

中間試験のお知らせ

- 日時と場所：6月24日(水) 14:40- @7044教室
- 試験範囲：
 - 第1回から9回までのすべて
 - ヒープ，二分探索木，交差，凸包，OpenGLは除く
- 試験時間：60分
- 問題数：多め
- 持ち込み可：①教科書・参考書，②講義資料の印刷物
 - PCや携帯電話での閲覧は不可
- 今日の講義の最後にプレテストをします

生産情報システム工学

#09 凸包の計算(2)

2015/06/17(水)

溝口 知広 准教授(居室：61-408室)

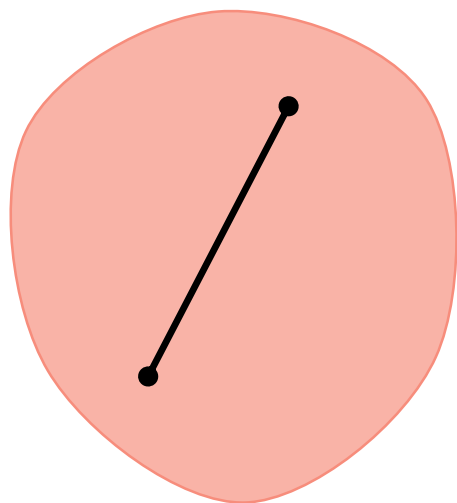
mizo@cs.ce.nihon-u.ac.jp



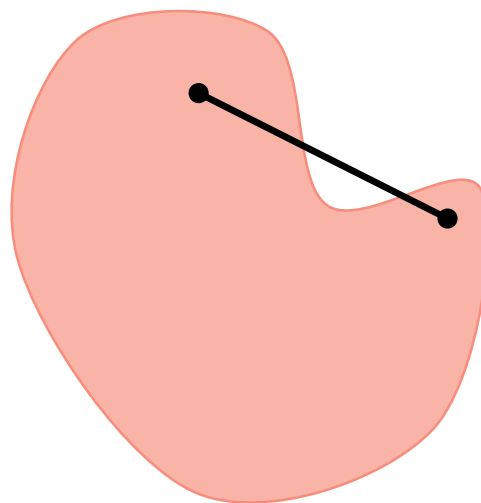
3.0 はじめに

■ 凸集合(Convex Set)

- 平面上に与えられた点集合に対し，任意の2点を結ぶ線分が完全に含まれる



凸



凸ではない

3.0 はじめに

■ 凸包(Convex Hull)

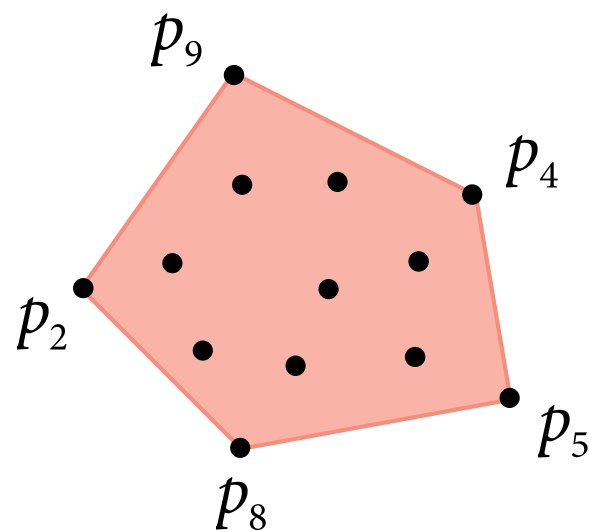
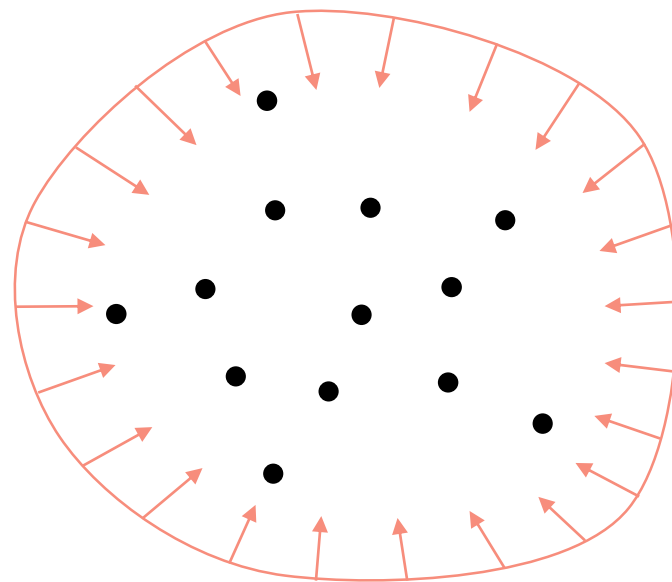
- 平面上に与えられる点集合を含む最小の凸多角形

- 入力：点集合

$$S = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$$

- 出力：凸包を形成する点集合

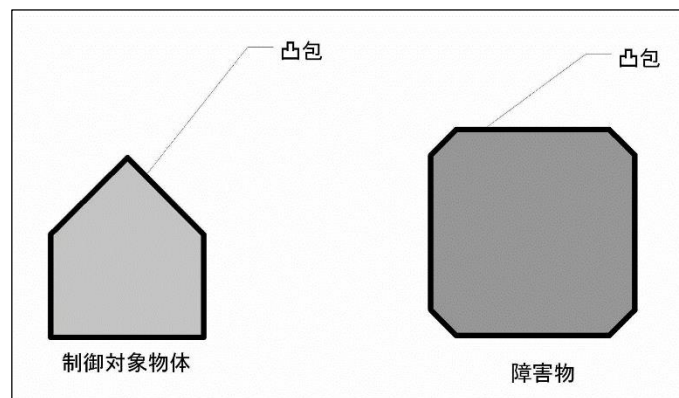
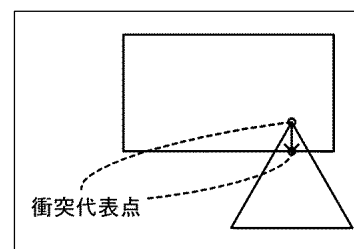
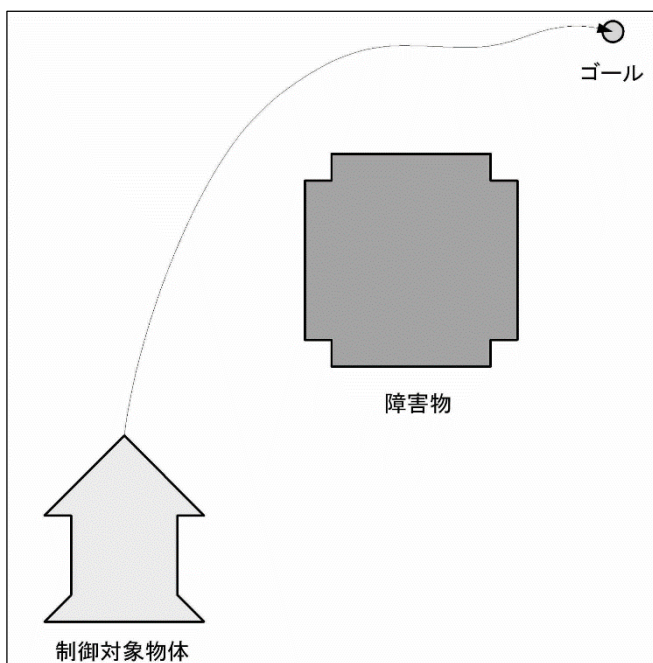
$$CS = \{p_4, p_5, p_8, p_2, p_9\}$$



