2024 年普通高等学校招生全国统一考试

全国甲卷理科数学

使用范围：陕西、宁夏、青海、内蒙古、四川

注意事项：

1．答题前，务必将自己的姓名、考籍号填写在答题卡规定的位置上．

2．答选择题时，必须使用 2B 铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑．如需改动，用橡皮擦擦干净后，再选涂其它答案标号．

3．答非选择题时，必须使用 0.5 毫米黑色签字笔，将答案书写在答题卡规定的位置上．

4．所有题目必须在答题卡上作答，在试题卷上答题无效．

5．考试结束后，只将答题卡交回．

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．)设 $z=5+\mathrm{i}$，则 $\mathrm{i}(\overline{z}+z)=$(　　)

(A)$10\mathrm{i}$　　(B)$2\mathrm{i}$　　(C)10　　(D)-2

【参考答案】 A

【详细解析】 因为 $z=5+\mathrm{i}$，所以 $\mathrm{i}(\overline{z}+z)=10\mathrm{i}$，故选(A)．

2． ( )集合 $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 9\}$，$B=\{x|\sqrt{x}\in A\}$，则 $\complement_A(A\cap B)=$(　　)

(A)$\{2, 3, 5\}$　　(B)$\{2, 3, 5\}$　　(C)$\{2, 3, 5\}$　　(D)$\{2, 3, 5\}$

【参考答案】 D

【详细解析】 因为 $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 9\}$，$B=\{x|\sqrt{x}\in A\}=\{1, 4, 9, 16, 25, 81\}$，所以 $\complement_A(A\cap B)=\{2, 3, 5\}$，故选(D)．

3． 若实数 x，y 满足约束条件(略)，则 $z=x-5y$ 的最小值为(　　)

(A)5　　(B)$\frac{1}{2}$　　(C)-2　　(D)$-\frac{7}{2}$

【参考答案】 D

【详细解析】 将约束条件两两联立可得 3 个交点：$(0, -1)$、$(\frac{3}{2}, 1)$和$(3, \frac{1}{2})$，经检验都符合约束条件．代入目标函数可得：$z_{\min}=-\frac{7}{2}$，故选(D)．

4．)等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，若 $S_5=S_{10}$，$a_5=1$，则 $a_1=$(　　)

(A)-2　　(B)$\frac{7}{3}$　　(C)1　　(D)2

【参考答案】 B

【详细解析】 因为 $S_5=S_{10}$，所以 $S_7=S_{18}$，$a_8=0$，又因为 $a_5=1$，所以公差 $d=-\frac{1}{3}$，$a_1=a_8-7d=\frac{7}{3}$，故选(B)．

5． 已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0, b>0)$的左、右焦点分别为 $F_1(0,$

(A)$\frac{13}{5}$　　(B)$\frac{13}{7}$　　(C)2　　(D)3

【参考答案】C

【详细解析】$e=\frac{c}{a}=\frac{|F_1F_2|}{|PF_2|-|PF_1|}=2$，故选(C).

6.　曲线 $f(x)=x^6+3x$ 在$(0,-1)$处的切线与坐标轴围成的面积为(　　)

(A)$\frac{1}{6}$　　(B)$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　(C)$\frac{1}{2}$　　(D)$\frac{\sqrt{3}}{2}$

【参考答案】A

【详细解析】因为 $y'=6x^5+3$，所以 $k=3$，$y=3x-1$，$S=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times1=\frac{1}{6}$，故选(A).

7.　函数 $f(x)=-x^2+(e^x-e^{-x})\sin x$ 的大致图像为(　　)

【参考答案】B

【详细解析】选(B).

8.　已知$\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\sqrt{3}$，则 $\tan(\alpha+\frac{\pi}{4})=$(　　)

(A)3　　(B)$2\sqrt{3}-1$　　(C)-3　　(D)$\frac{1}{3}$

【参考答案】B

【详细解析】因为$\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\sqrt{3}$，所以 $\tan\alpha=1-\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\tan(\alpha+\frac{\pi}{4})=\frac{\tan\alpha+1}{1-\tan\alpha}=2\sqrt{3}-1$，故选(B).

