

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS E DE COMPUTAÇÃO**

Projeto Computacional

**Gabriel de Oliveira Bispo (15453111)
Jaime Monçalvarga Neto (15461969)
Gabriel Reis Andrade (15453786)
Raphael Leonardi Viacava (15486212)
Eduardo Bovo Carneiro (15448550)
Carolina Santos Garcia (10311868)**

Relatório apresentado à disciplina SME0306 do Curso
de Engenharia Civil, da Escola de Engenharia de São
Carlos da Universidade de São Paulo.

**São Carlos
2025**

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Trajeto do ciclista.	4
Figura 2 – Trajeto percorrido obtido via Google Earth.	5
Figura 3 – Aproximação do perfil de elevação do terreno feita por interpolação com a forma de Lagrange	10
Figura 4 – Aproximação do perfil de elevação do terreno feita por interpolação com spline . . .	10
Figura 5 – Aproximação da inclinação do perfil com spline linear feita por diferenças finitas . .	11
Figura 6 – Aproximação da inclinação do perfil com spline cúbico feita por diferenças finitas . .	11

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Distância e altitude dos pontos levantados	5
Tabela 2 – Resultados das integrações numéricas após derivação por Diferenças Centradas. . .	12
Tabela 3 – Resultados das integrações numéricas após derivação por Diferenças Complexas. .	12
Tabela 4 – Erros dos métodos de integração numérica para diferentes formas de derivação. . .	13
Tabela 5 – Erros relativos (%) do trabalho líquido obtido por integração numérica em relação a (2.15).	13

SUMÁRIO

Sumário	3
1 INTRODUÇÃO	4
2 DESENVOLVIMENTO	4
2.1 Coleta de dados	4
2.2 Interpolação e Análise do Perfil do Trajeto	6
2.2.1 Interpolação Polinomial	6
2.2.2 Spline Linear	6
2.2.3 Spline Cúbica	6
2.2.4 Diferenças finitas centrada, progressiva e regressiva	7
2.2.5 Diferenças finitas complexas	7
2.3 Cálculo do Trabalho nas Subidas e Descidas	7
2.3.1 Regra dos Trapézios	8
2.3.1.1 Aproximação da segunda derivada por diferenças finitas	8
2.3.2 Regra de Simpson 1/3	8
2.3.3 Quadratura Gaussiana	9
3 RESULTADOS	10
3.1 Perfil de Elevação	10
3.2 Cálculo da inclinação do terreno	11
3.3 Trabalho Calculado Numericamente	12
3.3.1 Derivada por Diferenças Centradas	12
3.3.2 Derivada por Diferenças Complexas	12
3.4 Trabalho Calculado Analiticamente	13
REFERÊNCIAS	14
APÊNDICES	15

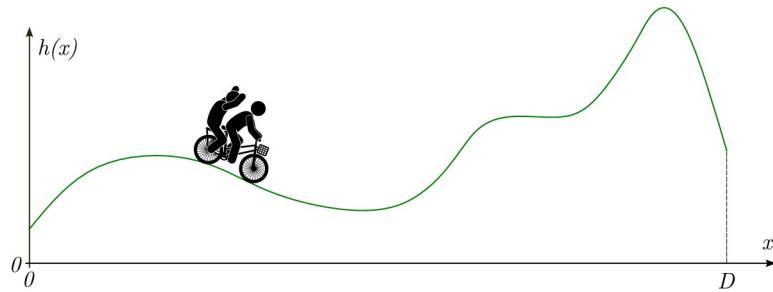
1 INTRODUÇÃO

O trabalho a seguir foi realizado com o intuito de encontrar uma estimativa para o trabalho mecânico realizado ao longo de um determinado trajeto real. Para isso, supôs-se que um ciclista de massa m percorre um percurso de comprimento D com uma velocidade constante e sofrendo apenas o efeito da aceleração da gravidade. Ao longo desse trajeto, plota-se sua posição $(x, h(x))$, sendo x a sua posição ao longo do trajeto e $h(x)$ a altitude daquele ponto. Assim, por meio de integração numérica, obteve-se uma estimativa do trabalho mecânico realizado.

Trajetos de ciclismo, em geral, apresentam variação de elevação. Assim, o trabalho realizado pelo ciclista para vencer a força peso ocorre apenas em trecho de subida, com inclinação positiva.

O objetivo deste trabalho é calcular o trabalho líquido de um ciclista de massa m em um percurso real, na Avenida São Carlos, em São Carlos, SP-Brasil. Isso é feito por meio de integração numérica, assumindo que o movimento ocorre com velocidade constante e sem aceleração.

