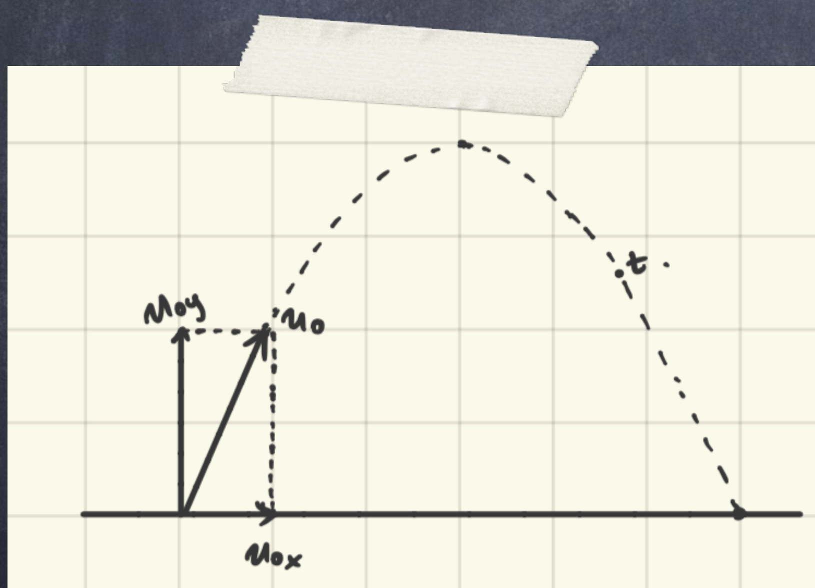
Αριθμητική Επίλυση

Πλάγιας Βολής

Σύντομη Επανάληψη Πλάγιας Βολής

- Ο τύπος για το βεληνεκές σώματος σε πλάγια βολή προκύπτει:
    1. Από την Αρχή Ανεξαρτησίας των Κινήσεων
    2. Από τις εξισώσεις κίνησης



- Στην οριζόντια διεύθυνση ισχύει:

$$x = u_{0x}t$$

- Στην κατακόρυφη διεύθυνση ισχύει:

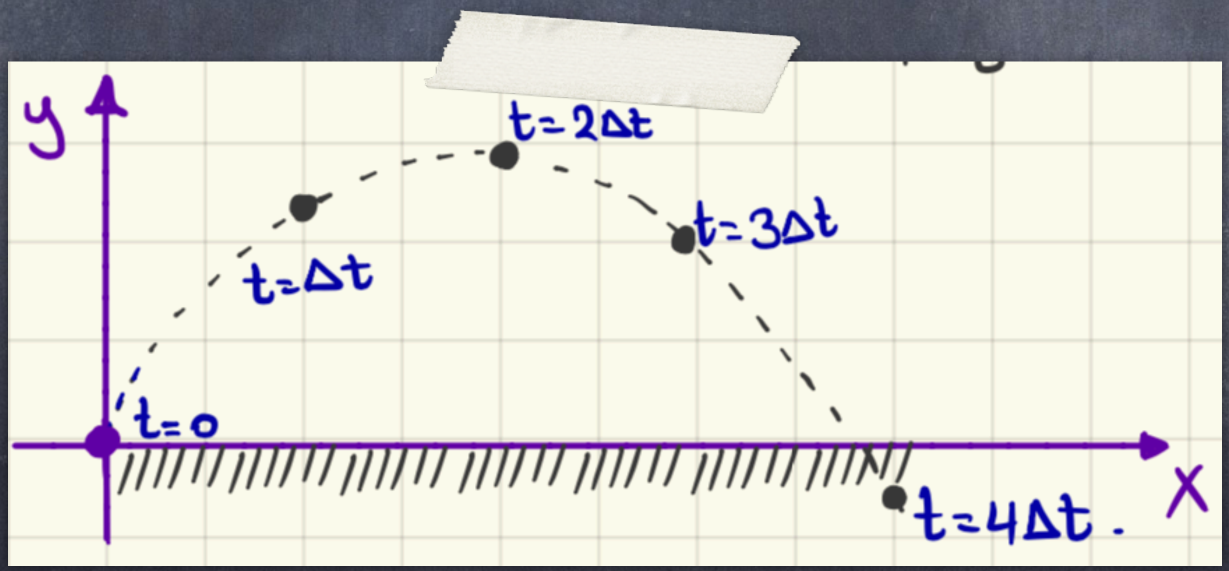
$$x = u_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