9.　已知向量 $\boldsymbol{a}=(x+1,x)$，$\boldsymbol{b}=(x,2)$，则(　　)

(A)“$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$”的必要条件是 “$x=-3$”　　(B)“$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$”的必要条件是 “$x=-3$”

(C)“$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$”的充分条件是 “$x=0$”　　(D)“$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$”的充分条件是 “$x=0$”

【参考答案】C

【详细解析】$a\perp b$，则 $x(x+1)+2x=0$，解得：$x=0$ 或-3，故选(C).

10.　已知已知 m、n 是两条不同的直线，α、β是两个不同的平面：①若 $m\perp\alpha$，$n\perp\alpha$，则 $m/\!/n$；②若$\alpha\cap\beta=m$，$m/\!/n$，则 $n/\!/\beta$；③若 $m/\!/\alpha$，$n/\!/\alpha$，m 与 n 可能异面，也可能相交，也可能平行；④若$\alpha\cap\beta=m$，n 与α和β所成的角相等，则 $m\perp n$，以上命题是真命题的是(　　)

(A)①③　　(B)②③　　(C)①②③　　(D)①③④

【参考答案】A

【详细解析】选(A).

11.　在$\triangle ABC$ 中，内角 A，B，C 所对边分别为 a，b，c，若 $B=\frac{\pi}{3}$，$b^2=\frac{9}{4}ac$，则 $\sin A+\sin C=$(　　)

(A)$\frac{2\sqrt{39}}{13}$　　(B)$\frac{\sqrt{39}}{13}$　　(C)$\frac{\sqrt{7}}{2}$　　(D)$\frac{3\sqrt{13}}{13}$

【参考答案】C

【详细解析】因为 $B=\frac{\pi}{3}$，$b^2=\frac{9}{4}ac$，所以 $\sin A\sin C=\frac{4}{9}\sin^2B=\frac{1}{3}$. 由余弦定理可得：$b^2=a^2+c^2$

$-ac=\frac{9}{4}ac$，即：$a^2+c^2=\frac{13}{4}ac$，$\sin^2A+\sin^2C=\frac{13}{4}\sin A\sin C=\frac{13}{12}$，所以$(\sin A+\sin C)^2=\sin^2A+\sin^2C+2\sin A\sin C=\frac{7}{4}$，$\sin A+\sin C=\frac{\sqrt{7}}{2}$，故选(C).

12. 已知 a，b，c 成等差数列，直线 $ax+by+c=0$ 与圆 C：$x^2+(y+2)^2=5$ 交于 A，B 两点，则$|AB|$的最小值为(　　)

(A)2　　(B)3　　(C)4　　(D)6

【参考答案】C

【详细解析】因为 a，b，c 成等差数列，所以 $a-2b+c=0$，直线 $ax+by+c=0$ 恒过 $P(1,-2)$，当 $PC\perp AB$ 时，$|AB|$取得最小值，此时$|PC|=1$，$|AB|=2\sqrt{5-|PC|^2}=4$，故选(C).

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 二项式$(\frac{1}{3}+x)^{10}$的展开式中系数的最大值是________.

【参考答案】5

【详细解析】展开式中系数最大的项一定在下面的 5 项：$C_{10}^5(\frac{1}{3})^5$、$C_{10}^6(\frac{1}{3})^4$、$C_{10}^7(\frac{1}{3})^3$、$C_{10}^8(\frac{1}{3})^2$、$C_{10}^9(\frac{1}{3})^1$，计算可得：系数的最大值为 $C_{10}^8(\frac{1}{3})^2=5$.

14. 甲、乙两个圆台上下底面的半径均为 r_2 和 r_1，母线长分别为 $2(r_1-r_2)$和 $3(r_1-r_2)$，则两个圆台的体积之比$\frac{V_{甲}}{V_{乙}}=$________.

【参考答案】$\frac{\sqrt{6}}{4}$

【详细解析】$\frac{V_{甲}}{V_{乙}}=\frac{h_{甲}}{h_{乙}}=\frac{\sqrt{3}(r_1-r_2)}{2\sqrt{2}(r_1-r_2)}=\frac{\sqrt{6}}{4}$.

15. 已知 $a>1$，$\frac{1}{\log_8a}-\frac{1}{\log_a4}=-\frac{5}{2}$，则 $a=$__________.

【参考答案】64

【详细解析】因为$\frac{1}{\log_8a}-\frac{1}{\log_a4}=\frac{3}{\log_2a}-\frac{1}{2}\log_2a=-\frac{5}{2}$，所以$(\log_2a+1)(\log_2a-6)=0$，而 $a>1$，故 $\log_2a=6$，$a=64$.

