

2024 年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷）

数 学

本试卷分为第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分，共 150 分，考试用时 120 分钟。第 I 卷 1 至 3 页，第 II 卷 4 至 6 页。

答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号和座位号填写在答题卡上，并在规定位置粘贴考试用条形码。答卷时，考生务必将答案涂写在答题卡上，答在试卷上的无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

祝各位考生考试顺利！

第 I 卷（选择题）

注意事项：

- 每小题选出答案后，用铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。
- 本卷共 9 小题，每小题 5 分，共 45 分。

参考公式：

- 如果事件 A, B 互斥，那么 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ 。
- 如果事件 A, B 相互独立，那么 $P(AB) = P(A)P(B)$ 。
- 球的体积公式 $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ ，其中 R 表示球的半径。
- 圆锥的体积公式 $V = \frac{1}{3}Sh$ ，其中 S 表示圆锥的底面面积， h 表示圆锥的高。

一. 选择题：在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

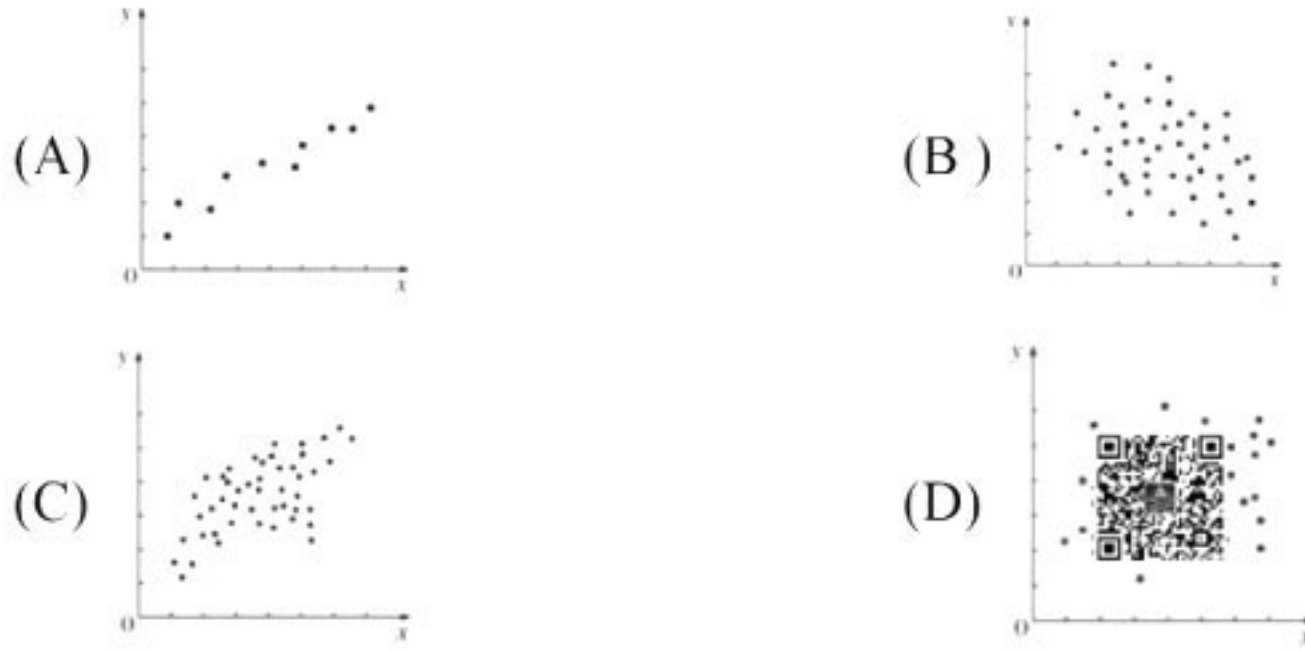
1. 集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$, 则 $A \cap B = ()$

- (A) $\{1, 2, 3, 4\}$ (B) $\{2, 3, 4\}$ (C) $\{2, 4\}$ (D) $\{1\}$

2. 设 $a, b \in R$, 则 “ $a^3 = b^3$ ” 是 “ $3^a = 3^b$ ” 的 ()

- (A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件
(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

3, 下列图中, 相关性系数最大的是 ()



4, 下列函数是偶函数的是 ()

