情報理論

第3回　講義

マルコフ情報源

2015. 4. 29

植松　芳彦

（復習）基礎的な情報源モデル

制約のない情報源

分析

$P_{X_0X_1\cdots X_{n-1}}(0, 0, \cdots, 0, 0)$

$P_{X_0X_1\cdots X_{n-1}}(0, 0, \cdots, 0, 1)$

$\cdots$

$P_{X_0X_1\cdots X_{n-1}}(1, 1, \cdots, 1, 1)$

無限に多くの情報が必要

扱い易い性質を付与

特定の性質を持った情報源

分析

$P_{X_0\cdots X_{n-1}}(0, \cdots, 0)$

$P_{X_0\cdots X_{n-1}}(0, \cdots, 1)$

$\cdots$

$P_{X_0\cdots X_{n-1}}(1, \cdots, 1)$

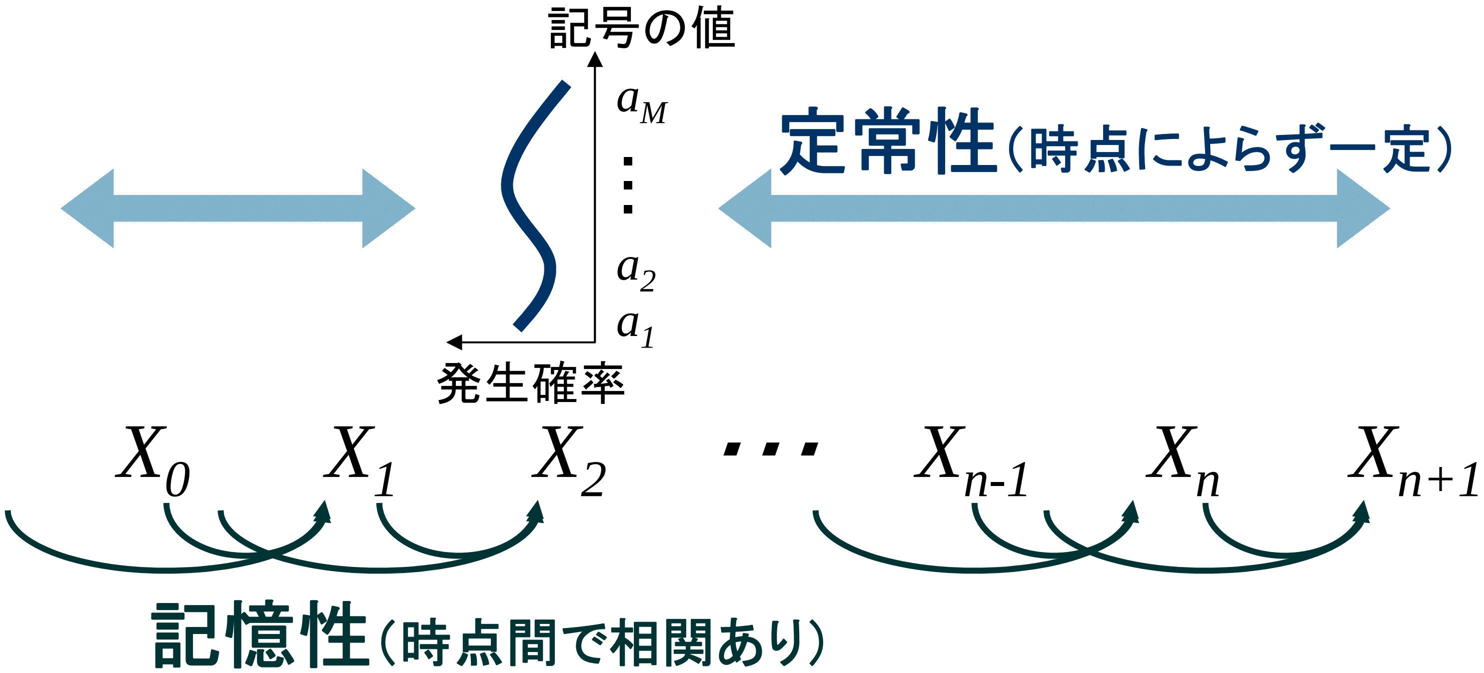
まず有限な情報で分析
制約のない問題の分析に活用

