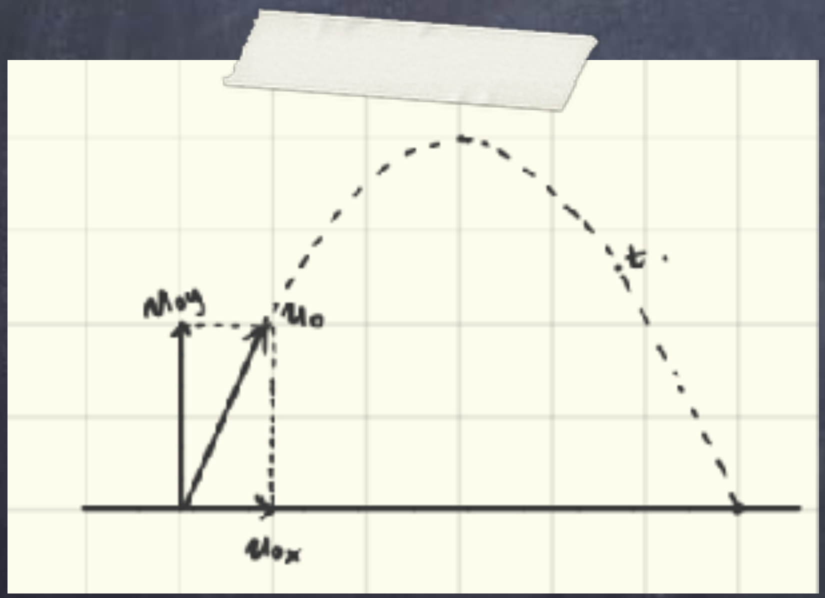
Αριθμητική Επίλυση

Πλάγιας Βολής

Σύντομη Επανάληψη Πλάγιας Βολής

- Ο τύπος για το βεληνεκές σώματος σε πλάγια βολή προκύπτει:
    1. Από την Αρχή Ανεξαρτησίας των Κινήσεων
    2. Από τις εξισώσεις κίνησης



- Στην οριζόντια διεύθυνση ισχύει:

$$x = u_{0x} t$$

- Στην κατακόρυφη διεύθυνση ισχύει:

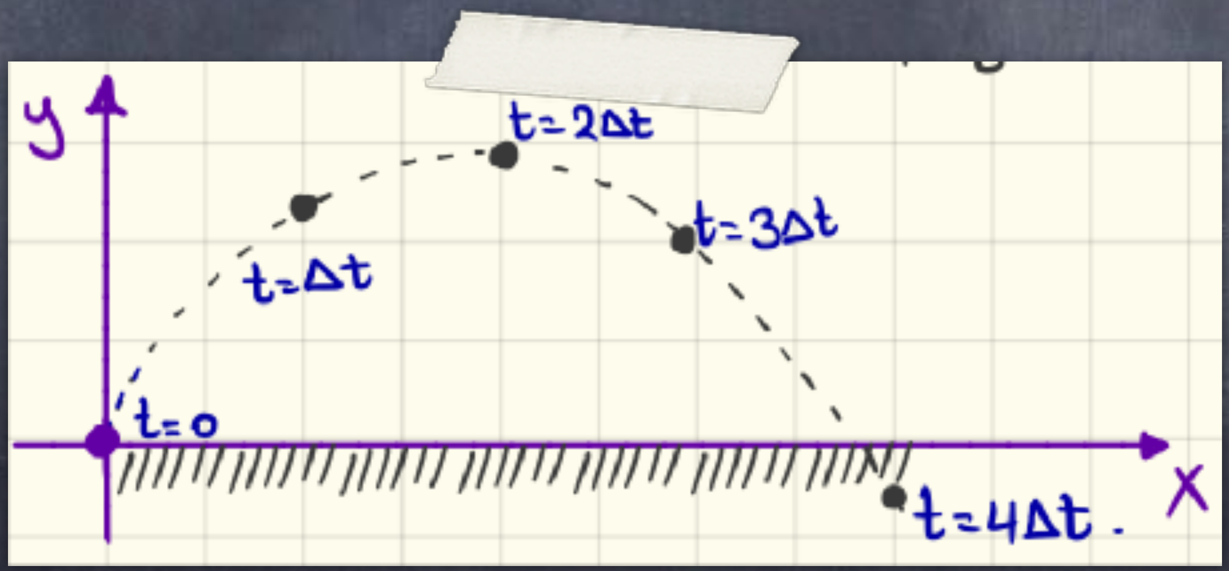
$$x = u_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2$$

- Απαλείφοντας τον χρόνο t: $y = \dfrac{u0y}{u_{0x}} x - \dfrac{g}{2} \dfrac{x^2}{u_{0x}^2}$