16. 编号为 1、2、3、4、5、6 的六个小球，不放回的抽取三次，记 m 表示前两个球号码的平均数，记 n 表示前三个球号码的平均数，则 m 与 n 差的绝对值不超过 0.5 的概率是_______.

【参考答案】$\frac{7}{15}$

【详细解析】记前三个球的号码分别为 a、b、c，则共有 $A_6^3=120$ 种可能．令$|m-n|=|\frac{a+b}{2}-\frac{a+b+c}{3}|=|\frac{a+b-2c}{6}|\leqslant 0.5$ 可得：$|a+b-2c|\leqslant 3$，根据对称性：$c=1$ 或 6 时，均有 2 种可能；$c=2$ 或 5 时，均有 10 种可能；$c=3$ 或 4 时，均有 16 种可能；故满足条件的共有 56 种可能，$P=\frac{56}{120}=\frac{7}{15}$.

三、解答题：共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．第 17 题～第 21 题为必考题，每个考题考生必须作答．第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

(一)必考题：共 60 分.

17．(12 分)( )题干略.

【参考答案】见解析.

【详细解析】(1)$\chi^2=\dfrac{150(70\times24-26\times30)^2}{96\times54\times50\times100}<6.635$，没有 99%的把握；

(2)$\bar{p}>p+1.65\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{150}}$，故有优化提升.

18．(12 分)(已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且 $4S_n=3a_n+4$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)设 $b_n=(-1)^{n-1}na_n$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和为 T_n.

【参考答案】见解析.

【详细解析】(1)因为 $4S_n=3a_n+4$，所以 $4S_{n+1}=3a_{n+1}+4$，两式相减可得：$4a_{n+1}=3a_{n+1}-3a_n$，即：$a_{n+1}=-3a_n$，又因为 $4S_1=3a_1+4$，所以 $a_1=4$，故数列$\{a_n\}$是首项为 4，公比为-3 的等比数列，$a_n=4\cdot(-3)^{n-1}$；

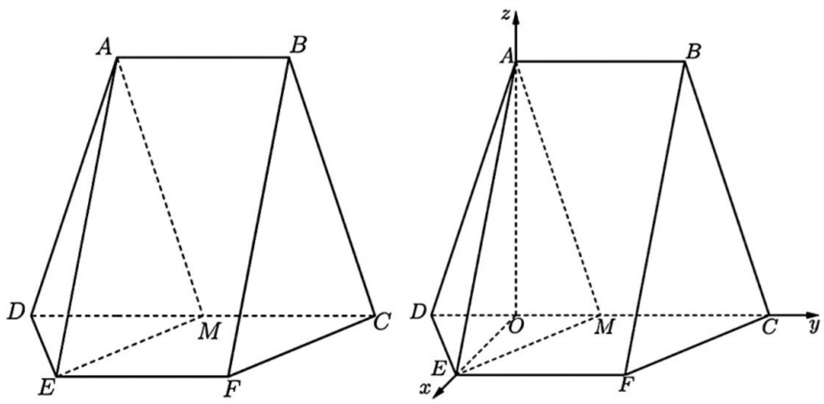
(2)$b_n=(-1)^{n-1}na_n=4n\cdot3^{n-1}$，所以 $T_n=4(1\cdot3^0+2\cdot3^1+3\cdot3^2+\cdots+n\cdot3^{n-1})$，$3T_n=4(1\cdot3^1+2\cdot3^2+3\cdot3^3+\cdots+n\cdot3^n)$，两式相减可得：$-2T_n=4(1+3^1+3^2+\cdots+3^{n-1}-n\cdot3^n)=4(\dfrac{1-3^n}{1-3}-n\cdot3^n)=(2-4n)3^n-2$，$T_n=(2n-1)3^n+1$.

解法 2：$b_n=(-1)^{n-1}na_n=4n\cdot3^{n-1}$，所以 $T_n=T_{n-1}+4n\cdot3^{n-1}$，两边同时减去$(2n-1)3^n$ 可得：$T_n-(2n-1)3^n=T_{n-1}-(2n-3)3^{n-1}$，故$\{T_n-(2n-1)3^n\}$为常数列，即：$T_n-(2n-1)3^n=1$，$T_n=(2n-1)3^n+1$.

