# アルゴリズム論 9

## 整列処理(ソート)

- バブルソート
- 単純選択ソート
- 挿入法
- クイックソート
- ヒープソート

# 高度な整列処理1(クイックソート)

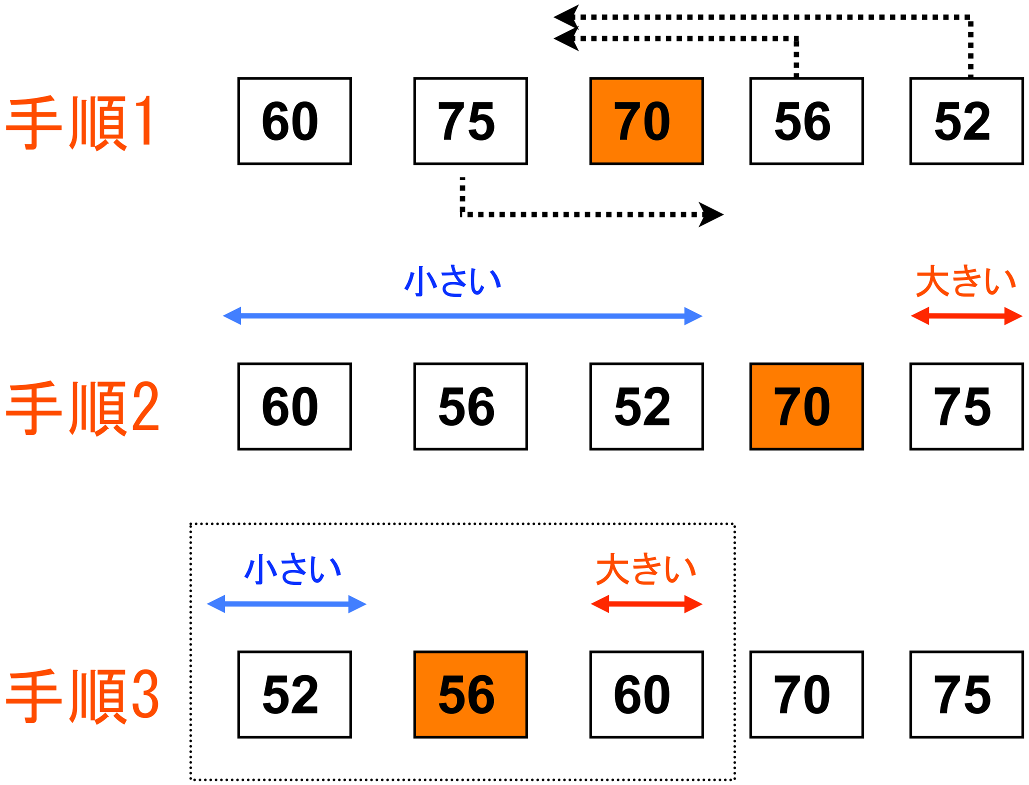
・ より効果的な整列処理のため！！！

## クイックソート

- 考案者 Charles A.R. Hoare　1960年提案
- 最も高速なソートアルゴリズムの一つ
- 分割統治法を応用：平均的には最も速いソート
- 再帰処理を使用することによって効率的で短いソースコードを実現可能