3.0 はじめに

■ 凸包の応用例

- 衝突判定(ロボットなど)
 - ・ 制御対象物と障害物を凸包で近似し計算コストを下げる



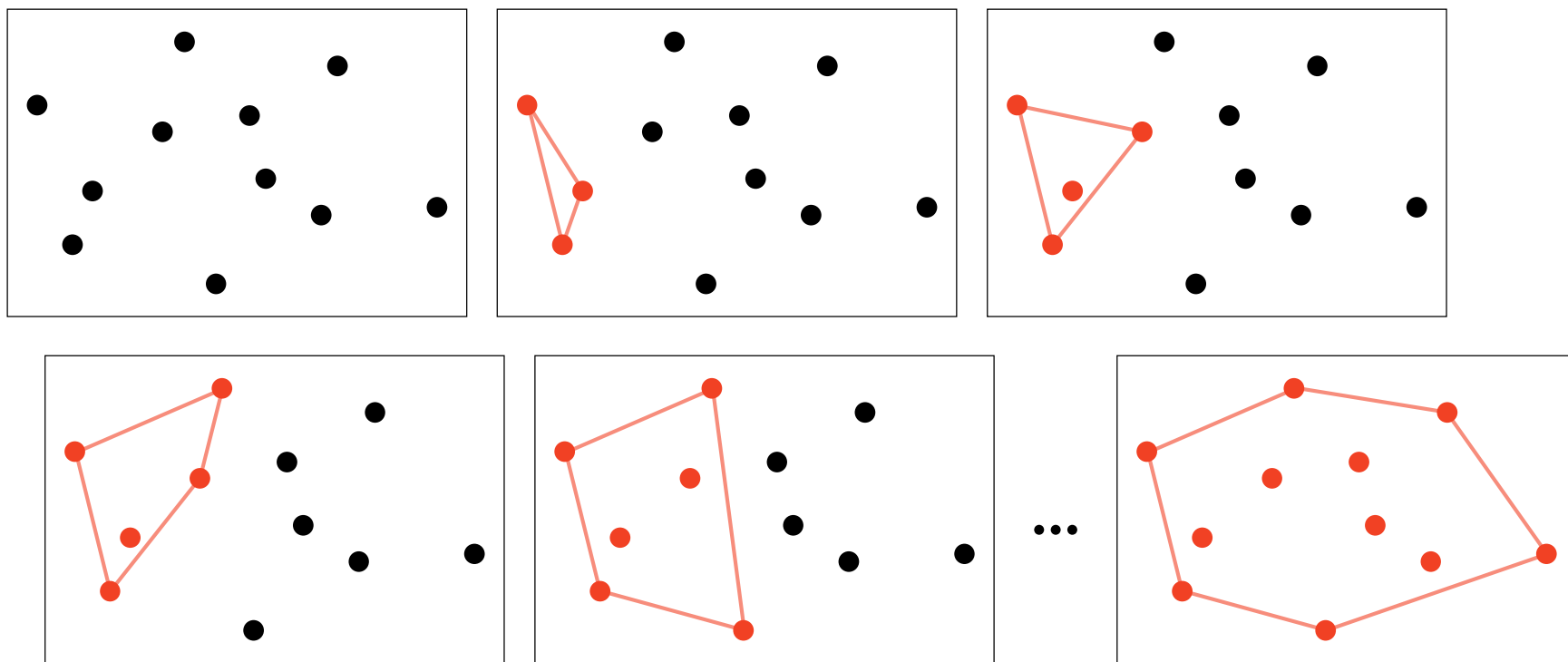
3.0 はじめに

■ 計算方法

- 直接法 (先週の内容)
- 包装法 (先週の内容)
- Graham走査法 (先週の内容)
- 逐次構成法 (本日の内容)
- 分割統治法 (本日の内容)
- ...
- など

3.3 逐次構成法 (Incremental Method)

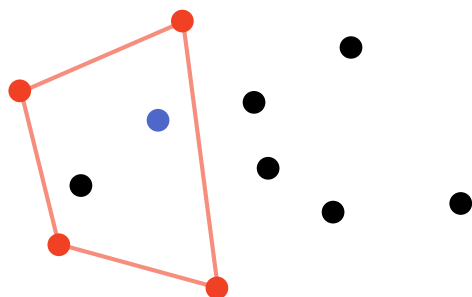
- 最初に少数のデータに対して問題の解を求め、その後データを1つずつ追加しながら解を更新する方法



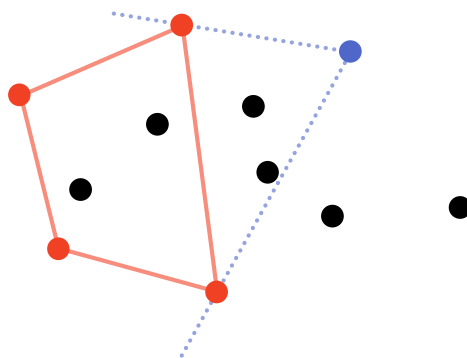
3.3 逐次構成法 (Incremental Method)

1) 点の内外判定を利用する方法

1. 3点 p_0, p_1, p_2 による凸包(三角形)を構成する
2. 1点ずつ追加しながら
 - a. 点が現在の凸包に含まれるなら, 何もしない
 - b. 含まれなければ, 2本の接線を求め, 凸包を作り直す



点が凸包に含まれる



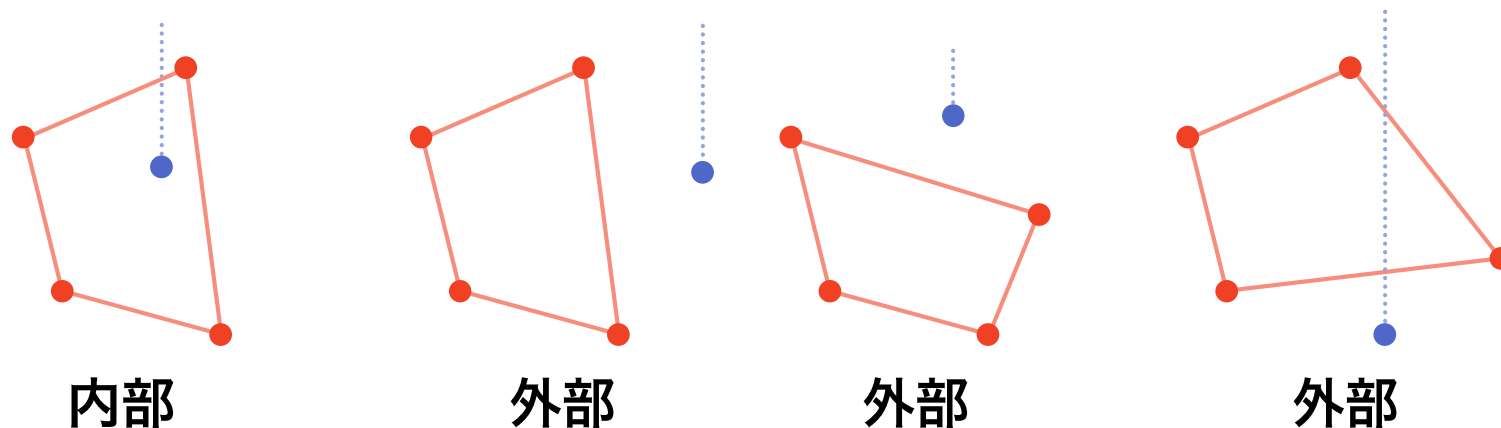
点が凸包に含まれない

3.3 逐次構成法 (Incremental Method)