- Απαλείφοντας τον χρόνο t: $y = \dfrac{u0y}{u_{0x}}x - \dfrac{g}{2}\dfrac{x^2}{u_{0x}^2}$

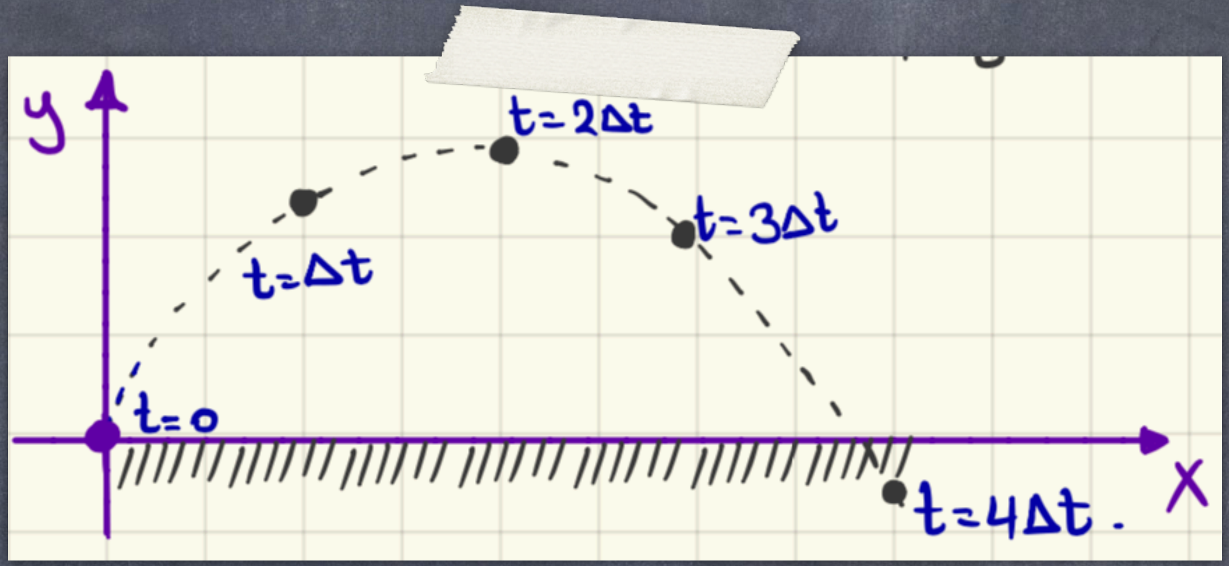
- Για το βεληνεκές ισχύει: $y = 0 \Rightarrow \dfrac{u0y}{u_{0x}}r - \dfrac{g}{2}\dfrac{r^2}{u_{0x}^2} \Rightarrow \begin{array}{l} r = 0 \\ r = \frac{g}{2}u_{0y}u_{0x} \end{array}$

Αριθμητική επίλυση

- Προβλήματα κινηματικής, όπως η πλάγια βολή, επιδέχονται **αριθμητικής επίλυσης**
  - Χωρίζουμε την κίνηση του σώματος σε χρονικά διαστήματα διάρκειας Δt
    - Επιλέγουμε το Δt να είναι μικρό, π.χ. $\Delta t = 0.1s$
  - Το τέλος κάθε διαστήματος Δt ονομάζεται "χρονική στιγμή"