Figura 1 – Trajeto do ciclista.



Fonte: SME0306 – Métodos Numéricos e Computacionais II, Projeto 6, ICMC-USP, 2025, p. 1.

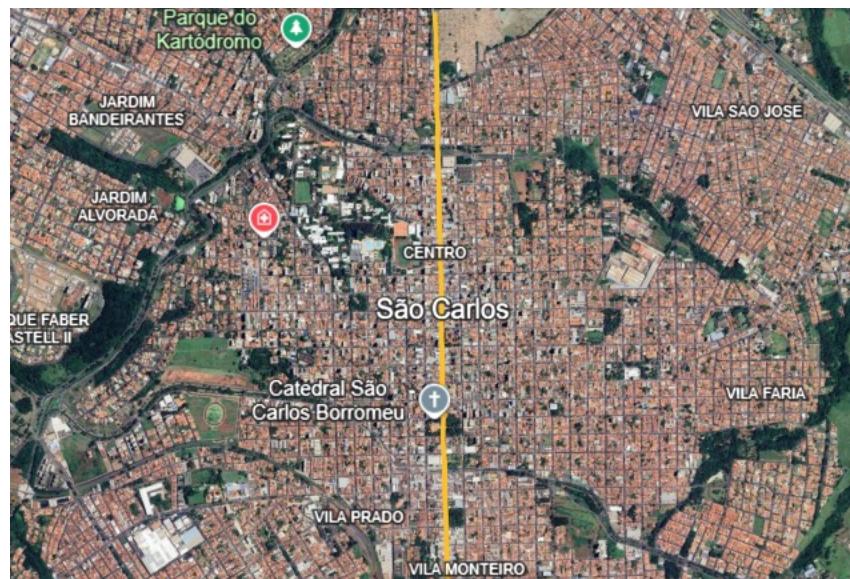
2 DESENVOLVIMENTO

2.1 Coleta de dados

Primeiramente, escolheu-se o percurso que seria o foco do trabalho em questão. Para tal, utilizou-se o SIG *Google Earth*, obtendo-se o trajeto apresentado na Figura 2.

Desta forma, obteve-se os dados de distância e altitude de 31 pontos, conforme apresentados na Tabela 2.1.

Figura 2 – Trajeto percorrido obtido via Google Earth.



Fonte: Google Earth (2025). Acesso em: 02 nov. 2025.

Tabela 1 – Distância e altitude dos pontos levantados

Ponto	Distância x_i (km)	Altitude h_i (m)
1	0.000	832.9
2	0.226	822.8
3	0.331	821.0
4	0.437	817.2
5	0.539	815.2
6	0.647	807.1
7	0.748	811.7
8	0.845	822.1
9	0.954	834.3
10	1.055	838.7
11	1.153	845.5
12	1.253	849.2
13	1.360	856.1
14	1.462	859.1
15	1.565	864.7
16	1.665	867.0
17	1.768	865.1
18	1.867	865.3
19	1.971	857.1
20	2.064	850.6
21	2.179	846.8
22	2.270	841.0
23	2.371	833.4
24	2.497	829.0
25	2.606	835.4
26	2.694	839.4
27	2.801	846.0
28	2.924	851.0
29	3.025	849.0
30	3.148	847.6
31	3.242	842.2

Fonte: Elaborada pelos autores.

2.2 Interpolação e Análise do Perfil do Trajeto

Pode-se utilizar diferentes formas de interpolação para obter uma função contínua $h(x)$ a partir dos dados da Tabela 2.1. Dessa forma, utilizou-se três métodos interpoladores:

- Interpolação polinomial;
- Spline linear;
- Spline cúbica.

2.2.1 Interpolação Polinomial

Para interpolação polinomial, utilizamos a Forma de Lagrange, em que o polinômio de Lagrange é dado por (2.1) e o polinômio interpolante é dado por (2.2), onde $p_n(x)$ é a aproximação para $h(x)$.

$$L_j(x) = \frac{\prod_{k=0}^n (x - x_k)}{\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n (x_j - x_k)} \quad (2.1)$$

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(x) \quad (2.2)$$

2.2.2 Spline Linear

A função spline linear interpolante de $f(x)$, $S_1(x)$, nos nós x_0, x_1, \dots, x_n , para cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, é dada por (2.3).

