2024 年普通高等学校招生全国统一考试

新高考数学 II 卷参考答案

本试卷共 4 页, 19 小题. 满分 150 分. 考试用时 120 分钟.

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、考生号、考场号和座位号填写在答题卡上. 用 2B 铅笔将试卷类型 (B) 填涂在答题卡相应位置上. 将条形码横贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”.

2. 作答选择题时, 选出每小题答案后, 用 2B 铅笔在答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑; 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案. 答案不能答在试卷上.

3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答, 答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上; 如需改动, 先划掉原来的答案, 然后再写上新答案; 不准使用铅笔和涂改液. 不按以上要求作答无效.

4. 考生必须保持答题卡的整洁. 考试结束后, 将试卷和答题卡一并交回.

一、单项选择题：本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分, 在每小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求.

1. 已知 $z=-1-\mathrm{i}$, 则 $|z|=($ $)$.

A: 0　　B: 1　　C: $\sqrt{2}$　　D: 2

答案： C.

解析： $|z|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$. 故选 C.

2. 已知命题 $p:\forall\, x\in\mathbf{R}, |x+1|>1$; 命题 $q:\exists\, x>0, x^3=x$. 则 $($ $)$.

A: p 和 q 都是真命题　　B: $\neg p$ 和 q 都是真命题

C: p 和 $\neg q$ 都是真命题　　D: $\neg p$ 和 $\neg q$ 都是真命题

答案： B.

解析： $p:\forall\, x\in\mathbf{R}, |x+1|>1$, 假, 则 $\neg p$ 为真; $q:\exists\, x>0, x^3=x$, 真, 则 $\neg q$ 为假. 故选 B.

3. 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=1, |\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=2$, 且 $(\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a})\perp\boldsymbol{b}$. 则 $|\boldsymbol{b}|=($ $)$.

A: $\dfrac{1}{2}$　　B: $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　C: $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　D: 1

答案： B.

解析： $|\boldsymbol{a}|=1, |\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=2$.

$$(\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a})\perp\boldsymbol{b}\Rightarrow\boldsymbol{b}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0, \qquad ①$$

$$|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=2\Rightarrow\boldsymbol{a}^2+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{b}^2=4. \qquad ②$$

联立 ①② 得 $|\boldsymbol{b}|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. 故选 B.

4. 某农业研究部门在面积相等的 100 块稻田上种植一种新型水稻, 得到各块稻田的亩产量 (单位: kg) 并整理

部分数据如下表所示:

亩产量	[900, 950)	[950, 1000)	[1000, 1050)	[1100, 1150)	[1150, 1200)
频数	6	12	18	24	10

根据表中数据, 下列结论中正确的是 ( ).

A: 100 块稻田亩产量的中位数小于 1050 kg

B: 100 块稻田中亩产量低于 1100 kg 的稻田所占比例超过 40%

C: 100 块稻田亩产量的极差介于 200 kg 至 300 kg 之间

D: 100 块稻田亩产量的平均值介于 900 kg 至 1000 kg

答案: .

解析:

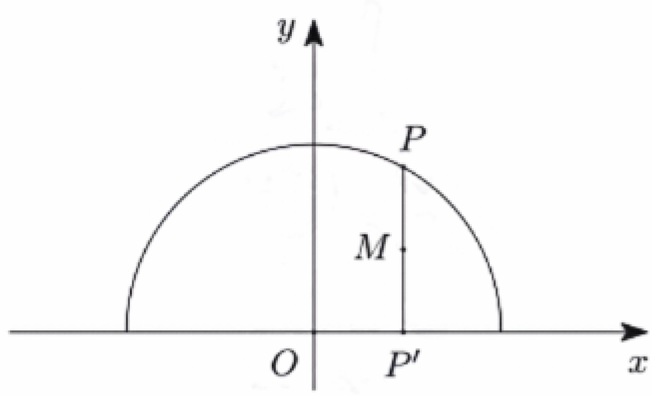
5. 已知曲线 $C: x^2+y^2=16\ (y>0)$, 从 C 上任意一点 P 向 x 轴作垂线段 PP', P' 为垂足, 则线段 PP' 的中点 M 的轨迹方程为 ( ).

A: $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1\ (y>0)$　　B: $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{8}=1\ (y>0)$

C: $\dfrac{y^2}{16}+\dfrac{x^2}{4}=1\ (y>0)$　　D: $\dfrac{y^2}{16}+\dfrac{x^2}{8}=1\ (y>0)$

答案: A.

