Notas em Econometria

Teoria e Aplicação

Gabriel Arruda

2024-08-01

Índice

Disclaimer

Este projeto teve início com base nas notas de aula do Prof. Dr. Fernando Aiube e do Prof. Dr. Francis Petterini, assim como nas notas de aula do Kotze (2019) e nos livros: Box et al. (2015), Hamilton (1994) e Enders (2014). O trabalho ainda precisa ser concluído e revisado. Vale destacar que pretendo incluir formas de aplicar os modelos em *Python*.

A idealização do projeto surgiu como uma maneira de estudo para eu aprender tanto a teoria quanto a aplicação prática de cada modelo. A implementação dos modelos será feita do zero, utilizando o mínimo de pacotes possível.

Alguns scripts estarão disponíveis dentro do texto, mas todos poderão ser acessados no meu GitHub.

Lembrando que a ideia é sempre utilizar o minimo de pacotes possiveis:

```
# Importações globais
import pandas as pd
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

1 Introdução

1.1 Regressão linear

Regressão linear é uma ferramenta estatística usada para modelar a relação entre uma variável dependente e uma ou mais variáveis independentes, assumindo que essa relação pode ser descrita por uma linha reta. A ideia de se utilizar é uma é dado a sua simplicidade, tendo apenas um parâmetro de inclinação e um de intercepto, uma outra é que aqui se assume que as variáveis apresentam uma relação linear. A linha representa a melhor aproximação da tendência central dos dados. Aqui devemos partir de uma amostra, um par ordenado $\{x_i, y_i\}_{i=1}^{N}$, encontrar uma reta que melhor se ajusta a média dos dados, para isso, vamos partir da equação de uma reta.

$$y = \alpha + \beta x$$

Onde a ideia aqui é querer entender qual relação em que a variável x afeta a variável y, temos então que resolver dois problemas: primeiro é encontrar os parâmetros α e β que melhor se ajusta, sabendo que nem todo o y pode ser explicado pelo x, temos que adicionar uma variável à equação que consiga captar essa relação no modelo, essa variável será dada por u.

Podemos reescrever a equação acima como sendo um sistema de equações lineares

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha + \beta x_1 + u_1 \\ y_2 &= \alpha + \beta x_2 + u_2 \\ y_3 &= \alpha + \beta x_3 + u_3 \\ &\vdots \\ y_n &= \alpha + \beta x_n + u_n \end{aligned}$$

Note que esse é um sistema de n equações lineares com $n + 2$ incógnitas. E que pela regra de Cramer, sabemos que o sistema apresenta infinitas soluções. O que não nos ajuda e precisamos voltar ao problema, quais valores de α e β que melhor se ajusta? Uma maneira de se fazer isso, é minimizar a soma do erro quadrático $\left(\sum_{i=1}^{N} u_i^2\right)$ e para isso, vamos isolar o erro, elevar tudo ao quadrado e aplicar a recursividade.

$$\sum_{i=1}^{N} u_i^2 = \sum_{i=1}^{N} (y_i - \alpha - \beta x_i)^2$$

Dado isso, podemos dizer que podemos estimar valores de α e β que minimizam o erro quadrático. Seja $S(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{N} u_i^2$ e sabendo que os valores dos parâmetros que zeram o gradiente $\nabla = \left(\frac{\partial S}{\partial \hat{\alpha}}, \frac{\partial S}{\partial \hat{\beta}}\right) = 0$ são os valores que minimizam o erro quadrático. Fazendo as derivadas...

$$\nabla = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial S}{\partial \hat{\alpha}} \\ \dfrac{\partial S}{\partial \hat{\beta}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\sum_{i=1}^{N}(y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}x_i) \\ -2\sum_{i=1}^{N}(y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}x_i)(x_i) \end{bmatrix} = 0$$

Podemos multiplicar ambos os lados por $-\frac{1}{2}$ e abrir o somatório[1].

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N} y_i - n\hat{\alpha} - \hat{\beta}\sum_{i=1}^{N} x_i \\ \sum_{i=1}^{N} y_i x_i - \hat{\alpha}\sum_{i=1}^{N} x_i - \hat{\beta}\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \end{bmatrix} = 0$$

Separando os termos, temos que

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N} y_i \\ \sum_{i=1}^{N} y_i x_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n\hat{\alpha} + \hat{\beta}\sum_{i=1}^{N} x_i \\ \hat{\alpha}\sum_{i=1}^{N} x_i + \hat{\beta}\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N} y_i \\ \sum_{i=1}^{N} y_i x_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{N} x_i \\ \sum_{i=1}^{N} x_i & \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{bmatrix}$$

Podemos reorganizar da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{N} x_i \\ \sum_{i=1}^{N} x_i & \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N} y_i \\ \sum_{i=1}^{N} y_i x_i \end{bmatrix}$$

Pré-multiplicando ambos os lados pelo inverso da matriz que tem os valores de x:

$$\begin{bmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{N} x_i \\ \sum_{i=1}^{N} x_i & \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N} y_i \\ \sum_{i=1}^{N} y_i x_i \end{bmatrix}$$

Para termos certeza de que este é o ponto mínimo, devemos avaliar a matriz hessiana:

$$H = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 S}{\partial \alpha^2} & \dfrac{\partial^2 S}{\partial \alpha\, \partial \beta} \\ \dfrac{\partial^2 S}{\partial \alpha\, \partial \beta} & \dfrac{\partial^2 S}{\partial \beta^2} \end{bmatrix}$$

Logo:

