情報理論

第4回　講義

マルコフ情報源

２０１５．５．１３
植松　芳彦

（復習）一般化されたマルコフ情報源

1．「状態」の抽象化

直前に出力したm個の記号列毎に状態定義

⇒状態があることだけ定義し，中身を定義しない

2．マルコフ連鎖

状態間の遷移の有無，遷移時の動作，遷移確率を定義

3．m重マルコフ情報源との関係

m 重マルコフ情報源に比べ状態の「あいまい度」が高い

（復習）一般化されたマルコフ情報源の例

・状態の数

s0, *s1*, *s2*の3状態のみ

・各状態間の遷移の有無

矢印のみ

・遷移時の動作と遷移確率

例）1 / 0.2＝次に1を出す確率0.2

しかか定義していない.

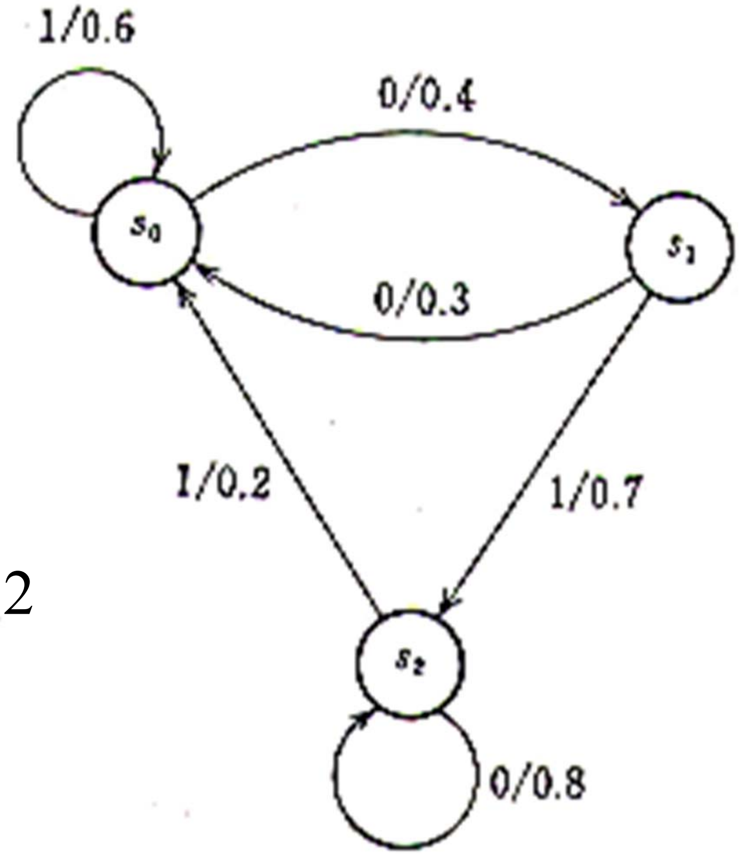


図 3.4 一般化されたマルコフ情報源の状態図

マルコフ情報源の状態遷移確率

- 状態 S_0, S_1, ・・・S_{N-1} からなるマルコフ情報源
- 遷移確率p_{ij} ：状態S_i にある時，次の時点でS_j に遷移する条件付き確率
- 遷移確率行列 Π：p_{ij} を$(i\ ,j\ )$要素とする$N\times N$ 行列

$$\Pi = \begin{pmatrix} p_{00} & \cdots & p_{0,N-1} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{N-1,0} & \cdots & P_{N-1,N-1} \end{pmatrix}$$

各状態を起点として全ての状態に遷移する確率の和は1

マルコフ情報源の状態遷移確率

- 遷移確率行列を実際に求めてみよう

$$
\Pi = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{array} \right) \\ \begin{array}{ccc} S_0 & S_1 & S_2 \end{array} \\ \text{遷移先状態} \end{array}
\begin{array}{c} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ \\ \end{array}
\ \text{遷移元状態}
$$

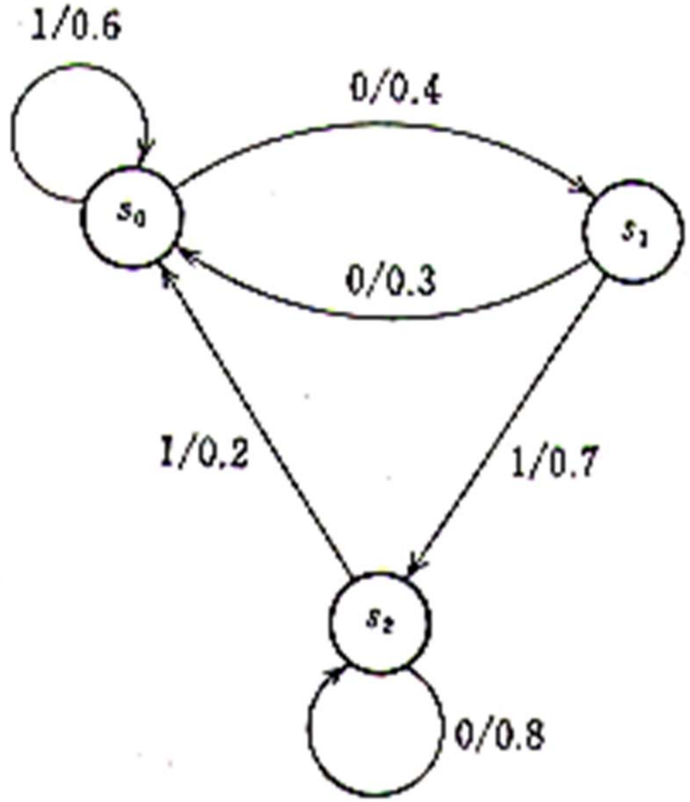


図 3.4 一般化されたマルコフ情報源の状態図

マルコフ情報源の状態遷移確率

- $p_{ij}(t)$ ：状態S_iから出発し，t時点後にS_jに到達する確率
- $\Pi(t)$ ：$p_{ij}(t)$を(i, j)要素とする$N \times N$行列
- 時間の経過に伴う変化