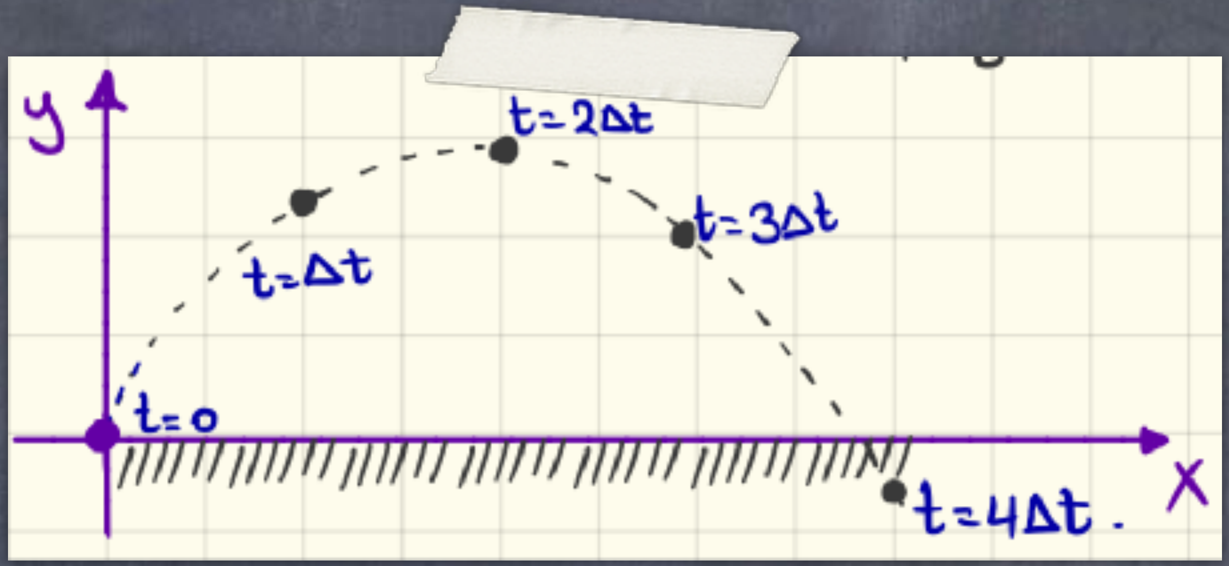
- Για το βεληνεκές ισχύει: $y = 0 \Rightarrow \dfrac{u0y}{u_{0x}} r - \dfrac{g}{2} \dfrac{r^2}{u_{0x}^2} \Rightarrow \begin{array}{l} r = 0 \\ r = \frac{g}{2} u_{0y} u_{0x} \end{array}$

Αριθμητική επίλυση

- Προβλήματα κινηματικής, όπως η πλάγια βολή, επιδέχονται **αριθμητικής επίλυσης**
  - Χωρίζουμε την κίνηση του σώματος σε χρονικά διαστήματα διάρκειας Δt
    - Επιλέγουμε το Δt να είναι μικρό, π.χ. $\Delta t = 0.1s$
  - Το τέλος κάθε διαστήματος Δt ονομάζεται "στιγμιότυπο"



Αριθμητική επίλυση



- Σε κάθε στιγμιότυπο υπολογίζουμε την θέση $(x,\ y)$ και την ταχύτητα $(u_x,\ u_y)$
  - ☐ Για τον υπολογισμό της θέσης στο επόμενο στιγμιότυπο, υποθέτουμε ότι σε κάθε διεύθυνση, το σώμα εκτελεί **ομαλή ευθύγραμμη κίνηση** κατά το διάστημα Δt
  - ☐ Για τον υπολογισμό της ταχύτητας στο επόμενο στιγμιότυπο, υποθέτουμε ότι σε κάθε διεύθυνση, το σώμα εκτελεί **ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση** κατά το διάστημα Δt

Αριθμητική επίλυση

- Ας δούμε ένα-ένα τα στιγμιότυπα
  - Το στιγμιότυπο μηδέν (Σ0), είναι το αρχικό στιγμιότυπο:

$$x_0 = 0 \quad u_{0x} = u_0 \cos(\theta)$$
$$y_0 = 0 \quad u_{0y} = u_0 \sin(\theta)$$