$$H = \begin{bmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{bmatrix}$$

Para ser um mínimo global, devemos ter que:

[1] Note que se somarmos n vezes um parâmetro é o mesmo que dizer n vezes o parâmetro, logo $\sum_{i=1}^{N} \hat{\alpha} = n\hat{\alpha}$.

- O primeiro menor principal será > 0
- O determinante do segundo menor principal será > 0

Com isso, podemos dizer que é um ponto de mínimo.

Podemos reescrever:

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{bmatrix}$$

Abrindo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Onde:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}'$$

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Então:

$$X'\hat{B} = X'Y$$
$$(X'X)\hat{B} = X'Y$$
$$(X'X)^{-1}(X'X)\hat{B} = (X'X)^{-1}X'Y$$
$$\hat{B} = (X'X)^{-1}X'Y$$
$$\boxed{\hat{B} = (X'X)^{-1}X'Y}$$

Então, sempre que estamos falando do estimador do **MQO**, estamos nos referindo à Equação 1.1:

$$\hat{B} = (X'X)^{-1}X'Y \tag{1.1}$$

Agora, temos que pensar da seguinte maneira: dado que conseguimos construir os estimadores, como podemos criar seus intervalos de confiança? Para isso, podemos substituir Y por $XB + U$:[2]

$$\hat{B} = (X'X)^{-1}X'(XB + U)$$

[2]Vale lembrar que B sem chapéu é o melhor ajuste possível da reta, os valores que só Deus sabe.

$$= (X'X)^{-1}X'XB + (X'X)^{-1}X'U$$

Assumindo que os dados não tenham problema de multicolinearidade perfeita, a matriz $(X'X)^{-1}$ deve existir para que $I = (X'X)^{-1}X'X$:

$$\hat{B} = B + (X'X)^{-1}X'U \tag{1.2}$$

Observamos na equação Equação 1.2 que a componente do estimador influenciada pelo erro, especificamente $X'U$, ilustra uma premissa importante do modelo: $\mathbb{E}(X|U) = 0$. Isso implica que, idealmente, todas as variáveis explicativas deveriam ser exógenas, não apresentando qualquer correlação com o termo de erro. Mas, é importante reconhecer que, na prática, alcançar uma exogeneidade completa é praticamente inviável; assim, é realista esperar que qualquer modelo econômico possa manifestar algum nível, mesmo que mínimo, de endogeneidade.

Subtraind os dois lados da Equação 1.2 por $-B$ e pós-multiplicando por $(\hat{B} - B)'$:

$$(\hat{B} - B)(\hat{B} - B)' = (X'X)^{-1}X'U[(X'X)^{-1}X'U]'$$

Desenvolvendo a parte esquerda dessa igualdade, temos que:

$$\begin{bmatrix} \hat{B}_1 - B \\ \hat{B}_2 - B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{B}_1 - B & \hat{B}_2 - B \end{bmatrix}'$$

Multiplicando e aplicando o operador da esperança:

$$\begin{bmatrix} \mathbb{E}[(\hat{B}_1 - B)^2] & \mathbb{E}[(\hat{B}_1 - B)(\hat{B}_2 - B)] \\ \mathbb{E}[(\hat{B}_1 - B)(\hat{B}_2 - B)] & \mathbb{E}[(\hat{B}_2 - B)^2] \end{bmatrix}$$

Onde a diagonal principal é a variância de $\hat{B}_1$ e o resto é a covariância, então montamos a matriz de variância-covariância:

$$\begin{bmatrix} \text{Var}(\hat{B}_1) & \text{Cov}(\hat{B}_1, \hat{B}_2) \\ \text{Cov}(\hat{B}_1, \hat{B}_2) & \text{Var}(\hat{B}_2) \end{bmatrix}$$

A partir disso, poderíamos montar um intervalo de confiança para os betas se não fosse um pequeno problema... Aqui precisamos do valor de β, e que só Deus sabe. Vamos então olhar para o lado direito da igualdade[3]

$$= (X'X)^{-1}X'UU'X[(X'X)^{-1}]'$$

$$= (X'X)^{-1}X'UU'X(X'X)^{-1}$$

[3]Vale lembrar que $(AB)' = B'A'$

Abrindo UU' e aplicando o operador da esperança:

$$UU' = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix}'$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbb{E}(u_1)^2 & \mathbb{E}(u_1, u_2) & \cdots & \mathbb{E}(u_1, u_n) \\ \mathbb{E}(u_2, u_1) & \mathbb{E}(u_2)^2 & \cdots & \mathbb{E}(u_2, u_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{E}(u_n, u_1) & \mathbb{E}(u_n, u_2) & \cdots & \mathbb{E}(u_n)^2 \end{bmatrix}$$

Vamos ter que na diagonal principal é a variância dos erros e $\forall\, \mathbb{E}(u_i, u_j)$ em que $i \neq j$ temos a covariância dos erros. Sob as hipóteses de homoscedasticidade[4] e não autocorrelação, vamos ter que:

$$UU' = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma^2 \end{bmatrix}$$

$$= \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \sigma^2 I$$

Então continuando, vamos ter que:

$$(X'X)^{-1} X' \sigma^2 X (X'X)^{-1}$$

$$= \sigma^2 (X'X)^{-1} X'X (X'X)^{-1}$$

$$= \sigma^2 (X'X)^{-1} \tag{1.3}$$

Agora sim temos uma matriz de variância-covariância(Equação 1.3), mas percebemos que ao longo do caminho foi necessário fazer algumas hipóteses questionáveis, como a homoscedasticidade e não-autocorrelação. Outro problema dessa matriz de variância-covariância é que

[4] Variância dos erros é constante, isto é, $\mathbb{E}(u_i^2) = \sigma^2$, $\forall i = 1, \ldots, n$

nela precisamos da média do erro, mas só Deus sabe o erro... o máximo que podemos fazer é procurar uma estimativa para esse erro, e vamos chamá-lo de **resíduo**. Para diferenciar, o **resíduo** é a parte do modelo que não conseguimos explicar e o **erro** é tudo aquilo que afeta o Y, mas não é o X. Então um estimador para a variancia dos resíduos é:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{SQR}{n-k} = \frac{\sum_{i=1}^{n} u^2}{n-k}$$

Onde:

- $n \rightarrow$ Tamanho da amostra
- $k \rightarrow$ Numero de coeficientes

Estimando uma regressao no python

Primeiro, vamos começar lendo os dados. Aqui vamos utilizar o dataset *mtcars*, juntos dos pacotes que serão usados

