



DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA INFORMATICA, MODELLISTICA,
ELETTRONICA E SISTEMISTICA

Corso di Laurea in Robotics and Automation Engineering

Anilisi e Controllo del volo di un Dirigibile Pubblicitario

**Prof.
Alessandro Casavola**

**Giuseppe Coppola
Mat. 263624**

ANNO ACCADEMICO 24/25

Indice

Indice	1
1 Introduzione	3
1.1 Funzionamento	4
2 Modellazione	5
2.1 Modello Matematico	5
2.2 Rappresentazione nello Spazio degli stati	6
2.3 Descrizione del modello in ambiente Matlab e Simulink	7
2.4 Linearizzazione	8
2.4.1 Punti di Equilibrio	8
2.4.2 Modello Lineare	9
2.4.3 Modellazione in Simulink	10
3 Analisi	13
3.1 Risposta Libera	14
3.1.1 Modello Simulink della Risposta Libera	14
3.2 Risposta Forzata	16
3.2.1 Risposta all'Impulso	17
3.2.2 Risposta al Gradino	19
3.3 Stabilità	20
3.3.1 Stabilità Interna	20
3.3.2 Stabilità Esterna	21
4 Sintesi	22
4.1 Proprietà Strutturali	22
4.1.1 Raggiungibilità e Controllabilità	23
Progetto del Controllore	23
4.1.2 Osservabilità e Ricostruibilità	25
Progetto dell'Osservatore	26
Modellazione dell'osservatore in Simulink	27
5 Compensatore Dinamico (Regolatore)	31
6 Conclusioni	33

7	Codici MATLAB	34
7.1	Parametri del Sistema	34
7.2	Equilibrio e Linearizzazione	34
7.3	Autovalori e Autovettori	35
7.4	Funzione di Trasferimento e Poli	35
7.5	Raggiungibilità e Controllabilità	35
7.6	Osservabilità e Ricostruibilità	35
7.7	Grafici	36
7.7.1	Risposta al gradino per il sistema non lineare	36
7.7.2	Risposta al gradino per il sistema lineare	36
7.7.3	Risposta Libera	37
7.7.4	Risposta Forzata	37
	Risposta all'Impulso	37
	Risposta al Gradino	38
7.7.5	Sistema Controllato (Controllore)	39
7.7.6	Sistema Osservato (Osservatore Asintotico)	39
	Confronto tra $\tilde{x}_1(t)$ e $\hat{x}_1(t)$	40
	Confronto tra $\tilde{x}_2(t)$ e $\hat{x}_2(t)$	40
	Confronto tra $\tilde{x}_3(t)$ e $\hat{x}_3(t)$	40
	Errori di Ricostruzione degli stati	40
7.7.7	Sistema con Compensatore Dinamico	41

Capitolo 1

Introduzione

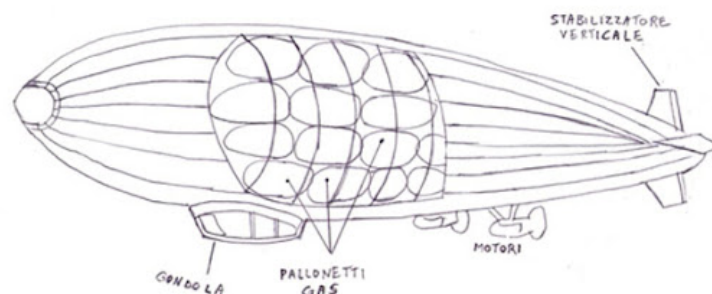


Figura 1.1: Struttura del dirigibile

Esistono tre categorie di dirigibili:

- **Flosci:** non dotati di intelaiatura in metallo all'interno dell'involucro di tessuto.
- **Semirigidi:** dotati di alcune parti in metallo, ma non di uno scheletro esteso su tutta la struttura.
- **Rigidi:** dotati di un'intelaiatura in metallo in tutta la struttura.

Queste aereonavi, durante la Prima Guerra Mondiale venivano usati per scopi di osservazione e bombardamento.

Il Paese più all'avanguardia si rivelò, anche in questo caso, la Germania, che usò le aeronavi per attaccare le città nemiche. I bombardamenti erano imprecisi e poco efficaci, ma dal punto di vista psicologico erano dirompenti perché fino ad allora nessuno aveva immaginato che il nemico potesse colpire dal cielo.

Nel secondo dopoguerra la loro principale funzione è stata quella pubblicitaria perché, grazie alle dimensioni, sono visibili anche a grande distanza.

Più raramente, sono usate per viaggi di intrattenimento e, talvolta, di esplorazione.

1.1 Funzionamento

Un dirigibile sfrutta il principio di Archimede per sollevarsi nell'aria. Il suo funzionamento si basa su una combinazione di elementi fisici come il gas di sollevamento, il controllo della direzione e l'azionamento dei motori.

Un dirigibile è composto da tre principali componenti:

- **Involucro** (o gondola): Il guscio esterno che contiene il gas di sollevamento. Può essere realizzato in materiali leggeri e resistenti come il nylon o l'alluminio.
- **Gas di sollevamento**: Il gas più comunemente utilizzato nei dirigibili è l'elio, che è più leggero dell'aria, ma può essere anche l'idrogeno (che è più leggero dell'elio, ma è infiammabile e meno sicuro). Il gas di sollevamento riempie le grandi sacche all'interno dell'involucro, fornendo la spinta necessaria per sollevare il dirigibile.
- **Gondola e motori**: La gondola è la parte che contiene il pilota, i passeggeri (se presenti) e i motori. La gondola è sospesa sotto l'involucro e si collega a esso tramite cavi o strutture di supporto. I motori alimentano le eliche che permettono al dirigibile di muoversi in avanti e di controllare la direzione.

Il dirigibile si solleva grazie alla differenza di densità tra l'aria e il gas di sollevamento. Secondo il **principio di Archimede**, un corpo immerso in un fluido (in questo caso l'aria) subisce una spinta verso l'alto pari al peso del fluido spostato. Poiché il gas di sollevamento è più leggero dell'aria, spinge il dirigibile verso l'alto.

Se il peso totale del dirigibile è inferiore al peso dell'aria spostata dal gas di sollevamento, il dirigibile salirà.

La quantità di gas presente nell'involucro e la sua temperatura influenzano la capacità di sollevamento. Se il gas si riscalda, si espande e solleva di più il dirigibile, ma se si raffredda, il dirigibile potrebbe perdere parte della sua capacità di sollevamento. In questo elaborato andremo a studiare l'andamento e il controllo lungo la direzione verticale del dirigibile.

Capitolo 2

Modellazione

2.1 Modello Matematico

Possiamo classificare la dinamica in due equazioni:

$$m \ddot{Z}(t) + b \dot{Z}(t) + \frac{1}{2} A C_d \rho_{aria} \dot{Z}(t)^2 = -m g + f_w(t) + V g \rho_{aria} \left(1 - \frac{T_{aria}}{T(t)}\right) \quad (2.1)$$

Questa equazione appena fornita include effetti dinamici, dissipativi e forze esterne. Ogni termine:

- $m \ddot{Z}(t)$: rappresenta la **forza** dovuta all'accelerazione del corpo lungo l'asse verticale. Dove:
 1. m : **massa del dirigibile** che comprende massa della struttura, massa dell'equipaggio e massa del gas all'interno dell'involucro
 2. $\ddot{Z}(t)$: **accelerazione verticale** del dirigibile
- $b \dot{Z}(t)$: rappresenta una forza di tipo viscoso, proporzionale alla velocità. Dove:
 1. b : **coefficiente di attrito viscoso** equivalente (per modellare la resistenza dell'aria)
 2. $\dot{Z}(t)$: **velocità verticale** del dirigibile
- $\frac{1}{2} A C_d \rho_{aria} \dot{Z}(t)^2$: rappresenta la resistenza aerodinamica, una forza dissipativa quadratica rispetto alla velocità. Dove:
 1. A : **area frontale** del corpo (proiettata sull'asse verticale)
 2. C_d : **coefficiente di resistenza aerodinamica**, dipende dalla forma del corpo
 3. ρ_{aria} : **densità dell'aria**
- mg : **peso** del corpo. Dove g è l'**accelerazione di gravità**.
- $f_w(t)$: **forza** esercitata dalle correnti d'aria.

- $Vg\rho_{aria}\left(1 - \frac{T_{aria}}{T(t)}\right)$: **forza di spinta archimedeana o di galleggiamento**, corretta per il rapporto tra la temperatura dell'aria e la temperatura del gas interno al dirigibile (elio nel nostro caso). Dove:
 1. V : **volume** del dirigibile
 2. T_{aria} : **temperatura** dell'ambiente esterno
 3. $T(t)$: **temperatura** dell'elio interno al dirigibile

La seconda equazione sarà:

$$c\dot{T}(t) + k[T(t) - T_{aria}] = q \quad (2.2)$$

Va a descrivere l'evoluzione temporale della temperatura di un corpo in presenza di uno scambio termico con l'ambiente. Si tratta di una tipica equazione di bilancio termico.

Ogni termine:

- $c\dot{T}(t)$: rappresenta il **calore** necessario per variare la temperatura del corpo nel tempo. Dove:
 1. \dot{T} : **derivata** temporale della temperatura, ossia la velocità con cui cambia la temperatura del corpo
 2. c : **capacità termica** dell'elio nel dirigibile
- $k[T(t) - T_{aria}]$: Rappresenta la **perdita (o guadagno)** di calore per scambio termico con l'ambiente, secondo la legge del raffreddamento di Newton. Dove:
 1. k : **coefficiente di scambio termico**, che misura quanto efficientemente il corpo scambia calore con l'ambiente. Maggiore è k , più rapido è lo scambio.
 2. $T(t) - T_{aria}$: **differenza** tra la temperatura del gas e quella dell'ambiente. Se il gas è più caldo dell'aria ($T(t) > T_{aria}$) cede calore all'ambiente; se è più freddo ($T(t) < T_{aria}$) assorbe calore dall'ambiente.
- q : **sorgente termica** esterna, cioè una quantità di calore per unità di tempo. Può essere positiva (fornisce calore al sistema) o negativa (assorbe calore dal sistema)

2.2 Rappresentazione nello Spazio degli stati

Tramite le equazioni (2.1) e (2.2) si costruisce il seguente sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) & x(0) = x_0 \\ y(t) = \eta(x(t), u(t)) \end{cases} \quad (2.3)$$

Il sistema risulta essere **non lineare** poiché è presente un termine al quadrato (velocità verticale) nella rappresentazione della forza aereodinamica.

Si può ora indicare l'**ingresso** $u(t) \in \mathbb{R}$ con q , l'**uscita** $y(t) \in \mathbb{R}$ con lo stato $x_1(t)$. Quindi si definisce lo stato del sistema nel seguente modo:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z(t) \\ \dot{Z}(t) \\ T(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

In definitiva, si può descrivere la dinamica complessiva con il seguente sistema di equazioni non lineari:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \frac{1}{m} \left[-b x_2(t) - \frac{1}{2} A C_d \rho_{aria} x_2(t)^2 - mg + f_w(t) + V g \rho_{aria} \left(1 - \frac{T_{aria}}{x_3(t)} \right) \right] \\ \dot{x}_3(t) = \frac{1}{c} \left[u(t) - k \left(x_3(t) - T_{aria} \right) \right] \end{cases} \quad (2.4)$$

Considerando le seguenti condizioni iniziali:

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 288.15 \end{bmatrix}$$

Quindi il dirigibile partirà da **fermo** a **livello del mare** e l'elio avrà una **temperatura ambiente** (15°C).