19．(12 分)(如图，已知 $AB/\!/CD$，$CD/\!/EF$，$AB=DE=EF=CF=2$，$CD=4$，$AD=BC=\sqrt{10}$，$AE=2\sqrt{3}$，M 为 CD 的中点.

(1)证明：$EM/\!/$平面 BCF；

(2)求二面角 $A-EM-B$ 的正弦值.



【参考答案】见解析

【详细解析】(1)由题意：$EF/\!/CM$，$EF=CM$，而 $CF\subsetneqq$平面 ADO，$EM\not\subset$平面 ADO，所以 $EM/\!/$平面 BCF；

(2)取 DM 的中点 O，连结 OA，OE，则 $OA\perp DM$，$OE\perp DM$，$OA=3$，$OE=\sqrt{3}$，而 $AE=2\sqrt{3}$，故 $OA\perp OE$．以 O 为坐标原点建立如图所示的空间直角坐标系，则 $A(0，0，3)$，$E(\sqrt{3}，0，$

0)，$M(0，1，0)$，$B(0，2，3)$，$\overrightarrow{AE}=(\sqrt{3}，0，-3)$，$\overrightarrow{EM}=(-\sqrt{3}，1，0)$，$\overrightarrow{MB}=(0，1，3)$，

设平面 AEM 的法向量为$\vec{n}=(x，y，z)$，由$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{EM}=0\end{cases}$可得：$\begin{cases}\sqrt{3}x-3z=0\\ -\sqrt{3}x+y=0\end{cases}$，令 $z=1$，则$\vec{n}=(\sqrt{3}，$

$3，1)$，同理：取平面 BEM 的法向量为$\vec{m}=(\sqrt{3}，3，-1)$，则 $\cos<\vec{m}，\vec{n}>=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\dfrac{11}{13}$，$\sin<\vec{m}，$

$\vec{n}>=\dfrac{4\sqrt{3}}{13}$，故二面角 $A-EM-B$ 的正弦值为$\dfrac{4\sqrt{3}}{13}$.

20．(12 分)(　　　　　　　　　已知函数 $f(x)=(1-ax)\ln(1+x)-x$.

(1)当 $a=-2$ 时，求 $f(x)$的极值；

(2)当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)\geqslant 0$，求 a 的取值范围.

【参考答案】见解析

【详细解析】(1)当 $a=-2$ 时，$f(x)=(1+2x)\ln(1+x)-x$，$x>-1$．$f'(x)=2\ln(1+x)+\dfrac{x}{1+x}$，当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，当$-1<x<0$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$在$(-1，0)$上递减，在$(0，+\infty)$上递增，故 $f(x)$的极小值为 $f(0)=0$，无极大值；

(2)$f(x)=(1-ax)\ln(1+x)-x$，$f'(x)=-a\ln(1+x)-\dfrac{(a+1)x}{1+x}$．令 $g(x)=f'(x)$，则 $g'(x)=-\dfrac{a}{1+x}-\dfrac{a+1}{(1+x)^2}$．因为当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)\geqslant 0$，且 $f(0)=0$，$f'(0)=0$，所以 $g'(0)=-1-2a\geqslant 0$，$a\leqslant -\dfrac{1}{2}$.

当 $a\leqslant -\dfrac{1}{2}$时，$g'(x)\geqslant \dfrac{1}{2(1+x)}-\dfrac{1}{2(1+x)^2}=\dfrac{x}{2(1+x)^2}\geqslant 0$，$g(x)$在$[0，+\infty)$上递增，$g(x)=f'(x)\geqslant g(0)=0$，故 $f(x)$在$[0，+\infty)$上递增，$f(x)\geqslant f(0)=0$ 恒成立，即 a 的取值范围为$(-\infty，-\dfrac{1}{2}]$.

21．(12 分)(　　　　　　　　　已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点为 F，点 $M(1，\dfrac{3}{2})$在椭圆 C 上，且 $MF\perp x$ 轴.

(1)求椭圆 C 的方程；

(2)$P(4，0)$，过 P 的直线与椭圆 C 交于 A，B 两点，N 为 FP 的中点，直线 NB 与 MF 交于 Q，证明：$AQ\perp y$ 轴.