```
import numpy as np
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
import statsmodels.api as sm


mtcars =  sm.datasets.get_rdataset('mtcars').data
```

Vamos agora criar uma função que estime os valores dos $\hat{\beta}$ e calcula o erro padrão de cada coeficiente, isso é importante pois será usado mais tarde para o calculo das estatisticas t. A Função recebe como um argumento 'data' nossa base de dados; y é a variavel dependete e x são nossas variáveis explicativas, note que da maneira que foi construida nossa função y e x deve ser strings.

```
def ols(data, y, x):
    X = data[x].values
    Y = data[y].values

    # Adiciona uma coluna de "1" para gerar o intercepto
    X = np.column_stack((np.ones(X.shape[0]), X))

    # Calcula OLS
    XtX = np.transpose(X) @ X
    XtX_inv = np.linalg.inv(XtX)
    XtY = np.transpose(X) @ Y
```

```
    betas = XtX_inv @ XtY

    # Calcula os resíduos
    residuals = Y - X @ betas
    sqr = np.sum(residuals**2)  # Soma dos quadrados dos resíduos
    n, k = X.shape
    residual_variance = sqr / (n - k)  # Variância dos resíduos

    # Calcula o erro padrão dos coeficientes
    standard_errors = np.sqrt(residual_variance * np.diag(XtX_inv))

    return betas, standard_errors
```

tendo nossos valores em mãos, precisamos de uma função que calcule as estatisticas t

```
def t_stats(betas, standard_errors):
    # Calcula os valores-t
    t_values = betas / standard_errors
    return t_values
```

Para organizar tudo e melhorar a visibilidade dos dados, precisamos de uma função que pegue todos esses valores que crie um dataframe

```
def results_dataframe(data, y, x):
    # Calcula betas e erros padrão
    betas, standard_errors = ols(data, y, x)