マルコフ情報源

記憶のある定常情報源の1つ

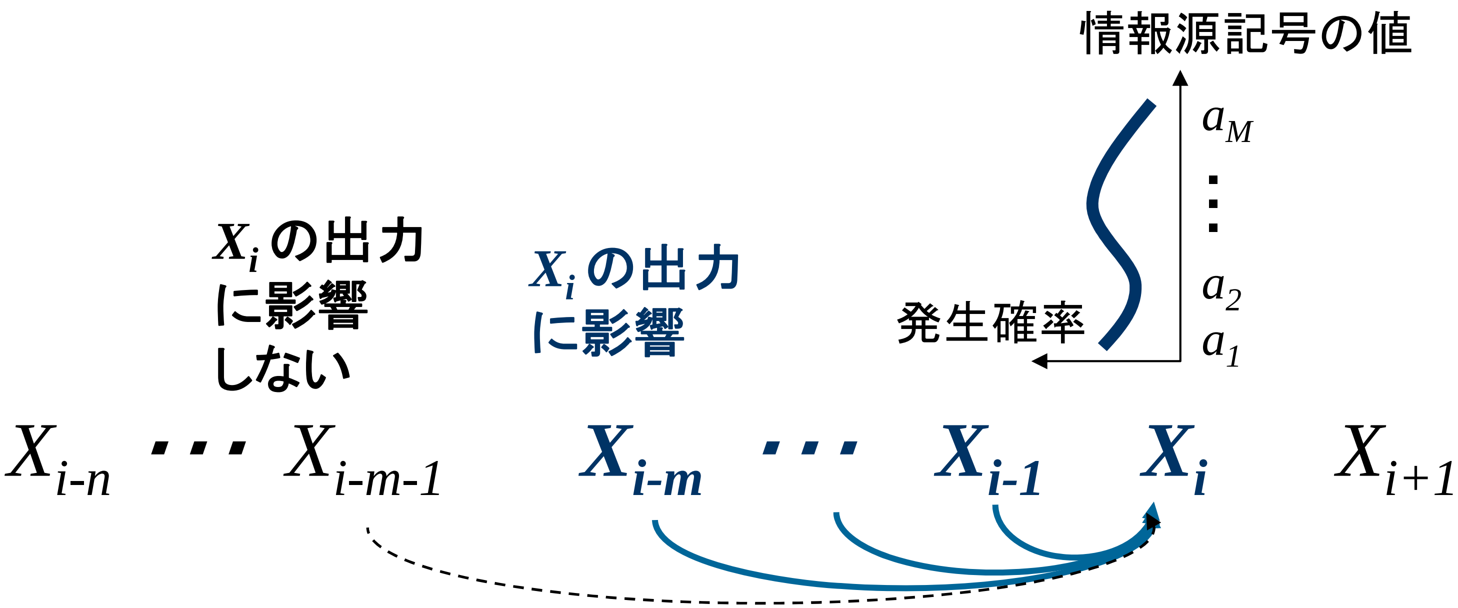
記憶性：各時点で発生する情報源記号が過去の時点で発生する記号に依存

定常性：各時点における各情報源アルファベットの発生確率が一定



マルコフ情報源

1. マルコフ性：各時点の情報源記号の確率分布が過去に出力した有限個の情報源記号に依存
2. m重マルコフ情報源：任意の時点の確率分布が，直前に発生したm個の情報源記号のみで定まる．



マルコフ情報源

３．m重マルコフ情報源の定義を，条件付き確率分布を用いて式で表すと以下のようになる．

$$P_{X_i \mid X_{i-1} \dots X_{i-n}}(x_i \mid x_{i-1}, \cdots, x_{i-n})$$

$$=P_{X_i \mid X_{i-1} \dots X_{i-m}}(x_i \mid x_{i-1}, \cdots, x_{i-m}) \quad (n \geqq m)$$ （式3.20）