【参考答案】见解析

【详细解析】(1)设椭圆 C 的左焦点为 F_1，则$|F_1F|=2$，$|MF|=\dfrac{3}{2}$．因为 $MF\perp x$ 轴，所以$|MF_1|=\dfrac{5}{2}$，$2a=|MF_1|+|MF|=4$，解得：$a^2=4$，$b^2=a^2-1=3$，故椭圆 C 的方程为：$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$；

(2)解法 1：设 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}$，则$\begin{cases}\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}=4\\ \dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}\lambda x_2=4+4\lambda-x_1\\ \lambda y_2=-y_1\end{cases}$．又由

$\begin{cases}3x_1^2+4y_1^2=12\\3(\lambda x_2)^2+4(\lambda y_2)^2=12\lambda^2\end{cases}$可得：$3\cdot\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}\cdot\dfrac{x_1-\lambda x_2}{1-\lambda}+4\cdot\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\cdot\dfrac{y_1-\lambda y_2}{1-\lambda}=12$，结合上式可得：$5\lambda-2\lambda x_2+3=0$．$P(4，0)$，$F(1，0)$，$N(\dfrac{5}{2}，0)$，则 $y_Q=\dfrac{3y_2}{5-2x_2}=\dfrac{3\lambda y_2}{5\lambda-2\lambda x_2}=-\lambda y_2=y_1$，故 $AQ\perp y$ 轴．

解法 2：设 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，，则$\dfrac{y_1}{x_1-4}=\dfrac{y_2}{x_2-4}$，即：$x_1y_2-x_2y_1=4(y_2-y_1)$，所以$(x_1y_2-x_2y_1)(x_1y_2+x_2y_1)=x_1^2y_2^2-x_2^2y_1^2=(4+\dfrac{4y_1^2}{3})y_2^2-(4+\dfrac{4y_2^2}{3})y_1^2=4(y_2-y_1)(y_2+y_1)=4(y_2-y_1)(x_1y_2+x_2y_1)$，

即：$x_1y_2+x_2y_1=y_2+y_1$，$2x_2y_1=5y_1-3y_2$．$P(4，0)$，$F(1，0)$，$N(\dfrac{5}{2}，0)$，则 $y_Q=\dfrac{3y_2}{5-2x_2}=\dfrac{3y_1y_2}{5y_1-2y_1x_2}=y_1$，故 $AQ\perp y$ 轴．

(二)选考题：共 10 分．请考生在第 22、23 题中任选一题作答，并用 2B 铅笔将所选题号涂黑，多涂、错涂、漏涂均不给分，如果多做，则按所做的第一题计分．

22．[选修 4－4：坐标系与参数方程](10 分)(　　)在平面直角坐标系 xOy 中，以坐标原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C 的极坐标方程为$\rho=\rho\cos\theta+1$．

(1)写出 C 的直角坐标方程；

(2)直线$\begin{cases}x=t\\y=t+a\end{cases}$($t$ 为参数)与曲线 C 交于 A、B 两点，若$|AB|=2$，求 a 的值．

【参考答案】见解析

【详细解析】(1)因为$\rho=\rho\cos\theta+1$，所以$\rho^2=(\rho\cos\theta+1)^2$，故 C 的直角坐标方程为：$x^2+y^2=(x+1)^2$，即：$y^2=2x+1$；

(2)将$\begin{cases}x=t\\y=t+a\end{cases}$代入 $y^2=2x+1$ 可得：$t^2+2(a-1)t+a^2-1=0$，$|AB|=\sqrt{2}|t_1-t_2|=\sqrt{16(1-a)}=2$，解得：$a=\dfrac{3}{4}$．

23．[选修 4－5：不等式选讲](10 分)(　　)实数 a，b 满足 $a+b\geqslant3$．

(1)证明：$2a^2+2b^2>a+b$；

(2)证明：$|a-2b^2|+|b-2a^2|\geqslant6$．

【解析】(1)因为 $a+b\geqslant3$，所以 $2a^2+2b^2\geqslant(a+b)^2>a+b$；

(2)$|a-2b^2|+|b-2a^2|\geqslant|a-2b^2+b-2a^2|=|2a^2+2b^2-(a+b)|=2a^2+2b^2-(a+b)\geqslant(a+b)^2-(a+b)=(a+b)(a+b-1)\geqslant6$．