Αριθμητική επίλυση



- Σε κάθε χρονική στιγμή υπολογίζουμε ξεχωριστά τις συνιστώσες τις θέσης και της ταχύτητας στις διευθύνσεις O_x και O_y
  - Για τον υπολογισμό της θέσης την επόμενη χρονική στιγμή, υποθέτουμε ότι το σώμα εκτελεί ομαλή ευθύγραμμη κίνηση κατά το διάστημα Δt, με την ταχύτητα που είχε την προηγούμενη χρονική στιγμή (στην αρχή του χρονικού διαστήματος).
  - Για τον υπολογισμό της ταχύτητας την επόμενη χρονική στιγμή, υποθέτουμε ότι το σώμα εκτελεί ομαλή ευθύγραμμη κίνηση (διεύθυνση x) ή ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση (διεύθυνση y) κατά το διάστημα Δt.

Αριθμητική επίλυση

- Ας δούμε ένα-ένα τις χρονικές στιγμές:
    - Την χρονική στιγμή μηδέν (Σ0), έχουμε:

$$x_0 = 0 \quad u_{0x} = u_0 \cos(\theta)$$
$$y_0 = 0 \quad u_{0y} = u_0 \sin(\theta)$$

- Για την δεύτερη στιγμή (Σ1):

$$x_1 = x_0 + u_{0x}\Delta t$$
$$y_1 = y_0 + u_{0y}\Delta t$$

Υπολογίζουμε τη νέα θέση υποθέτοντας ομαλή ευθύγραμμη κίνηση με αρχική ταχύτητα $\boldsymbol{u_{0x}}$, $\boldsymbol{u_{0y}}$

$$u_{1x} = u_{0x}$$
$$u_{1y} = u_{0y} + a_y\Delta t$$

Υπολογίζουμε τη νέα ταχύτητα υποθέτοντας ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα $\boldsymbol{u_{0x}}$, $\boldsymbol{u_{0y}}$, και επιτάχυνση $\boldsymbol{a_x=0}$, $\boldsymbol{a_y=-g}$

Για την πρώτη χρονική στιγμή (Σ1):

$$x_1 = x_0 + u_{0x}\Delta t$$
$$y_1 = y_0 + u_{0y}\Delta t$$

Υπολογίζουμε τη νέα θέση υποθέτοντας ομαλή ευθύγραμμη κίνηση με αρχική ταχύτητα u_{0x}, u_{0y}

$$u_{1x} = u_{0x}$$
$$u_{1y} = u_{0y} + a_y\Delta t$$

Υπολογίζουμε τη νέα ταχύτητα υποθέτοντας ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα u_{0x}, u_{0y}, και επιτάχυνση $a_x=0$, $a_y=-g$

Για την δεύτερη στιγμή (Σ2):

$$x_2 = x_1 + u_{1x}\Delta t$$
$$y_2 = y_1 + u_{1y}\Delta t$$

Όπου x_1, y_1 και u_{0x}, u_{0y}, έχουν υπολογιστεί στο προηγούμενο βήμα

$$u_{2x} = u_{1x}$$
$$u_{2y} = u_{1y} - g\Delta t$$

[Ο πίνακας συμπληρώνεται από τους μαθητές στην τάξη]