解析: 如图, $x^2+y^2=16\ (y>0)$.



设 $M(x_0,y_0)\ (y_0>0)$, 则 $P'(x_0,0)$, $P(x_0,2y_0)$, 代入 $x^2+y^2=16 \Rightarrow x_0^2+4y_0^2=16\ (y_0>0)$.
易得, M 的轨迹方程为 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1\ (y>0)$. 故选 A.

6. 设函数 $f(x)=a(x+1)^2-1, g(x)=\cos x+2ax$ (a 为常数), 当 $x\in(-1,1)$ 时, 曲线 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 恰有一个交点, 则 $a=$ ( ).

A: -1　　B: $\dfrac{1}{2}$　　C: 1　　D: 2

答案: D.

解析: 令 $f(x)=g(x)$, 则 $\cos x=a(x^2+1)-1$.

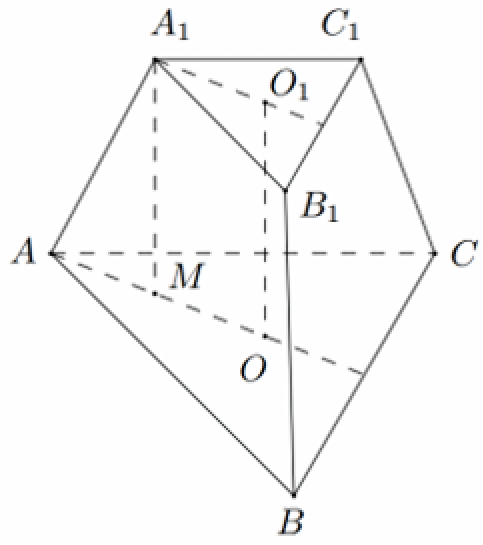
令 $h(x)=\cos x-a(x^2+1)+1$. 因为 $h(x)$ 为偶函数, 且 $h(x)$ 有唯一零点, 所以有 $h(0)=0$, 即 $a=2$. 故选 D.

7. 已知正三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为 $\dfrac{52}{3}$, $AB=6$, $A_1B_1=2$, 则 A_1A 与平面 ABC 所成角的正切值为 ( ).

A: $\dfrac{1}{2}$　　B: 1　　C: 2　　D: 3

答案：B.

解析：由题意知, $S_{\triangle A_1B_1C_1}=\sqrt{3}, S_{\triangle ABC}=9\sqrt{3}$. 易得 $A_1O_1=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}, AO=2\sqrt{3}$, 所以 $AM=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.



又 $V=\dfrac{1}{3}\cdot(\sqrt{3}+9\sqrt{3}+\sqrt{\sqrt{3}\cdot 9\sqrt{3}})\cdot OO_1=\dfrac{52}{3}$, 所以 $A_1M=OO_1=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.
所以, $\tan\angle A_1AM=1$. 故选 B.

8. 设函数 $f(x)=(x+a)\ln(x+b)$, 若 $f(x)\geqslant 0$, 则 a^2+b^2 的最小值为 ( ).

A: $\dfrac{1}{8}$　　B: $\dfrac{1}{4}$　　C: $\dfrac{1}{2}$　　D: 1

答案：C.

解析：$f(x)=(x+a)\ln(x+b)\ (x>-b)$. 令 $g(x)=x+a, h(x)=\ln(x+b)$, 则 $f(x)=g(x)\cdot h(x)\geqslant 0$.
又 $g(x)$ 单调递增, $h(x)$ 单调递增, 所以只需 $[-a,+\infty)$ 和 $[1-b,+\infty)$ 满足 $-a=1-b$, 则

$$a^2+b^2=2b^2-2b+1,$$

其最小值为 $\dfrac{1}{2}$. 故选 C.

二、多项选择题：本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分, 部分选对的得 3 分, 选错或不选得 0 分.

9. 对于函数 $f(x)=\sin 2x$ 和 $g(x)=\sin(2x-\dfrac{\pi}{4})$, 下列正确的有 ( ).

A: $f(x)$ 与 $g(x)$ 有相同的零点

B: $f(x)$ 与 $g(x)$ 有相同的最大值

C: $f(x)$ 与 $g(x)$ 有相同的最小正周期

D: $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图像有相同的对称轴

答案：BC.