# クイックソート（原理）

## 以下のテストの点数を昇順に並べなさい




配列要素の中から任意に１つを選び枢軸（pivot）とする

枢軸より小さいグループと大きいグループに分ける

分割されたグループで手順１および２を繰り返す

⇩

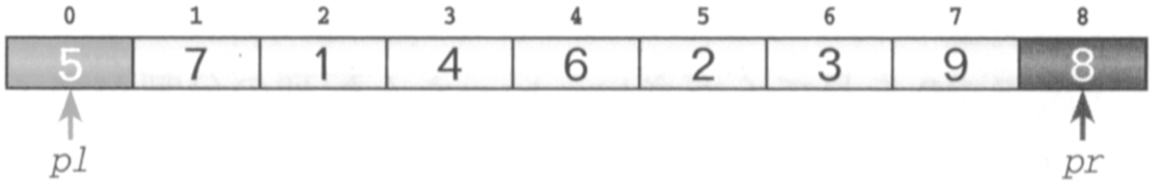
## 分割統治


37

# 分割のアルゴリズム

まずは、配列を二つのグループに分割する手順を考えます。

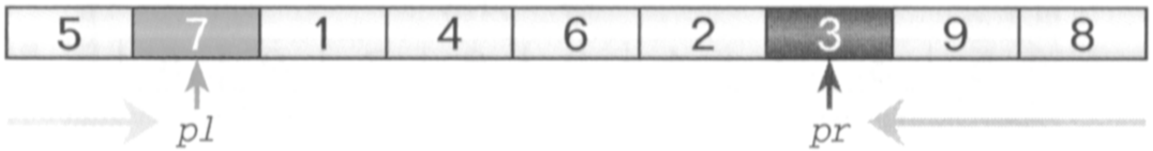
ここでは、下の図に示している配列 $a$ から枢軸として 6 を選んで分割を行っていきましょう。なお、枢軸を $x$ とし、配列両端の要素の添字である $pl$ を左カーソル、$pr$ を右カーソルと呼ぶことにします。




枢軸以上の要素は配列の右側に、枢軸以下の要素は配列の左側に移動させなければなりません。そこで、次のことを行います。

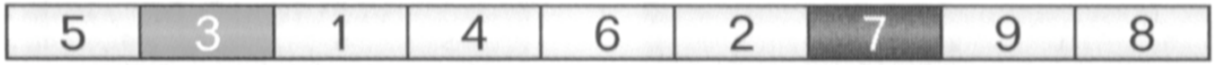
- `a[pl] >= x` が成立する要素が見つかるまで右方向へ走査する。
- `a[pr] <= x` が成立する要素が見つかるまで左方向へ走査する。

そうすると、$pl$ と $pr$ は下図のように位置します。

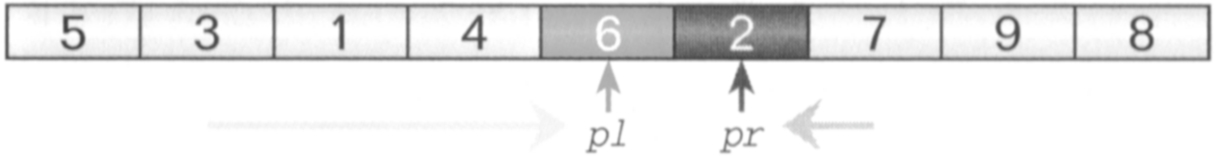


# 分割のアルゴリズム(つづき)

ここで、左右のカーソルが指す要素 a[pl] と a[pr] の値を交換します。

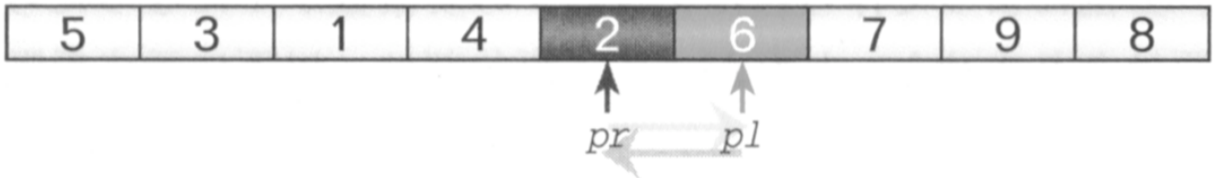



再び走査を続けると、左右のカーソルは、下図の位置でストップします。




ここで、これら二つの要素 a[pl] と a[pr] の値を交換します。


再び走査を続けようとしますが、下図のようにカーソルが交差します。






39

# 分割のアルゴリズム(つづき)

このとき、配列は次のように分割されています。

| | |
|---|---|
| 枢軸以下のグループ | a[0], … , a[pl - 1] |
| 枢軸以上のグループ | a[pr + 1], …, a[n - 1] |

