情報理論

第5回　講義

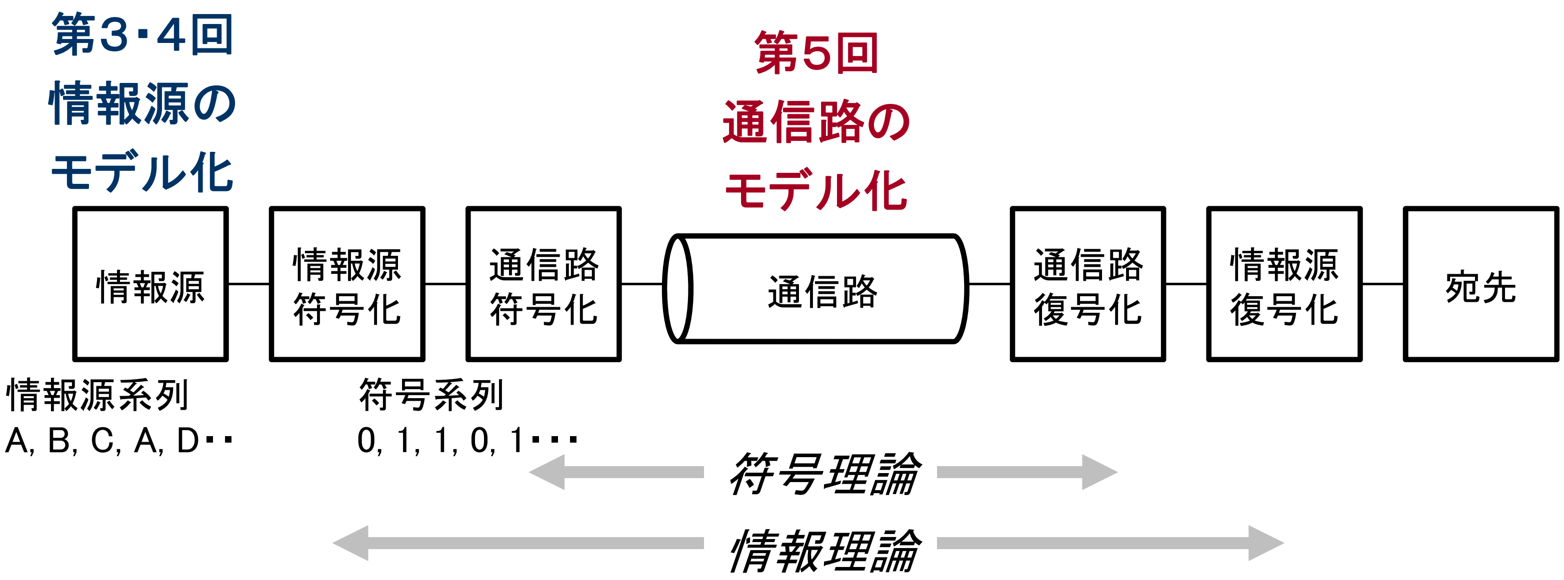
通信路のモデル化

２０１５．５．２０

植松　芳彦

（復習）情報理論の扱う領域

1. 基本モデル
2. 情報理論と符号理論
3. 情報理論の応用分野



通信路の統計的記述

通信路への入力記号系列:　$X_0\ X_1\ X_2 \cdots$

通信路からの出力記号系列:　$Y_0\ Y_1\ Y_2 \cdots$

入力アルファベット:　$A = \{a_1, \cdots, a_r\}$

出力アルファベット:　$B = \{b_1, \cdots, b_s\}$

各時点の入力記号　　　　　　　　　　各時点の出力記号

$X_0\ X_1\ X_2 \cdots \Rightarrow$ 通信路 $\Rightarrow Y_0\ Y_1\ Y_2 \cdots$

a_1
$\vdots$
a_r

各時点で
入力しうる
記号の値

各時点で
出力しうる
記号の値

b_1
$\vdots$
b_r

通信路の統計的記述

- 任意の長さの入力系列 $X_0\ X_1\ X_2 \cdots X_{n-1}$ に対し対応する出力系列 $Y_0\ Y_1\ Y_2 \cdots Y_{n-1}$ の条件付き確率分布が定まること

$$P_{Y_0\ldots Y_{n-1} | X_0\ldots X_{n-1}}(y_0,\cdots,y_{n-1} | x_0,\cdots,x_{n-1}) \quad \text{（式3.45）}$$