解析：分析如下:

	$f(x)=\sin 2x$	$g(x)=\sin(2x-\frac{\pi}{4})$
零点	$2x=k\pi,k\in\mathbf{Z}\Rightarrow(\frac{k\pi}{2},0),k\in\mathbf{Z}$	$2x-\frac{\pi}{4}=k\pi,k\in\mathbf{Z}\Rightarrow(\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2},0),k\in\mathbf{Z}$
对称轴	$2x=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\Rightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$	$2x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\Rightarrow x=\frac{3\pi}{8}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$
最小正周期	$\frac{2\pi}{2}=\pi$	$\frac{2\pi}{2}=\pi$
最大值	1	1

故 BC 正确.

10. 抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的准线为 l, P 为 C 上动点, 过 P 作 $\odot A: x^2 + (y-4)^2 = 1$ 的一条切线, Q 为切点, 过点 P 作 l 的垂线, 垂足为 B. 则 ( ).

A: l 与 $\odot A$ 相切

B: 当 P, A, B 三点共线时, $|PQ| = \sqrt{15}$

C: 当 $|PB| = 2$ 时, $PA \perp AB$

D: 满足 $|PA| = |PB|$ 的点 A 有且仅有 2 个

答案: ABD.

解析: A: $y^2 = 4x, p = 2, l: x = -1$.

又 $\odot A$ 半径为 1, 圆心为 $A(0,4)$, 所以 $d_{A-l} = 1 = r$, 所以 $\odot A$ 与 l 相切, A 正确.

B: P, A, B 三点共线时, $y_P = y_A = 4$.

代入 $y^2 = 4x$ 中, $x_P = 4$, 所以 $PA = 4$, 所以 $PQ = \sqrt{PA^2 - r^2} = \sqrt{15}$, B 正确.

C: $PB = 2$ 时, $x_P = 1, y_P = 2$. 此时, $B(-1,2), P(1,2), A(0,4)$, $AP^2 = AB^2 = 5, BP^2 = 4$.

因为 $AP^2 + AB^2 \neq BP^2$, 所以 PA 与 AB 不垂直, C 错误.

D: 因为 $PB = PF$, 所以 $PA = PB$ 时, $PA = PF$. 所以, 点 P 在 AF 中垂线上.

又 $A(0,4), F(1,0)$, 所以 AF 方程为 $x = 4y - \frac{15}{2}$. 联立 $\begin{cases} x = 4y - \frac{15}{2}, \\ y^2 = 4x \end{cases}$ 得 $y^2 - 16y + 30 = 0, \Delta > 0$.

所以 AF 与抛物线 C 有两个交点. 故点 P 有且仅有两个, D 正确.

11. 设函数 $f(x) = 2x^3 - 3ax^2 + 1$, 则 ( ).

A: 当 $a > 1$ 时, $f(x)$ 有三个零点

B: 当 $a < 0$ 时, $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极大值点

C: 存在 a, b, 使得 $x = b$ 为曲线 $y = f(x)$ 的对称轴

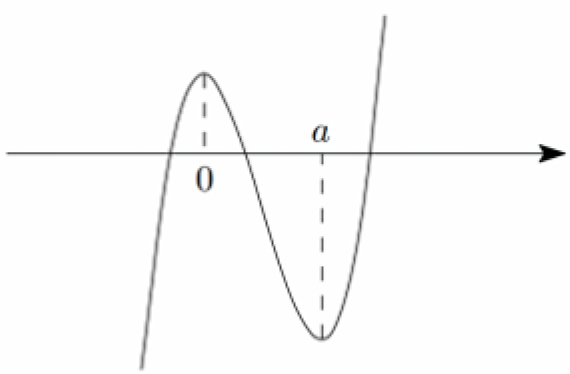
D: 存在 a, 使得点 $(1, f(1))$ 为曲线 $y = f(x)$ 的对称中心

答案: AD.

解析: $f(x) = 2x^3 - 3ax^2 + 1$, $f'(x) = 6x^2 - 6ax = 6x(x-a)$. 令 $f'(x) = 0, x_1 = 0, x_2 = a$.

A: $a > 1$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, 0) \nearrow (0, a) \searrow (a, +\infty) \nearrow$.

又 $x \to -\infty$ 时, $f(x) \to -\infty$, $x \to +\infty$ 时, $f(x) \to +\infty$, $f(0) = 1 > 0$, $f(1) = 3 - 3a < 0$, 所以 $f(a) < 0$.



