsmatrizen (9.1) sind Pecora et al.³ entnommen und in Abb. 5 dargestellt.

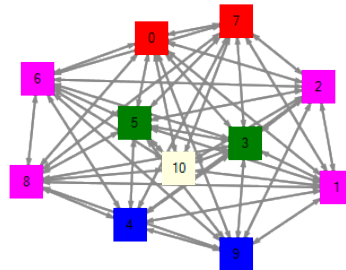


Abbildung 4: Die für die Simulation verwendeten Netzwerke. Die Knoten eines Cluster sind in der gleichen Farbe eingefärbt.

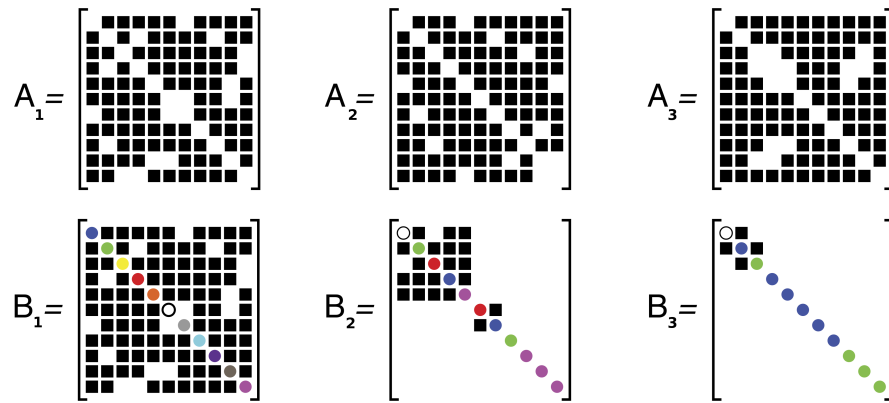


Abbildung 5: Kopplungsmatrizen \mathbf{A} der in Abb. 4 dargestellten Netzwerke sowie die transformierte Kopplungsmatrizen \mathbf{B} in der die Zeilen nach den zugehörigen Clustern markiert sind³.

Tabelle 1: Symmetrien und Cluster der betrachteten Netzwerke

Netzwerk	Symmetrien	Cluster
1	0	11 triviale Cluster
2	32	(1,8) (2,3,7,9) (4,6) (5,10) (11)
3	5760	(1,2,6,7,8,11) (3,5,9,10) (4)

Für diese Netzwerke ergibt die Suche nach Automorphismen der zugrundeliegenden Graphen mit *Nauty* 0, 32 bzw 5760 Symmetrien und 11 (triviale, nur aus einem Knoten bestehende), 5 bzw. 3 Cluster (siehe Tab. 1)

-rms

Zur Berechnung der Ljapunow-Exponenten wurde eine Basistransformation (siehe 6) mit den im Anhang (9.2) dargestellten Transformationsmatrizen vorgenommen^{3,4} -
ljapunow

8 Fazit

Literaturverzeichnis

- [1] Louis M. Pecora and Thomas L. Carroll. Master stability functions for synchronized coupled systems. *Phys. Rev. Lett.*, 80:2109–2112, Mar 1998.
- [2] Brendan D. McKay and Adolfo Piperno. Practical graph isomorphism, {II}. *Journal of Symbolic Computation*, 60(0):94 – 112, 2014. ISSN 0747-7171.
- [3] Louis M Pecora, Francesco Sorrentino, Aaron M Hagerstrom, Thomas E Murphy, and Rajarshi Roy. Cluster synchronization and isolated desynchronization in complex networks with symmetries. *Nature communications*, 5, 2014.
- [4] A. Hagerstorm. Network symmetries and synchronization, 2014. URL <https://sourceforge.net/projects/networksym/>.

9.1 Kopplungsmatrizen