1 Постановка задачи

Рассматриваем следующую начально-краевую задачу с граничными условиями первого рода для нелинейного параболического уравнения Бюргерса с малым положительным (сингулярным) параметром ε при старшей производной:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u + u\frac{\partial}{\partial x}u = \varepsilon\frac{\partial^2}{\partial x^2}u, \quad (x,t) \in (x_l,x_r) \times (0,T], \\ u(x,0) = u_0(x), \quad x \in [x_l,x_r], \\ u(x_l,t) = u_l(t), \quad u(x_r,t) = u_r(t), \quad t \in [0,T]. \end{cases} \tag{1}$$

$u_l(t)$, $u_r(t)$, $u_0(x)$ — произвольные, достаточно гладкие функции своих аргументов, которые задает пользователь(предполагается согласованность граничных и начальных условий).

Стоит отметить, задачи с малым параметром при старшой производной является жесткой.

Основная цель — создать код на языке C++, который будет численно решать данную задачу.

2 Метод решения

Будем решать задачу (1) методом частичной дискретизации (метод прямых). Для этого введем сетку с постоянным шагом по переменной x:

$$x_n = x_l + n \cdot h \quad , n = 0,1,...,N, h = \frac{x_r - x_l}{N}.$$

После конечно-разностной аппроксимации первой и второй производных $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений по времени

$$\frac{du_n}{dt} = \frac{\varepsilon}{h^2}(u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1}) - u_n\frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2h}, \quad n = 1,2,...,N-1. \tag{2}$$

Систему (2) будем решать одностадийной схемой Розенброка(подробнее Калиткин Н. Н. "Численные методы"), которая наиболее адекватно решает жесткие задачи. Она имеет вид

$$\hat{u} = u + \tau Re(w), \quad [E - a_{11}\tau f_u(u,t)]\, w = f\left(u, t + \frac{\tau}{2}\right). \tag{3}$$

Здесь u, $\hat{u}$ — решения на текущем и следующем временном слое; $f(u,t)$ — правая часть системы ОДУ; a_{11} — коэффициент, от которого зависят свойства схемы: $a_{11} = \frac{1+i}{2}$ — схема Розенброка с комплексным коэффициентом (наиболее надежная надежная, 2-й порядок аппроксимации, L_2 устойчивость, монотонная); $a_{11} = \frac{1}{2}$ – схема Кренка-Николсона(второй порядок, A-устойчивость, немонотонная);$a_{11} = 1$ – обратная схема Эйлера(первый порядок, L_1 устойчивость, монотонная); $a_{11} = 0$ – явная схема Эйлера(первый порядок, неустойчивая, немонотонная).

Заметим, что для системы (2) $f(u,t) = f(u)$ и матрица $[E - a_{11}\tau f_u(u,t)]$ имеет трехдиагональный вид. Поэтому можно применять хорошо известный метод прогонки для нахождения w.