$f(x)$ 大致图像如图所示, 所以有三个零点, A 正确.

B: $a < 0$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, a) \nearrow (a, 0) \searrow (0, +\infty) \nearrow$, $x = 0$ 为极小值点, B 错误.

C: 三次函数无对称轴, C 错误.

D: 令 $f(0) + f(2) = 2f(1)$, 即 $1 + (2 \times 2^3 - 3a \times 2^2 + 1) = 2(3 - 3a)$, 所以 $a = 2$.

代入得 $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 1$, 满足 $f(x) + f(2-x) = 2f(1)$, D 正确.

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $a_3+a_4=7, 3a_2+a_5=5$，则 $S_{10}=$__________.

答案： 95.

解析： $a_3+a_4=7, 3a_2+a_5=2a_2+a_3+a_4=5$，所以 $2a_2=-2, a_2=-1$.

又 $a_3+a_4=2a_2+3d=7$，所以 $d=3$，所以 $a_1=a_2-d=-4$. 故

$$S_{10}=10a_1+\frac{10\times 9}{2}\cdot d=10\times(-4)+45\times 3=95.$$

13. 已知 α 为第一象限角，β 为第三象限角，$\tan\alpha+\tan\beta=4, \tan\alpha\tan\beta=\sqrt{2}+1$，则 $\sin(\alpha+\beta)=$________.

答案： $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

解析： 因为 $\tan\alpha+\tan\beta=4, \tan\alpha\cdot\tan\beta=\sqrt{2}+1$，所以

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}=\frac{4}{1-(\sqrt{2}+1)}=-2\sqrt{2}.$$

又 α、β 分别为第一、三象限角，所以 $\begin{cases}2k\pi<\alpha<\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbf{Z},\\ \pi+2k\pi<\beta<\frac{3}{2}\pi+2k\pi, k\in\mathbf{Z},\end{cases}$ 所以

$$\pi+2k\pi<\alpha+\beta<2\pi+2k\pi, k\in\mathbf{Z}.$$

所以，$\alpha+\beta$ 为第三、四象限角.

又 $\tan(\alpha+\beta)=-2\sqrt{2}<0$，所以 $\alpha+\beta$ 为第四象限角，所以 $\sin(\alpha+\beta)<0, \cos(\alpha+\beta)>0$.

又 $\begin{cases}\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=-2\sqrt{2},\\ \sin^2(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha+\beta)=1,\end{cases}$ 所以 $\sin(\alpha+\beta)=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

11	21	31	40
12	22	33	42
13	22	33	43
15	24	34	44

14. 在上图的 4×4 方格表中选 4 个方格，要求每行和每列均恰有一个方格被选中，则共有__________种选法，在所有符合上述要求的选法中，选中方格中的 4 个数之和的最大值是__________.

答案： 24; 112.

解析： (1) 在四列中分别取一格，分别取第一、二、三、四行中的某一格，即相当于把取出的格子排序.

故 $\mathrm{A}_4^4=24$ 种选法.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (13 分)

记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c，已知 $\sin A+\sqrt{3}\cos A=2$.

(1) 求 A.

(2) 若 $a=2,\sqrt{2}b\sin C=c\sin 2B$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

解: $\because\ \sin A+\sqrt{3}\cos A=2,\therefore\ 2\sin(A+\frac{\pi}{3})=2,\sin(A+\frac{\pi}{3})=1$.

又 $A\in(0,\pi),\therefore\ A+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2},A=\frac{\pi}{6}$.

综上, 角 A 为 $\frac{\pi}{6}$.

(2) $\because\ \sqrt{2}b\sin c=c\sin 2B,\therefore\ \sqrt{2}b\sin C=2c\sin B\cos B,\therefore\ \sqrt{2}bc=2bc\cos B,\cos B=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

又 $B\in(0,\pi),\therefore\ B=\frac{\pi}{4},C=\pi-A-B=\frac{7}{12}\pi$. 在 $\triangle ABC$ 中, 由正弦定理得

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{2}{\frac{1}{2}}=4,$$

$\therefore\ b=4\sin B=2\sqrt{2},c=4\sin C=4\sin\frac{7\pi}{12}=4\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3})=\sqrt{6}+\sqrt{2}.\therefore\ a+b+c=2+3\sqrt{2}+\sqrt{6}$.