なお、pl > pr + 1 のときに限りますが、次のようになります。

| | |
|---|---|
| 枢軸と等しいグループ | a[pr + 1], … , a[pl - 1] |

# 分割プログラム1（メイン）

```
#include <stdio.h>

#define swap(type,x,y) do {type t=x; x=y; y=t;} while(0)

#define NUM 9
void partition(int a[],int n);

int main(void)
{
	int	i;
	int		x[NUM];

	printf(" Input integer number %d times ¥n",NUM);/* データ入力 */

	for (i=0;i<NUM;i++)	{
		printf("x[%d]:",i);
		scanf("%d",&x[i]);
	}

	partition(x,NUM);  /* データ列分割 */

	printf("Partition is finished ¥n");

	return(0);
}
```


41

# 分割プログラム1（関数）

```
void partition(int a[],int n)
{
        int     i;
        int     pl=0;
        int     pr=n-1;
        int     x=a[n/2];       /* ピボット */

        do {
                while (a[pl]<x) pl++;/* 左カーソル移動  */
                while (a[pr]>x) pr--;/* 右カーソル移動  */
                if (pl<=pr) {
                        swap(int, a[pl],a[pr]); /* 交換  */
                        pl++;
                        pr--;
                }
        } while (pl<=pr);  /* 左カーソル≦右カーソル  */
```

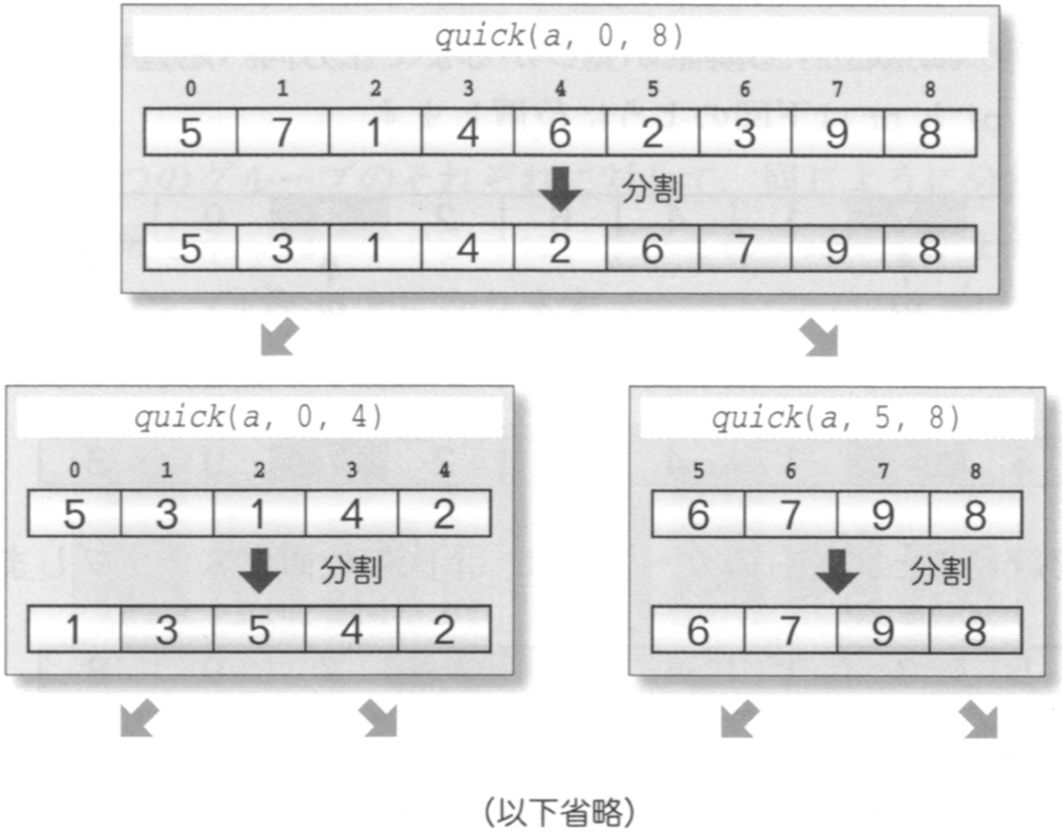
# 分割プログラム2（関数）

```
                                   /* 分割データ表示  */
        printf("Group under pivot ¥n");
        for (i=0;i<=pl-1;i++)
                printf("%d ",a[i]);
        printf("¥n");

        printf("Group over pivot ¥n");
        for (i=pr+1;i<n;i++)
                printf("%d ",a[i]);
        printf("¥n");

        if (pl>pr+1) {
                printf("Group equivalent pivot ¥n");
                for (i=pr+1;i<=pl-1;i++)
                        printf("%d ",a[i]);
                printf("¥n");
        }
}
```