    # Calcula estatísticas t
    t_values = t_stats(betas, standard_errors)

    # Cria um DataFrame para uma melhor visualização
    coef_names = ['Intercept'] + x
    results = pd.DataFrame({
        'Coeficiente': betas,
        'Erro Padrão': standard_errors,
        'Estatistica t': t_values
    }, index=coef_names)

    return results
```

Temos entao

```
results_dataframe(mtcars, 'mpg', ['cyl', 'disp'])
```

	Coeficiente	Erro Padrão	Estatistica t
Intercept	34.660995	2.547004	13.608536
cyl	-1.587277	0.711844	-2.229809
disp	-0.020584	0.010257	-2.006696

1.2 Conceitos de Convergência

A ideia aqui é entender o que acontece com a amostra à medida que seu tamanho vai para infinito. Embora isso seja puramente teórico, conseguimos tirar algumas ideias para o caso da amostra finita. As duas ideias principais são:

1. A **lei dos grandes números** diz que a média da amostra $X_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ **converge em probabilidade** para a expectativa $\mu = \mathbb{E}(X_i)$. Isso significa que X_n está próximo de μ com alta probabilidade.
2. O **teorema do limite central** diz que $\sqrt{n}(X_n - \mu)$ **converge em distribuição** para uma distribuição Normal. Isso significa que a média da amostra tem aproximadamente uma distribuição Normal para grandes valores de n.

Definição 1.1 (Convergencia)**.** A sequência[5] de variáveis aleatórias, $X_1, X_2, \ldots$, **converge em probabilidade** para uma variável aleatória X, se $\forall \varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| < \varepsilon) = 1$$

Note que se $n \to \infty \implies |X_n - X| \to 0$ e isso quer dizer que no limite, a sequência vai se aproximar muito da variável aleatória.

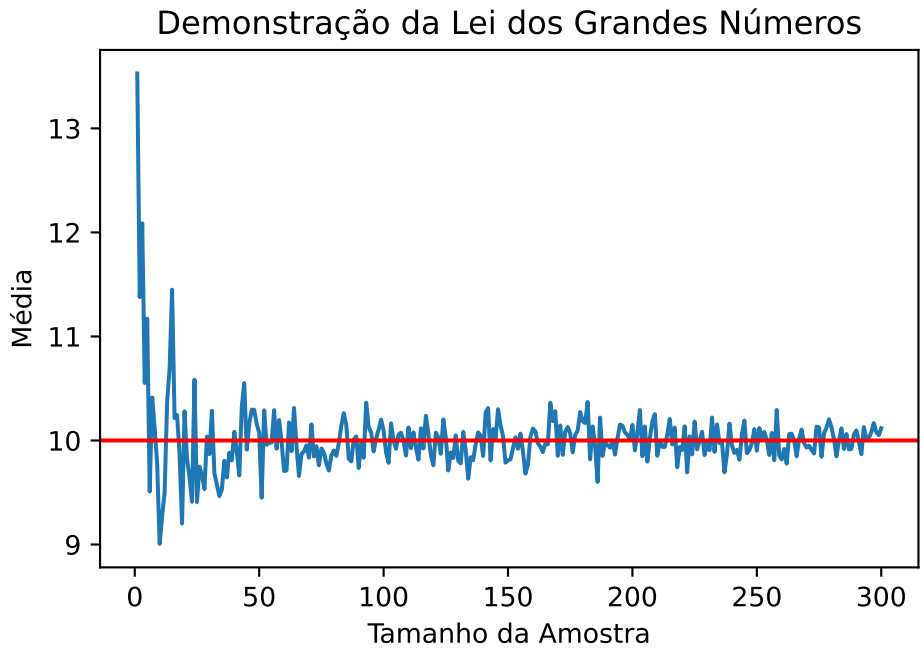
Teorema 1.1 (Teorema da Lei dos Grandes Números - Fraca)**.** *Seja $X_1, X_2, \ldots$, variáveis aleatórias iid com $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ e $Var[X_i] = \sigma^2 < \infty$. Defina $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Então para todo $\varepsilon > 0$:*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|\bar{X}_n - \mu| < \varepsilon) = 1$$

Então, $\bar{X}_n$ ***converge em probabilidade*** *para μ.*

[5] Lembre-se da ideia de convergência de uma sequência. Dado um $\varepsilon > 0$, dizemos que $x_k \to x$ se existir um k_0, em que $\forall k \geq k_0 \implies |x_k - x| < \varepsilon$

```python
def lei_grandes_numeros(pop_mean, pop_std, sample_sizes):
    np.random.seed(0)  # Para reprodutibilidade

    sample_means = [np.random.normal(pop_mean, pop_std, size).mean() for size in sample_sizes

    return np.array(sample_means)

pop_mean = 10
pop_std = 2
n_simulations = 300
sample_sizes = range(1, n_simulations + 1)