综上, $\triangle ABC$ 的周长为 $2+3\sqrt{2}+\sqrt{6}$.

16. (15 分)

已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-ax-a^3$.

(1) 当 $a=1$ 时, 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程.

(2) 若 $f(x)$ 有极小值, 且极小值小于 0, 求 a 的取值范围.

解: (1) 当 $a=1$ 时, $f(x)=\mathrm{e}^x-x-1,f'(x)=\mathrm{e}^x-1$.

令 $x=1$, 得 $f(1)=\mathrm{e}-2,f'(1)=\mathrm{e}-1$.

故 $f(x)$ 在 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $(\mathrm{e}-1)(x-1)=y-(\mathrm{e}-2)$, 整理得 $(\mathrm{e}-1)x-y-1=0$.

综上, 曲线 $y=f(x)$ 在 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $(\mathrm{e}-1)x-y-1=0$.

(2) 因为 $f(x)=\mathrm{e}^x-ax-a^3$, 所以 $f(x)$ 定义域为 $\mathbf{R}$, 且 $f'(x)=\mathrm{e}^x-a$, $f'(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.

当 $a\leqslant 0$ 时, $\forall x\in\mathbf{R}$, $f'(x)>0$ 恒成立, $f(x)$ 无极小值.

当 $a>0$ 时, 令 $f'(x)=0$ 得 $x=\ln a$.

所以, 当 $x\in(-\infty,\ln a)$ 时, $f'(x)<0$, $f(x)$ 单调递减; 当 $x\in(\ln a,+\infty)$ 时, $f'(x)>0$, $f(x)$ 单调递增.

即 $f(x)$ 在 $x=\ln a$ 处取极小值, 极小值 $f(\ln a)=a-a\ln a-a^3$.

又 $f(x)$ 的极小值小于 0, 所以 $a-a\ln a-a^3<0$, 即 $a^2+\ln a-1>0$.

令 $g(a)=a^2+\ln a-1$, 则 $g'(a)=2a+\frac{1}{a}>0$, $g(a)$ 单调递增.

又 $g(1)=1^2+\ln 1-1=0$, 所以 $a^2+\ln a-1>0$ 的解集为 $a\in(1,+\infty)$.

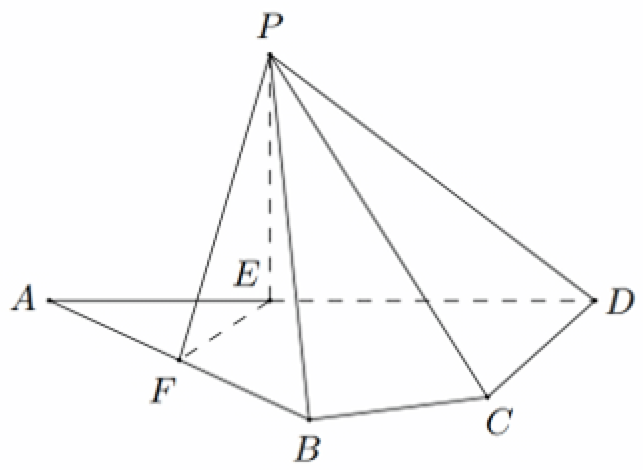
综上, a 的取值范围为 $(1,+\infty)$.

17. (15 分)

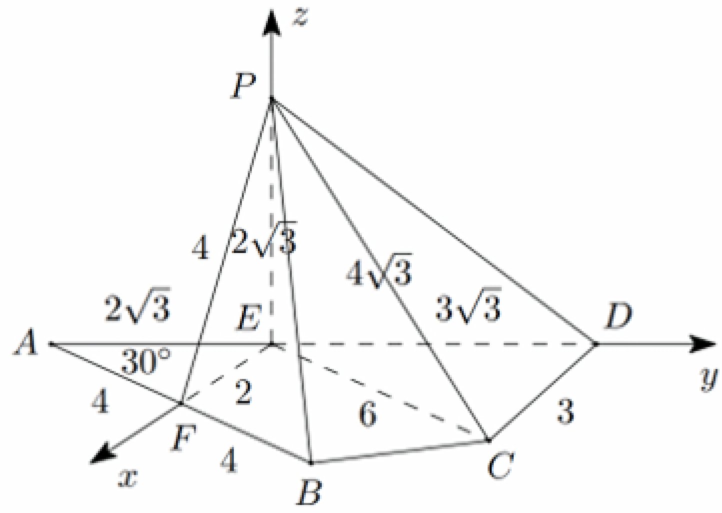
如图, 平面四边形 $ABCD$ 中, $AB=8,CD=3,AD=5\sqrt{3},\angle ADC=90°,\angle BAD=30°$, 点 E,F 满足 $\overrightarrow{AE}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. 将 $\triangle AEF$ 沿 EF 翻折至 $\triangle PEF$, 使得 $PC=4\sqrt{3}$.