簡単なマルコフ情報源

二つの情報源系列:　$X_0\ X_1\ X_2 \cdots$ （出力系列）

$Y_0\ Y_1\ Y_2 \cdots$ （補助）

情報源アルファベット:　$A = \{0, 1\}$

情報源系列間の関係:　$X_i = X_{i-1} \oplus Y_i$ （式3.21）

$\oplus$: 排他的論理和

$0 \oplus 0 = 0$

$0 \oplus 1 = 1$

$1 \oplus 0 = 1$

$1 \oplus 1 = 0$

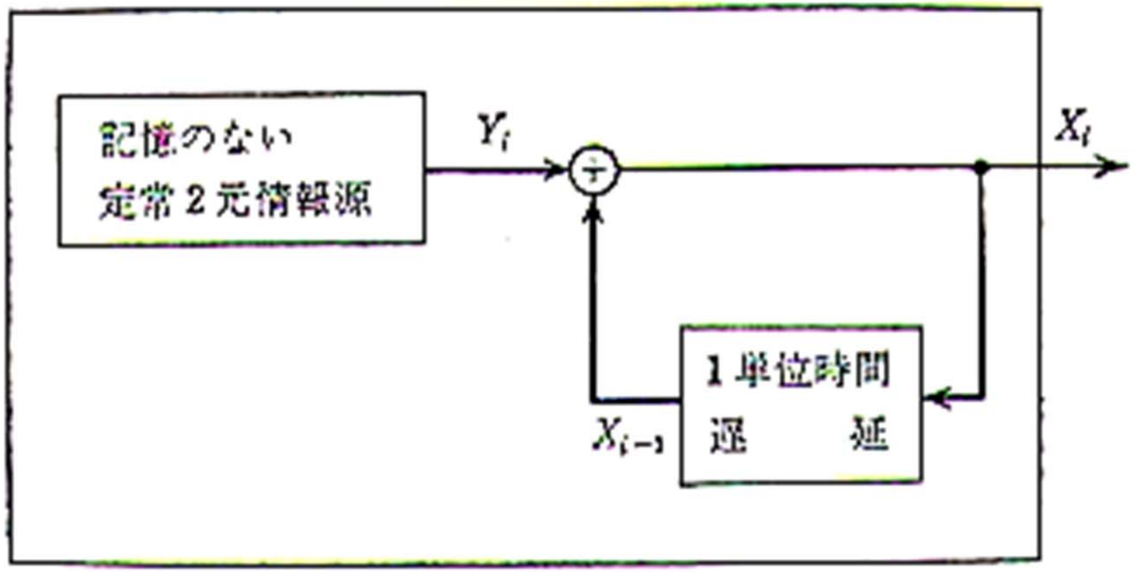


図 3.2　マルコフ情報源の例

簡単なマルコフ情報源

Y_i が記憶のない情報源であって，

$Y_i =$ 1 (確率 p)
0 (確率 $1 - p$)

である時の，出力情報源系列の変化を分析する．
まず，$\boldsymbol{X_{i-1}}$, $\boldsymbol{Y_i}$ の値に対応した $\boldsymbol{X_i}$ の値を求めよう

