数値解析法演習，平成 29 年 6 月 9 日レポート

情報工学科 3 年　学生番号　u276156　　　　名前　根本 貴大

1. 理論

1. ヤコビ法による連立一次方程式の計算

$Ax = b \rightleftarrows (D+E+F)x = b \rightleftarrows Dx = b-(E+F)x \rightleftarrows$
$= -D^{-1}(E+F)x + D^{-1}b$

により、反復公式

$x(k) = -D^{-1}(E+F)x^{(k-1)} + D^{-1}b \ (k = 1, 2\cdots)$

で得られる反復法をヤコビ法という。今回収束の判定には、1 ノルム、2 ノルム、最大値ノルムを用いる。

2. 対角優位の判定

授業に用いた、下の判定式を用いるとする。

$$\sum_{\substack{j=1 \\ (j\neq i)}}^{n} |aij| < |aii| \ (i = 1 \sim n)$$

2. 課題

以下の行列を定義とする。

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 4.0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4.0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4.0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4.0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 3.0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3.0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3.0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3.0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 2.99 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2.99 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2.99 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2.99 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

課題 1.

$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1$，$\mathbf{A} = \mathbf{A}_2$，$\mathbf{A} = \mathbf{A}_3$ として，それぞれ $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ をヤコビ法で解く．

$\left\| \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k+1)} \right\|_1$ を縦軸（対数軸），反復回数 k を横軸としてグラフを描け．エクセルを使うとよい． 3 個の行列に対する結果をひとつのグラフに重ねて描くこと．なお，グラフの種類は散布図にする．結果について考察せよ．また，収束した場合は解を示せ．

課題 1 の結果

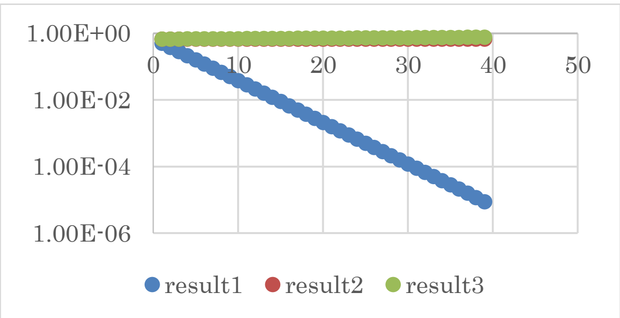


図 1.　1 ノルムの散布図

考察

A1 は収束するため 1 ノルムの値が IPSILON ＝ 1.00E-06 の値まで右肩下がりに描画されている。A2, A3 は収束しないため、グラフがほぼ横の直線で描画されている。

課題 2.

$\left\| \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k+1)} \right\|_\infty$，$\left\| \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k+1)} \right\|_2$ についても同様にグラフを描け（プログラムを少し修正する必要がある）.

課題 2 の結果

修正したプログラム

最大値ノルム	2 ノルム
if(xdif < 0.0);	xdif = pow(xdif, 2);
xdif = -xdif;	Nk += xdif;
if(Nk < xdif);	}
Nk = xdif;	Nk = sqrt(Nk);

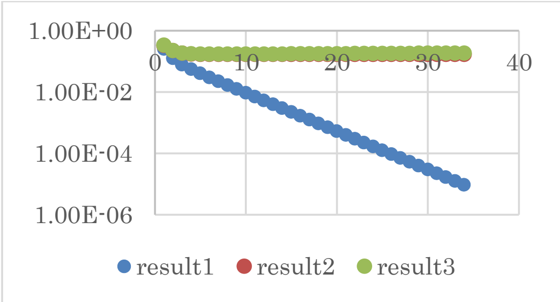


図 2. 最大ノルムの散布図

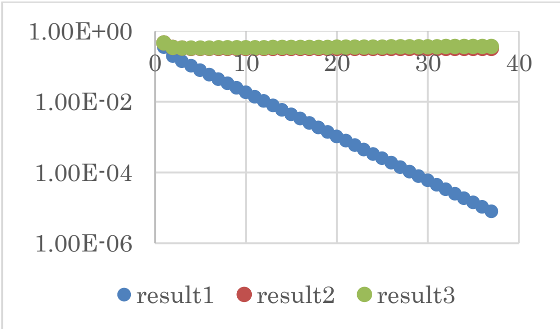


図 3.　2 ノルムの散布図

考察

最大値ノルム、2 ノルムともに A1 は右肩下がりの直線が描画されている。A2 は横に直線、A3 はやや右肩上がりの直線が描画されている。また、この結果は課題 1 でも同じ結果が得られている。そのため収束判定は行われているといえるだろう。

課題 3.

$\mathbf{A}_1$，$\mathbf{A}_2$，$\mathbf{A}_3$ はそれぞれ対角優位であるか判別せよ．

課題 3 の結果

各行列を理論 2 の式に当てはめると、A1 は $\sum |aij| < |aii| \ (i = 1 \sim n)$ の範囲を満たすため、対角優位である。A2, A3 は $\sum |aij| < |aii| \ (i = 1 \sim n)$ の範囲を満たしていないため、対角優位ではない。

考察

課題 1 と比べると収束する行列は対角優位であり、収束しない場合は対角優位ではない。

また、A3 がやや右肩上がりである理由は $|aij| > |aii|$ のためである。$|aij|$ が $|aii|$ から離れるほど収束しにくくなっているといえる。

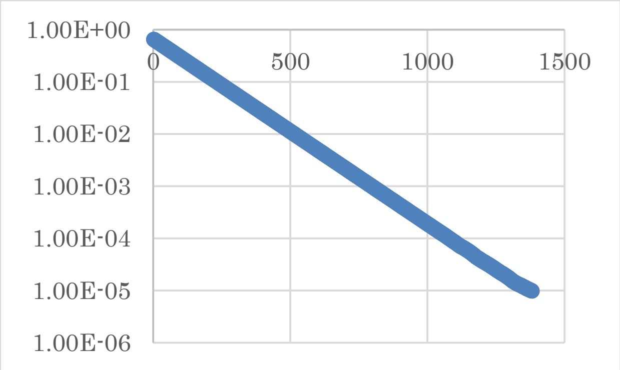
（裏に続く）

課題 4.

$$\mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} 3.1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3.0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3.0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3.0 \end{bmatrix}$$

のときはどうなるか？この行列は対角優位？

課題 4 の結果



繰り返し回数 1381 回で収束した。
解は以下の通り。

```
 x[1] =      0.3200
 x[2] =     -0.1640
 x[3] =      0.3360
 x[4] =     -0.1640
```

しかし$\sum |aij| < |aii|\ (i = 1 \sim n)$の式の範囲に当てはまらないため、対角優位ではない。

考察

対角優位ではないが A4 は収束した。しかし、計算回数が多いため、効率的とは言えない。

したがって対角優位の場合はヤコビ法、そうでない場合は掃き出し法で計算をするとよい。