(1) 证明: $EF\perp PD$.

(2) 求面 PCD 与面 PBF 所成的二面角的正弦值.



题 图



解析图

解：(1) 连接 EC, 在 $\triangle AEF$ 中, 由余弦定理知 $EF=2$, 则 $EF\perp AE$.

$\therefore EF\perp PE, EF\perp ED$, 则 $EF\perp$ 平面 PED, $\therefore EF\perp PD$.

(2) $\triangle CDE$ 中, $CE=\sqrt{DE^2+CD^2}=\sqrt{27+9}=6$; $\triangle PCE$ 中, $PE^2+CE^2=PC^2$, $\therefore PE\perp EC$.

易知 EP、EF、ED 两两垂直. 以 EF、ED、EP 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴建立空间直角坐标系.

则 $P(0,0,2\sqrt{3})$, $F(2,0,0)$, $B(4,2\sqrt{3},0)$, $C(3,3\sqrt{3},0)$, $D(0,3\sqrt{3},0)$.

$\overrightarrow{PB}=(2,0,-2\sqrt{3})$, $\overrightarrow{FB}=(2,2\sqrt{3},0)$, 可求得平面 PBF 的一个法向量 $\overrightarrow{n_1}=(\sqrt{3},-1,1)$.

$\overrightarrow{PD}=(0,3\sqrt{3},-2\sqrt{3})$, $\overrightarrow{CD}=(-3,0,0)$, 可求得平面 PCD 的一个法向量 $\overrightarrow{n_2}=(0,2,3)$.

所以, $\cos\theta=|\dfrac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}|=\dfrac{1}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{13}}=\dfrac{1}{\sqrt{65}}$, $\sin\theta=\dfrac{8\sqrt{65}}{65}$.

18. (17 分)

某投篮比赛分为两个阶段, 每个参赛队由两名队员组成, 比赛具体规则如下: 第一阶段由参赛队中一名队员投篮 3 次, 若 3 次都未投中, 则该队被淘汰, 比赛成绩为 0 分; 若至少投中一次, 则该队进入第二阶段, 由该队的另一名队员投篮 3 次, 每次投中得 5 分, 未投中得 0 分, 该队的比赛成绩为第二阶段的得分总和.

某参赛队由甲、乙两名队员组成, 设甲每次投中的概率为 p, 乙每次投中的概率为 q, 各次投中与否相互独立.

(1) 若 $p=0.4, q=0.5$, 甲参加第一阶段比赛, 求甲、乙所在队的比赛成绩不少于 5 分的概率.

(2) 假设 $0<p<q$.

(i) 为使得甲、乙所在队的比赛成绩为 15 分的概率最大, 应该由谁参加第一阶段的比赛?

(ii) 为使得甲、乙所在队的比赛成绩的数学期望最大, 应该由谁参加第一阶段的比赛?

解：(1) 设甲、乙所在队的比赛成绩不少于 5 为事件 A, 则甲在第一阶段至少投中一次, 乙在第二阶段至少投中一次. $P(A)=(1-0.6^3)(1-0.5^3)=0.686$.

综上, 甲、乙所在队的比赛成绩不少于 5 分的概率为 0.686.

(2) (i) 设第一阶段由甲比赛, 且比赛成绩为 15 分为事件 B, 第一阶段由乙比赛, 且比赛成绩为 15 分为事件 C.

$$P(B)=[1-(1-p)^3]q^3,\quad P(C)=[1-(1-q)^3]p^3,$$

$$P(B)-P(C)=[1-(1-p)^3]q^3-[1-(1-q)^3]p^3=3pq(p+q-pq)(q-p)$$

$$=3pq[1-(1-p)(1-q)](q-p)>0.$$

综上, 由甲参加第一阶段的比赛比赛成绩为 15 分的概率最大.

(ii) 设第一阶段由甲参赛, 所在队最终成绩为 X, 第一阶段由乙参赛, 所在队最终成绩为 Y.