# Gerando os dados
sample_means = lei_grandes_numeros(pop_mean, pop_std,sample_sizes)

# Visualização dos resultados
plt.plot(sample_sizes, sample_means, label='Média amostral')
plt.axhline(y=pop_mean, color='r', linestyle='-', label='Média populacional')
plt.xlabel('Tamanho da Amostra')
plt.ylabel('Média')
plt.title('Demonstração da Lei dos Grandes Números')
plt.show()
```



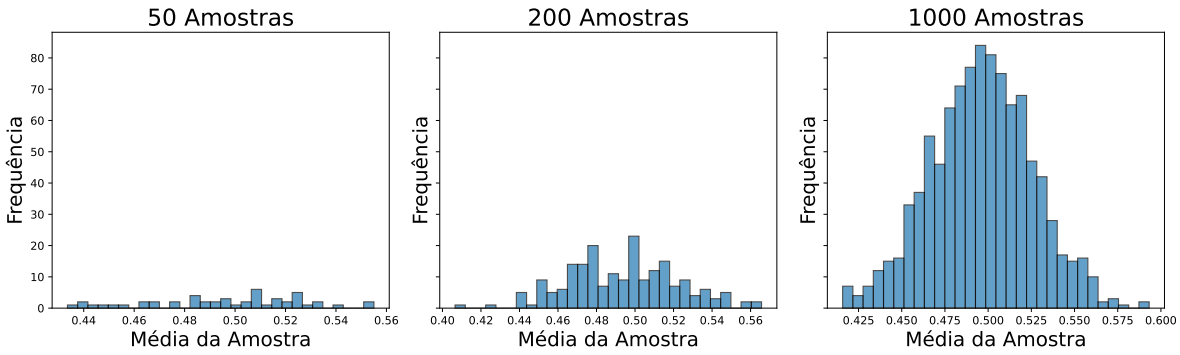
Teorema 1.2 (Teorema do Limite Central)**.** *Sejam $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com média μ e variância σ^2. Seja $X_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Então,*

$$Z_n = \frac{X_n - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} = \frac{\sqrt{n}(X_n - \mu)}{\sigma} \xrightarrow[n\to\infty]{} Z$$

onde Z tem uma distribuição normal padrão. Em outras palavras,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Z_n \leq z) = \Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx.$$

```python
def tcl(N, pop):
    size_sample = 100
    sample_mean = [
        np.random.choice(pop, size=size_sample, replace=True).mean() for _ in range(N)
    ]
    return np.array(sample_mean)

def plot_tcl(N_values, pop):

    fig, axs = plt.subplots(1, len(N_values), figsize=(15, 5), sharey=True)

    for i, N in enumerate(N_values):
        sample_means = tcl(N, pop)
        axs[i].hist(sample_means, bins=30, edgecolor='k', alpha=0.7)
        axs[i].set_title(f'{N} Amostras', fontsize=21)
        axs[i].set_xlabel('Média da Amostra', fontsize=18)
        axs[i].set_ylabel('Frequência', fontsize=18)

    plt.tight_layout(rect=[0, 0.03, 1, 0.95])
    plt.show()

np.random.seed(0)
# Gerar a população
pop = np.random.uniform(size=1000)