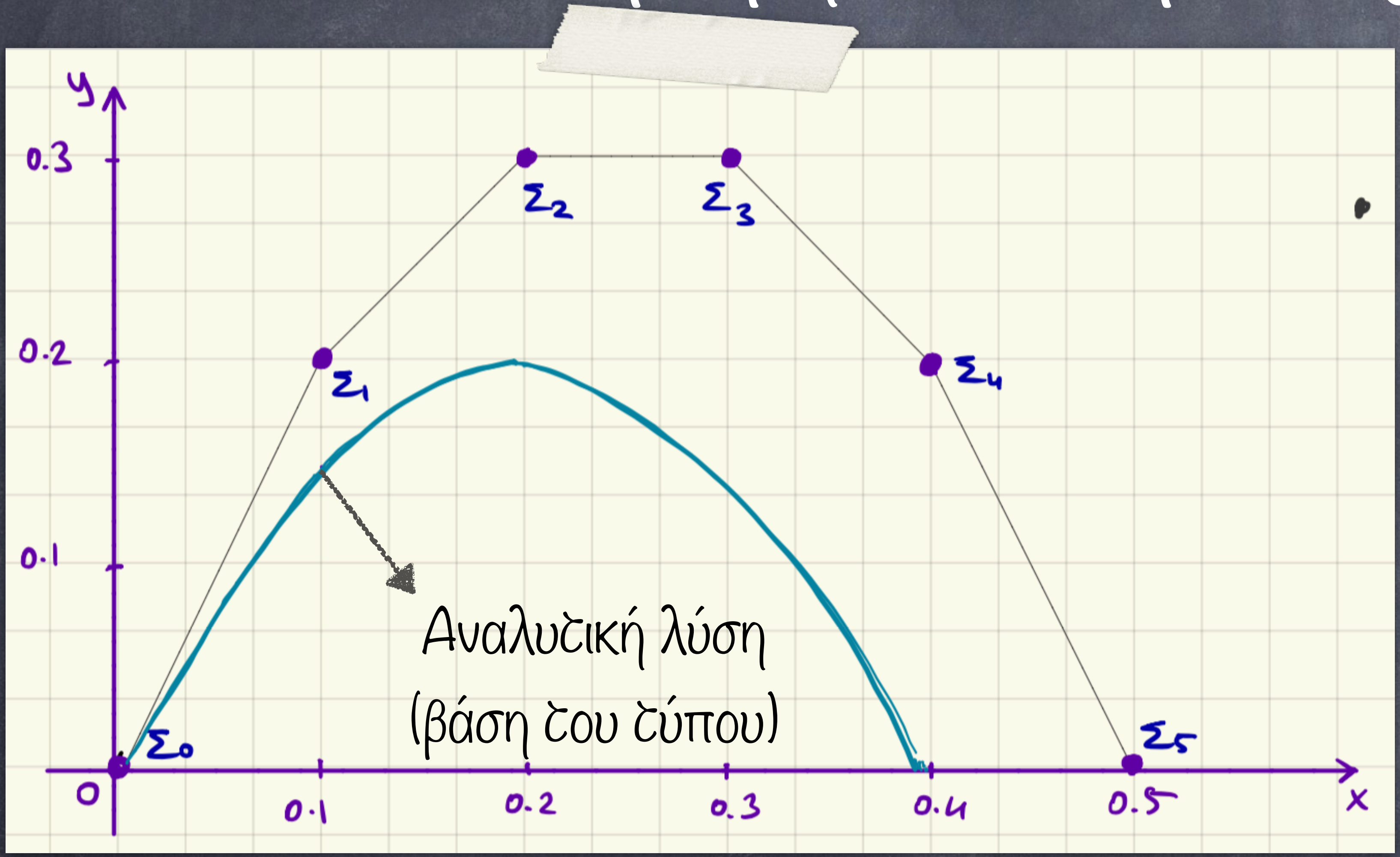
Αριθμητικό παράδειγμα

$$x_0 = 0,\ y_0 = 0, \quad u_{0x} = 1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}},\ u_{0y} = 2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}},\ \ \Delta t = 0.1\mathrm{s}$$