则 $X=0,5,10,15;Y=0,5,10,15$.

$$P(X=0)=(1-p)^3+[1-(1-p)^3](1-q)^3$$
$$P(X=5)=[1-(1-p)^3]\times 3q(1-q)^2$$
$$P(X=10)=[1-(1-p)^3]\times 3q^2(1-q)$$
$$P(X=15)=[1-(1-p)^3]q^3$$
$$\begin{aligned}E(X)&=0\times P(X=0)+5\times P(X=5)+10\times P(X=10)+15\times P(X=15)\\&=15[1-(1-p)^3]q(1-q)^2+30[1-(1-p)^3]q^2(1-q)+15[1-(1-p)^3]q^3\\&=15q[1-(1-p)^3][(1-q)^2+2q(1-q)+q^2]\\&=15q[1-(1-p)^3].\end{aligned}$$

同理, $E(Y)=15p[1-(1-q)^3]$.

所以, $E(X)-E(Y)=15q[1-(1-p)^3]-15p[1-(1-q)^3]=15pq(p+q-3)(p-q)>0$.

故为使甲乙所在队成绩数学期望最大, 应由甲参加一阶段比赛.

19. (17 分)

已知双曲线 $C:x^2-y^2=m\ (m>0)$, 点 $P_1(5,4)$ 在 C 上, k 为常数, $0<k<1$. 按照如下方式依次构造点 $P_n\ (n=2,3,\cdots)$, 过点 P_{n-1} 作斜率为 k 的直线与 C 的左支交于点 Q_{n-1}, 令 P_n 为 Q_{n-1} 关于 y 轴的对称点, 记 P_n 的坐标为 (x_n,y_n).

(1) 若 $k=\dfrac{1}{2}$, 求 x_2,y_2.

(2) 证明: 数列 $\{x_n-y_n\}$ 是公比为 $\dfrac{1+k}{1-k}$ 的等比数列.

(3) 设 S_n 为 $\triangle P_nP_{n+1}P_{n+2}$ 的面积, 证明: 对任意的正整数 n, $S_n=S_{n+1}$.

解: (1) 因为 $P_1(5,4)$ 在 C 上, 所以 $m=5^2-4^2=9$. 故双曲线方程为 $C:\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{9}=1$.

由已知有 $l_{P_1Q_1}:y-4=\dfrac{1}{2}(x-5)$, 即 $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$, 与 C 联立有 $y(y-4)=0$, 所以 $Q_1(-3,0)$, 则 $P_2(3,0)$.

所以, $x_2=3,y_2=0$.

(2) 点 $P_n(x_n,y_n),P_{n+1}(x_{n+1},y_{n+1}),Q_n(-x_{n+1},y_{n+1})$ 满足:

$\begin{cases}x_n^2-y_n^2=9,\\x_{n+1}^2-y_{n+1}^2=9,\end{cases}$ $\begin{cases}(x_n-y_n)(x_n+y_n)=9,\\(x_{n+1}-y_{n+1})(x_{n+1}+y_{n+1})=9,\end{cases}$ 且 $y_{n+1}-y_n=k(-x_{n+1}-x_n),k=\dfrac{y_n-y_{n+1}}{x_{n+1}+x_n}$.

所以,

$$\begin{aligned}\frac{1+k}{1-k}&=\frac{1+\dfrac{y_n-y_{n+1}}{x_{n+1}+x_n}}{1-\dfrac{y_n-y_{n+1}}{x_{n+1}+x_n}}=\frac{(x_{n+1}-y_{n+1})+(x_n+y_n)}{(x_{n+1}+y_{n+1})+(x_n-y_n)}=\frac{(x_{n+1}-y_{n+1})+\dfrac{9}{x_n-y_n}}{(x_n-y_n)+\dfrac{9}{x_{n+1}-y_{n+1}}}\\&=\frac{\dfrac{1}{x_n-y_n}\cdot[(x_{n+1}-y_{n+1})(x_n-y_n)+9]}{\dfrac{1}{x_{n+1}-y_{n+1}}\cdot[(x_{n+1}-y_{n+1})(x_n-y_n)+9]}=\frac{x_{n+1}-y_{n+1}}{x_n-y_n}.\end{aligned}$$

故 $\{x_n-y_n\}$ 为等比数列, 且公比为 $\dfrac{1+k}{1-k}$.