  - Για το πρώτο στιγμιότυπο (Σ1):

$$x_1 = x_0 + u_{0x}\Delta t$$
$$y_1 = y_0 + u_{0y}\Delta t$$

Υπολογίζουμε τη νέα θέση υποθέτοντας ομαλή ευθύγραμμη κίνηση με αρχική ταχύτητα u_{0x}, u_{0y}

$$u_{1x} = u_{0x} + a_x\Delta t$$
$$u_{1y} = u_{0y} + a_y\Delta t$$

Υπολογίζουμε τη νέα ταχύτητα υποθέτοντας ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα u_{0x}, u_{0y}, και επιτάχυνση $a_x=0$, $a_y=-g$

- Για το πρώτο στιγμιότυπο (Σ1):

$$x_1 = x_0 + u_{0x}\Delta t$$
$$y_1 = y_0 + u_{0y}\Delta t$$

Υπολογίζουμε τη νέα θέση υποθέτοντας ομαλή ευθύγραμμη κίνηση με αρχική ταχύτητα u_{0x}, u_{0y}

$$u_{1x} = u_{0x} + a_x\Delta t$$
$$u_{1y} = u_{0y} + a_y\Delta t$$

Υπολογίζουμε τη νέα ταχύτητα υποθέτοντας ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα u_{0x}, u_{0y}, και επιτάχυνση a_x=0, a_y=-g

- Για το δεύτερο στιγμιότυπο (Σ2):

$$x_2 = x_1 + u_{1x}\Delta t$$
$$y_2 = y_1 + u_{1y}\Delta t$$

$$u_{2x} = u_{1x}$$
$$u_{2y} = u_{1y} - g\Delta t$$

Όπου x_1, y_1 και u_{0x}, u_{0y}, έχουν υπολογιστεί στο προηγούμενο βήμα

[Ο πίνακας συμπληρώνεται από τους μαθητές στην τάξη]