1) 点の内外判定を利用する方法

点と凸包の内外判定

- 点を通る垂直線と凸包の線分との交差判定を行う



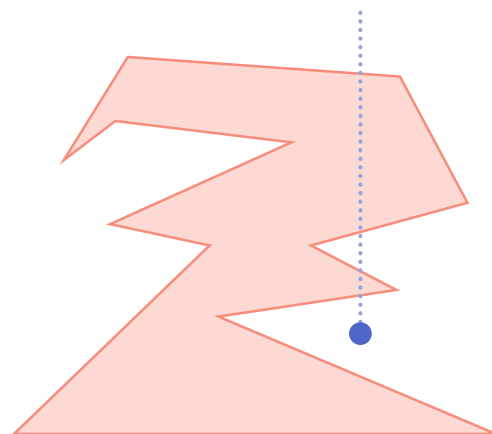
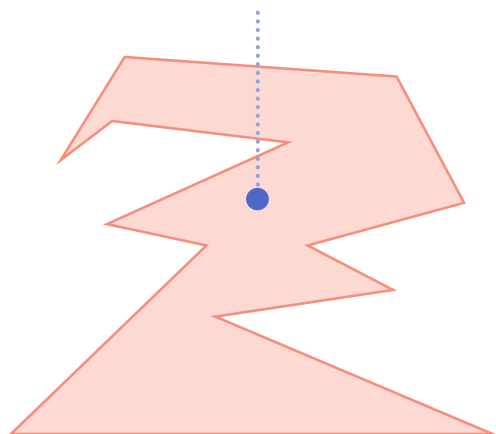
上で1回交差 → 内部, それ以外 → 外部

3.3 逐次構成法 (Incremental Method)

1) 点の内外判定を利用する方法(おまけ)

点と多角形の内外判定

- 点を通る垂直線と多角形の線分との交差判定を行う

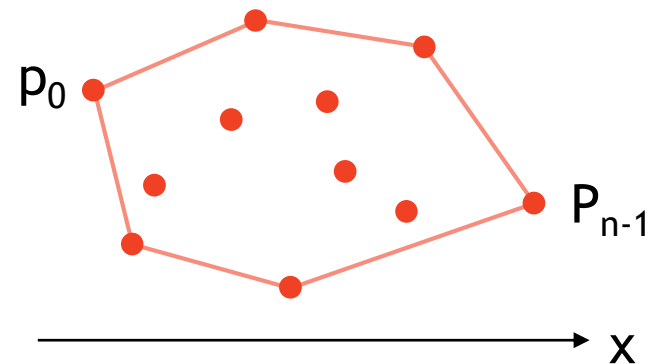
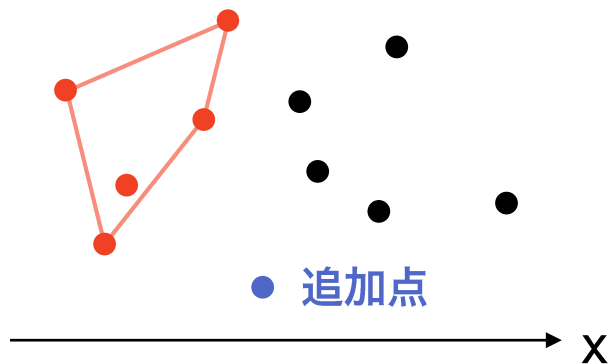


奇数回 → 内部, 偶数回 → 外部

3.3 逐次構成法 (Incremental Method)

2) ソートを利用する方法

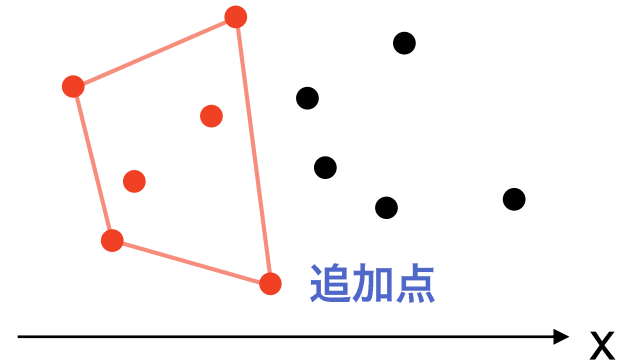
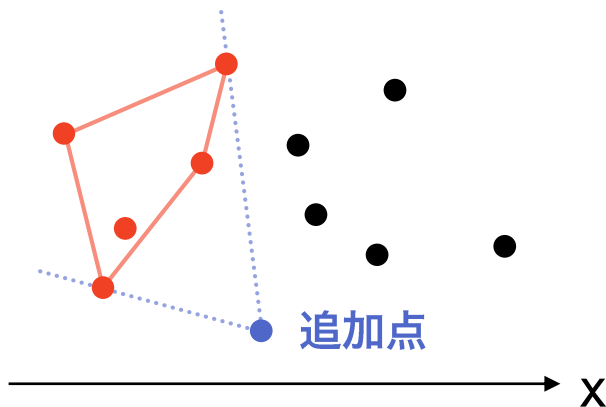
- ソート順に点を追加しながら，凸包を作り直す
- 追加点は凸包の外側にあるので，内外判定は不要



3.3 逐次構成法 (Incremental Method)

2) ソートを利用する方法

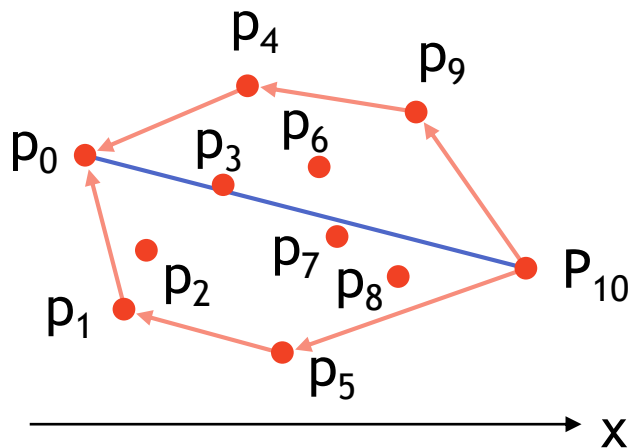
- 点を追加する時に，凸包への接線を2本求め，新たな線分とする
- 2本の接線に挟まれた線分を除外する



3.3 逐次構成法 (Incremental Method)

2) ソートを利用する方法

- 上部凸包, 下部凸包を別々に作り, 後で統合する
- p_0 と p_{n-1} を結ぶ線分で上下に分ける(図の場合 $n=10$)