X_{i-1}, Y_i と X_i の関係

		Y_i	
		0 確率1-p	1 確率p
X_{i-1}	0		
	1		

出力する
X_i の値

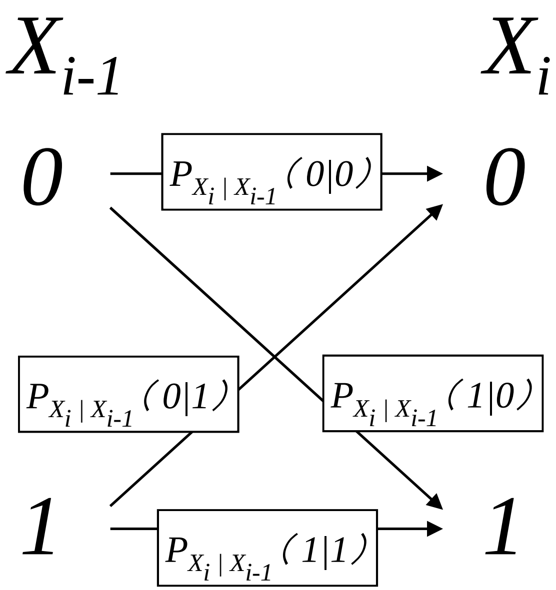
簡単なマルコフ情報源

次にX_{i-1}からX_iへの変化に注目する

各矢印の変化が起きる確率は

X_{i-1}が与えられた時にX_iが発生する「条件付き確率」

各条件付き確率を求めよう



$$P_{X_i|X_{i-1}}(0|0) =$$

$$P_{X_i|X_{i-1}}(0|1) =$$

$$P_{X_i|X_{i-1}}(1|0) =$$

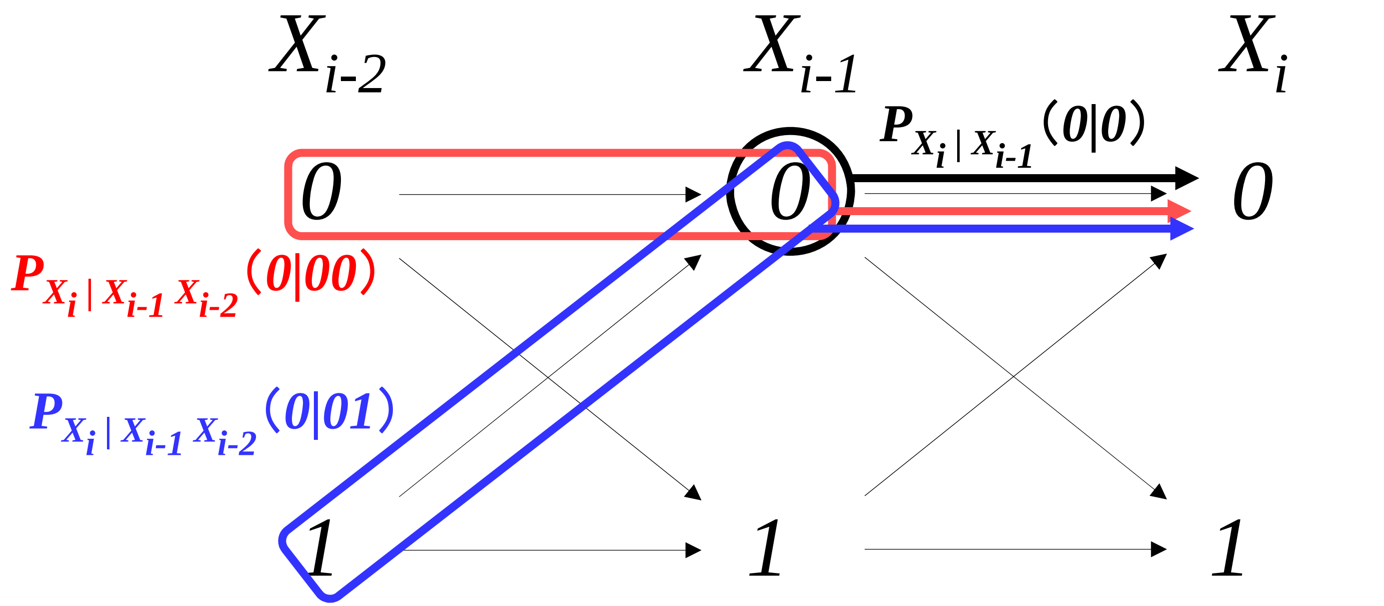
$$P_{X_i|X_{i-1}}(1|1) =$$

簡単なマルコフ情報源

この条件付き確率は X_{i-2} 以前の状態に依存しない

例えば $X_{i-1}=0$ の時，$X_i=0$ となるのは $Y_i=0$の時のみ X_{i-2}の値には依存しない