$$s_i(x) = f(x_{i-1}) \frac{(x - x_i)}{(x_{i-1} - x_i)} + f(x_i) \frac{(x - x_{i-1})}{(x_i - x_{i-1})}, \quad \forall x \in [x_{i-1}, x_i]. \quad (2.3)$$

2.2.3 Spline Cúbica

A função spline cúbica interpolante $S_3(x)$ é dada por (2.4).

$$s_k(x) = a_k (x - x_k)^3 + b_k (x - x_k)^2 + c_k (x - x_k) + d_k, \quad x \in [x_{k-1}, x_k], \quad (2.4)$$

onde $h_k = x_k - x_{k-1}$, $f_k = f(x_k)$ e $g_k = s''(x_k)$, com condições de contorno naturais $g_0 = g_n = 0$. Os coeficientes são dados por (2.5).

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{g_k - g_{k-1}}{6 h_k}, \\ b_k &= \frac{g_k}{2}, \\ c_k &= \frac{f_k - f_{k-1}}{h_k} - \frac{2h_k g_k + h_k g_{k-1}}{6}, \\ d_k &= f_k. \end{aligned} \quad k = 1, \dots, n, \quad (2.5)$$

Posteriormente, para calcular numericamente a derivada $h'(x)$ para cada ponto x_i , utilizou-se quatro métodos:

- Diferenças finitas centrada, progressiva e regressiva;
- Diferenças finitas centradas complexas;

2.2.4 Diferenças finitas centrada, progressiva e regressiva

Devido à ordem de convergência 2, utilizou-se o método de diferença finita centrada, apresentado em (2.6):

$$D_0 f(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}. \quad (2.6)$$

Pode-se perceber que esse método não pode ser utilizado nos extremos. Portanto, no ponto inicial, utilizou-se o método da diferença finita progressiva, dada por (2.7) e no ponto final, utilizou-se o método da diferença finita regressiva, dada por (2.8).

$$D_+(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}; \quad (2.7)$$

$$D_f(x_0) = \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h}. \quad (2.8)$$

2.2.5 Diferenças finitas complexas

No método de diferenças finitas complexas, pode-se diminuir o passo h sem que haja erros de truncamento, pelo fato de não se subtrair partes semelhantes, tal qual ocorre em diferenças finitas centrada, progressiva e regressiva. Assim, o método complexo é dado por (2.9).

$$D_c f(x_0) = \frac{\Im(x_0 + ih)}{h}. \quad (2.9)$$

Nota-se que esse método pode ser aplicado nos extremos dos pontos sem prejuízos.

Com esses métodos de calcular a função interpolante e a derivada numérica, calculou-se $\sin(\theta(x_i))$, por (2.10).

$$\sin(\theta(x_i)) = \frac{h'(x_i)}{\sqrt{1 + (h'(x_i))^2}}. \quad (2.10)$$

2.3 Cálculo do Trabalho nas Subidas e Descidas

Na terceira parte do desenvolvimento, calcula-se o trabalho considerando as subidas e descidas do trajeto analisado. Utilizando do $\sin(\theta(x_i))$ calculado anteriormente, encontra-se o integrando que representa a contribuição das subidas e descidas ao trabalho. Para calcular o trabalho W_+ e W_- , os integrandos utilizados são (2.11) e (2.12).

$$f_{max}(x_i) = \max\{0, \sin(\theta(x_i))\} \sqrt{1 + (h'(x_i))^2}. \quad (2.11)$$

$$f_{min}(x_i) = \min\{0, \sin(\theta(x_i))\} \sqrt{1 + (h'(x_i))^2}. \quad (2.12)$$

Após definição do integrando, considerando que $m = 70 \text{ kg}$ e $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ é necessário realizar a integral para encontrar o W_+ e W_- :

$$W_+ = mg \int_0^D f_{max}(x) dx. \quad (2.13)$$

$$W_- = mg \int_0^D f_{min}(x) dx \quad (2.14)$$

A partir das integrais acima, utiliza-se de três métodos diferentes para realização da integração numérica e, após isso, compara-se a eficiência e precisão dos mesmos. Os métodos a serem utilizados são os listados a seguir:

- Regra dos Trapézios;
- Regra de Simpson 1/3;
- Quadratura Gaussiana.

Posteriormente, calcula-se o trabalho líquido total a partir de:

$$W_{liq_{tot}} = mg \int_0^D h'(x)dx = mg[h(D) - h(0)] \quad (2.15)$$

2.3.1 Regra dos Trapézios

A Regra dos Trapézios é um método numérico para a realização da integração numérica quando a integral é muito difícil ou até impossível de calcular de forma analítica. Para seu cálculo, o intervalo de integração (a, b) é dividido em n subintervalos, e em cada intervalo substitui o gráfico por um trapézio. A soma das áreas desses n trapézios é a aproximação da integral, dada por (2.16).