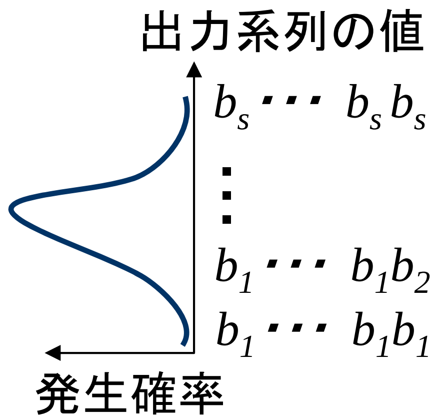
$$X_0\ X_1 \cdots X_{n-1} \Rightarrow \boxed{\text{通信路}} \Rightarrow Y_0\ Y_1 \cdots Y_{n-1}$$

入力系列の値

全部で r^n パターン

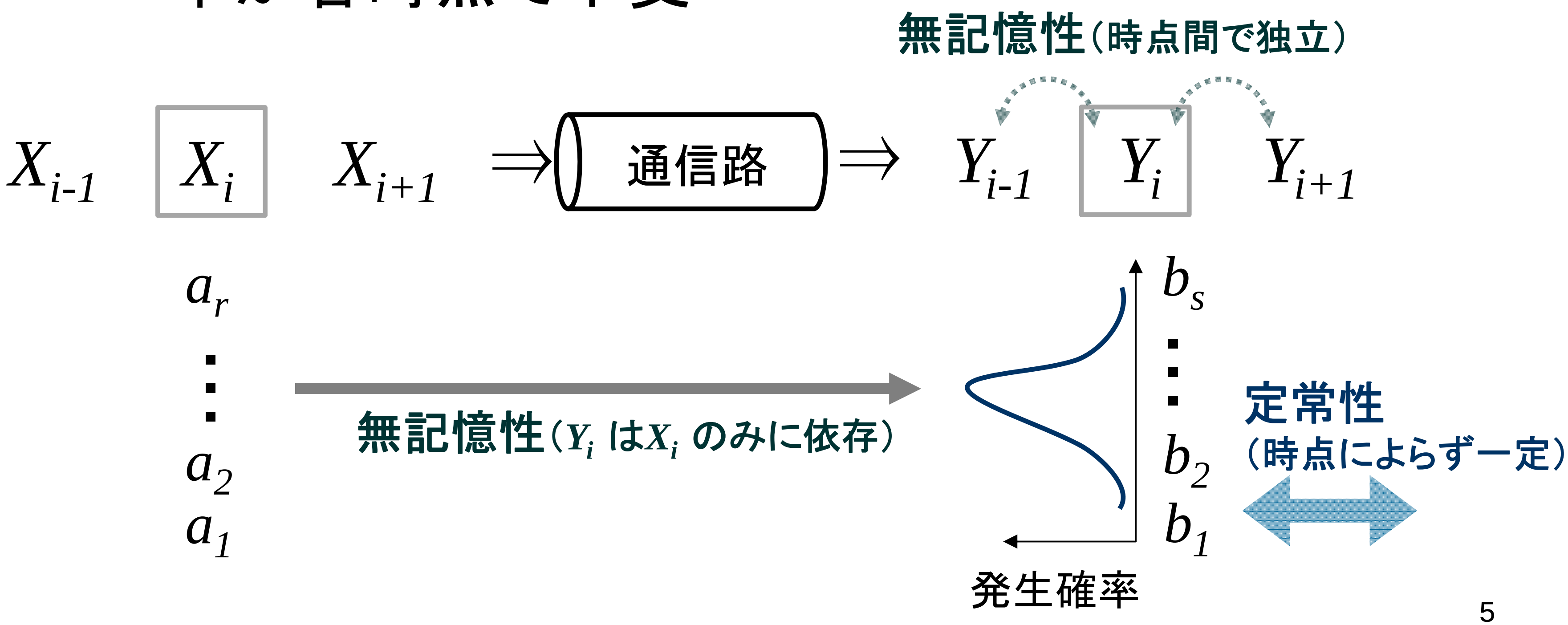
$$\left\{ \begin{array}{l} a_r \cdots a_r a_r \\ \vdots \\ a_1 \cdots a_1 a_2 \\ a_1 \cdots a_1 a_1 \end{array} \right.$$