2.3 Descrizione del modello in ambiente Matlab e Simulink

Segue una rappresentazione del modello non lineare in ambiente Simulink:

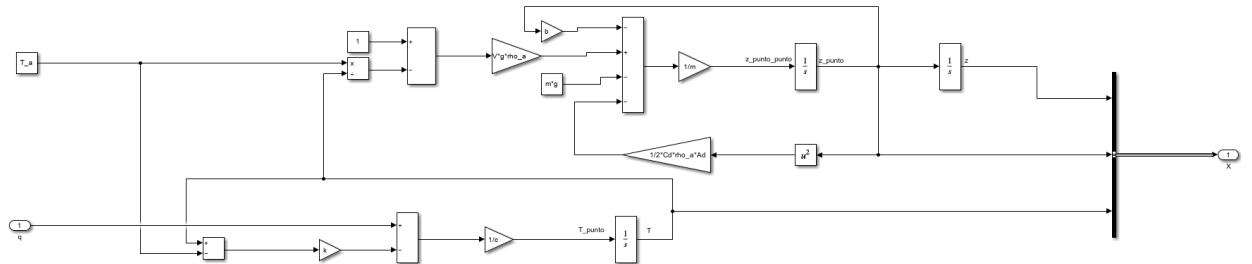


Figura 2.1: Modello Simulink non Lineare

Per un fattore di semplicità viene considerata nulla la forza esercitata dalle correnti d'aria.

I parametri numerici vengono scelti prendendo come modello di studio un dirigibile di medie/piccole dimensioni usato per scopi puramente pubblicitari:

- $m = 1000 \text{ Kg}$
- $b = 20 \text{ Kg/s}$
- $V = 4000 \text{ m}^3$
- $A = 60 \text{ m}^2$
- $C_d = 0.05$
- $\rho_{aria} = 1.225 \text{ Kg/m}^3$
- $g = 9.81 \text{ m/s}^2$
- $T_{aria} = 288.15 \text{ K}$

2.4 Linearizzazione

Per effettuare uno studio più approfondito e specifico del modello si rappresenta il medesimo in forma lineare.

2.4.1 Punti di Equilibrio

I **punto di equilibrio** di un sistema dinamico sono stati in cui il sistema rimane stabile (o immobile) se non subisce perturbazioni esterne. In altre parole, sono le condizioni in cui le variabili di stato del sistema non cambiano nel tempo. Analiticamente, i punti di equilibrio (x_e, u_e) sono soluzioni del sistema di equazioni differenziali in questione tale che:

$$\dot{x}_e = f(x_e, u_e)$$

Essendo $x_e \in \mathbb{R}^n$ un vettore costante:

$$f(x_e, u_e) = 0 \tag{2.5}$$

Un sistema può presentare più punti di equilibrio ognuno dei quali presenta varie proprietà di stabilità:

- **Stabile:** se il sistema viene leggermente perturbato, ritorna al punto di equilibrio.
- **Instabile:** se il sistema viene leggermente perturbato, si allontana dal punto di equilibrio.
- **Neutro:** se il sistema viene leggermente perturbato, rimane nella nuova posizione senza ritornare o allontanarsi

Quindi, fissato u_e , per calcolare il punto di equilibrio:

$$\dot{x}(t) = 0$$

Per ogni equazione si ha:

$$\dot{x}_1(t) = 0 \rightarrow x_{1,eq} = cost \quad (2.6)$$

Ovvero, $x_{1,eq}$ può assumere qualsiasi valore. Si può prendere come riferimento una quota di **450 m**;

Per la seconda equazione differenziale:

$$\dot{x}_2(t) = 0 \rightarrow 0 = \frac{1}{m} \left[-b \cdot 0 - \frac{1}{2} A C_d \rho_{aria} \cdot 0 - mg + V g \rho_{aria} \left(1 - \frac{T_{aria}}{T_{eq}} \right) \right]$$

e quindi

$$T_{eq} = \frac{T_{aria}}{1 - \left(\frac{m}{V} \rho_{aria} \right)} \quad (2.7)$$

Infine, per la terza equazione, considerando l'ingresso $q(t)$ costante:

$$q_{eq} = u_{eq} = k(T_{eq} - T_{aria}) \quad (2.8)$$

Si avrà quindi un punto di equilibrio pari a:

$$x_{eq} = \begin{bmatrix} x_{1,eq} \\ x_{2,eq} \\ x_{3,eq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 450 \\ 0 \\ 362.04 \end{bmatrix}, \quad u_{eq} = 1108.3, \quad y_{eq} = x_{1,eq} \quad (2.9)$$

2.4.2 Modello Lineare

Dopo aver effettuato il calcolo analitico dei punti di equilibrio del sistema si passa al processo di linearizzazione. Viene quindi effettuata la linearizzazione poiché studiare il sistema linearizzato è molto più semplice in termini di strumenti utilizzabili

E', quindi, una strategia per semplificare l'analisi, progettare controlli e ottenere intuizioni sul comportamento locale del sistema, specialmente attorno ai punti di equilibrio.

Il sistema, quindi, viene linearizzato mediante l'espansione di Taylor attorno al punto di equilibrio. Avrà la seguente forma:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = A\tilde{x}(t) + B\tilde{u}(t), & \tilde{x}(0) = \tilde{x}_0 \\ \tilde{y}(t) = C\tilde{x}(t) + D\tilde{u}(t) \end{cases} \quad (2.10)$$

dove:

$$\tilde{x}(t) = x(t) - x_{eq}$$

$$\tilde{u}(t) = u(t) - u_{eq}$$

$$\tilde{y}(t) = y(t) - y_{eq}$$

Le matrici del sistema linearizzato saranno:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\partial}{\partial x} f(x(t), u(t))|_{x_{eq}, u_{eq}} & B &= \frac{\partial}{\partial u} f(x(t), u(t))|_{x_{eq}, u_{eq}} \\ C &= \frac{\partial}{\partial x} \eta(x(t), u(t))|_{x_{eq}, u_{eq}} & D &= \frac{\partial}{\partial u} \eta(x(t), u(t))|_{x_{eq}, u_{eq}} \end{aligned}$$

Risolvendo le derivate e, calcolando il tutto nel punto di equilibrio:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m}[-b - A C_d \rho_{aria} x_{2,eq}] & \frac{Vg \rho_{aria} T_{aria}}{m x_{3,eq}^2} \\ 0 & 0 & -\frac{k}{c} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{c} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1 \times 3} \quad D = 0 \in \mathbb{R}$$

Andando ora a sostituire tutti i parametri:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0.020 & 0.1057 \\ 0 & 0 & -1.20 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.080 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D = 0 \quad (2.11)$$

Dopo aver calcolato le matrici si va a costruire il sistema linearizzato considerando le seguenti condizioni iniziali di tale sistema:

$$\tilde{x}_0 = \begin{bmatrix} -450 \\ 0 \\ -73.8846 \end{bmatrix}$$

Il sistema risulta essere **SISO** (Single Input Single Output), ovvero un sistema avente un solo ingresso e una sola uscita.

2.4.3 Modellazione in Simulink

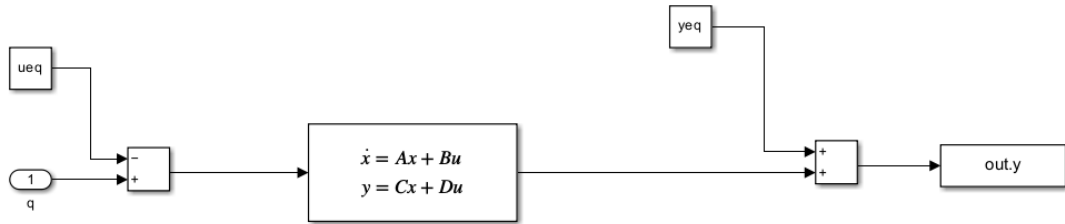


Figura 2.2: Sistema Linearizzato attorno al Punto di Equilibrio

In Simulink è presente il blocco **State-Space** il quale consente di modellare sistemi dinamici rappresentati nello spazio degli stati.

Quest'ultimo è particolarmente utile per implementare sistemi lineari tempo-invarianti (LTI) descritti dalle equazioni di stato e uscita.

Prende in ingresso (a sinistra) il segnale $u(t)$ e il segnale in uscita (a destra) sarà $y(t)$. Il blocco, inoltre non ha un ingresso per il vettore delle condizioni iniziali $x(0)$ poiché viene definito separatamente.

In definitiva, nel blocco si vanno ad inserire le matrici A , B , C e D calcolate in precedenza e le condizioni iniziali \tilde{x}_0 .

Per andare ad analizzare l'andamento di tutte e tre le variabili di stato viene inserita nel blocco la matrice C definita come la matrice identità $I_{3 \times 3}$ e D come vettore colonna di soli zeri $0_{3 \times 1}$.

Inoltre, per avere il tutto attorno il punto di equilibrio si definisce $y_{eq} = x_{eq}$.

Andando ora ad effettuare una simulazione sia del sistema linearizzato che quello non lineare con un tempo di simulazione pari a 70 sec e andando a definire un ingresso:

$$u(t) = \begin{cases} 1500 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Il gradino avrà un valore molto elevato poiché, per valori piccoli, il dirigibile non sarà in grado di sollevarsi e quindi a salire di quota.

Di seguito vengono mostrate le evoluzioni delle variabili di stato sia per il sistema non lineare che per quello linearizzato.

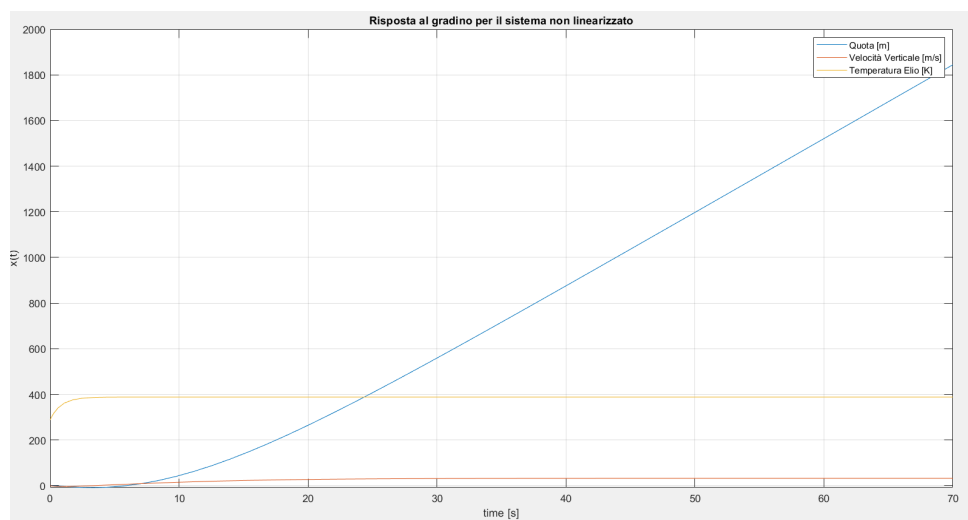


Figura 2.3: Risposta al gradino del Sistema non Lineare

Si può notare che la quota cresce *quasi linearmente* nel tempo.

Ciò suggerisce che il sistema accelera inizialmente, poi mantiene una velocità quasi costante, come si vede dall'incremento lineare della quota.

La velocità parte da zero, cresce rapidamente nei primi secondi e poi si stabilizza a un valore costante. Il fatto che la velocità si stabilizzi suggerisce che le forze resistive controbilanciano le forze propulsive.

Infine, la temperatura, parte ad una temperatura pari a quella ambientale e si stabilizza rapidamente a una temperatura finale di circa 388 K.