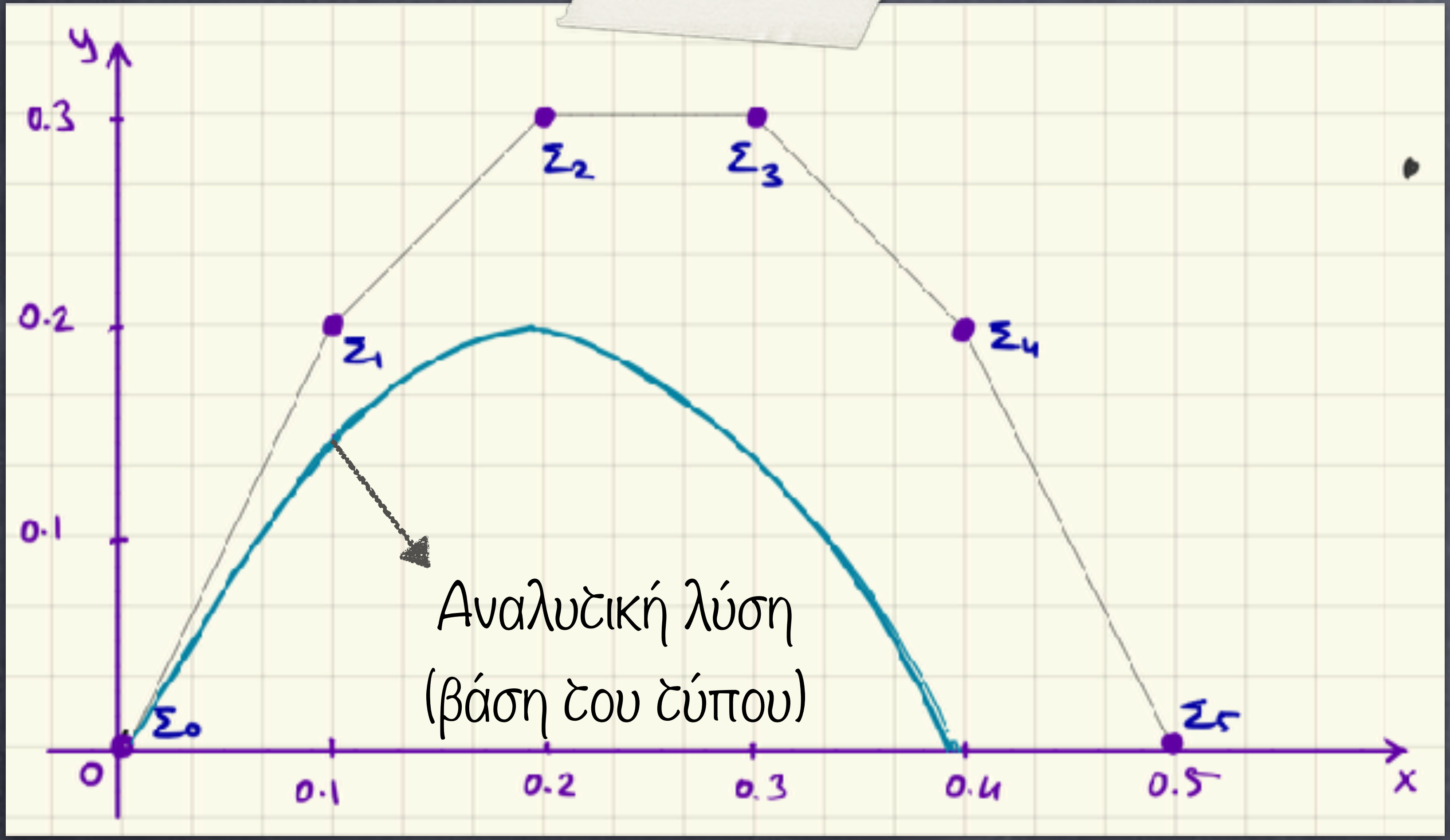
Αριθμητικό παράδειγμα

$$x_0 = 0,\ y_0 = 0,\quad u_{0x} = 1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}},\ u_{0y} = 2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}},\quad \Delta t = 0.1\mathrm{s}$$

Σ_0	$x_0 = 0$	$y_0 = 0$	$u_{0x} = 1\,m/s$	$u_{0y} = 2\,m/s$
Σ_1	$x_1 = x_0 + u_{0x}\cdot\Delta t = 0.1\,m$	$y_1 = y_0 + u_{0y}\cdot\Delta t = 0.2\,m$	$u_{1x} = u_{0x} = 1\,m/s$	$u_{1y} = u_{0y} - g\cdot\Delta t = 1\,m/s.$
Σ_2	$x_2 = x_1 + u_{1x}\cdot\Delta t = 0.2\,m$	$y_2 = y_1 + u_{1y}\cdot\Delta t = 0.3\,m$	$u_{2x} = u_{1x} = 1\,m/s$	$u_{2y} = u_{1y} - g\cdot\Delta t = 0\,m/s.$
Σ_3	$x_3 = x_2 + u_{2x}\cdot\Delta t = 0.3\,m$	$y_3 = y_2 + u_{2y}\cdot\Delta t = 0.3\,m$	$u_{3x} = u_{2x} = 1\,m/s$	$u_{3y} = u_{2y} - g\cdot\Delta t = -1\,m/s.$
Σ_4	$x_4 = x_3 + u_{3x}\cdot\Delta t = 0.4\,m$	$y_4 = y_3 + u_{3y}\cdot\Delta t = 0.2\,m$	$u_{4x} = u_{3x} = 1\,m/s$	$u_{4y} = u_{3y} - g\cdot\Delta t = -2\,m/s.$
Σ_5	$x_5 = x_4 + u_{4x}\cdot\Delta t = 0.5\,m$	$y_5 = y_4 + u_{4y}\cdot\Delta t = 0\,m$	$u_{5x} = u_{4x} = 1\,m/s$	$u_{5y} = u_{4y} - g\Delta t = -3\,m/s.$

[Δίδεται η γραφική παράσταση με την καμπύλη (αναλυτική λύση) και οι μαθητές τοποθετούν τα σημεία Σ0 - Σ5]

Αριθμητικό παράδειγμα



- Το αποτέλεσμα της αριθμητικής λύσης εμπεριέχει σφάλμα, το λεγόμενο **σφάλμα διακριτοποίησης.** Το σφάλμα αυτό, μικραίνει όσο μικραίνει το Δt

- Εάν επαναλάβουμε την άσκηση με Δt = 0.05s, θα χρειαστούμε διπλάσια βήματα, και εάν την επαναλάβουμε με Δt = 0.01s θα χρειαστούμε **δεκαπλάσια** βήματα
- Είναι προφανές πως για όλο και πιο μικρές τιμές του Δt η αριθμητική επίλυση γίνεται όλο και πιο χρονοβόρα

Υπολογιστική Λύση

- Κατά την **υπολογιστική επίλυση** του προβλήματος, χρησιμοποιούμαι έναν υπολογιστή για να αυτοματοποιήσουμε τον υπολογισμό των στιγμιοτύπων
- Θα πρέπει να δώσουμε:
  - Την αρχική θέση και ταχύτητα
  - Τον χρόνο Δt
  - Τις εξισώσεις κίνησης, με τις οποίες θα υπολογίζουμε την θέση και ταχύτητα του νέου στιγμιότυπου βάσει του προηγούμενου
- Συνεχίστε αυτό το πρόβλημα ακολουθώντας τον πιο κάτω σύνδεσμο και τις οδηγίες που υπάρχουν εκεί:

http://172.104.245.249:8000