# 分割プログラム実行結果

```
Input integer number 9 times
x[0]:5
x[1]:7
x[2]:1
x[3]:4
x[4]:6
x[5]:2
x[6]:3
x[7]:9
x[8]:8
Value at pivot=6
Group under pivot
5 3 1 4 2
Group over pivot
6 7 9 8
Partition is finished
```

# 分割からソートへ




右カーソル *pr* が先頭要素の添字より大きければ、左グループを再分割。
左カーソル *pl* が末尾要素の添字より小さければ、右グループを再分割。

# クイックソートプログラム1（メイン）

```
#include <stdio.h>
#define swap(type,x,y) do {type t=x; x=y; y=t;} while(0)
#define NUM 5
void quick(int a[],int left, int right); /* 関数プロトタイプ  */
int count0=0,count1=0;    /* count0:比較回数, count1:交換回数 */
int main(void)
{
        int     i;
        int             x[NUM];

        printf("Input integer number %d times ¥n",NUM);
        for (i=0;i<NUM;i++)       {
                printf("x[%d]:",i);
                scanf("%d",&x[i]);
        }
        quick(x,0,NUM-1);
        printf("Sorting is finished ¥n");
        for (i=0;i<NUM;i++)
                printf("x[%d] =%d¥n",i,x[i]);

        printf("Number of comparison=%d¥n",count0);
        printf("Number of swap=%d¥n",count1);

        return(0);
}
```

# クイックソートプログラム2(関数)

```
void quick(int a[],int left, int right)
{
        int     pl=left;
        int     pr=right;
        int     x=a[(pl+pr)/2];         /* ピボット */

        do {
                while (a[pl]<x) { pl++; count0++; } /*左カーソル移動*/
                count0++;
                while (a[pr]>x) { pr--; count0++; } /*右カーソル移動*/
                count0++;
                if (pl<=pr) {
                        swap(int, a[pl],a[pr]); /* 交換 */
                        pl++;
                        pr--;
                        count1++;
                }
        } while (pl<=pr); /* 左カーソル≦右カーソル */
        if (left<pr) quick(a,left,pr);    /* 再帰呼び出し */
        if (pl<right) quick(a,pl,right); /* 再帰呼び出し */
}
```

# ソートプログラム実行結果

```
Input integer number 5 times
x[0]:60
x[1]:75
x[2]:70
x[3]:56
x[4]:52
Sorting is finished
x[0] =52
x[1] =56
x[2] =60
x[3] =70
x[4] =75
Number of comparison=13
Number of swap=5
```