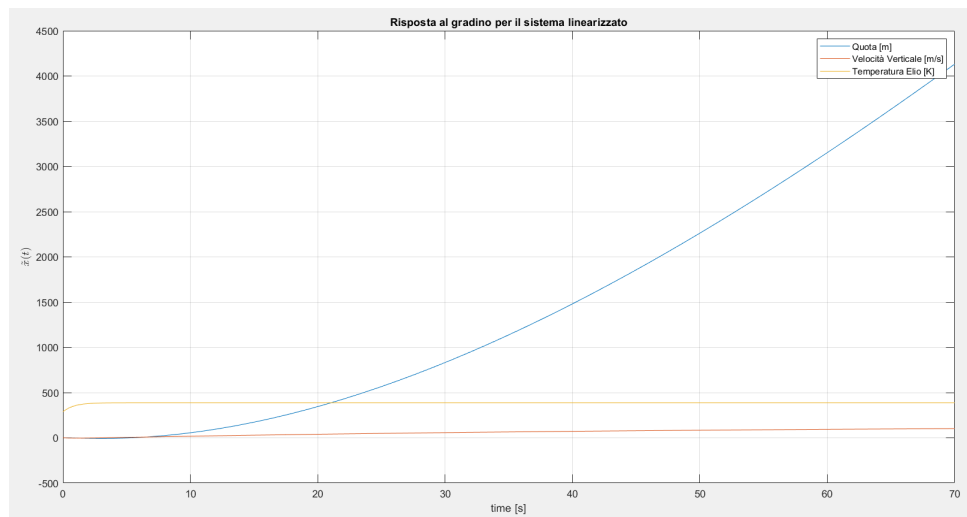


Figura 2.4: Risposta al gradino del Sistema Lineare

I grafici risultano essere prettamente uguali. La differenza sostanziale sta nel valore raggiunto dalla quota. Nel caso del sistema lineare il sistema raggiunge una quota più elevata; questo è dovuto ad un leggero aumento del valore della velocità.

Capitolo 3

Analisi

Partendo dal sistema:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = A\tilde{x}(t) + B\tilde{u}(t) , & \tilde{x}(0) = \tilde{x}_0 \\ \tilde{y}(t) = C\tilde{x}(t) + D\tilde{u}(t) \end{cases} \quad (3.1)$$

la soluzione con stato iniziale \tilde{x}_0 e andamento dell'ingresso $\tilde{u}(t)$ (per $t \geq 0$), è pari alla **Formula di Lagrange**:

$$\begin{cases} \tilde{x}(t) = e^{A(t-t_0)} \tilde{x}_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B\tilde{u}(\tau) d\tau , & \tilde{x}(t_0) = \tilde{x}_0 \\ \tilde{y}(t) = C e^{A(t-t_0)} \tilde{x}_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B\tilde{u}(\tau) d\tau + D\tilde{u}(t) \end{cases} \quad (3.2)$$

dove

$$e^{At} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

e viene chiamata **matrice esponenziale**.

Dovuto alla *tempo invarianza*, il tempo iniziale t_0 è pari a 0 e, inoltre, per il principio di sovrapposizione degli effetti la risposta si può scomporre in **risposta libera** e **risposta forzata**. Quindi:

$$\begin{cases} \tilde{x}(t) = \tilde{x}_l(t) + \tilde{x}_f(t) \\ \tilde{y}(t) = \tilde{y}_l(t) + \tilde{y}_f(t) \end{cases} \quad (3.3)$$

Rispettivamente:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_l(t) &= e^{A(t-t_0)} \tilde{x}_0 & \tilde{x}_f(t) &= \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B\tilde{u}(\tau) d\tau \\ \tilde{y}_l(t) &= C e^{A(t-t_0)} \tilde{x}_0 & \tilde{y}_f(t) &= \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B\tilde{u}(\tau) d\tau + D\tilde{u}(t) \end{aligned}$$

3.1 Risposta Libera

Si ha che:

$$\tilde{x}_l(t) = e^{A(t-t_0)} \tilde{x}_0$$

corrisponde all'**evoluzione libera dello stato** a partire dalle condizioni iniziali \tilde{x}_0 . Si noti che il termine $e^{A(t-t_0)}$ indica come avviene la transizione dallo stato iniziale allo stato $\tilde{x}(t)$ in assenza di contributi dovuti all'ingresso. Mentre:

$$\tilde{y}_l(t) = C e^{A(t-t_0)} \tilde{x}_0$$

corrisponde all'**evoluzione libera dell'uscita**.

Un ruolo fondamentale nell'evoluzione libera lo avrà la matrice A del sistema. Infatti, essa dipende dagli autovalori i quali sono:

$$eig(A) = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.020 \\ -1.20 \end{bmatrix}$$

Ai seguenti autovalori corrisponderanno i seguenti modi:

$$m_1(t) = e^{0 \cdot t} = 1$$

$$m_2(t) = e^{-0.020 t}$$

$$m_3(t) = e^{-1.20 t}$$

Studiando ora la proprietà dei modi, risulta che $m_2(t)$ ed $m_3(t)$ sono **convergenti** mentre $m_1(t)$ è **limitato**.

3.1.1 Modello Simulink della Risposta Libera

Considerando il modello Simulink:

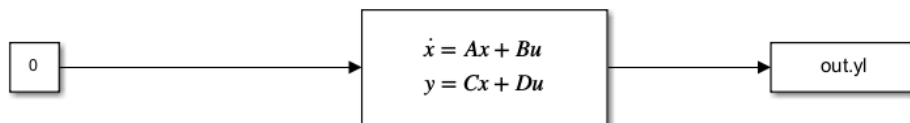


Figura 3.1: Modello per la Simulazione della Risposta Libera dello Stato

Impostando un tempo di simulazione pari a 100 s si hanno i seguenti andamenti (pagina successiva):

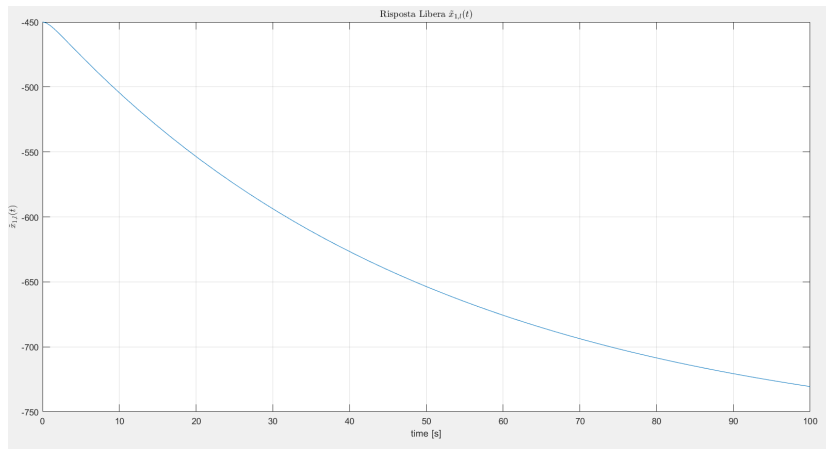


Figura 3.2: Evoluzione libera della variabile di stato $\tilde{x}_1(t)$

Come detto in precedenza, sarà un modo limitato poiché l'autovalore associato avrà parte reale nulla. Quindi varrà che:

$$|m_1(t)| \leq M \quad (3.4)$$

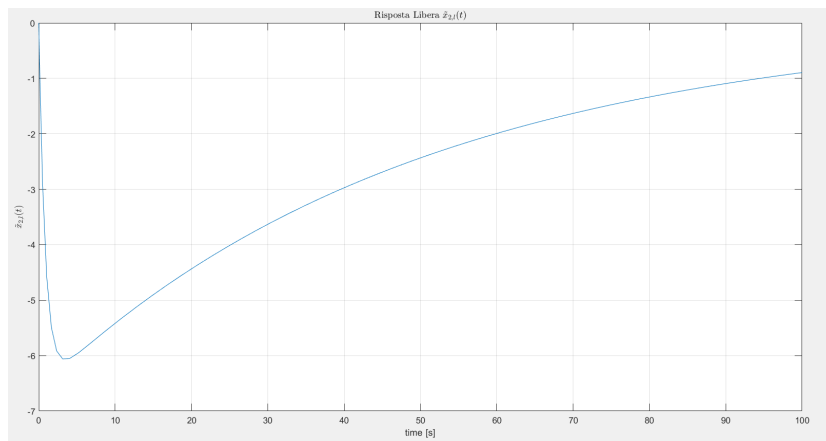


Figura 3.3: Evoluzione libera della variabile di stato $\tilde{x}_2(t)$

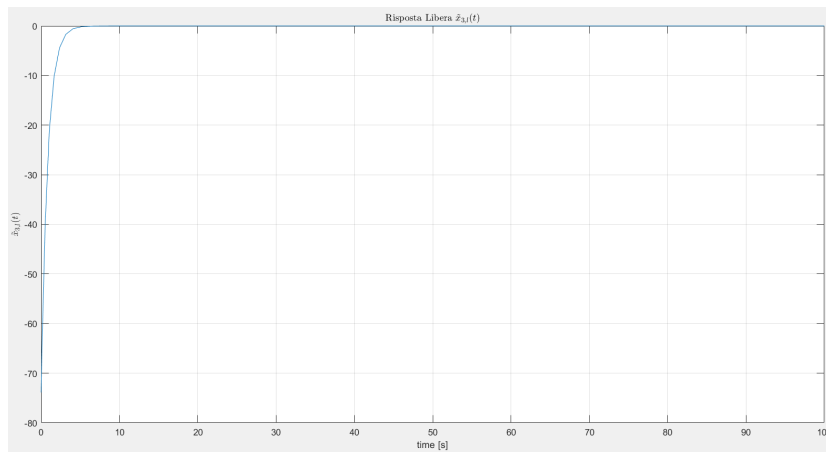


Figura 3.4: Evoluzione libera della variabile di stato $\tilde{x}_3(t)$

I seguenti modi associati alle variabili di stato $\tilde{x}_2(t)$ e $\tilde{x}_3(t)$ risultano essere convergenti poiché:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} m_i(t) = 0 \quad i = 2, 3$$

Essendo che la matrice A presenta tutti autovalori distinti, l'evoluzione libera consiste nella somma delle singole evoluzioni e, inoltre, gli autovettori andranno a dettare le direzioni nello spazio degli stati. Gli autovalori sono:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} -0.99 \\ 0.02 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0.74 \\ -0.10 \\ 0.99 \end{bmatrix}$$

3.2 Risposta Forzata

Il termine:

$$\tilde{x}_f(t) = \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B \tilde{u}(\tau) d\tau$$

corrisponde all'**evoluzione forzata dello stato**. Si osservi che in tale integrale il contributo di $u(\tau)$ allo stato $x(t)$ è pesato tramite la funzione ponderatrice $e^{A(t-\tau)} B$. Si ha anche:

$$\tilde{y}_f(t) = \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B \tilde{u}(\tau) d\tau + D \tilde{u}(t)$$

e viene chiamata **evoluzione forzata dell'uscita**.

La risposta forzata rappresenta il contributo alla risposta totale dovuto esclusivamente all'ingresso applicato al sistema.

Considerando il sistema linearizzato, esso può essere descritto tramite la seguente forma:

$$\begin{cases} \tilde{x}(t) = W_{\tilde{x}\tilde{u}} \tilde{u}(t) \\ \tilde{y}(t) = W_{\tilde{y}\tilde{u}} \tilde{u}(t) \end{cases} \quad (3.5)$$

dove:

$$W_{\tilde{x}\tilde{u}} = (sI - A)^{-1} B = \frac{\Gamma_1 s_{n-1} + \Gamma_2 s_{n-2} + \dots + \Gamma_n}{s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_n}$$

$$W_{\tilde{y}\tilde{u}} = C(sI - A)^{-1} B + D = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_n}{s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_n}$$

Il calcolo della risposta forzata nel dominio del tempo richiede il calcolo di un integrale di convoluzione. Mediante però le **Trasformate di Laplace** il calcolo dell'evoluzione forzata risulterà più agevole.