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n \frac{h}{2} [f(x_{i-1}) + f(x_i)], \quad h = \frac{b-a}{n}. \quad (2.16)$$

O erro da Regra dos Trapézios pode ser estimado por (2.17).

$$|E_T| \leq (b-a) \frac{h^2}{12} \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|. \quad (2.17)$$

2.3.1.1 Aproximação da segunda derivada por diferenças finitas

A segunda derivada da função $f(x)$, que é utilizada em (2.17) pode ser aproximada numericamente a partir de uma variação da derivação numérica proveniente do método das diferenças finitas centradas apresentada inicialmente em 2.2.4. Para isso utiliza-se de (2.18), (2.19) e (2.20).

- **Pontos internos (diferença central):**

$$f''(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{h^2} \quad (2.18)$$

- **Ponto inicial (diferença progressiva):**

$$f''(x_1) \approx \frac{f(x_3) - 2f(x_2) + f(x_1)}{h^2} \quad (2.19)$$

- **Ponto final (diferença regressiva):**

$$f''(x_n) \approx \frac{f(x_n) - 2f(x_{n-1}) + f(x_{n-2})}{h^2} \quad (2.20)$$

Essas aproximações possuem erro de truncamento da ordem de $O(h^2)$.

2.3.2 Regra de Simpson 1/3

O segundo método utilizado para estimar o trabalho é a Regra de Simpson 1/3 que, comparada à Regra dos Trapézios, é um método que oferece maior precisão pois aproxima a função à um polinômio de grau 2 em cada par de subintervalos. Nesse método, a quantidade de subintervalos n é necessariamente par, para aplicar o que foi descrito acima. Para aproximar a integral utiliza-se de (2.21).

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} \frac{h}{3} [f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})]. \quad (2.21)$$

Diferentemente da Regra do Trapézio, o erro em Simpson 1/3 depende da quarta derivada da função, o que o torna bastante preciso. Tal erro é econtrado por (2.22).

$$|E_S| \leq (b - a) \frac{h^4}{180} \max_{x \in [a,b]} |f^{(iv)}(x)|. \quad (2.22)$$

2.3.3 Quadratura Gaussiana

O terceiro e último método de cálculo de integração numérica é a Quadratura Gaussiana. Esse é um método de alta precisão, moldado na ideia de escolher os pontos de Gauss e pesos para os mesmos. De maneira diferente que nos métodos anteriores, a Quadratura Gaussiana coloca os pontos de integração nos zeros dos polinômios de Legendre, e não igualmente espaçados. Analisando o intervalo (a, b) , obtém-se a aproximação:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n w_i f\left(\frac{b-a}{2} x_i + \frac{a+b}{2}\right). \quad (2.23)$$

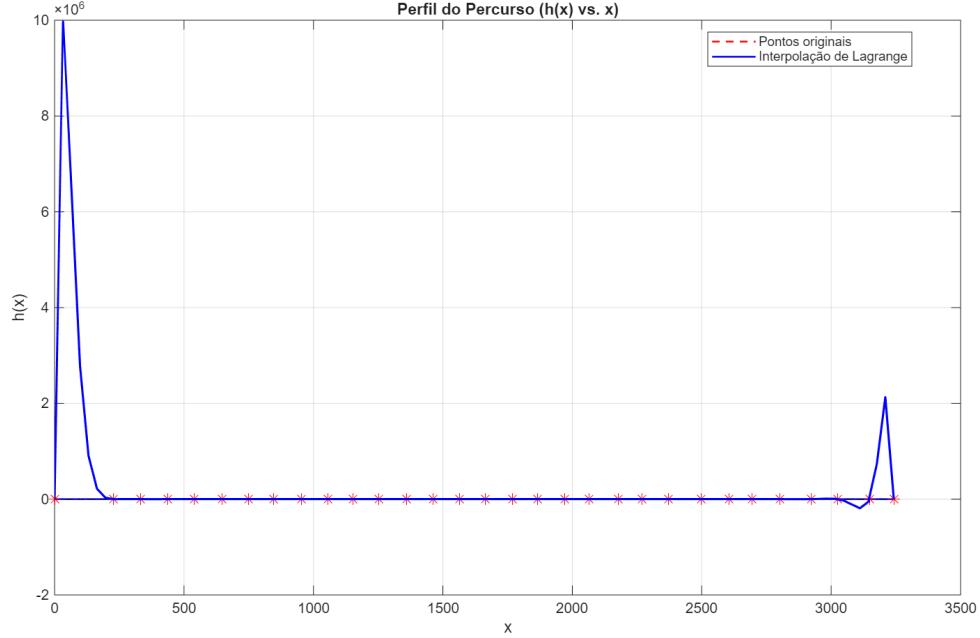
Este método foi implementado de duas maneiras distintas no projeto: integrando globalmente com quatro pontos no intervalo inteiro (que foi denominada quadratura gaussiana global), e integrando cada intervalo da *spline* com 2 pontos (que foi denominada quadratura gaussiana segmentada).