上部凸包 = $\{p_{10}, p_9, p_4, p_0\}$
→ 反時計回り

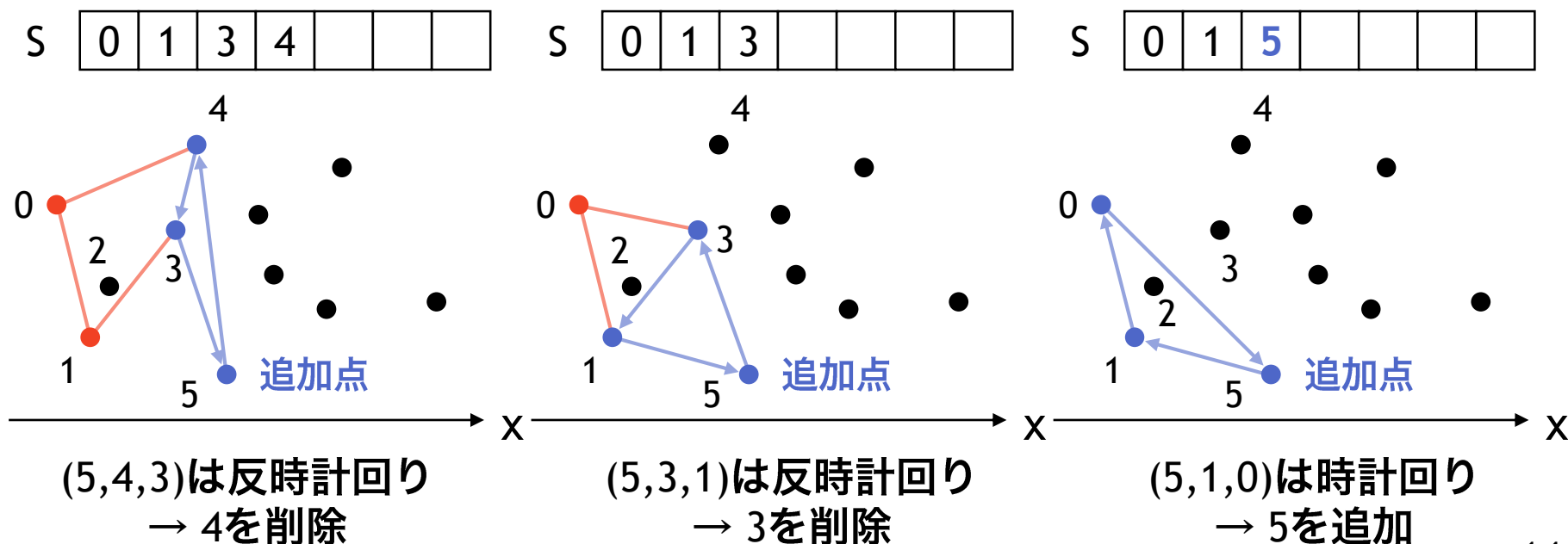
下部凸包 = $\{p_{10}, p_5, p_1, p_0\}$
→ 時計回り

3.3 逐次構成法 (Incremental Method)

2) ソートを利用する方法

- 接線の求め方 = 新たに追加する点と、最後に追加した2つの点の並び順を評価する

下部凸包(時計回り), 点 p_5 を追加する場合

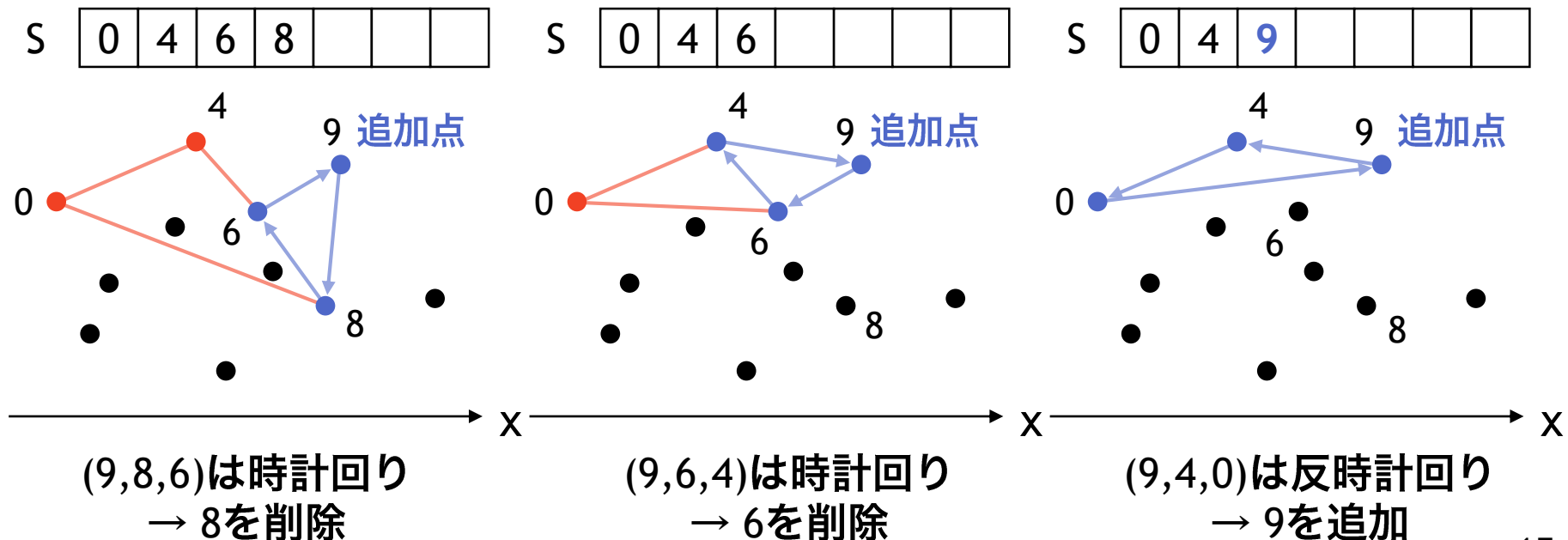


3.3 逐次構成法 (Incremental Method)

2) ソートを利用する方法

- 接線の求め方 = 新たに追加する点と、最後に追加した2つの点の並び順を評価する

上部凸包(反時計回り), 点 p_9 を追加する場合



3.3 逐次構成法 (Incremental Method)

2) ソートを利用する方法

上部凸包の構成アルゴリズム

1. 全ての点をx座標の昇順にソートする $O(n \log n)$
2. p_0, p_1 をスタック S に積む
3. $p_i (i=2, 3, \dots, n-1)$ に対し以下を行う $O(n)$
 - a. $p_i, S[\text{top}], S[\text{top}-1]$ が 時計回りであれば, $S[\text{top}]$ を取り出す
 - b. これを3点の順が 反時計回りになるまで繰り返す
 - c. p_i をスタック S に積む

総計算量 $O(n \log n)$

3.4 分割統治法 (Divide and Conquer)