Si definisce per prima cosa la seguente Trasformata:

$$\tilde{X}(s) = W_{\tilde{x}\tilde{u}}(s) \tilde{U}(s) \quad (3.6)$$

la quale rappresenta il prodotto tra la trasformata dell'ingresso e della funzione di trasferimento. Effettuando il calcolo si ha che:

$$W_{\tilde{x}\tilde{u}}(s) = \begin{bmatrix} \frac{0.008456}{s(s^2+1.22s+0.024)} \\ \frac{0.008456}{s^2+1.22s+0.024} \\ \frac{0.08}{s+1.2} \end{bmatrix}$$

Verrà quindi analizzata la risposta forzata per due ingressi differenti:

- **Impulso Unitario (Dirac):** ingresso il cui risulta avere un "picco" in un determinato istante di tempo. La particolarità è che la sua trasformata risulta essere pari a 1.
- **Gradino Unitario:** definito come

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

3.2.1 Risposta all'Impulso

Si studia quindi la risposta forzata all'impulso di Dirac; nel dominio delle trasformate:

$$X_f(s) = W_{\tilde{x}, \tilde{u}} \tilde{U}(s) \quad (3.8)$$

dove $\tilde{U}(s) = 1$.

Quindi, per ogni variabile di stato, applicando la decomposizione in fratti semplici si ha:

$$X_{f, \tilde{x}_1}(s) = W_{\tilde{x}_1, \tilde{u}} \tilde{U}(s) = \left[\frac{0.03523}{s} + \frac{0.00597}{s + 1.2} - \frac{0.3583}{s + 0.02} \right] \cdot 1$$

$$X_{f, \tilde{x}_2}(s) = W_{\tilde{x}_2, \tilde{u}} \tilde{U}(s) = \left[\frac{0.0072}{s + 0.02} - \frac{0.0072}{s + 1.2} \right] \cdot 1$$

$$X_{f, \tilde{x}_3}(s) = W_{\tilde{x}_3, \tilde{u}} \tilde{U}(s) = \left[\frac{0.08}{s + 1.2} \right] \cdot 1$$

Applicando ora le anti-trasformate così da passare dal dominio della frequenza al dominio del tempo:

$$x_{f, \tilde{x}_1}(t) = 0.03523 + 0.00597 e^{-1.2t} - 0.3583 e^{-0.02t}$$

$$x_{f, \tilde{x}_2}(t) = 0.0072 e^{-0.02t} - 0.0072 e^{-1.2t}$$

$$x_{f, \tilde{x}_3}(t) = 0.08 e^{-1.2t}$$

Effettuando ora la simulazione impostando un tempo di 100 s:

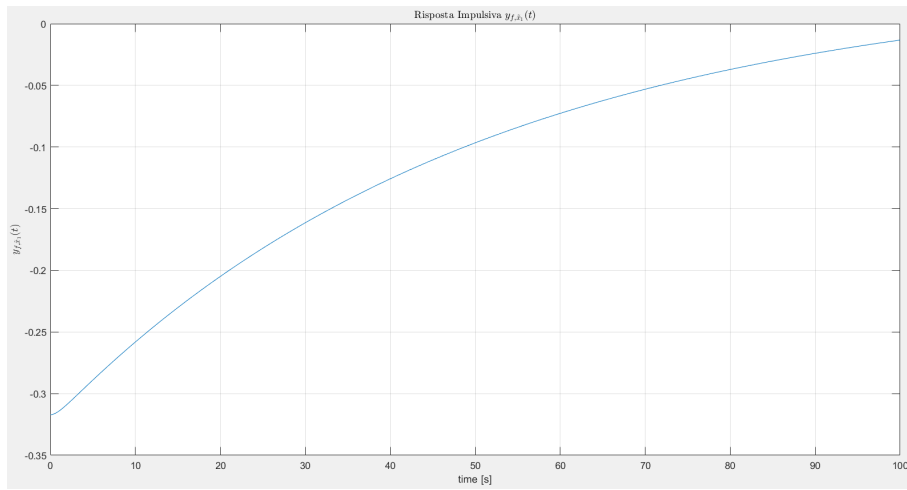


Figura 3.5: Risposta forzata all'impulso della variabile di stato $\tilde{x}_1(t)$

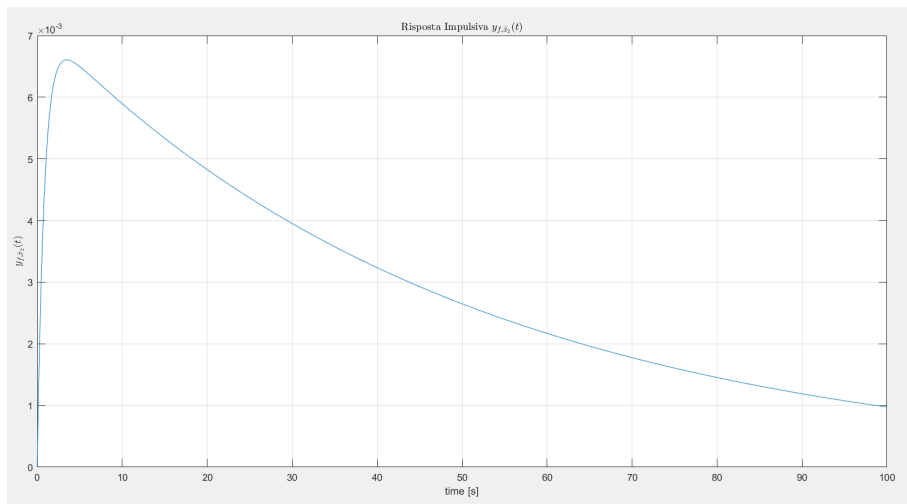


Figura 3.6: Risposta forzata all'impulso della variabile di stato $\tilde{x}_2(t)$

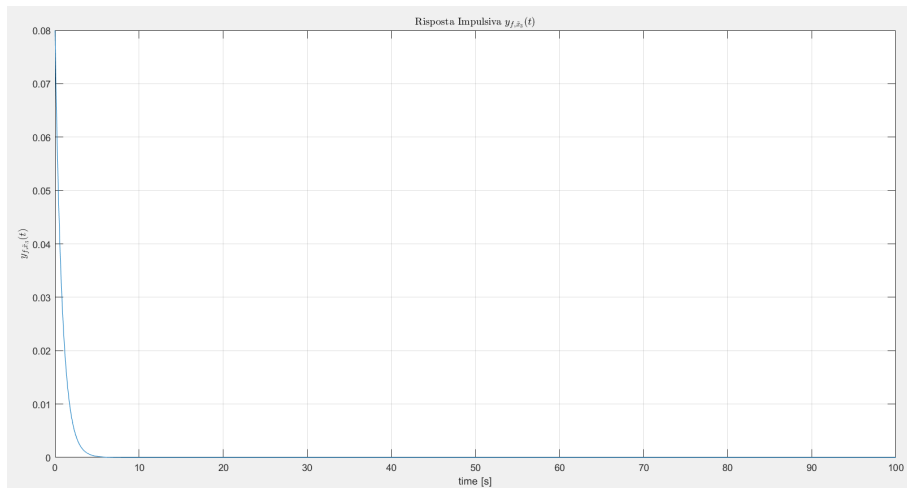


Figura 3.7: Risposta forzata all'impulso della variabile di stato $\tilde{x}_3(t)$

3.2.2 Risposta al Gradino

Partendo da:

$$X_f(s) = W_{\tilde{x},\tilde{u}} \tilde{U}(s) \quad (3.9)$$

dove $\tilde{U}(s)$ è la trasformata di un gradino unitario e corrisponde a $\frac{1}{s}$.

Per ogni variabile di stato si ha:

$$X_{f,\tilde{x}_1}(s) = W_{\tilde{x}_1,\tilde{u}} \tilde{U}(s) = \left[\frac{0.03523}{s} + \frac{0.00597}{s+1.2} - \frac{0.3583}{s+0.02} \right] \cdot \frac{1}{s}$$

$$X_{f,\tilde{x}_2}(s) = W_{\tilde{x}_2,\tilde{u}} \tilde{U}(s) = \left[\frac{0.0072}{s+0.02} - \frac{0.0072}{s+1.2} \right] \cdot \frac{1}{s}$$

$$X_{f,\tilde{x}_3}(s) = W_{\tilde{x}_3,\tilde{u}} \tilde{U}(s) = \left[\frac{0.08}{s+1.2} \right] \cdot \frac{1}{s}$$

Applicando ora le anti-trasformate così da passare dal dominio della frequenza al dominio del tempo:

$$x_{f,\tilde{x}_1}(t) = 0.03523t - 17.910025 - 0.004975e^{-1.2t} + 17.915e^{-0.02t}$$

$$x_{f,\tilde{x}_2}(t) = 0.354 + 0.006e^{-1.2t} - 0.36e^{-0.02t}$$

$$x_{f,\tilde{x}_3}(t) = 0.0667 - 0.0667e^{-1.2t}$$

Effettuando ora la simulazione impostando un tempo di 100 s:

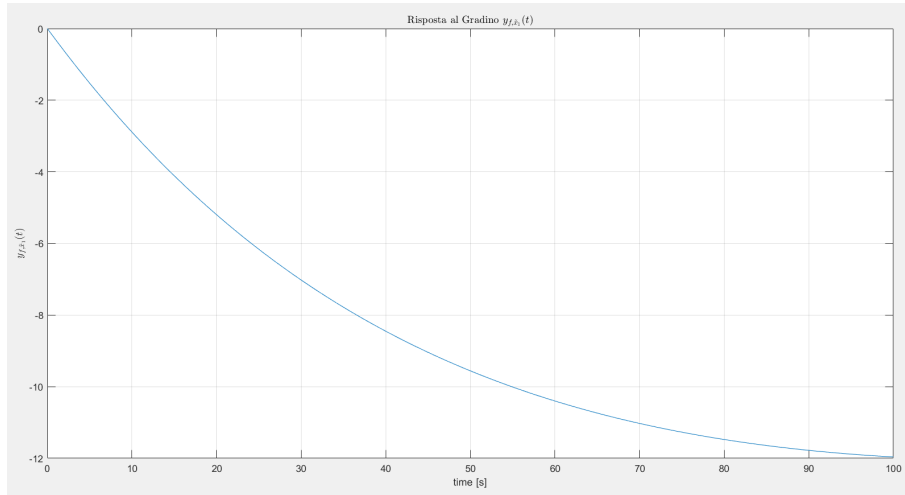


Figura 3.8: Risposta forzata al gradino della variabile di stato $\tilde{x}_1(t)$

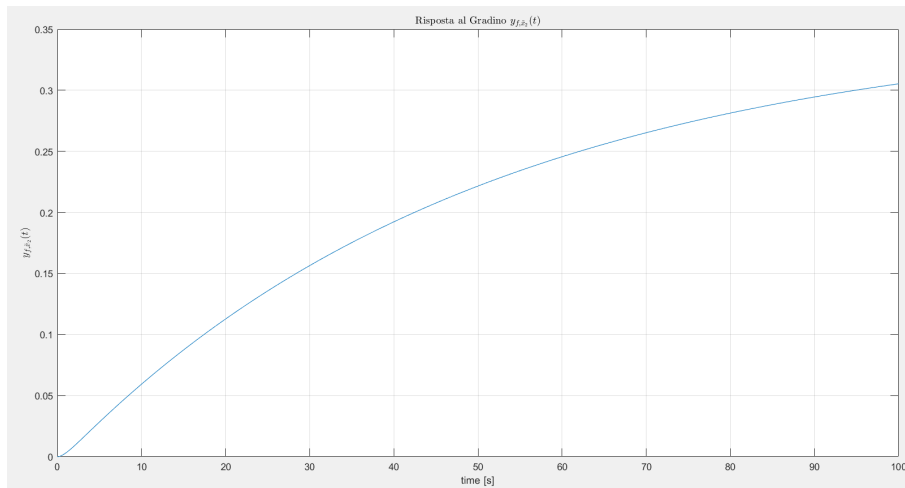


Figura 3.9: Risposta forzata al gradino della variabile di stato $\tilde{x}_2(t)$

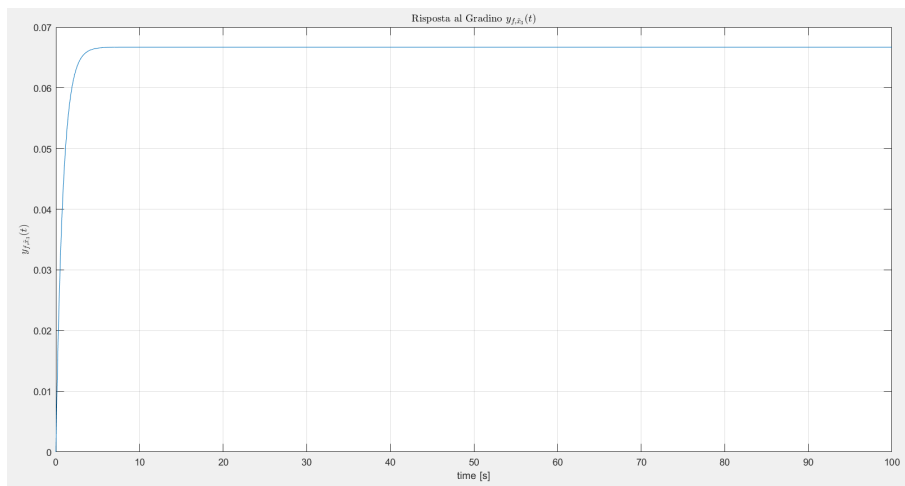


Figura 3.10: Risposta forzata al gradino della variabile di stato $\tilde{x}_3(t)$

3.3 Stabilità

L'importanza della **stabilità** deriva dal fatto che rappresenta una specifica imposta a quasi ogni sistema fisico controllato perché implica la possibilità di lavorare intorno a certe condizioni nominali senza discostarsi troppo da esse.