# Plota um histograma com diferentes números de amostras
plot_tcl([50, 200, 1000], pop)
```



1.3 Séries de tempo

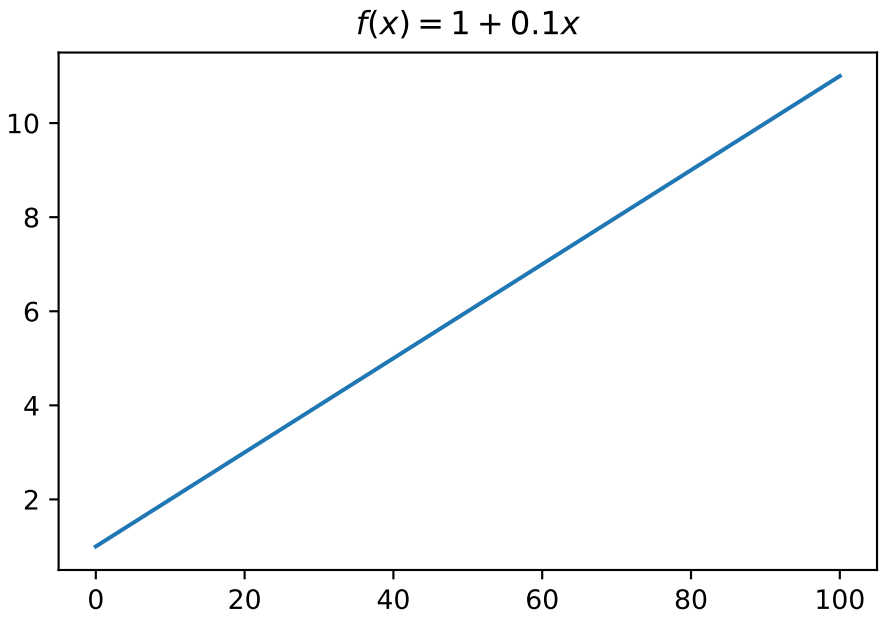
Uma série de tempo é caracterizada por uma sequência de observações tomada sequencialmente no tempo. Podemos chamar essa sequência de observações $ (y_{1},y_{2},y_{3}...) $ como sendo variáveis aleatórias, onde $y = f(t) + \varepsilon_t$, em outras palavras, cada observação é uma função do tempo mais um fator aleatório (ruído branco). Como esse y depende do tempo, vamos ter um valor diferente de y para cada valor de $t = 0, 1, 2, ..., T$; $y^* = f(t^*) + \varepsilon_{t^*}$. Então y_1 é o valor de y no período 1, y_2 é o valor de y no período 2 e assim vai. Uma série de tempo pode ser dividida entre um processo determinístico ou estocástico.

1.3.1 Processo determinístico

É um processo que não depende de um termo aleatório e sempre irá ter o mesmo resultado dado um valor inicial. O processo $T_t = 1 + 0,1t$ é um processo determinístico, pois não depende de nenhum fator aleatório, estando sempre acompanhado de uma constante (1) e um termo de tendência determinística $(0,1t)$.

Podemos observar essa função melhor, gerando o seguinte gráfico no **Python**.

```
def trend(f):
    x = np.linspace(0, 100, 1000)
    y = f(x)

    plt.clf()
    plt.plot(x, y)
    plt.title(r'$f(x) = 1 + 0.1x$')
    plt.show()

# f(x) = 1 + 0.1*x
trend(lambda x: 1 + 0.1 * x)
```



1.3.2 Processo estocástico

O que diferencia um processo estocástico do determinístico é o fator aleatório, por mais que esse fator seja aleatório ele apresenta uma função de distribuição de probabilidade, por mais que se saiba qual é o valor inicial de uma série, não dá para saber com exatidão o próximo valor, mas podemos atribuir probabilidades a diferentes valores.

1.3.2.1 Ruído Branco

Um ruído branco é uma sequência serial de variáveis aleatórias não correlacionadas com média zero e variância finita e constante, seria aquele erro (u) da primeira parte do curso. Assumimos duas condições importantes para o ruído branco: ele deve ser independente um do outro e deve apresentar uma distribuição normal[6]. Sendo escrito da seguinte forma:

$$\varepsilon_t \sim i.i.d.\mathcal{N}(0, \sigma^2)$$
$$\varepsilon_t \sim RB(0, \sigma^2)$$

O ruído branco assume 3 propriedades:

- $\mathbb{E}[\varepsilon_t] = \mathbb{E}[\varepsilon_t \mid \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots] = 0$
- $\mathbb{E}[\varepsilon_t \varepsilon_{t-j}] = \text{cov}[\varepsilon_t \varepsilon_{t-j}] = 0$

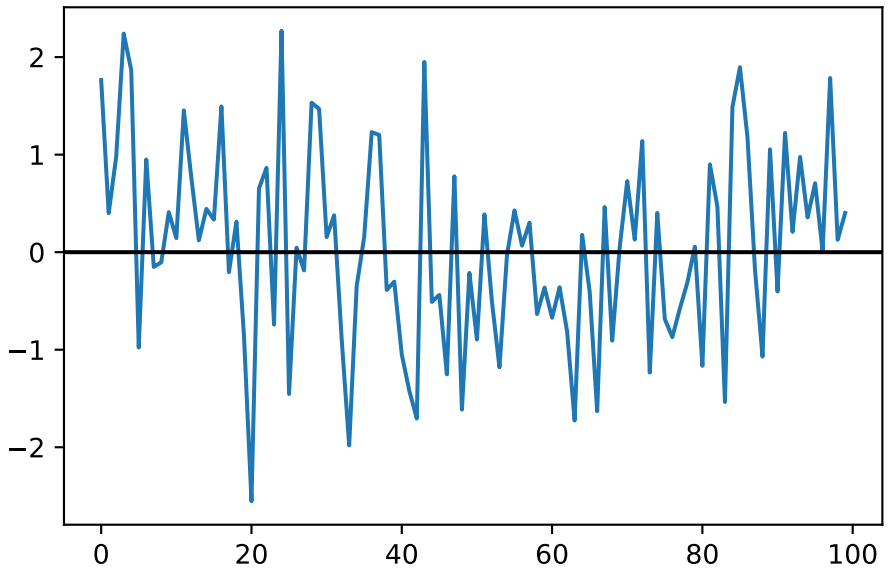
[6]Chamada também de *Distribuição normal gaussiana*.

- $\text{var}[\varepsilon_t] = \text{cov}[\varepsilon_t \varepsilon_t] = \sigma^2_{\varepsilon_t}$

As duas primeiras propriedades dizem respeito à impossibilidade de preditividade e à ausência de autocorrelação. A terceira diz respeito à homocedasticidade, a variância ser constante.

Para visualizar isso, criei uma função em **Python** que gera um conjunto de dados de ruído branco usando a função *np.random.normal()* que cria um conjunto aleatório de dados de uma distribuição normal, onde n é o tamanho da amostra desejado.