各パターンに対し出力の確率分布が定まる



記憶のない定常通信路

1. 無記憶性：各時点の出力がその時点の入力のみに依存．他の時点の出力・入力と独立（相関なし）
2. 定常性：各入力記号に対する出力記号の発生確率が各時点で不変



記憶のない定常通信路

3. ある入力 X が与えられた時の出力 Y の条件付き確率 $P_{Y|X}(y|x)$ を用いて以下のように書ける

$$P_{Y_0 \ldots Y_{n-1} | X_0 \ldots X_{n-1}}(y_0, \cdots, y_{n-1} | x_0, \cdots, x_{n-1})$$

$$= \prod_{i=0}^{n-1} P_{Y|X}(\mathrm{y}_\mathrm{i} | x_i) \qquad \text{（式3.46）}$$

記憶のない定常通信路

- 入力 X がとりうる値は$A = \{a_1, \cdots, a_r\}$
- 出力 Y がとりうる値は$B = \{b_1, \cdots, b_s\}$

⇒条件付き確率$P_{Y|X}(y|x)$は$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{s}$ 個の値の集合

⇒通信路行列 $\boldsymbol{T}$ と表現する

$$T = \begin{bmatrix} P_{Y|X}(b_1|a_1) & \cdots & P_{Y|X}(b_s|a_1) \\ \vdots & & \vdots \\ P_{Y|X}(b_1|a_r) & \cdots & P_{Y|X}(b_s|a_r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{r1} & \cdots & p_{rs} \end{bmatrix} \qquad \text{（式3.48）}$$