3 RESULTADOS

3.1 Perfil de Elevação

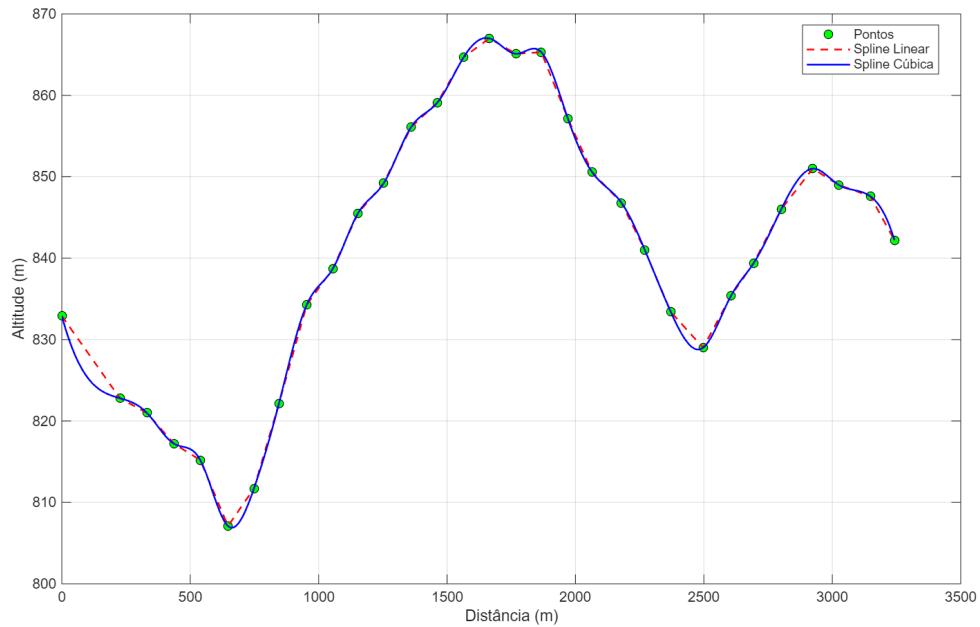
Com base nas equações (2.1) a (2.5) e no trajeto escolhido, plotou-se as aproximações do perfil de elevação dadas por cada método apresentado:

Figura 3 – Aproximação do perfil de elevação do terreno feita por interpolação com a forma de Lagrange



Fonte: Elaborada pelos autores.

Figura 4 – Aproximação do perfil de elevação do terreno feita por interpolação com spline



Fonte: Elaborada pelos autores.

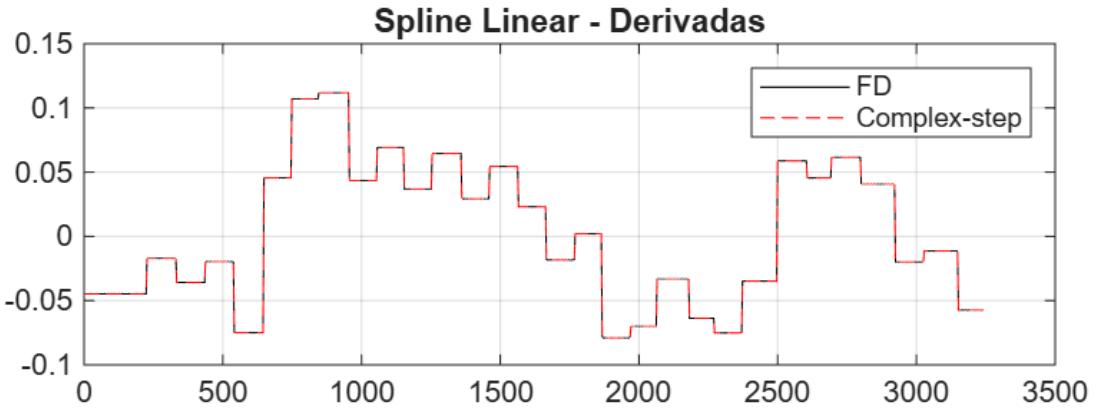
Como pode-se observar, a interpolação pela forma de Lagrange é imprópria para a representação do perfil. Isso se deve à quantidade de nós fornecidos, visto que geram um polinômio de grau 30, o que