```
def white_noise(n):
    np.random.seed(0)
    white_noise = np.random.normal(0, 1, n)

    plt.clf()
    plt.plot(white_noise)
    plt.axhline(0, color = 'black')
    plt.show()

white_noise(100)
```



1.3.2.2 Passeio aleatório

Esse tempo passeio aleatório se diz pelo fato de que o valor de uma variável em um determinado período é igual ao seu valor no período passado mais um fator aleatório determinado por ε_t, sendo descrito por:

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Vamos supor um valor inicial para y_t como sendo y_1, então:

$$y_1 = y_0 + \varepsilon_1$$
$$y_2 = y_1 + \varepsilon_2$$
$$y_2 = y_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

Resolvendo isso recursivamente, temos:

$$y_t = y_0 + \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i$$

Se $y_0 \sim 0$, podemos então dizer que o passeio aleatório é uma soma acumulada de ruídos brancos:

$$y_t = \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i$$

Pode acontecer o caso do passeio aleatório ter uma constante γ adicionada:

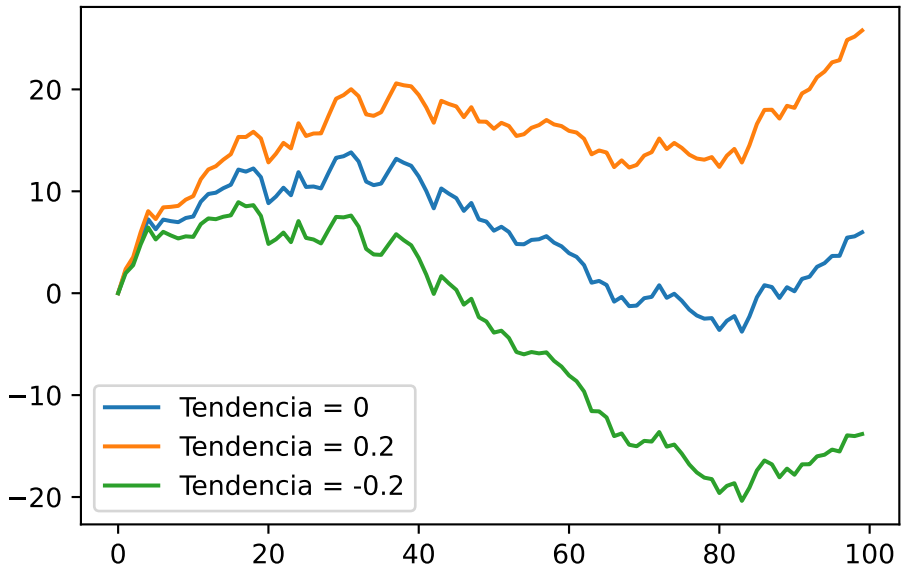
$$y_1 = \gamma + y_0 + \varepsilon_1$$

Logo, quando $y_0 \sim 0$, vamos ter que:

$$y_t = \gamma t + \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i$$

```
def random_walk(trend, n):
    np.random.seed(0)

    yt = np.zeros(n)
    epsilon = np.random.normal(0,1,n)
    for t in np.arange(1,n):
        yt[t] = t * trend + np.sum(epsilon[:t+1])

    return yt


def plot_rw(trend_list, t):
```

```
    plt.clf()
    for trend in trend_list:
        rw = random_walk(trend, t)
        plt.plot(rw, label=f'Tendencia = {trend}')

    plt.legend()
    plt.show()

