2024 年普通高等学校招生全国统一考试（北京卷）

数 学

本试卷共 12 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 已知集合 $M=\{x|-4<x\le 1\},N=\{x|-1<x<3\}$，则 $M\cup N=$__▲__.

2. 已知 $\dfrac{Z}{\mathrm{i}}=\mathrm{i}-1$，则 $Z=$__▲__.

3. 求圆 $x^2+y^2-2x+6y=0$ 的圆心到 $x-y+2=0$ 的距离__▲__.

4. $(x-\sqrt{x})^4$ 的二项展开式中 x^3 的系数为__▲__.

5. 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，则“$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=0$”是“$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 或 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$”的__▲__ 条件.

6. 已知 $f(x)=\sin\omega x$，$f(x_1)=-1$，$f(x_2)=1$，$|x_1-x_2|_{min}=\dfrac{\pi}{2}$，则 $\omega=$__▲__.

7. 记水的质量为 $d=\dfrac{S-1}{\ln n}$，并且 d 越大，水质量越好. 若 S 不变，且 $d_1=2.1,d_2=2.2$，则 n_1 与 n_2 的关系为__▲__.

8. 已知以边长为 4 的正方形为底面的四棱锥，四条侧棱分别为 $4,4,2\sqrt{2},2\sqrt{2}$，求该四棱锥的高.

9. 已知 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ 是 $y=2^x$ 上的点，则下列正确的是

   A. $\log_2\dfrac{y_1+y_2}{2}>\dfrac{x_1+x_2}{2}$　B. $\log_2\dfrac{y_1+y_2}{2}<\dfrac{x_1+x_2}{2}$　C. $\log_2\dfrac{y_1+y_2}{2}>x_1+x_2$　D. $\log_2\dfrac{y_1+y_2}{2}<x_1+x_2$

10. 若集合 $\{y|y=x+t(x^2-x),0\le t\le 1,1\le x\le 2\}$ 表示的图形中，两点间最大距离为 d、面积为 S，则

    A. $d=3,S<1$　B. $d=3,S>1$　C. $d=\sqrt{10},S<1$　D. $d=\sqrt{10},S>1$

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

11. 已知抛物线 $y^2=16x$，则焦点坐标为___▲___.

12. 已知 $\alpha\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$，且 α 与 β 的终边关于原点对称，则 $\cos\beta$ 的最大值为___▲___.

13. 已知双曲线 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$，则过 $(3,0)$ 且和双曲线只有一个交点的直线的斜率为___▲___.

14. 已知三个圆柱的体积为公比为 10 的等比数列. 第一个圆柱的直径为 65mm，第二、三个圆柱的直径为 325mm，第三个圆柱的高为 230mm，求前两个圆柱的高度分别为___▲___.

15. 已知 $M=\{k|a_k=b_k\}$，a_n,b_n 不为常数列且各项均不相同，下列正确的是___▲___.

①a_n,b_n 均为等差数列，则 M 中最多一个元素；

②a_n,b_n 均为等比数列，则 M 中最多三个元素；

③a_n 为等差数列，b_n 为等比数列，则 M 中最多三个元素；

④a_n 单调递增，b_n 单调递减，则 M 中最多一个元素.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

16. 在 $\triangle ABC$ 中，$a=7$，A 为钝角，$\sin 2B=\frac{\sqrt{3}}{7}b\cos B$.

（1）求 $\angle A$；

（2）从条件①、条件②和条件③这三个条件中选择一个作为已知，求 $\triangle ABC$ 的面积.

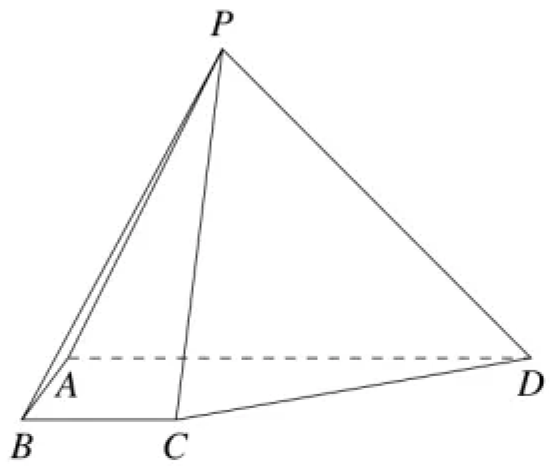
①$b=7$；②$\cos B=\frac{13}{14}$；③$c\sin A=\frac{5}{2}\sqrt{3}$.

注：如果选择条件①、条件②和条件③分别解答，按第一个解答计分.

17. 已知四棱锥 $P-ABCD$，$AD//BC$，$AB=BC=1$，$AD=3$，$DE=PE=2$，E 是 AD 上一点，$PE\perp AD$.

（1）若 F 是 PE 中点，证明：$BF//$ 平面 PCD.

（2）若 $AB\perp$ 平面 PED，求面 PAB 与面 PCD 夹角的余弦值.



18. 已知某险种的保费为 0.4 万元，前 3 次出险每次赔付 0.8 万元，第 4 次赔付 0.6 万元

赔偿次数	0	1	2	3	4
单数	800	100	60	30	10

在总体中抽样 100 单，以频率估计概率：

（1）求随机抽取一单，赔偿不少于 2 次的概率；

（2）(i) 毛利润是保费与赔偿金额之差. 设毛利润为 X，估计 X 的数学期望；

(ii) 若未赔偿过的保单下一保险期的保费下降 4%，已赔偿过的增加 20%. 估计保单下一保险期毛利润的数学期望.

19. 已知椭圆方程 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，焦点和短轴端点构成边长为 2 的正方形，过 $(0,t)(t>\sqrt{2})$ 的直线 l 与椭圆交于 A,B，$C(0,1)$，连接 AC 交椭圆于 D.

（1）求椭圆方程和离心率；

（2）若直线 BD 的斜率为 0，求 t.

20. 已知 $f(x)=x+k\ln(1+x)$ 在 $(t,f(t))(t>0)$ 处切线为 l.

（1）若切线 l 的斜率 $k=-1$，求 $f(x)$ 单调区间；

（2）证明：切线 l 不经过 $(0,0)$；

（3）已知 $A(t,f(t)),C(0,f(t)),O(0,0)$，其中 $t>0$，切线 l 与 y 轴交于点 B. 时当 $2S_{\triangle ACO}=15S_{\triangle ABO}$，符合条件的 A 的个数为?

（参考数据：$1.09<\ln 3<1.10$，$1.60<\ln 5<1.61$，$1.94<\ln 7<1.95$）

21. 设集合 $M=\{(i,j,s,t)|i\in\{1,2\},j\in\{3,4\},s\in\{5,6\},t\in\{7,8\}\}$.

对于给定有穷数列 A 和序列 $\Omega:\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_s,\omega_k=(i_k,j_k,s_k,t_k)\in M$，定义变换 T：将数列 A 的第 i_1,j_1,s_1,t_1 列加 1，得到数列 $T_1(A)$；将数列 $T_1(A)$ 的第 i_2,j_2,s_2,t_2 列加 1，得到数列 $T_2T_1(A)...$；重复上述操作，得到数列 $T_s\cdots T_2T_1$，记为 $\Omega(A)$.

（3）若 $a_1+a_3+a_5+a_9$ 为偶数，证明：“$\Omega(A)$ 为常数列”的充要条件为“$a_1+a_2=a_3+a_4=a_5+a_6=a_7+a_8$”.