Synchronisation in Netzwerken: Master Stability Function und Permutationssymmetrien

Felix Zimmermann, Halgurd Taher, Paul-Rainer Affeld

Institut fur Theoretische Physik, Technische Universitat Berlin, Germany

3. Juli 2015

Inhalt

Table of Contents

Dynamik auf Netzwerken

- N miteinander gekoppelte Knoten
- Jeder Knoten wird durch dynamische Gleichung beschrieben

$$\dot{\mathbf{x}}_i(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_i(t)) + \sigma \sum_j A_{ij} \mathbf{h}(\mathbf{x}_j) \tag{1}$$

$$i = 1, ..., N$$

$$A_{ij} \text{ Kopplungsmatrix}$$

$$\mathbf{f}, \mathbf{h} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

Definiere

$$\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_N)^{\mathrm{T}}, \mathbf{F} = (\mathbf{f}(\mathbf{x}_1), ..., \mathbf{f}(\mathbf{x}_N))^{\mathrm{T}}, \mathbf{H} = (\mathbf{h}(\mathbf{x}_1), ..., \mathbf{h}(\mathbf{x}_N))^{\mathrm{T}} \tag{2}$$

$\Rightarrow$

$$\dot{\mathbf{X}} = \tag{3}$$

Beispiel

Diskretes System mit $N = 11$ Knoten (TODO Gleichung für xt+1) (beta, sigma Parameter)

Synchronität

Synchronität : $x1(t) = x2(t)...s(t)$

- tmp

Stabilität der Synchronität :
Wie entwickelt sich kleine Abweichung von s(t) zeitlich weiter? Master Stability Equation: Formel deltaX (ohne Cluster).... mit Einheitsmatrix Kronecker... Master Stability Function (größter Ljapunow Exponent groß lambda) groß lambda=limes t− >inf summe $lnabs(deltax_i(t+1))/deltax_i(t))$ lambda¿0 instabil, fehler wächst, bahnkurven xi entfernen sich von s(t) lambda¡0 stabil, fehler schrumpft, bahnkurven xi nähern sich wieder s(t)

Synchronität

Voraussetzung :
Bei Synchronität jeder Knoten gleicher Input $->$ u.a Konstante Zeilensumme von A

Synchronität

Voraussetzung :
Bei Synchronität jeder Knoten gleicher Input $->$ u.a Konstante Zeilensumme von A
(AIJ aus mittlerer simulation) Zeilensumme NICHT konstant

Synchronität

Simulation des Beispiels mit (AIJ aus mittlerer simulation)

Synchronität

- Keine globale synchronisation - 5 gruppen von knoten die sich synchron verhalten $->$ Cluster (evtl screenshot)

Cluster

Knoten eines Clusters können bei Synchronität gleichen Input haben. (da Gleiche Zeilensumme innerhalb eines Clusters) Knoten können vertauscht werden, dynamik bleibt gleich Netzwerk besitzt offensichtlich symmetrien Suche nach permutationssymmetrien mathematisch beschrieben durch permutationsmatrizen P_i mit $A = PAP^{-}1- > A$ bleibt unverändert bei tauschen der knoten

Cluster

zwei Arten von Permutationen: 1. tausche Knoten A und B $->$ A und B gleiches Cluster 2. tausche Knoten A und B sowie C und D $->$ Cluster (AB) und (CD) "verschränkt"

Cluster

Clustersuche in der Regel numerisch Bibliothek nauty [1]

Formen von Synchronität

-globale Synchronität -isolierte Synchronität innerhalb eines Clusters -gemeinsame Synchronität zweier verschränkter Cluster (AB)synchron und (CD)synchron

Isolierte Synchronität

Warum kann ein Cluster Syncrhon sein während andere nicht synchron sind? (pecora argumentation mit permutationsmatrizen vorbeiziehen und gleichen input für das cluster)

Stabiltät der Clustersynchronität

Stabilitätsanalyse für einzelne Cluster schwierig: in welche richtung sollte deltax betrachtet werden? -¿Basistransformation mit Transformationsmatrix T T blockdiagonalisiert A, sodass linker oberer MxM Block die Bewegung innerhalb der Synchronisationsmannigfaltigkeit beschreibt an gleichung xxx von links TxIn dranmultiplizieren (gleichungen für eta) Ströung in neuer basis) aus dieser MSE kann größter Ljapunow-Exponent für jedes Cluster berechnet werden

Simulation

Stabilitätsanalyse

Fazit

In Netzwerken mit Symmetrien existieren Cluster Cluster können Synchron laufen Stabiltiätsanalyse durch Basistransformation möglich

Inhalt

Thank you for your attention.