$$P_{X_i|X_{i-1}X_{i-2}}(0|00)=P_{X_i|X_{i-1}X_{i-2}}(0|01)=P_{X_i|X_{i-1}}(0|0)$$



簡単なマルコフ情報源

任意の情報源アルファベット（今の場合$A=\{0, 1\}$のみ）の組み合わせに対し，

条件付き確率は $X_{i\text{-}2}$ 以前の状態に依存しない

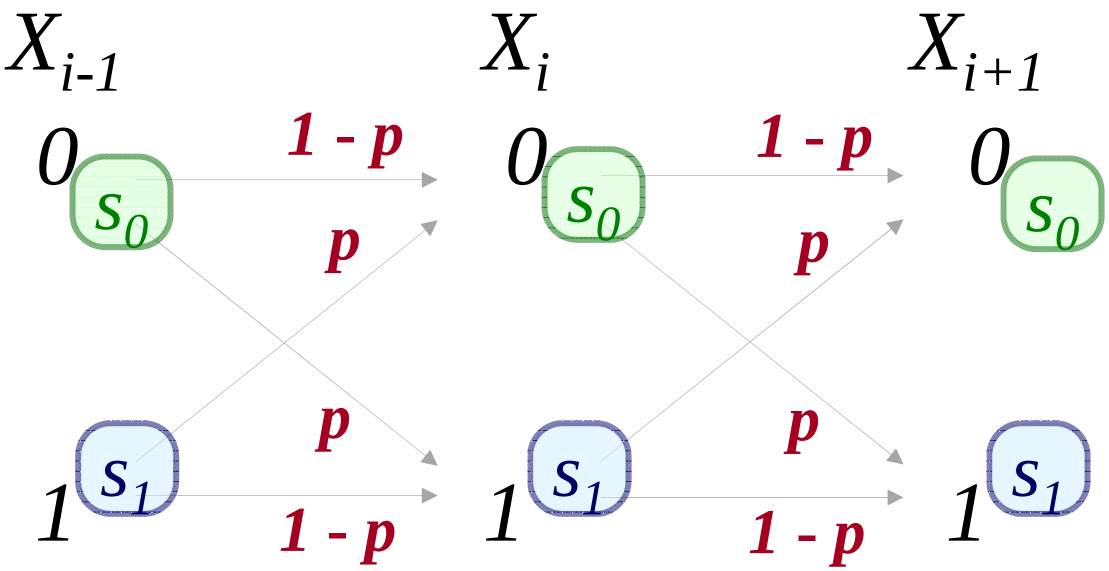
$$\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{X_i}|\boldsymbol{X_{i\text{-}1}}\boldsymbol{X_{i\text{-}2}}}(\boldsymbol{x_i}\,|\,\boldsymbol{x_{i\text{-}1}}\boldsymbol{x_{i\text{-}2}}) = \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{X_i}|\boldsymbol{X_{i\text{-}1}}}(\boldsymbol{x_i}\,|\,\boldsymbol{x_{i\text{-}1}})$$