trend_list = [0, 0.2, -0.2]
plot_rw(trend_list, t=100)
```



1.3.3 Estacionariedade e Autocorrelação

Antes de entrar no assunto de autocorrelação, devemos ter em mente algumas propriedades referentes ao primeiro momento (esperança) e segundo momento (variância) de um passeio aleatório. O primeiro momento de um passeio aleatório pode ser calculado pela sua média:

$$\mathbb{E}[y_t] = \mathbb{E}[y_0 + \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i] = \mathbb{E}[y_0] + \mathbb{E}[\sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i] = \mathbb{E}[y_0] + 0 = y_0 = \mu$$

Nota-se que a esperança (média) de y_t não depende de t, sendo uma constante e é por isso que estou chamando de μ.

O segundo momento é a variância:

$$\begin{aligned}
\text{Var}[y_t] = \mathbb{E}[y_t^2] &= \mathbb{E}[(y_t - \mathbb{E}[y_t])^2] \\
&= \mathbb{E}[y_t^2] - \mathbb{E}[y_0]^2 \\
&= \mathbb{E}[(y_0 + \sum \varepsilon_i)^2] \\
&= \mathbb{E}[y_0^2 + 2y_0 \sum \varepsilon_i + \sum \varepsilon_i^2] - \mu^2 \\
&= \mathbb{E}[y_0^2] + 2y_0 \sum \mathbb{E}[\varepsilon_i] + \sum \mathbb{E}[\varepsilon_i^2] - \mu^2 \\
&= \mu^2 + 0 + \sum \sigma^2 - \mu^2 = t\sigma^2
\end{aligned}$$

Podemos observar que a variância de um processo aleatório não é constante, pois vai depender de t.

Outra parada importante é definir a covariância para k lags:

$$\text{Cov}[y_t, y_{t-k}] = \mathbb{E}\{(y_t - \mathbb{E}[y_t])(y_{t-k} - \mathbb{E}[y_{t-k}])\} = \mathbb{E}[(y_t - \mu)(y_{t-k} - \mu)]$$

1.3.4 Estacionariedade

A hipótese da estacionariedade é um caso particular do **processo estocástico**, no qual se assume que o processo está em um estado de equilíbrio. O caso dos processos estritamente estacionários (estacionariedade forte) é quando **todas** as suas propriedades (momentos) não são afetadas pelo tempo. Como essas condições são muito restritas, na grande maioria das vezes nos referimos a esse processo estocástico como **fracamente estacionário**, ou **covariância-estacionário**, ou **estacionário de segunda ordem**. Isso quer dizer que apenas a média e a variância devem ser constantes e que a covariância deve depender apenas do número de lags (k):

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[y_t] &= \mu \\
\text{Var}[y_t] &= \mathbb{E}[(y_t - \mu)^2] = \sigma^2 \\
\text{Cov}[y_t, y_{t+k}] &= \mathbb{E}[(y_t - \mu)(y_{t-k} - \mu)] = \gamma_k
\end{aligned}$$

1.3.5 Função de autocorrelação (FAC)

Ao assumir a hipótese da estacionariedade, vamos ter que a função conjunta de probabilidade de y_{t_1} e y_{t_2} será a mesma para todo o tempo t_1 e t_2, que será constante. Isso implica que a **covariância** entre y_t e y_{t+k} será separada apenas por k intervalos de tempo (lag). Assim, a *autocovariância* ao lag k é definida por:

$$\gamma_k = \text{Cov}[y_t, y_{t+k}] = \mathbb{E}[(y_t - \mu)(y_{t-k} - \mu)]$$

Da mesma forma, teremos que a **autocorrelação** é dada por:

$$\rho_k = \frac{\mathbb{E}[(y_t - \mu)(y_{t-k} - \mu)]}{\sqrt{\mathbb{E}[(y_t - \mu)^2]\mathbb{E}[(y_t - \mu)^2]}} = \frac{\mathbb{E}[(y_t - \mu)(y_{t-k} - \mu)]}{\sigma^2}$$

Como em um processo estacionário a variância é constante, vamos ter que $\gamma_0 = \sigma^2$. Podemos então dizer que a autocorrelação no lag k é:

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$$

E isso implica que $\rho_0 = 1$ se $k = 0$.

A **Função de autocorrelação** é quando se plota um gráfico ρ_k contra o lag k.

Referencias

Box, George EP, Gwilym M Jenkins, Gregory C Reinsel, e Greta M Ljung. 2015. *Time series analysis: forecasting and control*. John Wiley & Sons.

Enders, W. 2014. *Applied Econometric Times Series*. Wiley Series em Probability e Statistics. Wiley. https://books.google.com.br/books?id=lmr9oQEACAAJ.

Hamilton, James Douglas. 1994. *Time series analysis*. Princeton university press.

Kotze, Kevin. 2019. «Time Series Analusis». 2019. https://www.economodel.com/time-series-analysis-2019.