■ 基本的な手順

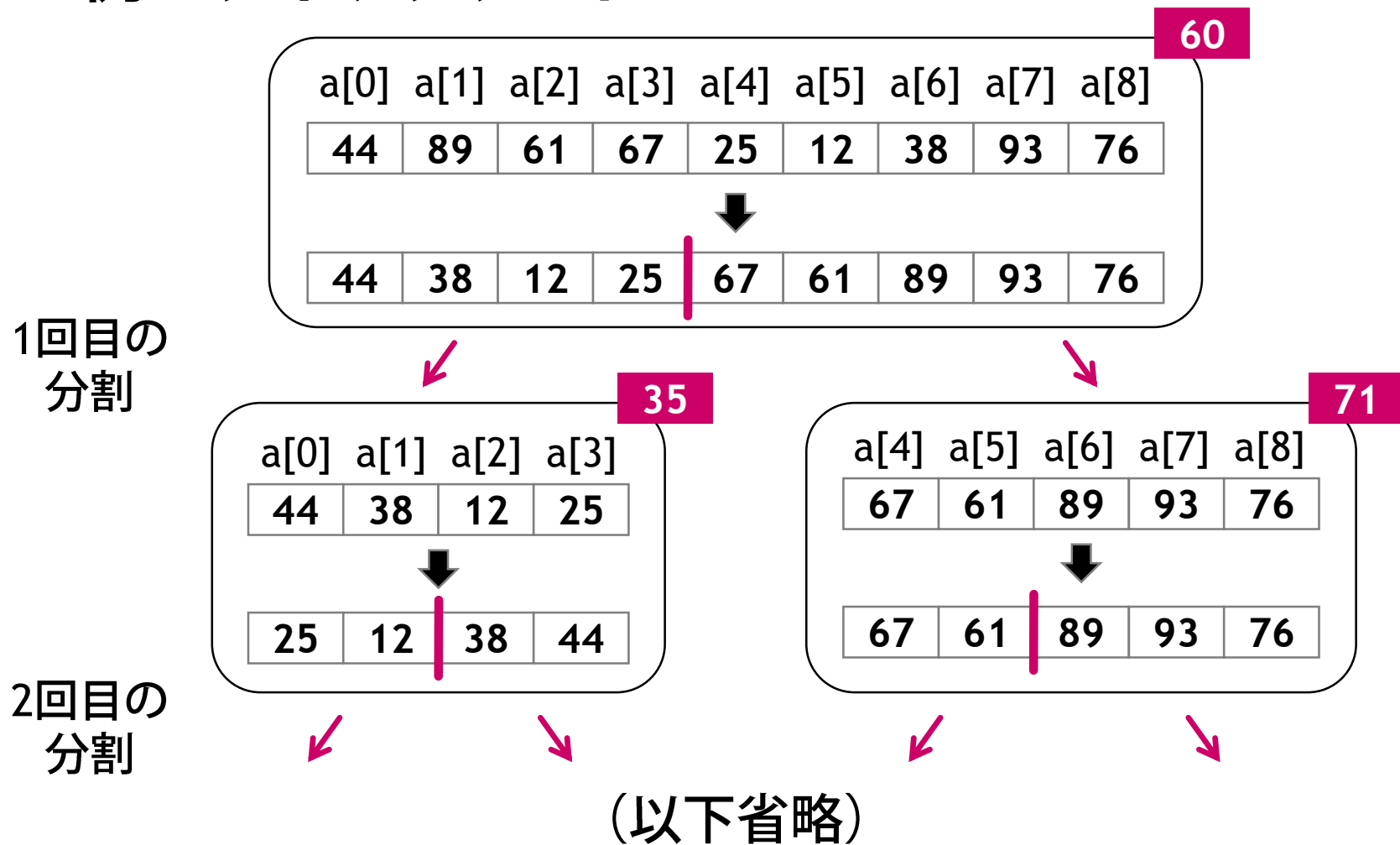
- 分割(Divide) : 与えられた問題をほぼ等しい大きさのいくつかの問題に分割する
- 統治(Conquer) : 各部分問題を再帰的に解く
- 統合(Combine) : それらの解を統合して全体の解を得る

■ 部分問題が十分に小さければそれらの解は容易に求まる

■ 主な処理は統合ステップ

3.4 分割統治法 (Divide and Conquer)

■ 例：クイックソート



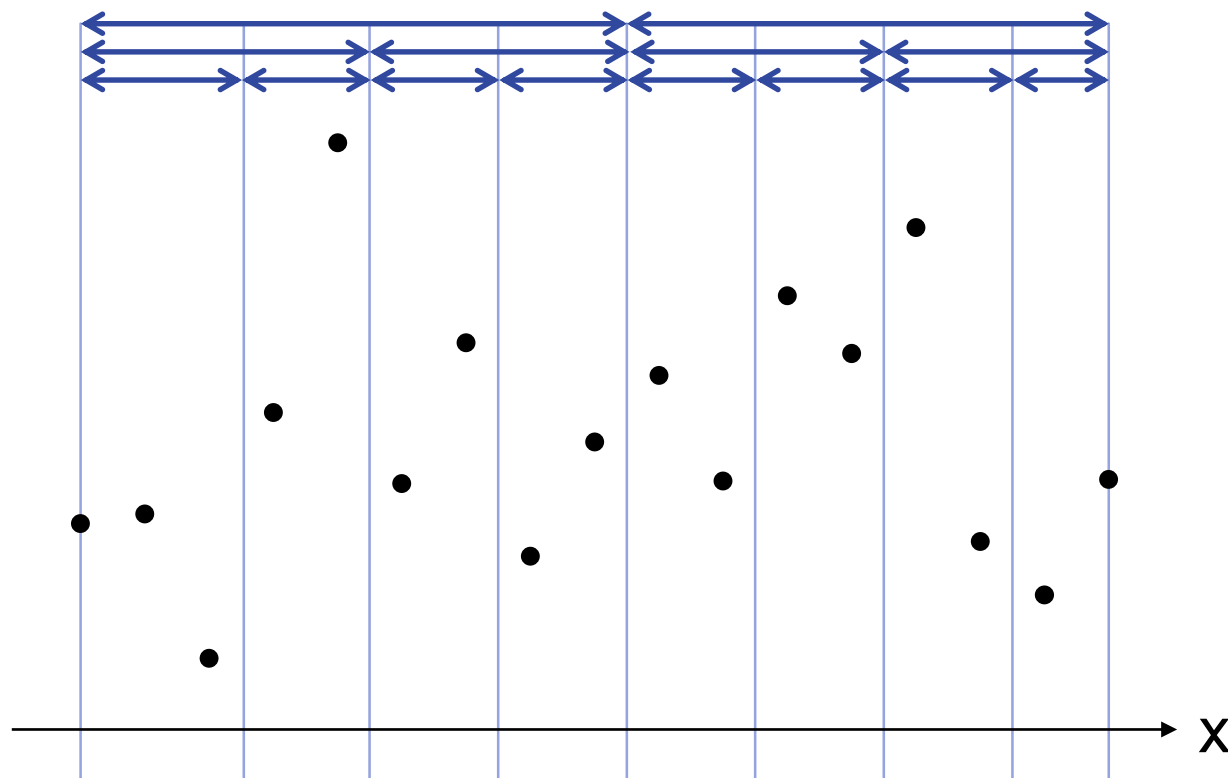
3.4 分割統治法 (Divide and Conquer)

■ 分割統治法を利用した凸包の計算

1. ソート : 点をx座標順にソートする
2. 分割 : 各グループをx座標の中央値で2グループに分割する(点数が3以下になるまで繰り返す)
3. 凸包の計算 : 各グループの凸包を計算する
4. 統合 : 2つの凸包の上下の2接線を求めて統合する(1つになるまで繰り返す)