$P_{Y|X}(b_j|a_i)$ ：入力 $\boldsymbol{a_i}$ の時出力 $\boldsymbol{b_j}$ となる確率

記憶のない定常通信路

- 通信路線図による表現方法

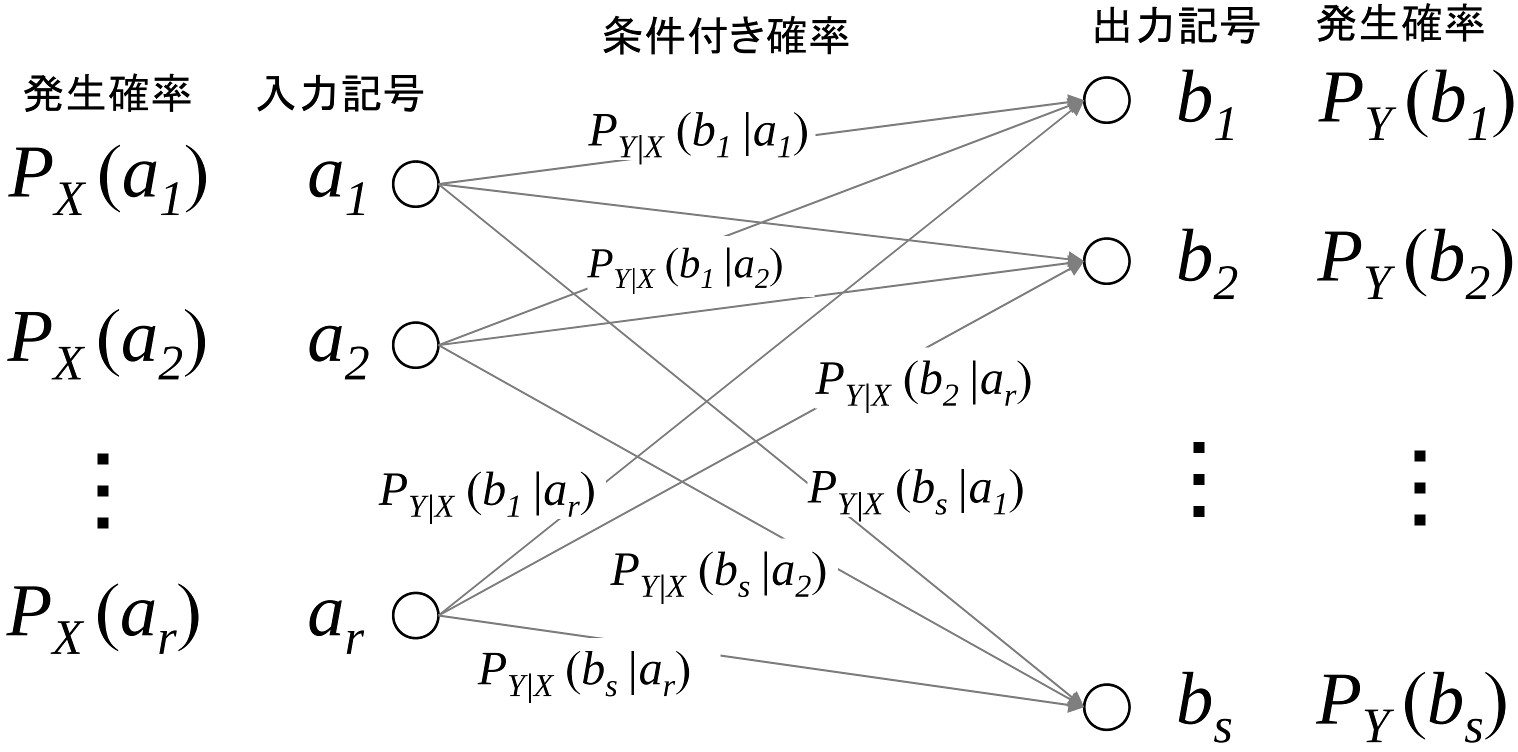


図3.6 通信路線図に加筆

記憶のない定常通信路

- 各確率の間に成り立つ関係

【要素表現】 $P_{Y,X}(b_j, a_i) = P_{Y|X}(b_j \mid a_i) \cdot P_X(a_i)$

入力が $\boldsymbol{a_i}$ かつ出力が $\boldsymbol{b_j}$ となる結合確率分布

$$P_Y(b_j) = \sum_{i=1}^{r} P_{Y,X}(b_j, a_i) = \sum_{i=1}^{r} P_{Y|X}(b_j \mid a_i) \cdot P_X(a_i)$$

【行列表現】 $\begin{bmatrix} P_Y(b_1) & \cdots & P_Y(b_s) \end{bmatrix} =$

$$\begin{bmatrix} P_X(a_1) & \cdots & P_X(a_r) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_{Y|X}(b_1 \mid a_1) & \cdots & P_{Y|X}(b_s \mid a_1) \\ \vdots & & \vdots \\ P_{Y|X}(b_1 \mid a_r) & \cdots & P_{Y|X}(b_s \mid a_r) \end{bmatrix}$$

【演習1】確率分布を求める

- 下記通信路線図において，出力記号が*0*, *1*となる確率$P_Y(0)$, $P_Y(1)$をp_0, p を使って表す.