(A) $\frac{e^x - x^2}{x^2 + 1}$ (B) $\frac{\cos x + x^2}{x^2 + 1}$ (C) $\frac{e^x - x}{x + 1}$ (D) $\frac{\sin x + 4x}{e^{|x|}}$

5, 若 $a = 4.2^{-0.3}$, $b = 4.2^{0.3}$, $c = \log_{4.2} 0.2$, 则 a, b, c 的大小关系为 ()

(A) $a > b > c$ (B) $b > a > c$ (C) $c > a > b$ (D) $b > c > a$

6, 若 a, b 为两条直线, m 为一个平面, 则下列结论中正确的是 () 待修正

- A. 若 $a // m, m \subset \beta$, 则 $a // \beta$
 B. 若 $a // m, b // m$, 则 $a // b$
 C. 若 $a // m, b \perp m$, 则 $a \perp b$
 D. 若 $a // m, b \perp m$, 则 $a \perp b$ 相交

7, 已知函数 $f(x) = \sin 3\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的最小正周期为 π . 则函数在 $[-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}]$ 的最小值是 ()

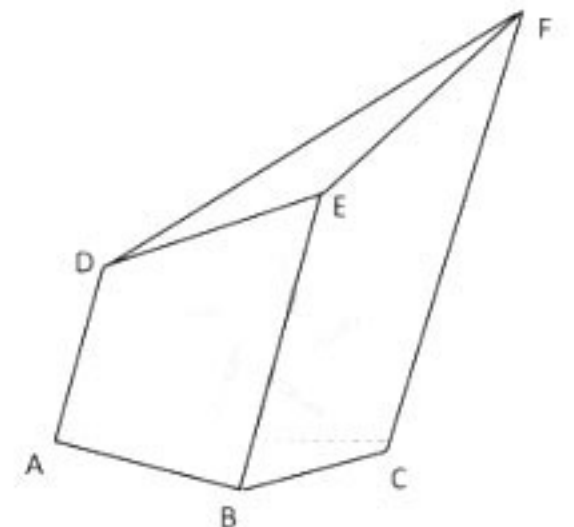
(A) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $-\frac{3}{2}$ (C) 0 (D) $\frac{3}{2}$

8, 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 . P 是双曲线右支上一点, 且直线 PF_2 的斜率为 2. $\triangle PF_1F_2$ 是面积为 8 的直角三角形, 则双曲线的方程为 ()

(A) $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{2} = 1$ (B) $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1$ (C) $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{8} = 1$ (D) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} = 1$

9, 一个五面体 $ABC - DEF$. 已知 $AD // BE // CF$, 且两两之间距离为 1. 并已知 $AD = 1, BE = 2, CF = 3$. 则该五面体的体积为 ()

(A) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ (B) $\frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) $\frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2}$



2024 年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷）

数 学

第 II 卷

注意事项:微信公众号:玩转数学黄老师编辑

1 用黑色墨水的钢笔或签字笔将答案写在答题卡上。

2 本卷共 11 小题,共 105 分。

二. 填空题:本大题共 6 小题,每小题 5 分,共 30 分. 试题中包含两个空的,答对 1 个的给 3 分,全部答对的给 5 分.

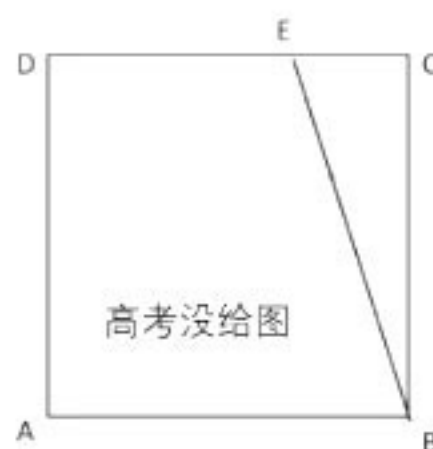
10, 已知 i 是虚数单位, 复数 $(\sqrt{5} - i) \cdot (\sqrt{5} + 2i) =$ _____.

11, 在 $\left(\frac{3}{x^3} + \frac{x^3}{3}\right)^6$ 的展开式中, 常数项为 _____.

12, $(x - 1)^2 + y^2 = 25$ 的圆心与抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点重合, A 为两曲线的交点, 求原点到直线 OA 的距离 _____.