causa oscilações nas extremidades e resultados absurdos, denominado fenômeno de Runge. Já para os dois métodos de spline, ambos representaram de forma adequada a elevação do terreno, porém, o spline cúbico aparenta representá-lo melhor, devido à suavização da variação do terreno entre os nós, o que a torna mais condizente com a realidade.

3.2 Cálculo da inclinação do terreno

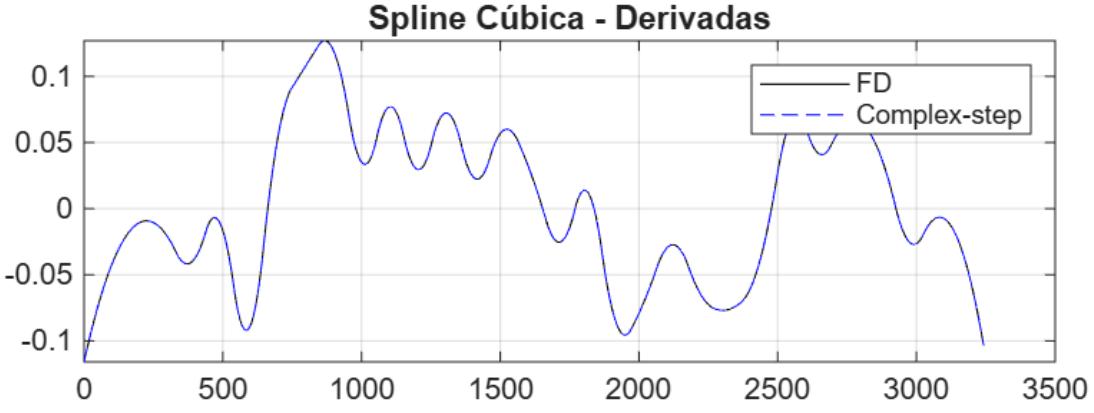
Obtidos os perfis de elevação, calculou-se a inclinação do terreno $h'(x)$ por meio das equações (2.6) a (2.9), obtendo-se os seguintes perfis de inclinação:

Figura 5 – Aproximação da inclinação do perfil com spline linear feita por diferenças finitas



Fonte: Elaborada pelos autores.

Figura 6 – Aproximação da inclinação do perfil com spline cúbico feita por diferenças finitas



Fonte: Elaborada pelos autores.

Como pode-se observar, as duas formas de obtenção da derivada por meio de diferenças finitas chegam em resultados muito similares, sendo praticamente imperceptível visualmente nos gráficos obtidos. Quanto aos métodos de spline, percebe-se que há uma diferença entre os valores de $h'(x)$ obtidos, inclusive nos trechos em que o percurso é ascendente ou descendente. Além disso, obteve-se também o seno do ângulo de inclinação do terreno, cujo sinal indica se o percurso é ascendente ou descendente no ponto analisado. Assim, com base no perfil do terreno e nos gráficos de inclinação, percebe-se que o terreno é ascendente aproximadamente nos trechos 650 a 1670, 1770 a 1860 e 2480 a 2930 metros, visto que a derivada é positiva, e descendente nos demais.

3.3 Trabalho Calculado Numericamente

Após o cálculo da inclinação do terreno, assim como dito anteriormente, o trabalho é calculado numericamente por meio dos métodos apresentados em 2.3.

Primeiramente, antes de realizar a integração numérica, é necessário encontrar os respectivos integrandos a partir de (2.11) e (2.12). Como foram utilizados dois métodos diferentes para a realização da Spline e dois métodos diferentes para diferenciação, obteve-se quatro integrandos diferentes para $f_{\max}(x_i)$ e quatro para $f_{\min}(x_i)$. Após determinação de todos os oito integrandos, realiza-se as integrações presentes em (2.13) e (2.14), e, utilizando como dados $m = 70 \text{ kg}$ e $g = 9,8 \text{ m/s}^2$, encontra-se todos os valores de W_+ e W_- utilizando dos três métodos já listados em 2.3.