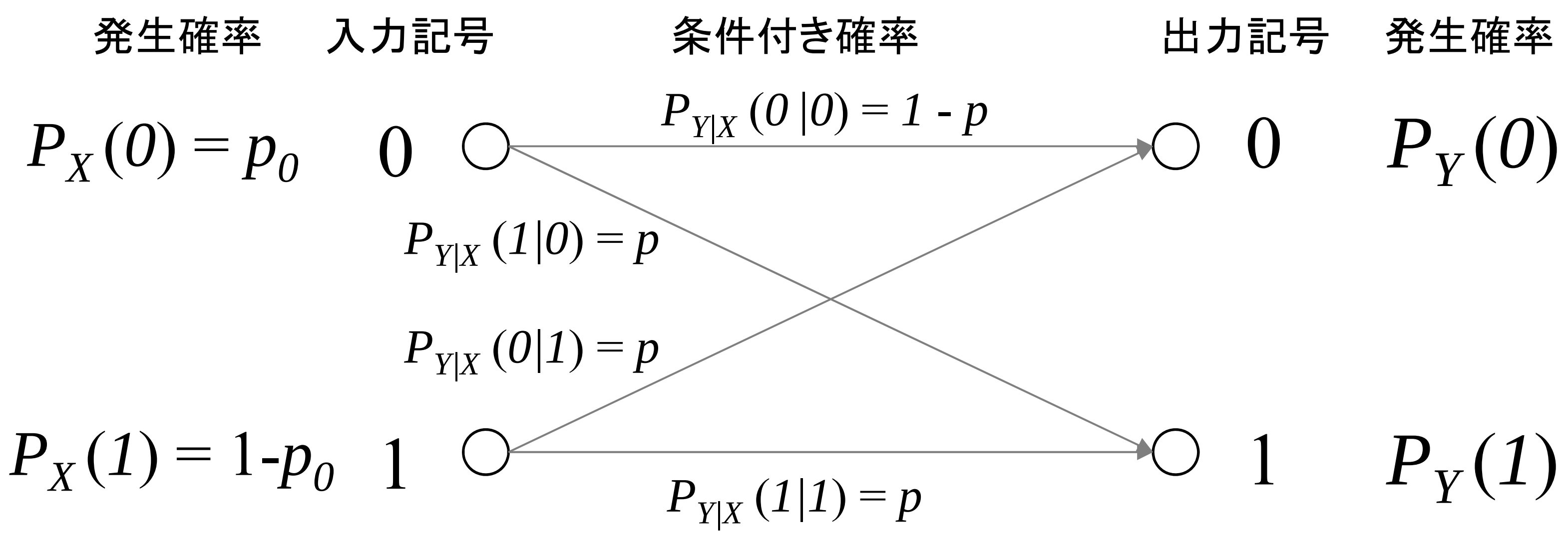


図3.7　2元対象通信路の通信路線図に加筆

【演習1】確率分布を求める

個々の結合確率分布

$$P_{Y,X}(0,\ 0) = P_X(0) \cdot P_{Y|X}(0|0) =$$

$$P_{Y,X}(1,\ 0) =$$

$$P_{Y,X}(0,\ 1) =$$

$$P_{Y,X}(1,\ 1) =$$

出力記号が0, 1となる確率

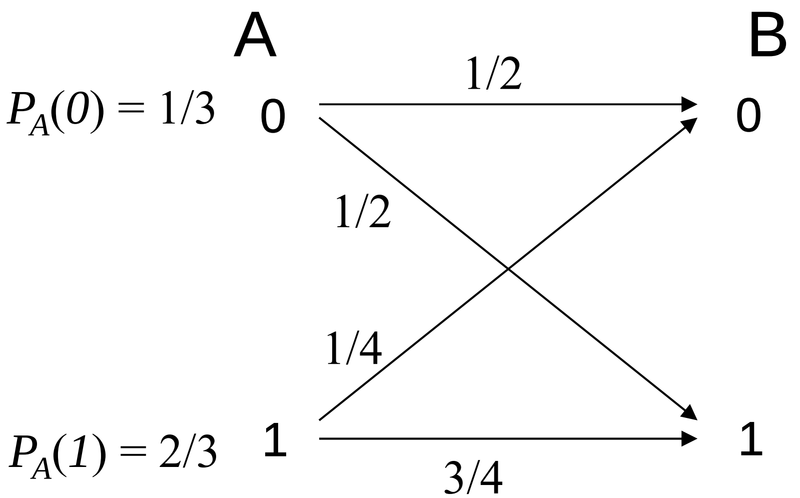
$$P_Y(0) = P_{Y,X}(0,\ 0) + P_{Y,X}(0,\ 1) =$$