Considerando come **soluzione nominale** il punto di equilibrio x_{eq} , la stabilità verrà studiata per la seguente e non per l'intero sistema.

La stabilità si distingue in **stabilità interna** e **stabilità esterna**.

3.3.1 Stabilità Interna

Lo studio della stabilità interna si basa sul **criterio di Lyapunov**. Considerando gli autovalori del sistema:

$$eig(A) = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.020 \\ -1.20 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

si può applicare il criterio di Lyapunov ridotto ai sistemi lineari. Verificando che gli autovalori presentano tutti parte reale non positiva non si può concludere nulla sulla stabilità poiché è presente un autovalore a parte reale nulla.

Possiamo verificare il tutto guardando i grafici rappresentanti l'evoluzione libera del sistema; infatti, si ha che $\tilde{x}_{2,l}(t)$ e $\tilde{x}_{3,l}(t)$ convergeranno a zero mentre $\tilde{x}_{1,l}(t)$ non convergerà a zero.

L'autovalore nullo però non andrà ad implicare ad una instabilità poiché non va ad introdurre crescita esponenziale.

Inoltre, si ha che la variabile di stato $\tilde{x}_3(t)$ tenderà all'equilibrio più velocemente della variabile di stato $\tilde{x}_2(t)$ poiché l'autovalore associato a $\tilde{x}_3(t)$ (-1.2) rappresenterà una convergenza più rapida rispetto all'autovalore associato a $\tilde{x}_2(t)$ (-0.2).

Si può controllare l'andamento nei grafici rappresentanti la risposta libera (Figure 3.3 e 3.4).

3.3.2 Stabilità Esterna

Lo studio della stabilità esterna si focalizza sull'analisi della funzione di trasferimento del sistema:

$$W_{\tilde{y}\tilde{u}} = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{0.008454}{s(s^2 + 1.20s + 0.020)} \quad (3.11)$$

i cui poli saranno:

$$pole(W) = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.020 \\ -1.20 \end{bmatrix}$$

Per il **Teorema della BIBO Stabilità**, per un sistema a tempo continuo richiede che tutti i poli della funzione di trasferimento abbiano parte reale strettamente negativa.

Il sistema non risulterà quindi BIBO stabile poiché è presente un polo in zero. Questa componente può causare un'uscita non limitata per ingressi limitati (come visto prima nel caso in cui l'ingresso è un gradino unitario Figura (3.8)).

Capitolo 4

Sintesi

Per controllare al meglio la dinamica di volo di un dirigibile si deve garantire che quest'ultimo lavori in condizioni standard.

Un dirigibile, supponiamo che il suo volo sia controllato da remoto, deve garantire una velocità massima tra i 30 e i 40 Km/h .

Inoltre, la temperatura dell'elio interno gioca un ruolo molto importante. Quest'ultima deve essere monitorata per evitare la possibilità che il gas diventi troppo caldo o troppo freddo, con conseguente perdita di controllo o sicurezza e, inoltre può influenzare la durata e le proprietà dell'involucro del dirigibile.

In generale la temperatura massima interna al dirigibile non supererà mai i 200 °C; questo è dovuto al rivestimento del dirigibile poiché a temperature molto elevate potrebbe danneggiarsi.

4.1 Proprietà Strutturali

Le **proprietà strutturali** determinano come il sistema reagisce nel tempo a diversi input e come queste risposte sono influenzate dalla composizione fisica del sistema. Le proprietà fondamentali sono:

- Raggiungibilità
- Controllabilità
- Osservabilità
- Ricostruibilità

Le proprietà di *Raggiungibilità* e di *Controllabilità* mettono in atto la relazione **input-to-state** (come vengono piazzati gli attuatori), mentre le proprietà di *Osservabilità* e *Ricostruibilità* mettono in atto la relazione **state-to-output** (come vengono piazzati i sensori).

4.1.1 Raggiungibilità e Controllabilità

Secondo la definizione, partendo da uno stato iniziale x_0 , lo stato x_f si dirà **raggiungibile** se esiste una sequenza di ingressi tale che permettono di portare il sistema in un tempo finito da x_0 a x_f .

Per verificare la raggiungibilità di un sistema si analizza la **matrice di raggiungibilità** definita nel seguente modo:

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times nm} \quad (4.1)$$

La condizione di **Completa Raggiungibilità** è che la matrice di raggiungibilità deve essere a rango pieno.

Calcolando la matrice di raggiungibilità tramite la funzione MATLAB $ctrb(A,B)$ si ha:

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.0085 \\ 0 & 0.0085 & -0.0103 \\ 0.0800 & -0.0960 & 0.1152 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \quad (4.2)$$

e il rango risulta essere pieno vista l'indipendenza lineare di tutte le colonne. In definitiva si avrà:

$$X^r = Im(\mathcal{R}) = \mathbb{R}^3 \quad (4.3)$$

dove X^r rappresenta il sottospazio degli stati raggiungibili.

Avendo quindi stabilito che il sistema è completamente raggiungibile si può costruire il controllore.

Inoltre, il sistema si dirà **controllabile** se è possibile influenzare ogni stato del sistema mediante l'applicazione degli ingressi.

Nel nostro caso, avendo un sistema LTI controllabilità e raggiungibilità coincidono.

Progetto del Controllore

L'obiettivo principale nel progettare un controllore è quello di gestire e ottimizzare il comportamento del sistema così che funzioni come desiderato in presenza di eventuali vincoli.

Considerando il seguente sistema dinamico a **ciclo aperto**:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = A\tilde{x}(t) + B\tilde{u}(t) & \tilde{x}(0) = \tilde{x}_0 \\ \tilde{y}(t) = C\tilde{x}(t) + D\tilde{u}(t) \end{cases} \quad (4.4)$$

Scegliendo l'ingresso $\tilde{u}(t)$ come:

$$\tilde{u}(t) = K \tilde{x}(t) \quad (4.5)$$

dove:

$$K = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 & \dots & K_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1 \times n} \quad (4.6)$$

si arriverà al seguente sistema a **ciclo chiuso**:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = (A + BK) \tilde{x}(t) & \tilde{x}(0) = \tilde{x}_0 \\ \tilde{y}(t) = (C + DK) \tilde{x}(t) \end{cases} \quad (4.7)$$

Poiché vale il **Teorema di allocazione dei poli** essendo il sistema completamente raggiungibile, esiste $K \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ la quale alloca arbitrariamente gli autovalori di $(A + BK)$.

K viene costruito mediante:

$$K = [0 \ 0 \ 1] \mathcal{R}^{-1} p(A) \quad (4.8)$$

dove:

$$p(A) = A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \dots + \alpha_n I \quad (4.9)$$

i cui coefficienti α_i sono ottenuti dal polinomio caratteristico

$$p(\lambda) = \det[\lambda I - (A + BK)^{-1}] = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_n$$

Scegliendo i seguenti poli da allocare:

$$poles = [-0.25 \quad -0.42 \quad -0.037] \quad (4.10)$$

Tramite la funzione MATLAB *acker* si otterrà:

$$K = [7.8245 \ 59.3195 \ 1] \quad (4.11)$$

Se simulo il sistema a ciclo chiuso per un tempo pari a 300 s si otterra:

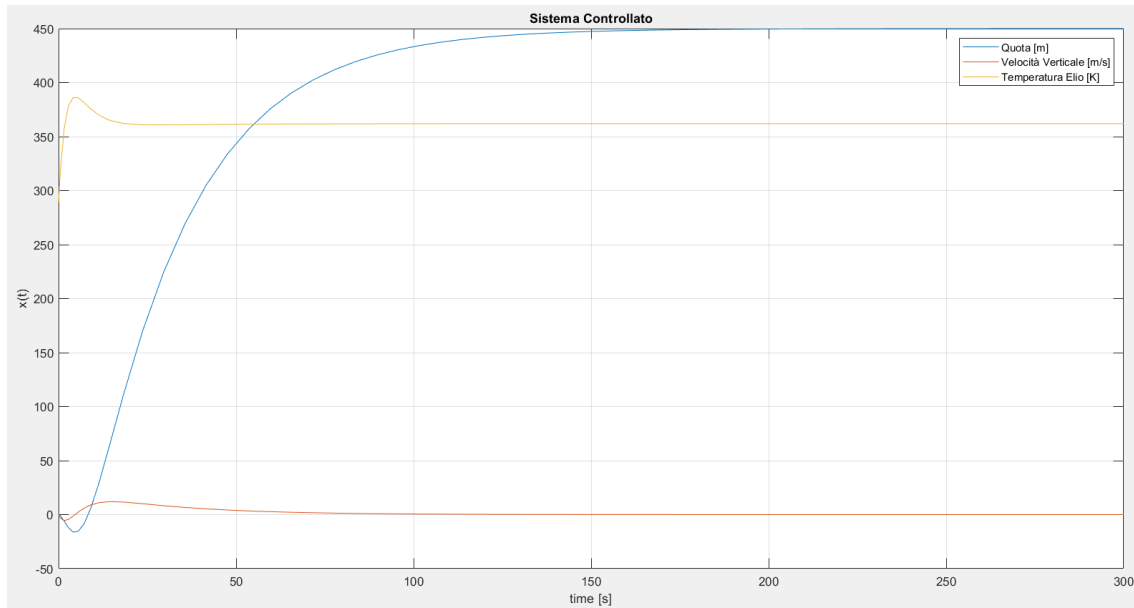


Figura 4.1: Variabili di stato nel sistema a ciclo chiuso

Come definito le varie condizioni fisiche in precedenza, grazie al controllore vengono perfettamente rispettate così da garantire il corretto funzionamento.

Il dirigibile raggiungerà le condizioni di equilibrio in circa 200 s, avrà un picco massimo sulla velocità pari a 12 Km/h e, infine, raggiungerà una temperatura massima, prima di arrivare all'equilibrio, di circa 380 K (circa 106 °C).

4.1.2 Osservabilità e Ricostruibilità

Un sistema si dirà **osservabile** se data una sequenza di ingressi e una sequenza di uscite misurate, lo stato iniziale x_0 è osservabile se esiste una procedura da trovare senza ambiguità.

In termini pratici, ciò significa che, analizzando le uscite del sistema, possiamo ricostruire completamente lo stato interno senza dover accedere direttamente a esso. Invece, per quanto riguarda la **ricostruibilità**, è un concetto meno restrittivo rispetto all'osservabilità. Un sistema si dirà ricostruibile se è possibile ricostruire l'evoluzione del generico stato $x(t)$ a partire da una sequenza misurata delle uscite e da una sequenza di ingressi.

