Examen la Metode Numerice

Șerb Ștefan-Alexandru
102F

21 Iunie 2022

Problema 1

Pentru a evalua numeric $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} ln[2 + cos(x^2)]dx$ se considera formula de cuadratura Gauss-Hermite:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} w_i f_i + \frac{n!\sqrt{\pi}}{2^n(2n)!} f^{(2n)}(c)$$

$$a < b < c$$

Unde $x_1 < x_2 < ..... < x_n$ sunt radacinile polinomului Hermite H_n

$$w_i = \frac{2^{n+1} n! \sqrt{\pi}}{[H_n'(x_i)^2]}$$

$$f_i = f(x_i), i = \bar{1, n} = (1, n) \cap Z$$

a) Pentru n = 4, gasiti o valoare aproximativa a integralei;

b) Care este valoarea "exacta" a integralei (6 cifre semnificative)?

c) Dati o margine superioara a erorii pentru n=4. Comentati rezultatele obtinute la punctele a-c;

d) Pentru a calcula o valoare aproximativa a integralei, cu o eroare de 10^{-8}, scrieti un program care implementeaza formula de cuadratura Gauss-Hermite.

Observatie:

O sa notez in continuare valoarea termenilor $=^{not} T_n$ si valoarea sumelor $=^{not} S_n$

Subpunctul a:

Pentru n = 4 algoritmul va returna rezultatul (folosind 8 zecimale dupa virgula):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f(x)dx = \sum_{k=1}^{4} w_i f_i + \frac{n!\sqrt{\pi}}{2^n(2n)!} f^{(2n)}(c) + Rest$$

$$= w_i f_i + \frac{1!\sqrt{\pi}}{2^1(2)!} f^{(2)}(c) + w_i f_i + \frac{2!\sqrt{\pi}}{2^2(4)!} f^{(4)}(c) + w_i f_i + \frac{3!\sqrt{\pi}}{2^3(6)!} f^{(6)}(c) + w_i f_i + \frac{4!\sqrt{\pi}}{2^4(8)!} f^{(8)}(c) + R =$$

$$= 1.76161047 + R = S_4$$

Pentru a vedea eroarea putem lua

Subpunctul b:

Pentru o valoare mai exacta a acestei sume putem lua mai multi termeni, de exemplu putem spune n=100

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f(x)dx = \sum_{k=1}^{100} w_i f_i + \frac{n!\sqrt{\pi}}{2^n(2n)!} f^{(2n)}(c) + Rest \approx 1.78010061 = S_{100}$$

Aceasta este o valoare destul de "exacta"

Valoarea celui de-al 100-lea termen ($=^{not} T_{100}$) al acestei sume fiind de:

$$T_{100} = 4.02414459e - 06 \approx 4 \cdot 10^{-6}$$

Putem afla acest termen din algoritmul nostru scazand din valoarea sumei pentru n = 100 pe cea pentru n = 99

Pentru n = 100:

$$S_{100} = T_1 + T_2 + ... + T_{99} + T_{100}$$
$$S_{99} = T_1 + T_2 + ... + T_{98} + T_{99}$$

$$\Rightarrow T_{100} = S_{100} - S_{99}$$

Subpunctul c:

Putem extinde putin ideea de mai sus, din moment ce aceasta serie trebuie sa fie convergenta (altfel nu s-ar putea calcula).

Putem scrie ca:

$$S_{total} = S_4 + Rest_1 = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + Rest_1$$
$$S_{total} = S_5 + Rest_2 = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + Rest_2$$

Egalam relatiile:

$$T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + Rest_1 = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + Rest_2$$

Daca reducem toti termenii observam ca:

$$Rest_1 = T_5 + Rest_2$$

Observam si ca acest lucru se poate intampla pentru orice n:

$$S_{total} = S_n + Rest_1$$

$$S_{total} = S_{n+1} + Rest_2$$

$$\Rightarrow Rest_1 = T_{n+1} + Rest_2$$

Prin convergenta acestui sir putem observa ca resturile se vor micsora, astfel am putea aproxima eroarea scazand S_4 dintr-un S cu indice mult mai mare, de exemplu S_{100}

$$\varepsilon_4 \approx |S_{100} - S_4|$$

Si

$$S_{total} \approx S_4 \pm \varepsilon_4$$

$$S_{100} = 1.78010061$$

$$S_4 = 1.7616104$$

Scazand:

$$\varepsilon_4 = 0.0184901380$$

Astfel, o sa iau marginea superioara a erorii:

$$\varepsilon = 0.02$$

$$S_{total} \approx S_4 \pm \varepsilon = 1.7616104 \pm 0.02$$

Aceasta margine de eroare este destul de buna, rezultatul acestei integrale conform Wolfram Alpha fiind:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} ln[2 + cos(x^2)]dx = 1.78009$$

Iar acesta apartine intervalului (1.7616104 - 0.02, 1.7616104 + 0.02)

Subpunctul d:

O scurta prezentare a algoritmului

```
function p=hermipol(n)

k=2;

p(1,1)=1;
p(2,1:2)=[2 0];
for k=2:n
    p(k+1,1:k+1)=2*[p(k,1:k) 0]-2*(k-1)*[0 0 p(k-1,1:k-1)];
end
```

Aceasta functie genereaza polinomul Hermite

```
function I=gausshermi(f,a,b,n)

p=hermipol(n);
x=roots(p(n+1,:));

G=feval(f,x);


for i=1:n
    C(i)=(2.^(n-1)*(factorial(n)).*sqrt(pi))./(n.^2.*(polyval(p(n,1
end


I=dot(C,G);
```

Aceasta functie genereaza restul termenilor din ecuatie.
Apelez gausshermi folosind:

$$f(x) = ln[2 + cos(x^2)]$$

$$a = -\infty$$

$$b = +\infty$$

n reprezinta numarul de termeni pentru care calculam suma

Problema 2

Folosind metoda factorizarii LU a lui Doolittle, sa se rezolve sistemul liniar:

$$2x_1 - x_2 = 1$$
$$-x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$$
$$-x_2 + 2x_3 - x_4 = 0$$
$$-x_3 + 2x_4 = 1$$

Matricea sistemului este:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Si matricea solutiilor:

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vom desparti matricea A in doua alte matrice folosind factorizarea LU. O matrice va contine toate elemente deasura diagonalei principale (inclusiv diagonala), iar cea de a doua va contine toate elemente dedesubtul diagonalei principale inclusiv aceasta.

Dupa factorizare vom obtine rezultatul astfel:

```
D = L\b
X = U\D
```

Aceasta este echivalentul urmatoarei operatii matematice:

$$D \cdot b = L \to D = L \cdot b^{-1} \Rightarrow$$

```
D = L\b
```

$$X \cdot D = U \Rightarrow X = U \cdot D^{-1} \Rightarrow$$

```
X = U\D
```