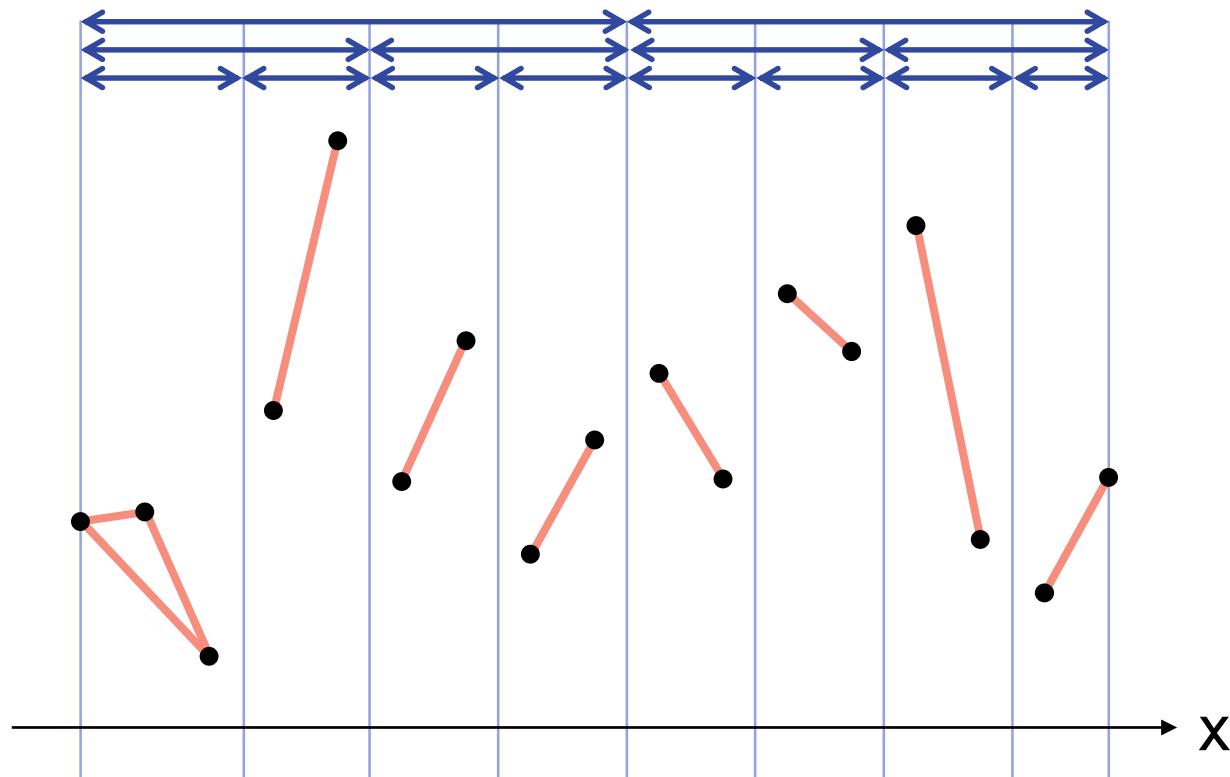
3.4 分割統治法 (Divide and Conquer)

2. 分割：各グループをx座標の中央値で2グループに分割する(点数が3以下になるまで繰り返す)



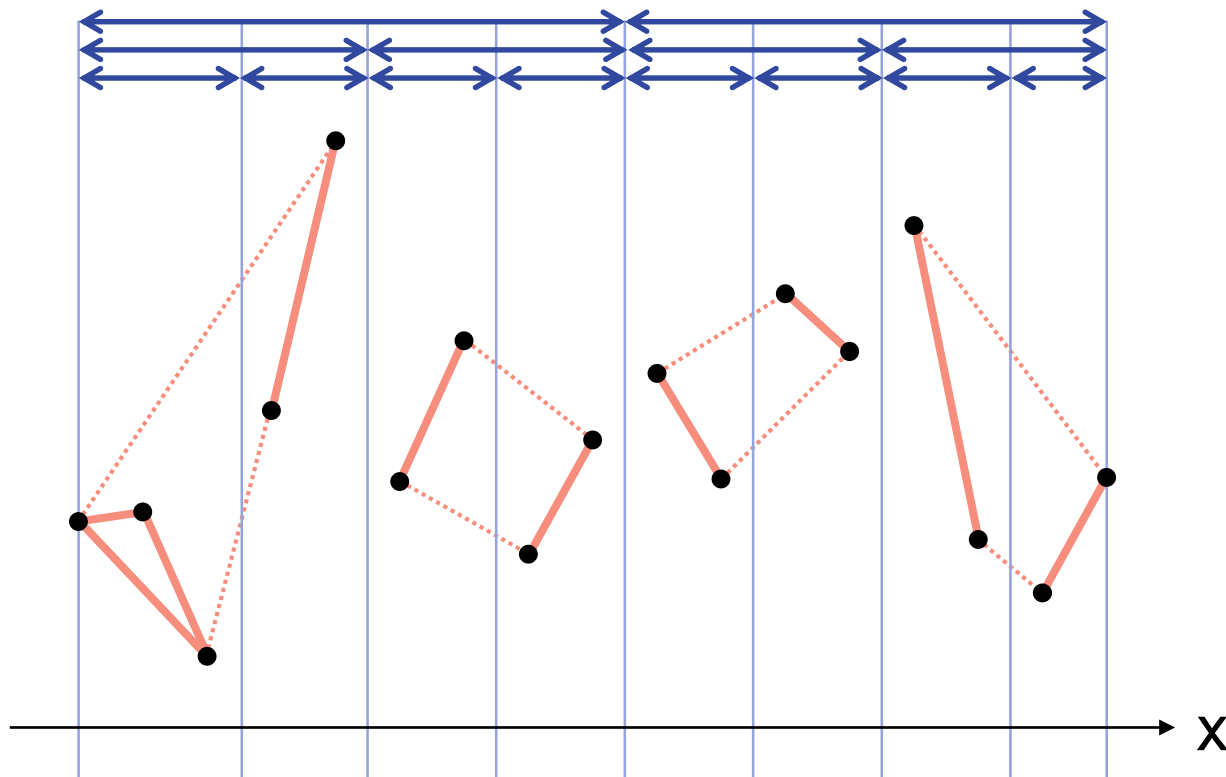
3.4 分割統治法 (Divide and Conquer)