$$P_Y(1) =$$

【演習2】以前の公務員試験問題

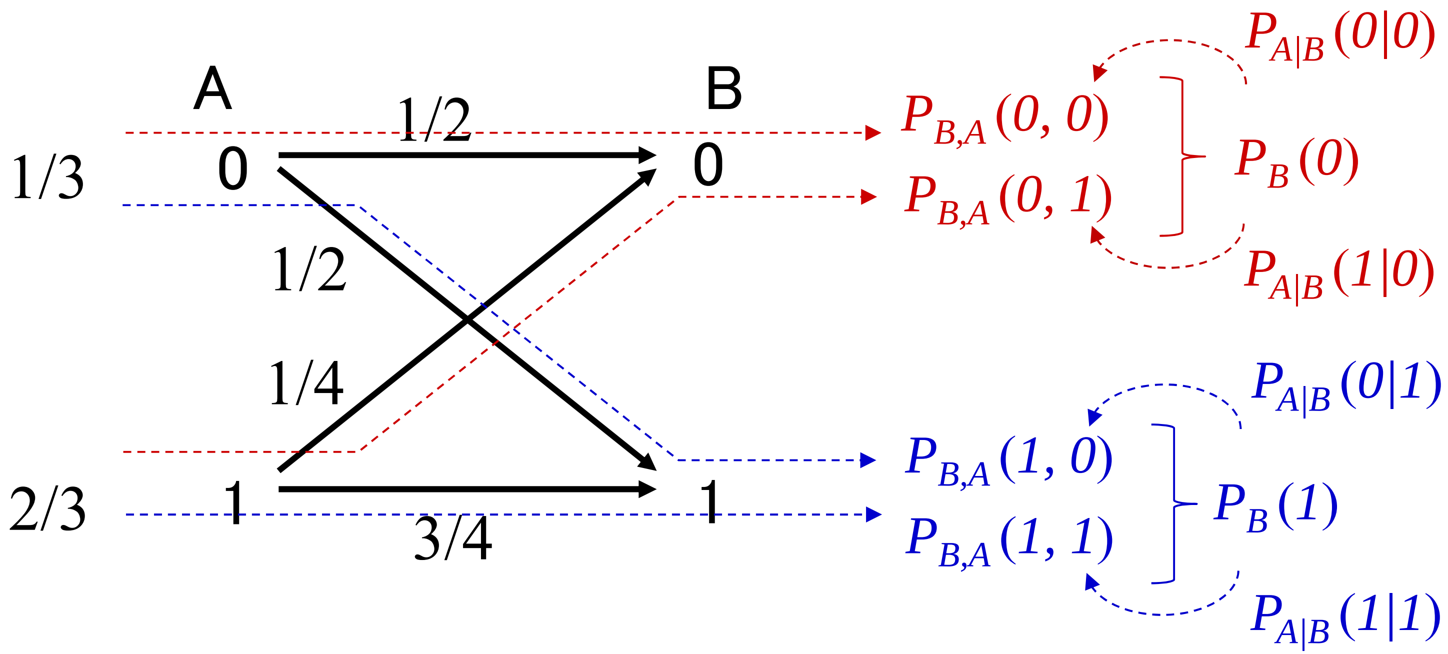
図は、送信記号の集合A＝{0，1}及び受信記号の集合B＝{0，1}をもつ2元通信路の模式図である。送信記号と受信記号を結ぶ矢印の添えられた数字は、その送受信関係が成り立つ確率を表している。この通信路の送信側に無記憶の情報源を接続し、記号0∈Aを確率1/3で、記号1∈Aを確率2/3で送信する。記号{0，1} ∈Bが受信されたとき、送信記号{0，1} ∈Aの事後確率として正しいのはどれか。

	0∈Bを受信		1∈Bを受信	
	0∈A、	1∈A	0∈A、	1∈A
1.	1/3	2/3	3/4	1/4
2.	1/2	1/2	1/4	3/4
3.	1/2	1/2	3/4	1/4
4.	2/3	1/3	1/4	3/4
5.	1/4	3/4	1/2	1/2



【演習2】以前の公務員試験問題

- 「受信記号Bの時の送信記号Aの事後確率」は，あるBの値を受信した時，逆に送信したAの値に関する条件付き確率と捉える．



【演習2】以前の公務員試験問題

- 個々の結合確率分布 ヒント: $P_{B,A}(0, 0) = P_A(0) \cdot P_{B|A}(0 \mid 0)$

$P_{B,A}(0, 0) =$ $P_{B,A}(1, 0) =$

$P_{B,A}(0, 1) =$ $P_{B,A}(1, 1) =$

- 出力記号が0，1となる確率 ヒント: $P_B(0) = P_{B,A}(0,0) + P_{B,A}(0,1)$

$P_B(0) =$ $P_B(1) =$

- 条件付き確率 ヒント: $P_{B,A}(0,0) = P_B(0) \cdot P_{A|B}(0,0)$

$P_{A \mid B}(0 \mid 0) =$ $P_{A \mid B}(0 \mid 1) =$

$P_{A \mid B}(1 \mid 0) =$ $P_{A \mid B}(1 \mid 1) =$