（式3.20）でm=1とした式に一致

⇒　1重マルコフ情報源（単純マルコフ情報源）

マルコフ情報源と状態遷移

1．単純マルコフ情報源における「状態」と「遷移」



状態s_0：情報源アルファベット*0* を出力した状態

状態s_1：情報源アルファベット*1* を出力した状態

遷移：矢印＝状態の変化（変化の確率がある）

マルコフ情報源と状態遷移

2. 単純マルコフ情報源の状態図

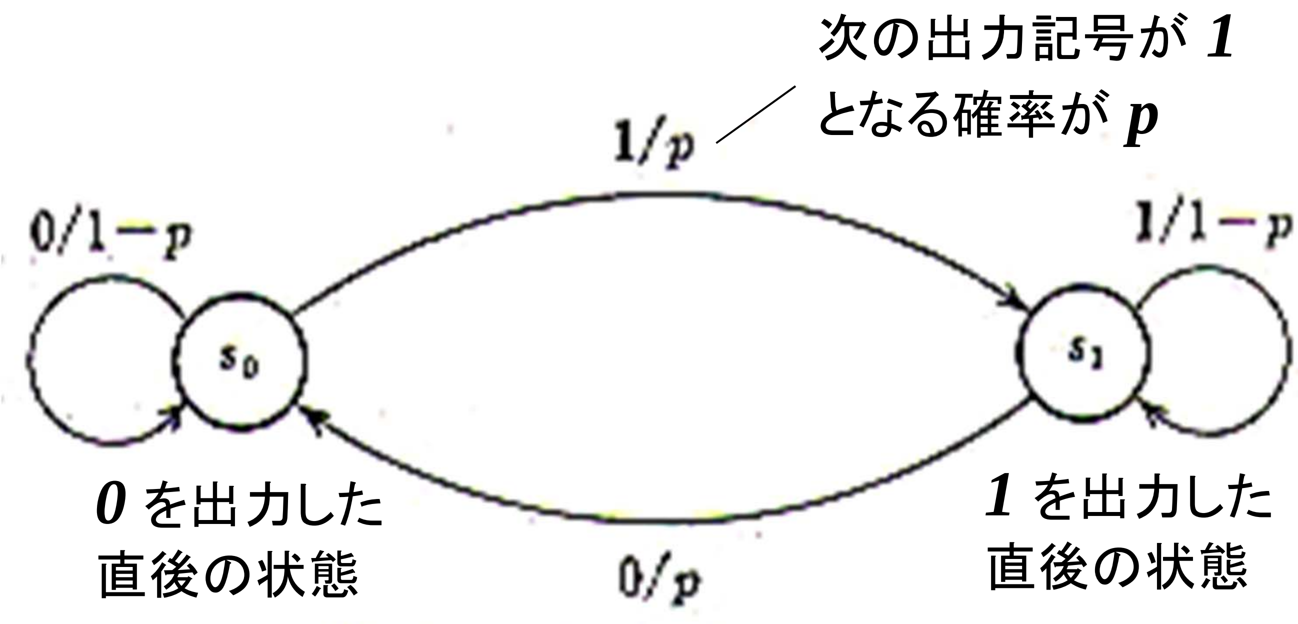
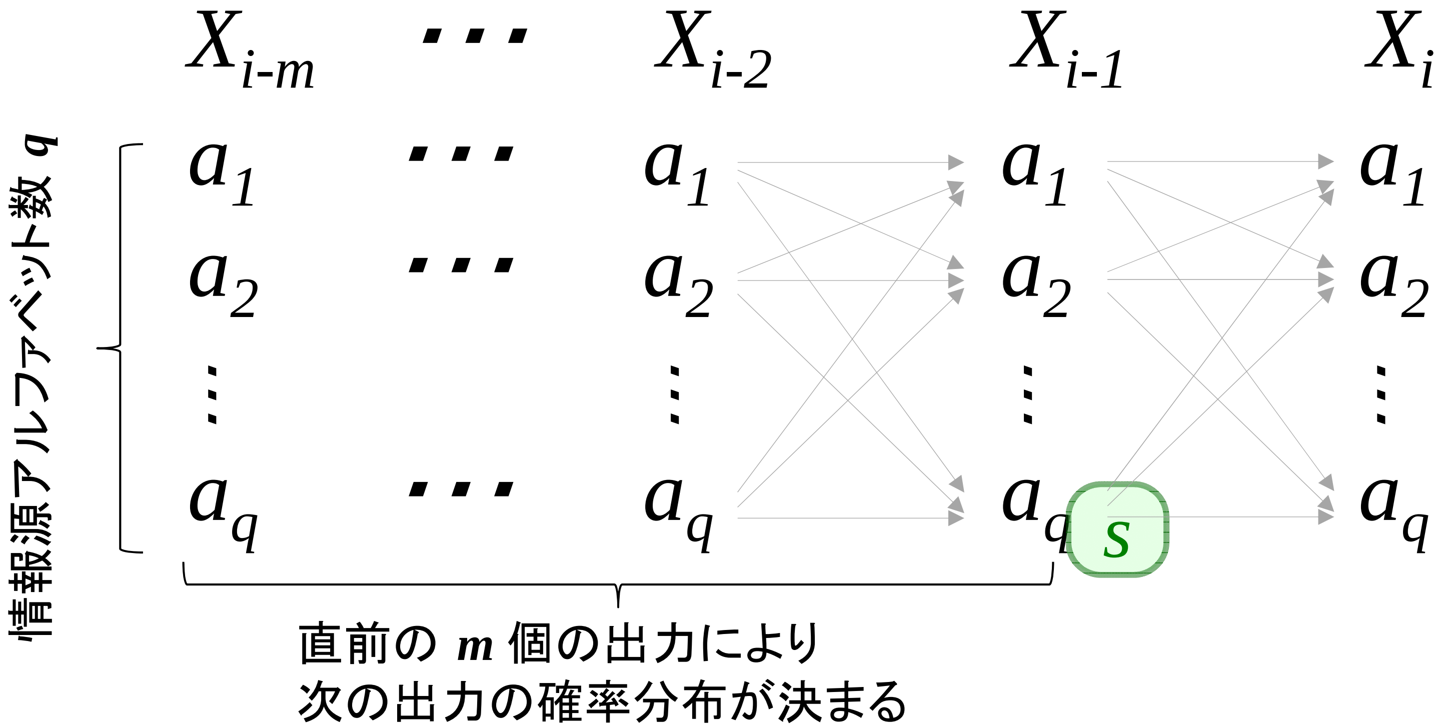