48

# 枢軸(Pivot)の選択方法

- 理想的な枢軸:ソート後にメジアンになる値
  - 中央値を求める操作が必要になる:余分な計算
- 中央値に近い値になる可能性の高い値を使用
  - 例1:データ列の中央の値(ソースコードの例)
  - 例2:データ列の先頭、中央、末尾の値の中央値

# 枢軸による効率の違い

- 入力データ:９　８　７　６　５　４　３　２　１

| 枢軸 | 中央 | 先頭 | 末尾 |
|---|---|---|---|
| 比較 | 26 | 56 | 56 |
| 交換 | 9 | 8 | 8 |

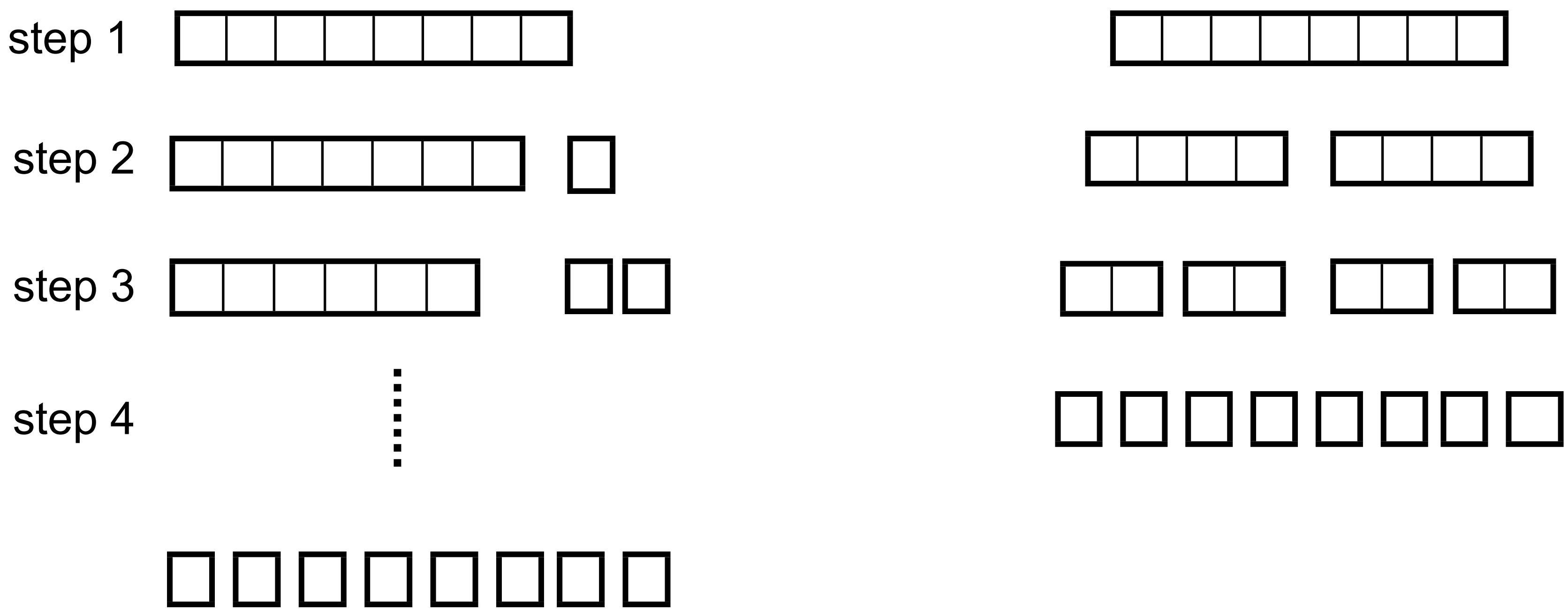
クイックソートでは枢軸の取り方によって比較の回数が大きく異なる

# 演習問題(講義時間内で実施)

- クイックソートを行うプログラムのソースコードを入力し実行する
  - メイン
  - クイックソート関数
- データを入力し、実行結果を確認する
- 枢軸の値を決定する方法を変え、対応する計算量を検討する