3. 凸包の計算：各グループの凸包を計算する



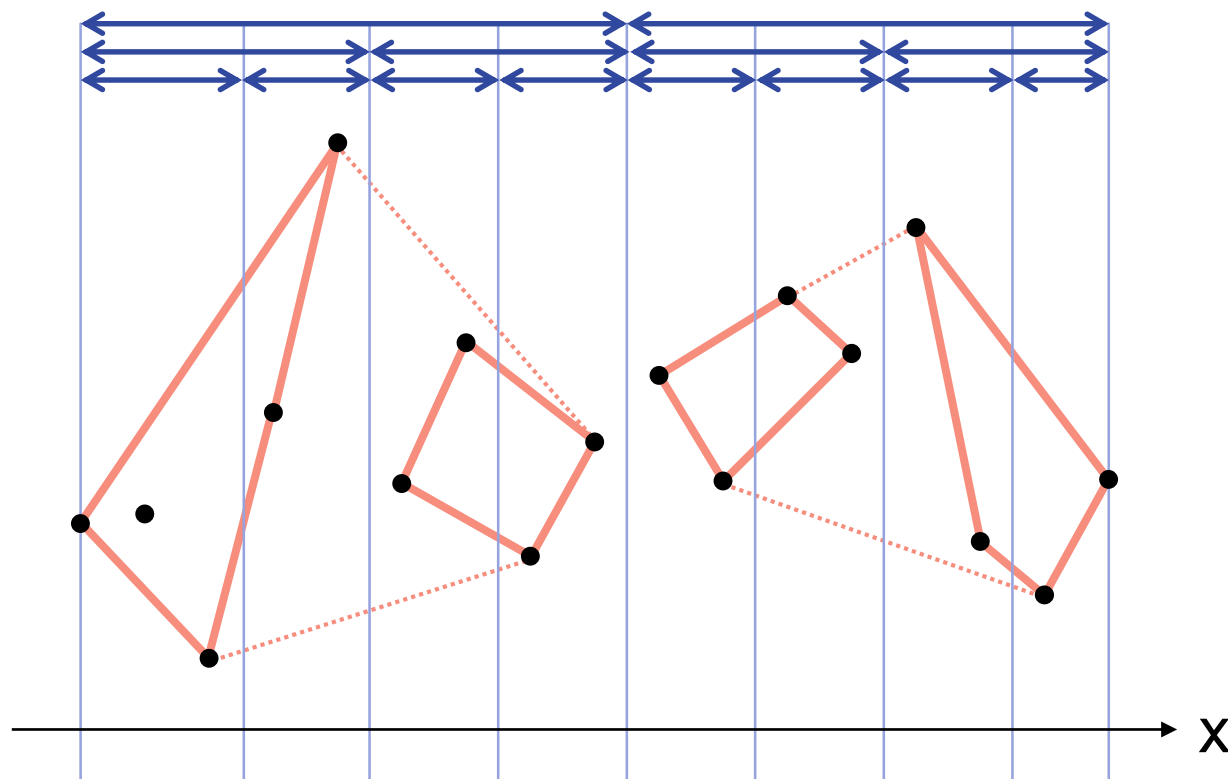
3.4 分割統治法 (Divide and Conquer)

4. 統合：2つの凸包の上下の2接線を求めて統合する(1つになるまで繰り返す)



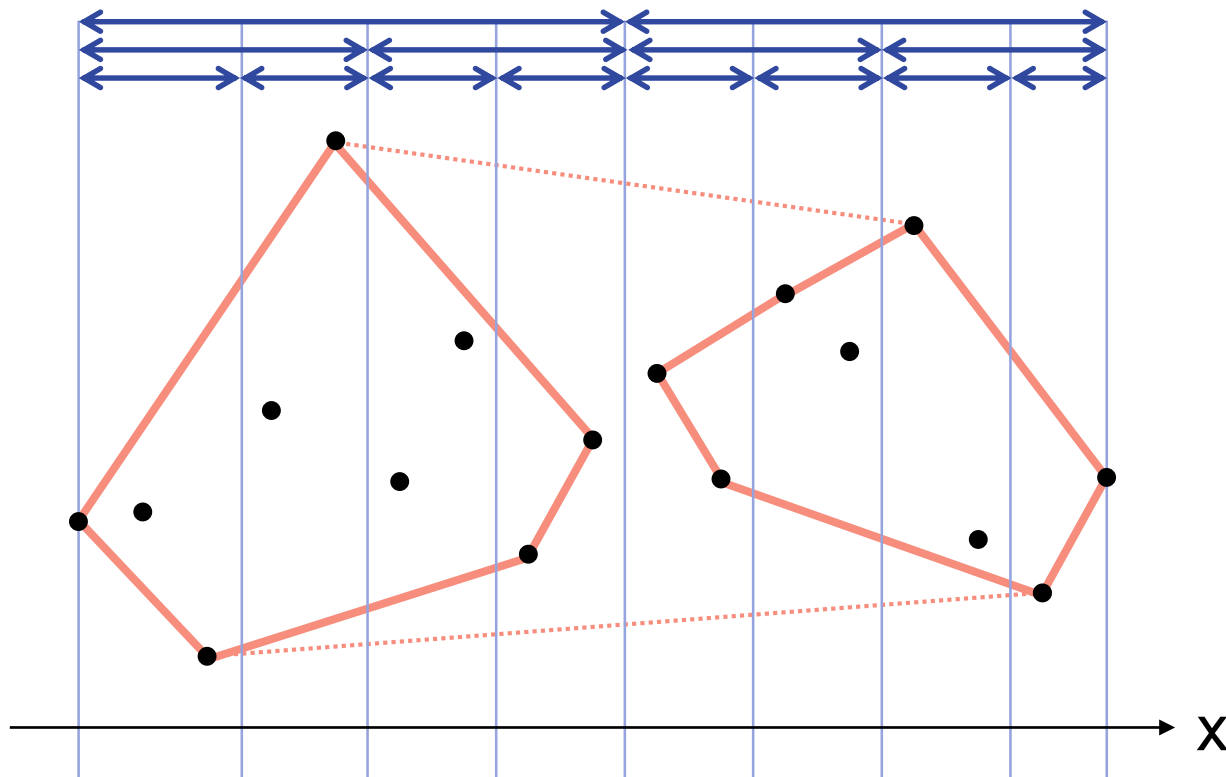
3.4 分割統治法 (Divide and Conquer)

4. 統合：2つの凸包の上下の2接線を求めて統合する(1つになるまで繰り返す)



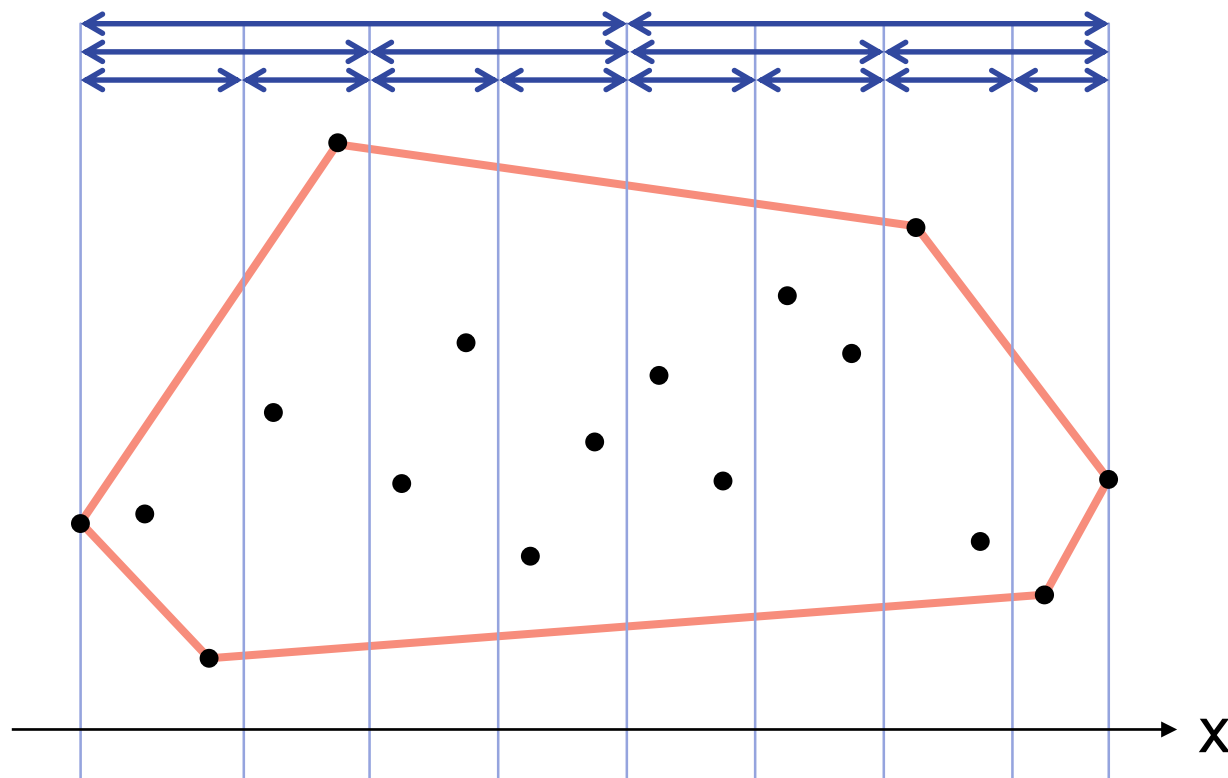
3.4 分割統治法 (Divide and Conquer)