図 3.3 状態図の例

マルコフ情報源と状態遷移

2. m 重 q 元マルコフ情報源の「状態」と「遷移」

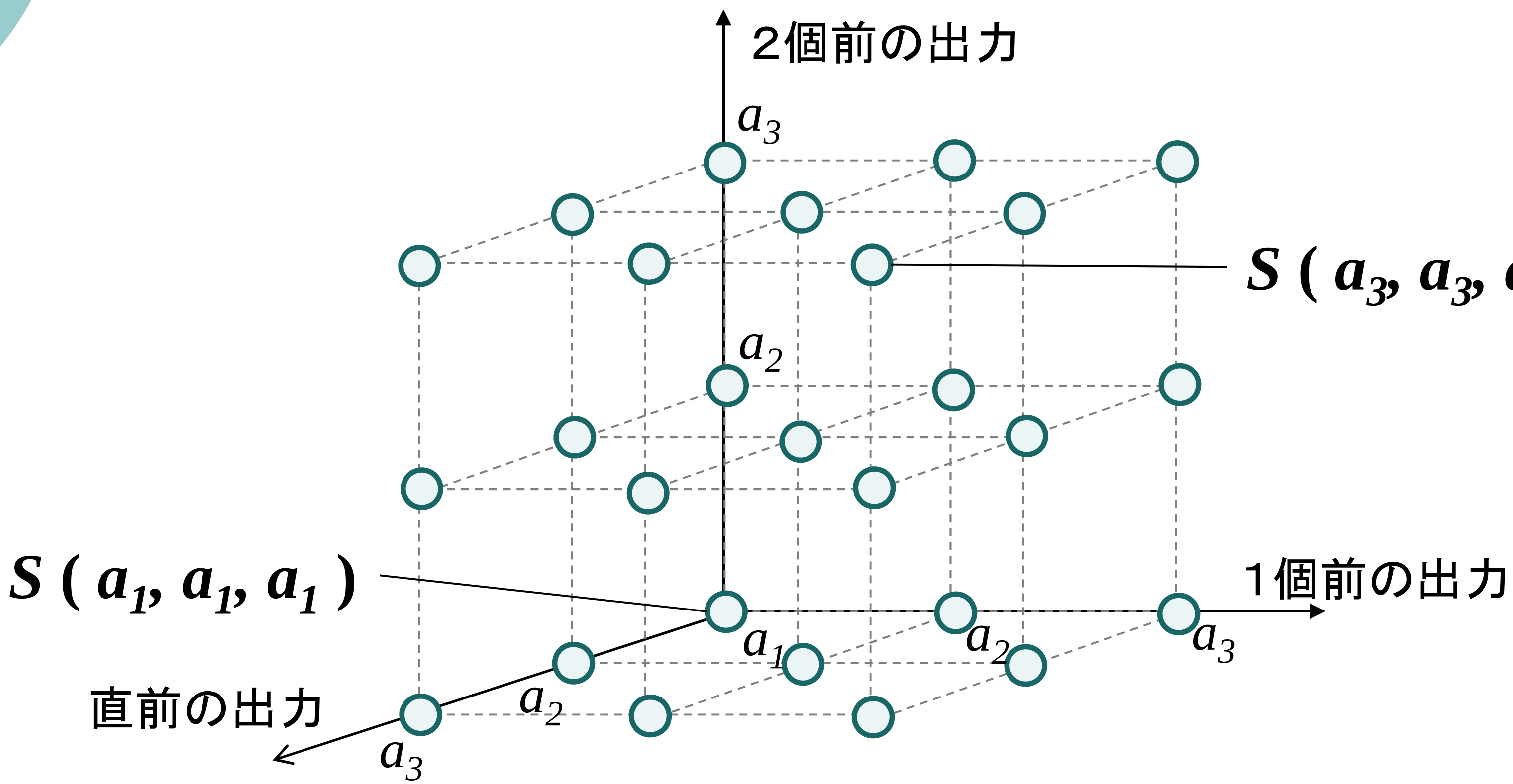


出力の確率分布が異なるとき，それは別の「状態」と定義したい
⇒直前に出力した m 個の記号列毎に応じ q^m 状態が存在

マルコフ情報源と状態遷移

２. m 重 q 元マルコフ情報源の「状態」と「遷移」

m 次元空間上に定義された q^m 個の状態間の遷移



一般化されたマルコフ情報源

１．「状態」の抽象化

直前に出力したm個の記号列毎に状態定義

⇒状態があることだけ定義し，中身を定義しない

２．マルコフ連鎖

状態間の遷移の有無，遷移時の動作，遷移確率を定義

３．m重マルコフ情報源との関係

m 重マルコフ情報源に比べ状態の「あいまい度」が高い

一般化されたマルコフ情報源の例

・状態の数

s0, *s1*, *s2*の3状態のみ

・各状態間の遷移の有無

矢印のみ

・遷移時の動作と遷移確率

例）1 / 0.2＝次に1を出す確率0.2

しか定義していない.