Σ_0	$x_0 = 0$	$y_0 = 0$	$u_{0x} = 1\,m/s$	$u_{0y} = 2\,m/s$
Σ_1	$x_1 = x_0 + u_{0x} \cdot \Delta t = 0.1\,m$	$y_1 = y_0 + u_{0y} \cdot \Delta t = 0.2\,m$	$u_{1x} = u_{0x} = 1\,m/s$	$u_{1y} = u_{0y} - g \cdot \Delta t = 1\,m/s$.
Σ_2	$x_2 = x_1 + u_{1x} \cdot \Delta t = 0.2\,m$	$y_2 = y_1 + u_{1y} \cdot \Delta t = 0.3\,m$	$u_{2x} = u_{1x} = 1\,m/s$	$u_{2y} = u_{1y} - g \cdot \Delta t = 0\,m/s$.
Σ_3	$x_3 = x_2 + u_{2x} \cdot \Delta t = 0.3\,m$	$y_3 = y_2 + u_{2y} \cdot \Delta t = 0.3\,m$	$u_{3x} = u_{2x} = 1\,m/s$	$u_{3y} = u_{2y} - g \cdot \Delta t = -1\,m/s$.
Σ_4	$x_4 = x_3 + u_{3x} \cdot \Delta t = 0.4\,m$	$y_4 = y_3 + u_{3y} \cdot \Delta t = 0.2\,m$	$u_{4x} = u_{3x} = 1\,m/s$	$u_{4y} = u_{3y} - g \cdot \Delta t = -2\,m/s$.
Σ_5	$x_5 = x_4 + u_{4x} \cdot \Delta t = 0.5\,m$	$y_5 = y_4 + u_{4y} \cdot \Delta t = 0\,m$	$u_{5x} = u_{4x} = 1\,m/s$	$u_{5y} = u_{4y} - g\Delta t = -3\,m/s$.

[Δίδεται η γραφική παράσταση με την καμπύλη (αναλυτική λύση) και οι μαθητές τοποθετούν τα σημεία Σ0 - Σ5]

Αριθμητικό παράδειγμα



- Το αποτέλεσμα της αριθμητικής λύσης εμπεριέχει σφάλμα, το λεγόμενο **σφάλμα διακριτοποίησης.** Το σφάλμα αυτό, μικραίνει όσο μικραίνει το Δt

- Εάν επαναλάβουμε την άσκηση με Δt = 0.05s, θα χρειαστούμε διπλάσια βήματα, και εάν την επαναλάβουμε με Δt = 0.01s θα χρειαστούμε **δεκαπλάσια** βήματα
- Είναι προφανές πως για όλο και πιο μικρές τιμές του Δt η αριθμητική επίλυση γίνεται όλο και πιο χρονοβόρα

Υπολογιστική Λύση

- Κατά την **υπολογιστική επίλυση** του προβλήματος, χρησιμοποιούμαι έναν υπολογιστή για να αυτοματοποιήσουμε τον υπολογισμό των στιγμιοτύπων
- Θα πρέπει να δώσουμε:
  - Την αρχική θέση και ταχύτητα (αρχικές συνθήκες)
  - Τον χρόνο Δt
  - Τις **εξισώσεις κίνησης**, με τις οποίες θα υπολογίζουμε την θέση και ταχύτητα της νέας στιγμής βάσει του προηγούμενου

Υπολογιστική Λύση

- Σημειώστε πως, με τον υπολογιστής, δεν χρειάζεται να γνωρίζουμε την **εξίσωση** της τροχιάς. Η τροχιά προκύπτει αφού ο υπολογιστής βρεί μία μία την θέση του σώματος σε κάθε χρονική στιγμής
- Στο παράδειγμα που θα δούμε, στη διεύθυνση O_y ο υπολογιστής προσδιορίζει ποια χρονική στιγμή και σε ποια θέση μηδενίζεται η ταχύτητα του βλήματος χωρίς να χρησιμοποιεί κάποιον τύπο για τον χρόνο πτήσης ή το μέγιστο ύψος.
- Η υπολογιστική μέθοδος είναι λοιπόν γενική, και μπορεί να χρησιμοποιηθεί και όταν **δεν γνωρίζουμε** την εξισώσεις της τροχιάς
- Συνεχίστε αυτό το πρόβλημα ακολουθώντας τον πιο κάτω σύνδεσμο και τις οδηγίες που υπάρχουν εκεί:

http://172.104.245.249:8000