Se un sistema è **osservabile**, allora è anche **ricostruibile**, ma il contrario non è sempre vero.

Un sistema ricostruibile potrebbe avere alcune componenti dello stato che non influenzano le uscite, e quindi queste componenti non possono essere osservate.

Per i sistemi LTI la verifica dell'osservabilità si basa sull'analisi della matrice di osservabilità definita come:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{pn \times n} \quad (4.12)$$

La condizione di **Completa Osservabilità** è che la matrice di osservabilità deve essere a rango pieno.

Calcolando la matrice di osservabilità tramite la funzione MATLAB *obsv*(A, C) si ha:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0.0200 & 0.1057 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

e il rango risulta essere pieno vista l'indipendenza lineare di tutte le colonne. In definitiva si ha:

$$X^{\bar{o}} = Ker(\mathcal{O}) = 0_x \quad (4.14)$$

dove $X^{\bar{o}}$ rappresenta lo spazio non osservabile.

Avendo quindi garantito la completa osservabilità del sistema, si può procedere alla progettazione dell'**Osservatore Asintotico**.

Progetto dell'Osservatore

L'obiettivo, quindi, è quello di definire una stima dello stato. Definiamo la seguente **stima dello stato** $\hat{x}(t)$.

Si consideri il seguente sistema:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - \hat{y}(t)) & \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) + Du(t) \end{cases} \quad (4.15)$$

dove $L \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ed è chiamata **matrice dei guadagni dell'osservatore**.

Si definisce la seguente quantità:

$$e(t) = \tilde{x}(t) - \hat{x}(t) \quad (4.16)$$

come l'**errore di ricostruzione dello stato**. Il compito principale dell'osservatore è quello di azzerare l'errore:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0_n$$

Sapendo che la matrice $D = 0$ si avrà:

$$\tilde{y}(t) - \hat{y}(t) = C\tilde{x}(t) - C\hat{x}(t) = -C(\hat{x}(t) - \tilde{x}(t)) = -Ce(t)$$

Essendo che, il compito principale si basa sull'errore dello stato, si va ad analizzare la sua evoluzione:

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \dot{\tilde{x}}(t) - \dot{\hat{x}}(t) = \\ &= A\tilde{x}(t) + Bu(t) - A\hat{x}(t) - Bu(t) - LC[\hat{x}(t) - \tilde{x}(t)] = \\ &= A[\tilde{x}(t) - \hat{x}(t)] + LC[\tilde{x}(t) - \hat{x}(t)] \end{aligned}$$

Infine, si avrà:

$$\dot{e}(t) = (A + LC)e(t), \quad e(0) \quad (4.17)$$

Come per la progettazione del controllore, anche nel caso dell'osservatore varrà il **Teorema di allocazione dei poli**.

In questo caso però si agirà per dualità. Si va ad applicare la **formula di Ackerman** al problema duale:

$$\det[\lambda I - (A + LC)] = \det[\lambda I - (A + LC)^T] \quad (4.18)$$

Quindi bisogna trovare L tale che:

$$\det[\lambda I - (A^T - C^T L^T)] = p(\lambda)$$

dove $A^T = A^*$, $C^T = B^*$ e $L^T = K^*$. Si arriverà quindi a definire l'osservatore come un vero e proprio sistema dinamico.

Il sistema sarà:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = (A + LC)\hat{x}(t) + \begin{bmatrix} B & -L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \\ \hat{y}(t) = \hat{x}(t) \end{cases} \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \quad (4.19)$$

Scegliendo i seguenti poli da allocare:

$$poles = \begin{bmatrix} -0.29 & -0.6 & -0.91 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

Tramite la funzione MATLAB $place(A', C', poles)$ si otterrà:

$$L = \begin{bmatrix} 0.5800 \\ 0.2523 \\ -1.4983 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

Modellazione dell'osservatore in Simulink

Per quanto riguarda la simulazione, si definisce, come in precedenza un ingresso:

$$u(t) = \begin{cases} 1500 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Inoltre, il tempo di simulazione viene impostato ad un valore pari a 100 s.

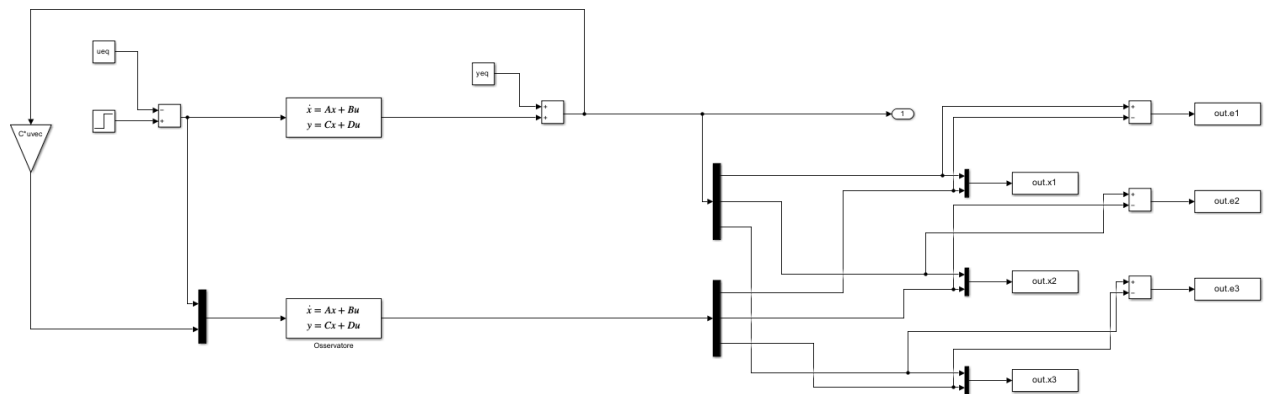


Figura 4.2: Modello Simulink dell'osservatore

Il blocco State-Space riferito all'osservatore viene costruito come segue:

- $A = A - LC$
- $B = \begin{bmatrix} B & L \end{bmatrix}$
- $C = I_{3 \times 3}$
- $D = 0_{3 \times 2}$

e come condizioni iniziali:

$$\hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ecco qui mostrati l'andamento delle variabili di stato misurate e quelle stimate dall'osservatore.

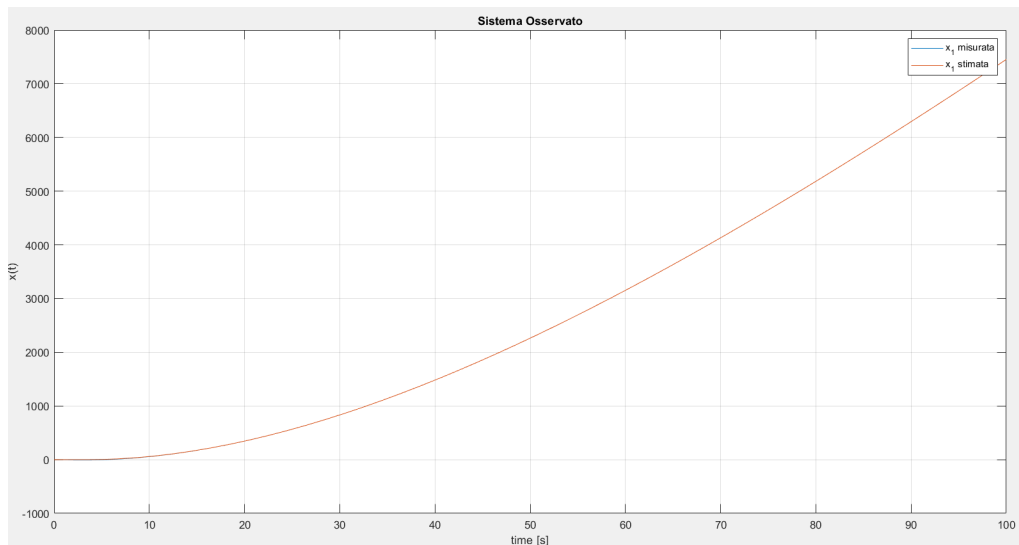


Figura 4.3: Confronto tra la variabile di stato $\tilde{x}_1(t)$ e la variabile misurata $\hat{x}_1(t)$

In questo caso l'osservatore stima una variabile di stato completamente in linea e pressoché identica a quella misurata avendo però piccolissimi errori nella fase iniziale.

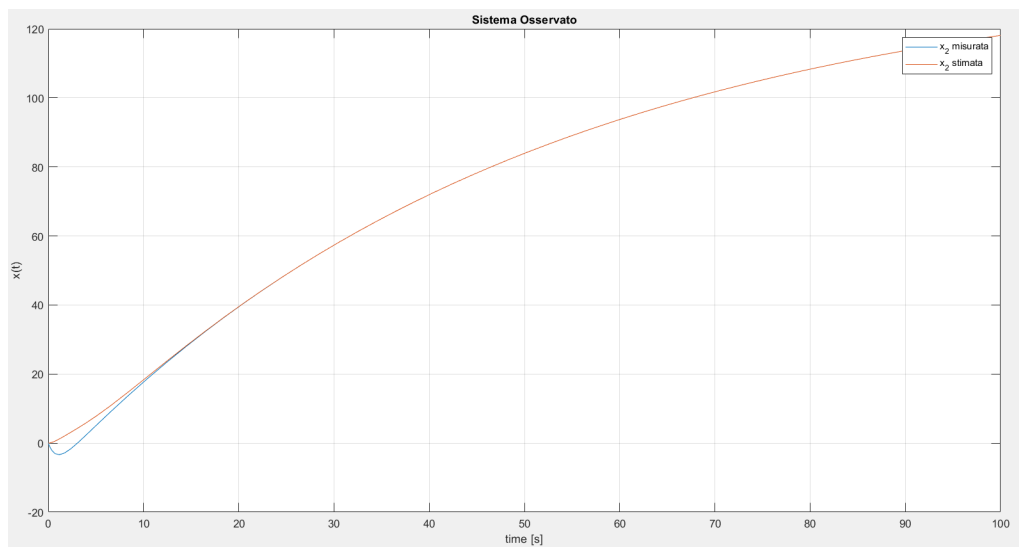


Figura 4.4: Confronto tra la variabile di stato $\tilde{x}_2(t)$ e la variabile misurata $\hat{x}_2(t)$

L'osservatore, nel caso della variabile $\tilde{x}_2(t)$ stima la variabile $\hat{x}_2(t)$ in maniera efficace per $t \rightarrow \infty$.

D'altra parte, però, presenta lievi errori nella fase iniziale di stima; questa risulta avere valori poco più elevati della variabile di stato misurata.

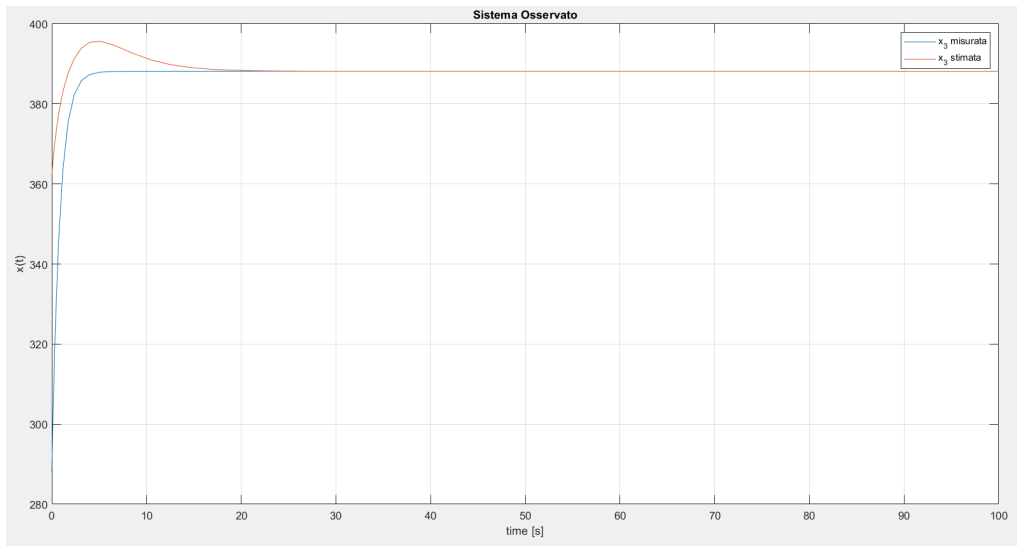


Figura 4.5: Confronto tra la variabile di stato $\tilde{x}_3(t)$ e la variabile misurata $\hat{x}_3(t)$

Anche in questo caso, come nel caso della variabile di stato $\tilde{x}_2(t)$ la stima risulta efficace per $t \rightarrow \infty$ mentre risulta meno efficace nella fase iniziale.