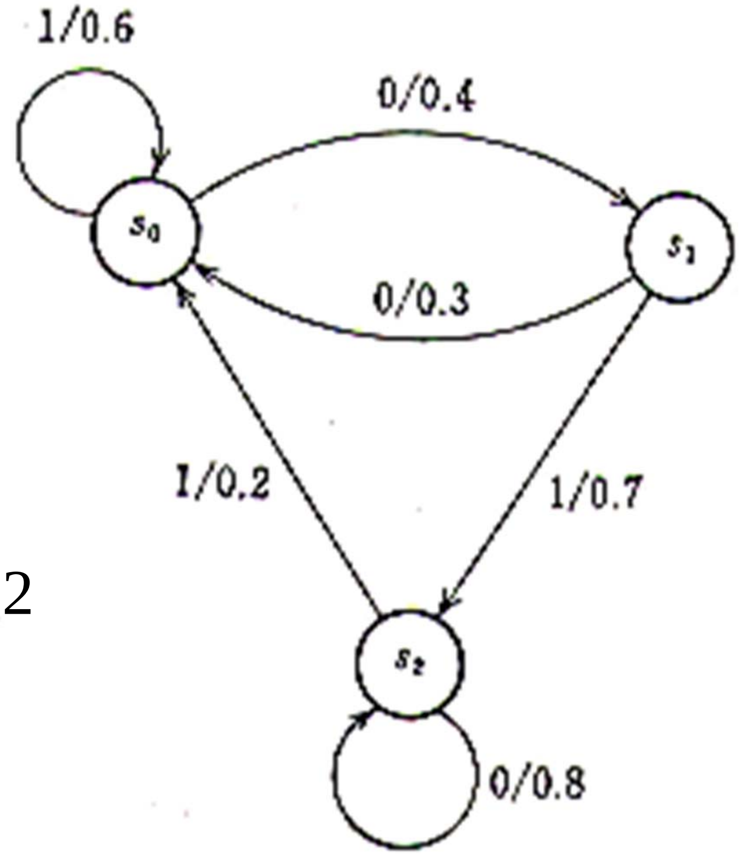


図 3.4 一般化されたマルコフ情報源の状態図

マルコフ情報源の分類

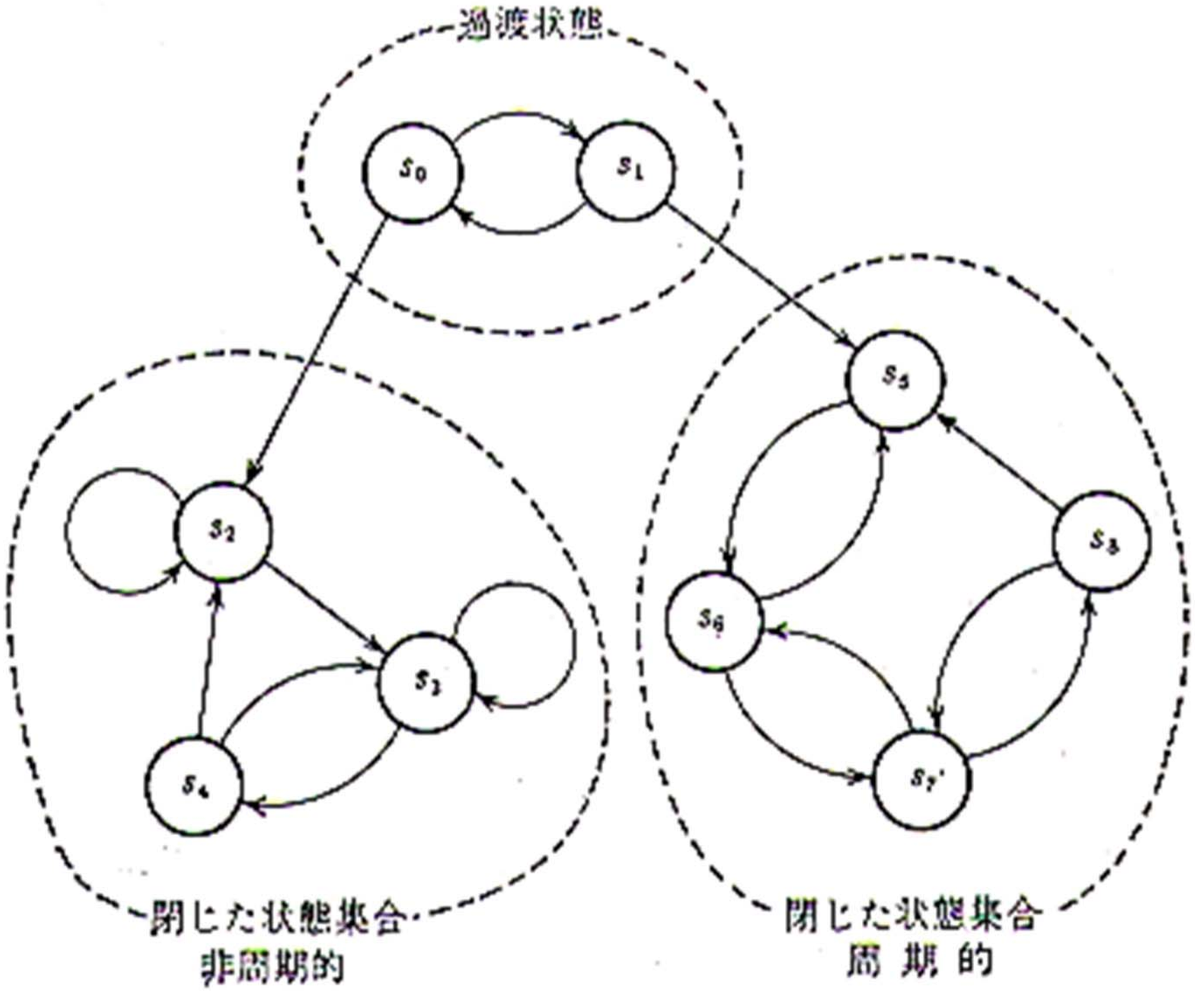


図 3.5 マルコフ情報源の状態の分類

マルコフ情報源の分類

1. 状態集合の離脱性

   過渡状態：ひとたび離脱したら帰還できない

   閉じた状態集合：ひとたび入ったら離脱できない

2. 状態集合の周期性

   非周期的：各時点であらゆる状態に存在しうる

   周期的：各時点で存在しうる状態に制約条件がある

3. 既約マルコフ情報源

   一つの閉じた状態集合に分解されたマルコフ情報源

4. 正規マルコフ情報源

   規約，かつ非周期的なマルコフ情報源