4. 統合：2つの凸包の上下の2接線を求めて統合する(1つになるまで繰り返す)



3.4 分割統治法 (Divide and Conquer)

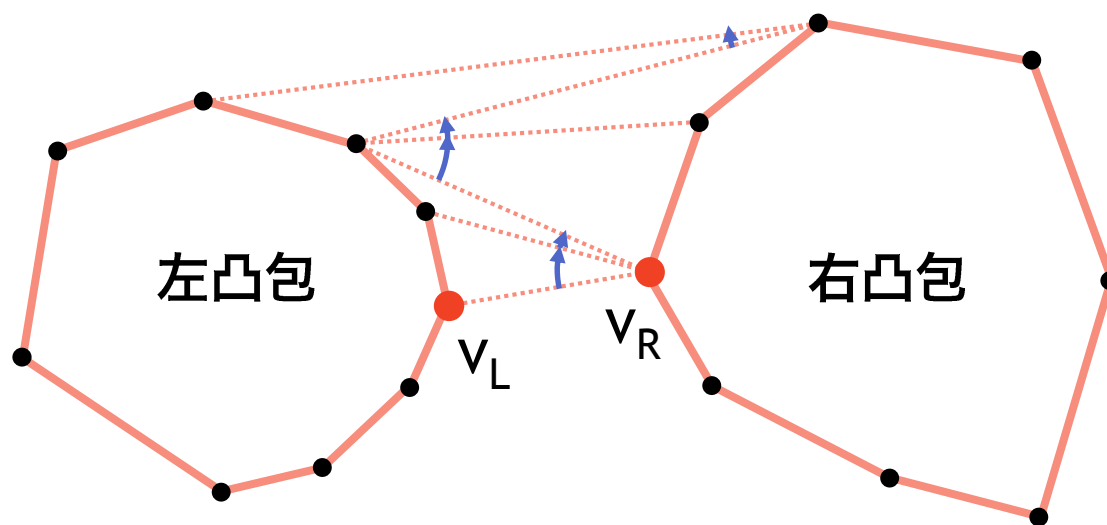
4. 統合：2つの凸包の上下の2接線を求めて統合する(1つになるまで繰り返す)



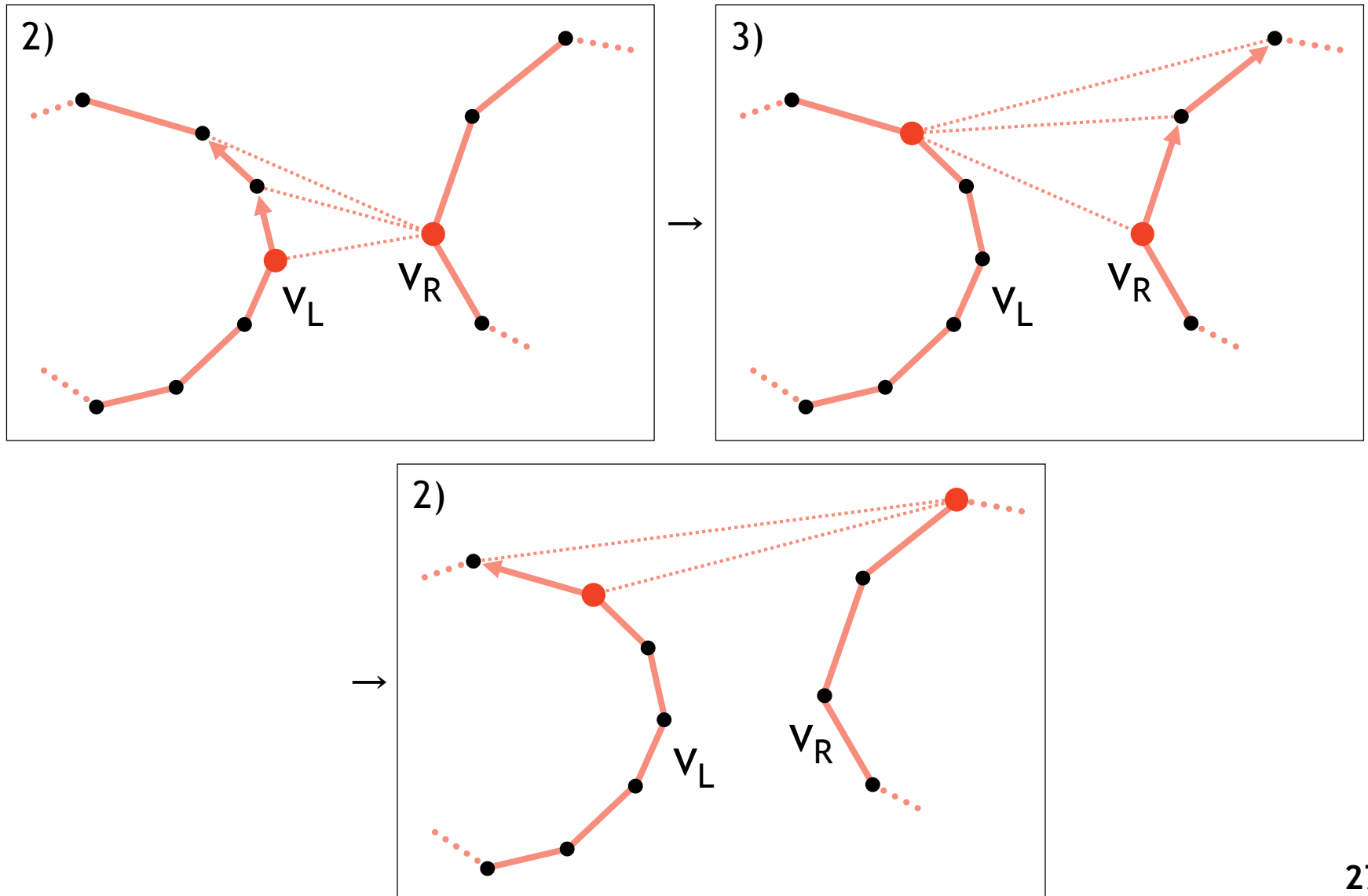
3.4 分割統治法 (Divide and Conquer)

■ 上部接線の求め方

1. 左凸包の右端点(v_L)，右凸包の左端点(v_R)を探す
2. v_R を固定して， v_L を移動させながら接線を見つける
3. v_L を固定して， v_R を移動させながら接線を見つける
4. 手順2, 3を凸包の接線が見つかるまで繰り返す



3.4 分割統治法 (Divide and Conquer)



3.4 分割統治法 (Divide and Conquer)