Come detto in precedenza, l'osservatore è ben costruito e il suo funzionamento risulta efficiente se al crescere del tempo l'errore si azzerava.

Analizziamo ora gli errori di ricostruzione degli stati.

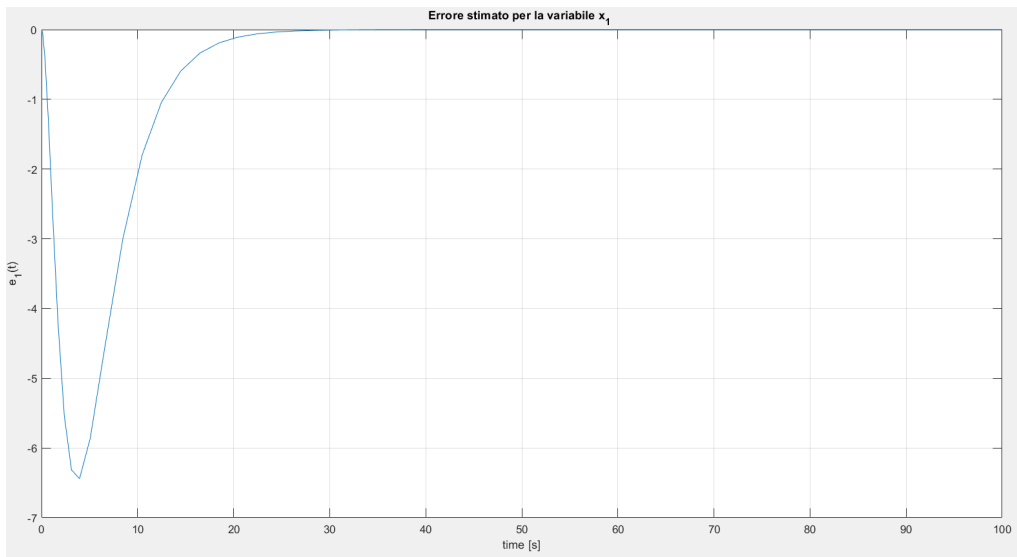


Figura 4.6: Errore di ricostruzione della variabile di stato $\tilde{x}_1(t)$

Si avrà, per la variabile di stato $\tilde{x}_1(t)$, un errore nella fase iniziale crescente (negativo) fino ad un valore di circa -7 . Dopo circa 5 secondi l'errore inizia a diminuire fino a raggiungere uno stato stazionario in zero dopo 40 secondi.

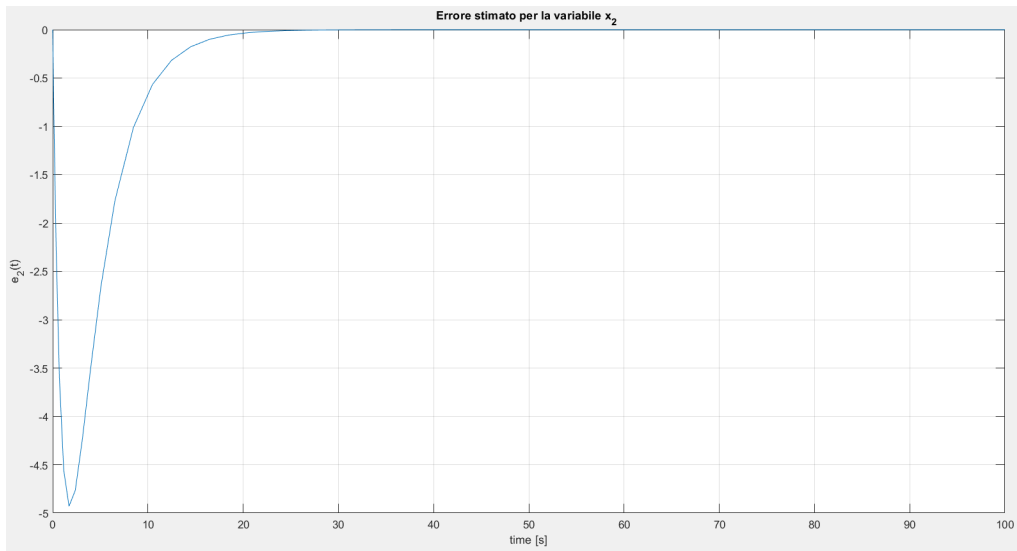


Figura 4.7: Errore di ricostruzione della variabile di stato $\tilde{x}_2(t)$

Per quanto riguarda l'errore riguardante la variabile di stato $\tilde{x}_2(t)$ avrà lo stesso andamento dell'errore della variabile di stato $\tilde{x}_1(t)$. Quest'ultimo raggiungerà un valore massimo (negativo) di -5 circa fino ad andare a stabilizzarsi a zero dopo circa 30 secondi.

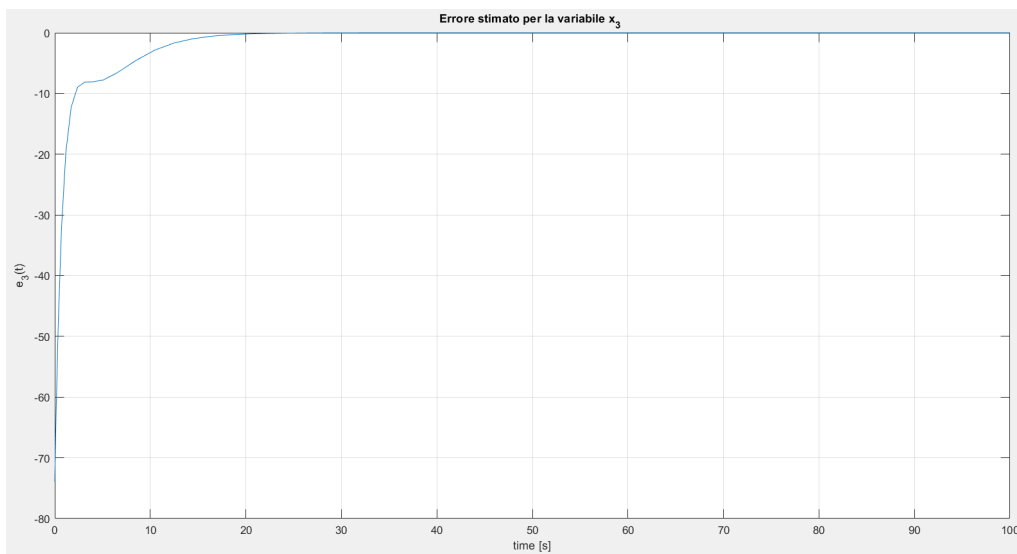


Figura 4.8: Errore di ricostruzione della variabile di stato $\tilde{x}_3(t)$

Infine, nel caso dell'errore della variabile di stato $\tilde{x}_3(t)$, presenterà un errore iniziale molto elevato (negativo) rispetto agli altri errori. Come si può verificare, anche in questo caso l'errore si stabilizzerà dopo circa 30 secondi.

Da qui si può dedurre che l'osservatore è ben progettato poiché non saranno presenti errori per $t \rightarrow \infty$.

Capitolo 5

Compensatore Dinamico (Regolatore)

L'obiettivo principale di un **compensatore dinamico** è regolare la relazione ingresso-uscita del sistema per soddisfare specifiche del sistema.

Si devono garantire le seguenti specifiche:

- **Stabilizzazione:** Garantire che il sistema non vada incontro a instabilità, ad esempio smorzando oscillazioni indesiderate.
- **Miglioramento della risposta transitoria:** Ridurre il tempo di salita, il tempo di assestamento e il sovraelongamento.
- **Correzione dell'errore stazionario:** Ridurre l'errore tra il valore desiderato e quello effettivo.

Il compensatore applicato ad un sistema lineare avrà la seguente forma:

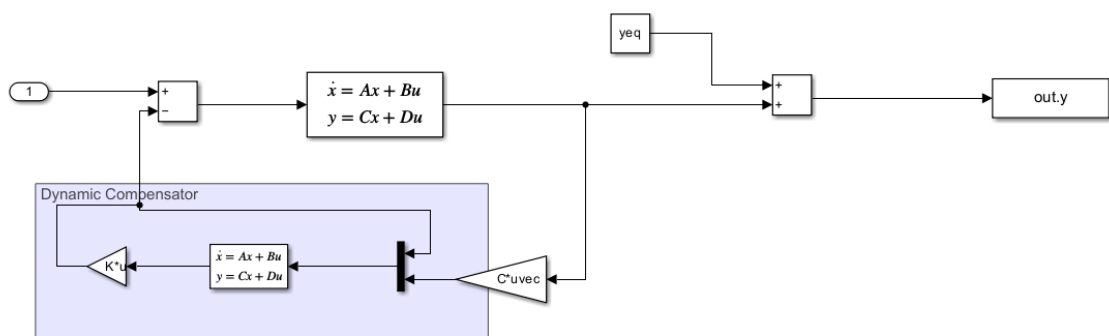


Figura 5.1: Compensatore Dinamico applicato al sistema linearizzato

La costruzione del compensatore è possibile poiché il sistema è completamente raggiungibile e completamente osservabile; essendo che vale il *principio di separazione*, dopo aver progettato il regolatore e l'osservatore, si possono collegare per ottenere il compensatore.

Se verrà applicato un tempo di simulazione di 200 s:

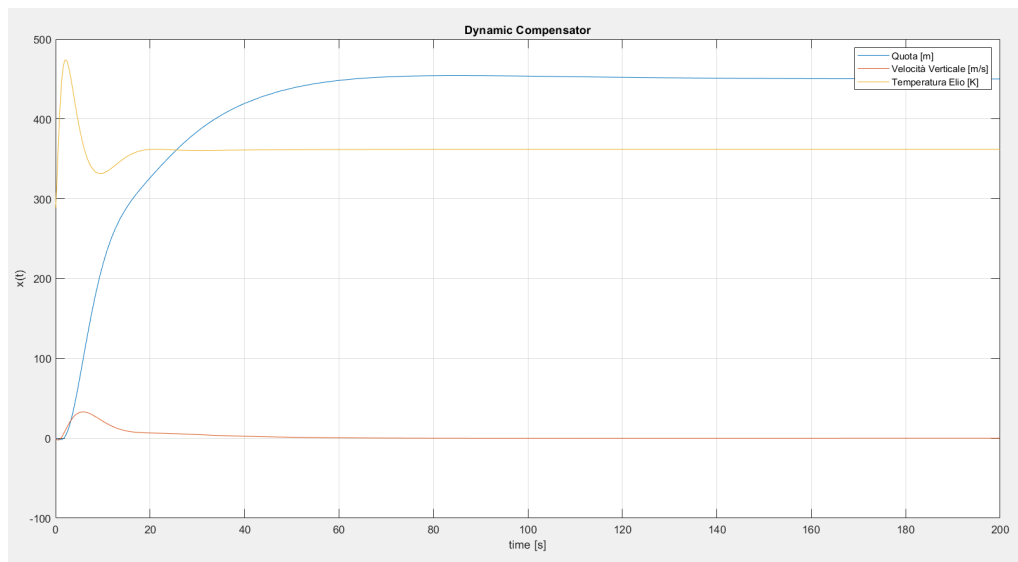


Figura 5.2: Risposta del sistema lineare applicando il Compensatore Dinamico

Grazie alla corretta progettazione del regolatore e dell'osservatore, il sistema raggiunge l'equilibrio dopo circa 135 s.