13, A, B, C, D, E 五种活动, 甲、乙都要选择三个活动参加. (1) 甲选到 A 的概率为 _____; 已知乙选了 A 活动, 他再选择 B 活动的概率为 _____.

14, 在正方形 $ABCD$ 中, 边长为 1. E 为线段 CD 的三等分点, $CE = \frac{1}{2}DE$, $\overrightarrow{BF} = \lambda\overrightarrow{BA} + \mu\overrightarrow{BC}$, 则 $\lambda + \mu =$ _____; F 为线段 BE 上的动点, G 为 AF 中点, 则 $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{DG}$ 的最小值为 _____.



15, 若函数 $f(x) = 2\sqrt{x^2 - ax} - |ax - 2| + 1$ 有零点, 则 a 的取值范围为 _____.

三. 解答题: 本大题共 5 小题, 共 75 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

16. (本小题 14.0 分)

在 $\triangle ABC$ 中, $\cos B = \frac{9}{16}$, $b = 5$, $\frac{a}{c} = \frac{2}{3}$.

(1) 求 a ;

(2) 求 $\sin A$;

(3) 求 $\cos(B - 2A)$.

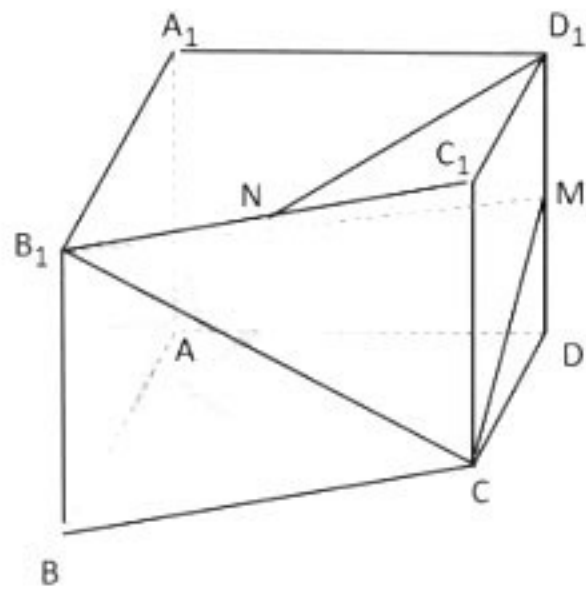
17. (本小题 15.0 分)

已知 $AD \perp AB$, $AA_1 \perp AD$. 其中 $AB = AD = 2$, $DC = 1$. N 是 B_1C_1 的中点, M 是 DD_1 的中点.

(1) 求证 $D_1N \parallel$ 平面 CB_1M ;

(2) 求平面 CB_1M 与平面 BB_1CC_1 的夹角余弦值;

(3) 求点 B 到平面 CB_1M 的距离.



18. (本小题 15.0 分)

已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 椭圆的离心率 $e = \frac{1}{2}$, 左顶点为 A , 下顶点为 B , C 是线段 OB 的中点, 其中 $S_{\triangle ABC} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

(1) 求椭圆方程.

(2) 过点 $(0, -\frac{3}{2})$ 的动直线与椭圆有两个交点 P, Q . 在 y 轴上是否存在点 T 使得 $\overrightarrow{TP} \cdot \overrightarrow{TQ} \leq 0$. 若存在求出这个 T 点纵坐标的取值范围, 若不存在请说明理由.

19. (本小题 15.0 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 是等比数列. 其前 n 项和为 S_n . 若 $a_1 = 1, S_2 = a_3 - 1$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n ;

(2) 设 $b_n = \begin{cases} k & ; n = a_k \\ b_{n-1} + 2k & ; a_k < n < a_{k+1} \end{cases}$ 其中 k 是大于 1 的正整数.

(i) 当 $n = a_{k+1}$ 时, 求证: $b_{n-1} \geq a_k \cdot b_n$;

(ii) 求 $\sum_{i=1}^{S_n} b_i$.

20. (本小题 16.0 分)

设函数 $f(x) = x \ln x$.

(1) 求 $f(x)$ 图像上点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(2) 若 $f(x) \geq a(x - \sqrt{x})$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 时恒成立, 求 a 的取值范围;

(3) 若 $x_1, x_2 \in (0, 1)$ 证明 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq |x_1 - x_2|^{\frac{1}{2}}$.