3.3.1 Derivada por Diferenças Centradas

Primeiramente, utiliza-se do método de derivação numérica apresentado em 2.2.4. Com esse método encontra-se a tabela a seguir:

Tabela 2 – Resultados das integrações numéricas após derivação por Diferenças Centradas.

Método Numérico	Tipo de Spline	$W_+ (\text{J})$	$W_- (\text{J})$	$W_{liq} (\text{J})$
Trapézio	Linear	56292.7225	-49892.8952	6399.8274
	Cúbica	56954.5040	-50576.0088	6378.4952
Simpson 1/3	Linear	56362.4359	-49909.1402	6453.2957
	Cúbica	56955.6013	-50575.8024	6379.7989
Gauss-Legendre (G1 – 4 pts global)	Linear	50319.8342	-44453.6836	5866.1505
	Cúbica	47694.8070	-41631.0426	6063.7644
Gauss-Legendre (G2 – 2 pts/segmento)	Linear	56292.7225	-49892.8952	6399.8274
	Cúbica	56954.5040	-50574.7066	6379.7974

Fonte: Elaborada pelos autores.

3.3.2 Derivada por Diferenças Complexas

Utilizando do método das diferenças complexas na hora de encontrar $h'(x)$, e utilizando desse valor para encontrar os respectivos integrandos, encontra-se:

Tabela 3 – Resultados das integrações numéricas após derivação por Diferenças Complexas.

Método Numérico	Tipo de Spline	$W_+ (\text{J})$	$W_- (\text{J})$	$W_{liq} (\text{J})$
Trapézio	Linear	56292.7221	-49892.8954	6399.8267
	Cúbica	56954.5042	-50576.0092	6378.4950
Simpson 1/3	Linear	56362.4354	-49909.1405	6453.2949
	Cúbica	56955.6016	-50575.8028	6379.7988
Gauss-Legendre (G1 – 4 pts global)	Linear	50319.8299	-44453.6826	5866.1473
	Cúbica	47694.8021	-41631.0364	6063.7657
Gauss-Legendre (G2 – 2 pts/segmento)	Linear	56292.7221	-49892.8954	6399.8267
	Cúbica	56954.5042	-50574.7069	6379.7973

Fonte: Elaborada pelos autores.

Por meio da estimativa de erro conhecida para o Método dos Trapézios apresentada em (2.17) chega-se no erro do método tanto para Diferenças Centradas quanto para Diferenças Complexas. Tais erros estão presentes a seguir:

Tabela 4 – Erros dos métodos de integração numérica para diferentes formas de derivação.

Método de Derivação	Spline Linear – E_T (J)	Spline Cúbica – E_T (J)
Diferenças Centradas	1.847×10^1	1.256
Diferenças Complexas	1.847×10^1	1.256

Fonte: Elaborada pelos autores.

Observa-se que os erros obtidos pelos métodos de diferenças centradas e diferenças complexas foram analiticamente idênticos, tanto para o ajuste linear quanto para o cúbico. Isso ocorre porque, para os dados analisados, o erro das diferenças centradas ocorre quando o passo (h) é pequeno demais, porém, nesse método, o passo mede 10^{-5} , que não é pequeno o suficiente para ocorrer erros de arredondamento. Desse modo, ambos os métodos produzem a mesma estimativa numérica das derivadas.

Em relação ao erro associado ao Método de Simpson 1/3, este é numericamente nulo. De acordo com (2.22), o erro depende da quarta derivada da função integrada. No entanto, como as funções utilizadas neste trabalho são polinômios de, no máximo, grau três, suas quartas derivadas são identicamente nulas. Assim, o erro do método para essas funções também é igual a zero.

3.4 Trabalho Calculado Analiticamente

A partir de (2.15), calculou-se o trabalho líquido total encontrando-se $W_{liq_{tot}} = 6379.800 J$. Em seguida, encontrou-se os erros relativos dos trabalhos líquidos comparados ao analítico, dados na Tabela 5.

Tabela 5 – Erros relativos (%) do trabalho líquido obtido por integração numérica em relação a (2.15).

Método de Interpolação (Derivação)	Trapézio	Simpson 1/3	Gauss–Legendre (G1)	Gauss–Legendre (G2)
Linear (Dif. Centradas)	0,3139	1,1520	8,0512	0,3139
Cúbica (Dif. Centradas)	0,0205	0,0000	4,9537	0,0000
Linear (Dif. Complexas)	0,3139	1,1520	8,0512	0,3139
Cúbica (Dif. Complexas)	0,0205	0,0000	4,9537	0,0000

Fonte: Elaborada pelos autores.