Capitolo 6

Conclusioni

Questo progetto ha avuto come obiettivo principale l'analisi e il controllo del volo verticale di un dirigibile pubblicitario, sfruttando la modellazione matematica, l'analisi delle proprietà strutturali del sistema e la progettazione di controllori e osservatori.

Attraverso una rigorosa modellazione del sistema dinamico del dirigibile, è stato possibile rappresentare la sua dinamica tramite equazioni differenziali non lineari. La linearizzazione del sistema ha poi consentito di semplificare lo studio delle sue proprietà, rendendo possibile l'implementazione di strumenti di controllo e simulazione. In particolare, l'analisi ha dimostrato che il sistema è completamente raggiungibile e osservabile, condizioni fondamentali per il progetto di un controllo efficace.

Le simulazioni in MATLAB e Simulink hanno permesso di verificare la coerenza tra i modelli teorici e il comportamento simulato, sia per il sistema non lineare che per quello linearizzato. Sono stati progettati un regolatore e un osservatore, i cui risultati dimostrano un controllo efficace e un'accurata ricostruzione degli stati del sistema. L'implementazione di un compensatore dinamico ha ulteriormente garantito stabilità e prestazioni desiderate, con il sistema che raggiunge l'equilibrio in un tempo ragionevole e con errori di ricostruzione azzerati per tempi lunghi.

Capitolo 7

Codici MATLAB

```
clear; close all; clc;
```

7.1 Parametri del Sistema

```
m = 1000;  
b = 20;  
g = 9.81;  
V = 4000;  
rho_a = 1.225;  
T_a = 288.15;  
c = 12.5;  
k = 15;  
Ad = 60;  
Cd = 0.05;  
  
x0 = [0 0 T_a]';  
u0 = 0;  
y0 = x0;
```

7.2 Equilibrio e Linearizzazione

```
modello = 'ModelloNonLineare';  
[xeq, ueq, yeq] = trim(modello, x0, u0, y0);  
  
[A, B, C, D] = linmod(modello, xeq, ueq);  
C = C(1,:);  
D = D(1,1);  
  
% Condizioni iniziali del Sistema Lineare  
x0_tilde = [x0(1)-xeq(1) x0(2)-xeq(2) x0(3)-xeq(3)];
```

7.3 Autovalori e Autovettori

```
[Evector, Evalue] = eig(A);
```

7.4 Funzione di Trasferimento e Poli

```
sys = ss(A,B,C,D);  
W = tf(sys);  
P = pole(W);
```

7.5 Raggiungibilità e Controllabilità

```
%Matrice di Controllabilità'
```

```
R = ctrb(A,B);
```

```
%Rango di R
```

```
rank_R = rank(R);
```

```
K = acker(A, B, [-0.25 -0.42 -0.037]);
```

```
Ak = A-B*K;
```

7.6 Osservabilità e Ricostruibilità

```
%Matrice di Osservabilità
```

```
O = obsv(A,C);
```

```
%Rango di O
```

```
rank_O = rank(O);
```

```
Lt = place(A', C', [-0.29 -0.6 -0.91]);
```

```
L = Lt';
```

```
AL = A-L*C;
```

```
BL = [B L];
```

7.7 Grafici

7.7.1 Risposta al gradino per il sistema non lineare

```
modelSimulation = sim('step_NL');
x1 = modelSimulation.y.Data(:,1);
x2 = modelSimulation.y.Data(:,2);
x3 = modelSimulation.y.Data(:,3);

time = modelSimulation.y.Time;
figure;

plot(time,x1);
title('Risposta al gradino per il sistema non linearizzato')
hold on;
plot(time,x2);
plot(time,x3);
hold off;
legend('Quota [m]', 'Velocità Verticale [m/s]', 'Temperatura Elio [K]');
xlabel('time [s]');
ylabel('x(t)');
grid on;
```

7.7.2 Risposta al gradino per il sistema lineare

```
modelSimulation2 = sim('step_L');
x12 = modelSimulation2.y.Data(:,1);
x22 = modelSimulation2.y.Data(:,2);
x32 = modelSimulation2.y.Data(:,3);

time2 = modelSimulation2.y.Time;
figure;

plot(time2,x12);
title('Risposta al gradino per il sistema linearizzato')
hold on;
plot(time2,x22);
plot(time2,x32);
hold off;
legend('Quota [m]', 'Velocità Verticale [m/s]', 'Temperatura Elio [K]');
xlabel('time [s]');
ylabel('$\tilde{x}(t)$', 'Interpreter', 'latex');
grid on;
```

7.7.3 Risposta Libera

```
x12l = modelSimulation2.y1.Data(:,1);
x22l = modelSimulation2.y1.Data(:,2);
x32l = modelSimulation2.y1.Data(:,3);

figure;
plot(time2,x12l);
title('Risposta Libera  $\tilde{x}_{1,l}(t)$ ', 'Interpreter', 'latex')
xlabel('time [s]');
ylabel(' $\tilde{x}_{1,l}(t)$ ', 'Interpreter', 'latex');
grid on;

figure;
plot(time2,x22l);
title('Risposta Libera  $\tilde{x}_{2,l}(t)$ ', 'Interpreter', 'latex')
xlabel('time [s]');
ylabel(' $\tilde{x}_{2,l}(t)$ ', 'Interpreter', 'latex');
grid on;

figure;
plot(time2,x32l);
title('Risposta Libera  $\tilde{x}_{3,l}(t)$ ', 'Interpreter', 'latex')
xlabel('time [s]');
ylabel(' $\tilde{x}_{3,l}(t)$ ', 'Interpreter', 'latex');
grid on;
```

7.7.4 Risposta Forzata

```
% Definizione del tempo (intervallo di tempo da 0 a 10 secondi, con passo 0.01)
t = 0:0.01:100;
```

Risposta all'Impulso

```
y1 = 0.03523 + 0.00597*exp(-1.2*t)-0.3583*exp(-0.02*t);

figure;
plot(t, y1);
xlabel('time [s]');
ylabel(' $y_{f,\tilde{x}_1}(t)$ ', 'Interpreter', 'latex');
title('Risposta Impulsiva  $y_{f,\tilde{x}_1}(t)$ ', 'Interpreter', 'latex');
grid on;
```

```

y2 = 0.0072*exp(-0.02*t) - 0.0072*exp(-1.2*t);

figure;
plot(t, y2);
xlabel('time [s]');
ylabel('$y_{f,\tilde{x}_2}(t)$', 'Interpreter', 'latex');
title('Risposta Impulsiva $y_{f,\tilde{x}_2}(t)$', 'Interpreter', 'latex');
grid on;

```

```

y3 = 0.08*exp(-1.2*t) ;

figure;
plot(t, y3);
xlabel('time [s]');
ylabel('$y_{f,\tilde{x}_3}(t)$', 'Interpreter', 'latex');
title('Risposta Impulsiva $y_{f,\tilde{x}_3}(t)$', 'Interpreter', 'latex');
grid on;

```

Risposta al Gradino

```

y11 = 0.03523*t - 17.910025 - 0.004975*exp(-1.2*t) + 17.915*exp(-0.02*t);

figure;
plot(t, y11);
xlabel('time [s]');
ylabel('$y_{f,\tilde{x}_1}(t)$', 'Interpreter', 'latex');
title('Risposta al Gradino $y_{f,\tilde{x}_1}(t)$', 'Interpreter', 'latex');
grid on;

```

```

y21 = 0.354 + 0.006*exp(-1.2*t) - 0.36*exp(-0.02*t);

figure;
plot(t, y21);
xlabel('time [s]');
ylabel('$y_{f,\tilde{x}_2}(t)$', 'Interpreter', 'latex');
title('Risposta al Gradino $y_{f,\tilde{x}_2}(t)$', 'Interpreter', 'latex');
grid on;

```

```

y31 = 0.0667 - 0.0667*exp(-1.2*t);

figure;
plot(t, y31);

```

```

xlabel('time [s]');
ylabel('$y_{f,\tilde{x}_3}(t)$', 'Interpreter', 'latex');
title('Risposta al Gradino $y_{f,\tilde{x}_3}(t)$', 'Interpreter', 'latex');
grid on;

```

7.7.5 Sistema Controllato (Controllore)

```

modelSimulation3 = sim('Contr');
x1c = modelSimulation3.y.Data(:,1);
x2c = modelSimulation3.y.Data(:,2);
x3c = modelSimulation3.y.Data(:,3);

time_c = modelSimulation3.y.Time;

figure;
plot(time_c,x1c);
title('Sistema Controllato')
hold on;
plot(time_c,x2c);
plot(time_c,x3c);
hold off;
legend('Quota [m]', 'Velocità Verticale [m/s]', 'Temperatura Elio [K]');
xlabel('time [s]');
ylabel('x(t)');
grid on;

```

7.7.6 Sistema Osservato (Osservatore Asintotico)

```

modelSimulation4 = sim('Obsv');
x11o = modelSimulation4.x1.Data(:,1);
x12o = modelSimulation4.x1.Data(:,2);

x21o = modelSimulation4.x2.Data(:,1);
x22o = modelSimulation4.x2.Data(:,2);

x31o = modelSimulation4.x3.Data(:,1);
x32o = modelSimulation4.x3.Data(:,2);

e1 = modelSimulation4.e1.Data(:,1);
e2 = modelSimulation4.e2.Data(:,1);
e3 = modelSimulation4.e3.Data(:,1);

time_o = modelSimulation4.x1.Time;

```


Confronto tra $\tilde{x}_1(t)$ e $\hat{x}_1(t)$

```
figure;
plot(time_o,x11o);
title('Sistema Osservato')
hold on;
plot(time_o,x12o);
hold off;
legend('x_1 misurata ', 'x_1 stimata');
xlabel('time [s]');
ylabel('x(t)');
grid on;
```

Confronto tra $\tilde{x}_2(t)$ e $\hat{x}_2(t)$

```
figure;
plot(time_o,x21o);
title('Sistema Osservato')
hold on;
plot(time_o,x22o);
hold off;
legend('x_2 misurata ', 'x_2 stimata');
xlabel('time [s]');
ylabel('x(t)');
grid on;
```

Confronto tra $\tilde{x}_3(t)$ e $\hat{x}_3(t)$

```
figure;
plot(time_o,x31o);
title('Sistema Osservato')
hold on;
plot(time_o,x32o);
hold off;
legend('x_3 misurata ', 'x_3 stimata');
xlabel('time [s]');
ylabel('x(t)');
grid on;
```

Errori di Ricostruzione degli stati

```
figure;
plot(time_o,e1);
title('Errore stimato per la variabile x_1 ')
xlabel('time [s]');
```

```

ylabel('e_1(t)');
grid on;

figure;
plot(time_o,e2);
title('Errore stimato per la variabile x_2 ');
xlabel('time [s]');
ylabel('e_2(t)');
grid on;

figure;
plot(time_o,e3);
title('Errore stimato per la variabile x_3 ');
xlabel('time [s]');
ylabel('e_3(t)');
grid on;

```

7.7.7 Sistema con Compensatore Dinamico

```

modelSimulation5 = sim('DynamicCompensator');

x1d = modelSimulation5.y.Data(:,1);
x2d = modelSimulation5.y.Data(:,2);
x3d = modelSimulation5.y.Data(:,3);

time_d = modelSimulation5.y.Time;

figure;
plot(time_d,x1d);
title('Dynamic Compensator')
hold on;
plot(time_d,x2d);
plot(time_d,x3d);
hold off;
legend('Quota [m]', 'Velocità Verticale [m/s]', 'Temperatura Elio [K]');
xlabel('time [s]');
ylabel('x(t)');
grid on;

```