51

# クイックソート の計算量1




(a)効率が悪い場合　　　　(b)効率が良い場合


52

# クイックソート の計算量2

データn個のソート比較回数

- 最悪の場合
  - 分割した場合一方にn-1個の要素が残る場合
  - 枢軸として最小または最大の値をとる場合
  - 比較の回数

(n-1)+(n-2)+・・・+2+1　回

$$\sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}$$ 回 ⇒ オーダ　$O(n^2)$

# クイックソート の計算量3

データn個のソート比較回数

- 効率が良い場合
  - 分割した場合に枢軸の上下に(n-1)/2個の要素が残る場合
  - 枢軸として中央値をとる場合
  - 比較の回数

    (1)枢軸より大きいか小さいかを分ける

    (2)大きい部分のソート、小さい部分のソート

# クイックソート の計算量5

データn個のソート比較回数

(1)の計算量:g(n)

$g(n)=r+(n-r)+1=n+1$

(2)の計算量:f(n)

nが小さい場合の比較回数

$f(1)=0$
$f(2)=2$
$f(3)=4$　...

- (1)と(2)の合計

$f(3)=g(3)+f(1)+f(1)=4+0+0=4$
$f(7)=g(7)+f(3)+f(3)=8+4+4=16$
$f(15)=g(15)+f(7)+f(7)=16+16+16=48$
$f(31)=g(31)+f(15)+f(15)=32+48+48=128$
$f(63)=g(63)+f(31)+f(31)=64+128+128=320$
$f(2^k-1)=g(2^k-1)+2f(2^{k-1}-1) \rightarrow f(2^k-1)/2^k=g(2^k-1)/2^k+2f(2^{k-1}-1)/2^k$
$f(2^k-1)/2^k=1+2f(2^{k-1}-1)/2^k$
$f(2^k-1)/2^k=1+f(2^{k-1}-1)/2^{k-1}$

- $F(k)= f(2^k-1)/2^k \rightarrow F(k)=1+F(k-1)$

$F(1)=0$ ... $=f(2^1-1)/2^1=f(1)/2=0$
$F(2)=1$
$F(3)=2$
$F(k)=k-1$

- $f(2^k-1)=2^k(k-1)$ →近似→ $f(2^k)=2^k(k-1)$

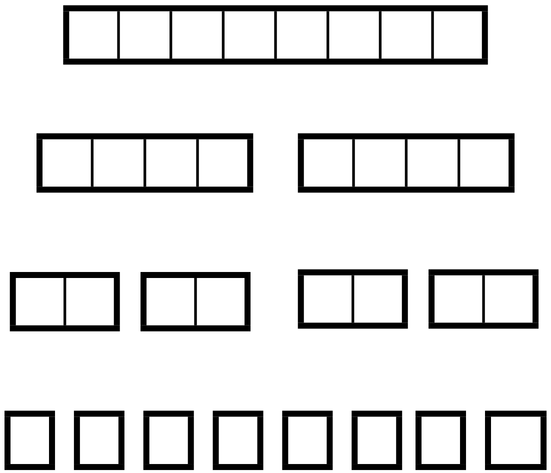
$n=2^k$とする　$k=\log_2(n)$

- $f(n)=n(\log_2(n)-1)=n\log_2(n)-n$

→ $O(n\log_2 n)$

# クイックソート の計算量4

簡単に考えると...



データ数がn個の場合、分割のステップ数は

$k=\log_2 n$ 回必要

各ステップにおいて必要な比較の回数はn+1回

従って比較の回数の合計は

$(n+1)\times k = (n+1)\times \log_2 n = n \log_2 n + \log_2 n$



56

# クイックソート の計算量6

データn個のソート比較回数

- まとめ
  - 最悪の場合

    $O(n^2)$
  - 最良および平均的な場合

    $O(n\log_2 n)$