Os resultados indicam que os erros relativos do trabalho líquido são praticamente idênticos entre os métodos de derivação por diferenças finitas e complexas, o que confirma a consistência numérica observada anteriormente na Tabela 4.

Percebe-se que os menores erros foram obtidos com as aproximações cúbicas, especialmente nos métodos de Simpson 1/3 e Gauss–Legendre com dois pontos por segmento (G2), os quais atingiram erro relativo praticamente nulo. O método de Gauss–Legendre global (G1), por outro lado, apresentou um erro consideravelmente maior devido à sua menor adaptação local à forma do integrando. Isso ocorre porque, ao integrar todo o domínio de uma só vez, o método global assume implicitamente que o integrando pode ser bem representado por um polinômio de grau limitado em todo o intervalo.

Entretanto, o perfil de altitude $h(x)$ e, consequentemente, sua derivada $h'(x)$ apresentam diversas variações locais de inclinação e concavidade (alternando entre subidas e descidas), pois são polinomios definidos por partes.

Assim, o pequeno número de pontos de Gauss da quadratura global não é suficiente para capturar essas variações com precisão, levando a uma subestimação ou superestimação do trabalho.

Já a quadratura segmentada (G2), ao aplicar a integração em cada trecho do spline cúbico separadamente, aproveita a suavidade local de cada polinômio, adaptando-se melhor às mudanças de curvatura e resultando em valores de trabalho muito mais próximos do valor analítico $mg\Delta h$.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho teve como objetivo determinar o trabalho mecânico realizado por um ciclista ao longo de um percurso real, considerando as variações de altitude obtidas experimentalmente. Para isso, foram aplicadas técnicas de interpolação (polinomial por Lagrange e *splines* linear e cúbica), diferenciação numérica (diferenças finitas e diferenças complexas) e integração numérica (método dos trapézios, Simpson 1/3 e quadratura gaussiana).

Os resultados mostraram que a interpolação cúbica proporcionou as aproximações mais precisas do perfil de elevação, devido à sua suavidade e continuidade nas derivadas, características adequadas para representar fenômenos físicos contínuos como o relevo. As derivações por diferenças finitas e pelo método da diferença complexa apresentaram resultados praticamente idênticos, evidenciando que, para o passo de malha utilizado, ambos os métodos atingiram a precisão de máquina esperada.

Quanto à integração, verificou-se que os métodos de Simpson 1/3 e de Gauss-Legendre segmentado ($G2$) produziram os menores erros relativos, sendo capazes de reproduzir o valor analítico do trabalho líquido com erro praticamente nulo. A precisão do método de Simpson decorre do fato de as funções integradas serem polinômios de até terceiro grau, cuja quarta derivada é nula, eliminando o erro de truncamento teórico.

Por outro lado, a quadratura gaussiana global ($G1$) apresentou desempenho inferior, com erros significativamente maiores. Essa discrepância decorre da baixa adaptabilidade do método global às variações locais do integrando. Como o perfil $h(x)$ é descrito por uma *spline* cúbica por partes, o integrando apresenta várias mudanças de concavidade e inclinação. Assim, um número reduzido de pontos de Gauss, aplicado de forma global, não é suficiente para capturar essas variações, levando à subestimação ou superestimação do trabalho. Já a forma segmentada ($G2$) aplica a quadratura localmente em cada trecho da *spline*, ajustando-se melhor ao comportamento real da função e alcançando excelente precisão.

Em síntese, o estudo permitiu compreender o comportamento e as limitações dos principais métodos de integração numérica, bem como a importância da escolha adequada da interpolação e da discretização. Os resultados confirmam a consistência entre os métodos numéricos e a formulação analítica, demonstrando que o emprego de *splines* cúbicas aliado a métodos de integração adaptativos é a abordagem mais eficiente e precisa para o cálculo do trabalho em trajetos reais com variações de altitude.

REFERÊNCIAS

Google LLC. **Google Earth Pro, versão 7.3.** 2025. <https://earth.google.com/>. Acesso em: nov. 2025.

The MathWorks, Inc. **MATLAB R2025b.** Natick, Massachusetts, USA, 2025. Disponível em: <https://www.mathworks.com/>. Acesso em: nov. 2025.

APÊNDICES

APÊNDICE A – CÓDIGO MATLAB

O código-fonte completo desenvolvido para este trabalho (`projeto06_final.m`) pode ser acessado digitalmente através do QR Code abaixo.



Figura 7 – QR Code com link direto para o código MATLAB