要素表現 $$p_{ij}(t) = \sum_{k=0}^{N-1} p_{ik}(t-1) \cdot p_{kj}$$ （式3.28）

行列表現 $$\Pi(t) = \Pi(t-1) \bullet \Pi$$ （式3.29）

$$= \Pi(t-2) \bullet \Pi^2$$

$$= \Pi(1) \bullet \Pi^{t-1} = \Pi^t$$

乗数であることに注意！

マルコフ情報源の状態遷移確率

- 正規マルコフ情報源の場合，長期的な遷移確率行列はt⇒∞に伴い決まった収束の仕方となる
- 別添のエクセルを参照のこと

$$\lim_{t\to\infty}\Pi(t)=\lim_{t\to\infty}\Pi^t$$

$$=U=\begin{bmatrix} u_0 & \cdots & u_{N-1} \\ \vdots & & \vdots \\ u_0 & \cdots & u_{N-1} \end{bmatrix}$$

（式3.31）
（式3.32）
（式3.33）

全ての行の値の並びが
同一になることに注意！

マルコフ情報源の状態分布

- 時点 t に状態 Sj にいる確率 $\boldsymbol{w_j(t)}$
- 状態分布ベクトル $\boldsymbol{W}(\mathrm{t}) = (\boldsymbol{w_0(t)}, \boldsymbol{w_1(t)}, \cdots, \boldsymbol{w_{N-1}(t)})$
- 時間の経過に伴う変化

要素表現 $$w_j(t) = \sum_{i=0}^{N-1} w_i(t-1) \cdot p_{ij}$$ （式3.35）

行列表現 $$W(t) = W(t-1) \bullet \Pi$$ （式3.36）

$$= W(t-2) \bullet \Pi^{2}$$

$$= W(0) \bullet \Pi^{t}$$ （式3.37）

乗数であること
に注意！

マルコフ情報源の状態分布

- 正規マルコフ情報源の場合，状態分布ベクトルは $t \Rightarrow \infty$ に伴い（極限分布），初期値に依らない決まった分布に収束

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} W(t) &= W(0)\cdot\lim_{t\to\infty}\Pi^t = W(0)\cdot U \\
&= \begin{bmatrix} w_0(0) & \cdots & w_{N-1}(0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_0 & \cdots & u_{N-1} \\ \vdots & & \vdots \\ u_0 & \cdots & u_{N-1} \end{bmatrix} \qquad \text{（式3.38）} \\
&= \begin{bmatrix} u_0 & \cdots & u_{N-1} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

初期分布 $W(0)$ に依存しない

遷移確率分布のみで決まることに注意！

マルコフ情報源の状態分布

- 初期値がどうあれ，状態分布はやがて定常的な確率分布に落ち着く
- 定常分布 $\boldsymbol{W} = (\boldsymbol{w_0}, \boldsymbol{w_1}, \cdots, \boldsymbol{w_{N-1}})$ に関わる条件を利用して効率的に $\boldsymbol{W}$ を求める（変数N個，式N個）
  - ある時点で状態分布が$\boldsymbol{W}$なら次の時点も$\boldsymbol{W}$

$$W = W \cdot \Pi \qquad \text{（式3.41）}$$

$$\left[w_0, \cdots w_{N-1}\right] = \left[w_0, \cdots w_{N-1}\right] \cdot \begin{bmatrix} p_{00} & \cdots & p_{0,N-1} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{N-1,0} & \cdots & P_{N-1,N-1} \end{bmatrix}$$

  - 各状態の状態分布の和は$\boldsymbol{1}$

$$w_0 + w_1 + \cdots + w_{N-1} = 1 \qquad \text{（式3.40）}$$

【演習1】 状態分布を求める

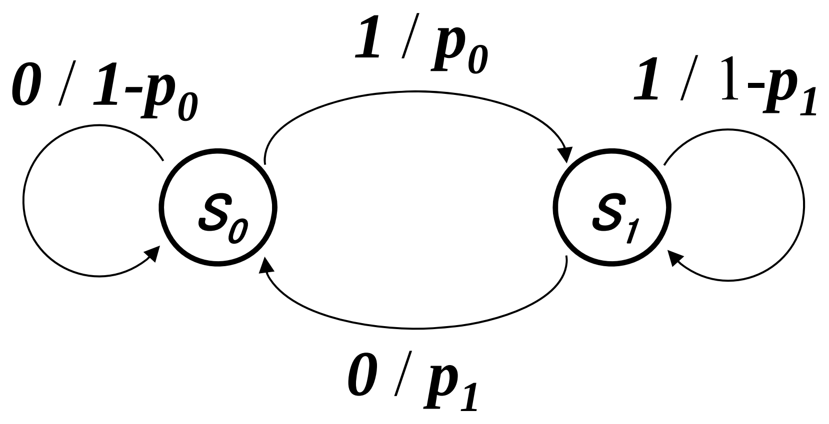
- 下記状態図において，状態S_0, S_1に存在する定常確率分布W =(w_0, w_1)を求める.

[立式]

$$[w_0 \quad w_1] = [w_0 \quad w_1] \cdot \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{bmatrix}$$

$$w_0 + w_1 = 1$$

[計算]



【演習2】 状態分布を求める

- 下記状態図において，状態S_0, S_1 , S_2に存在する定常確率分布W =(w_0, w_1 , w_1)を求める.

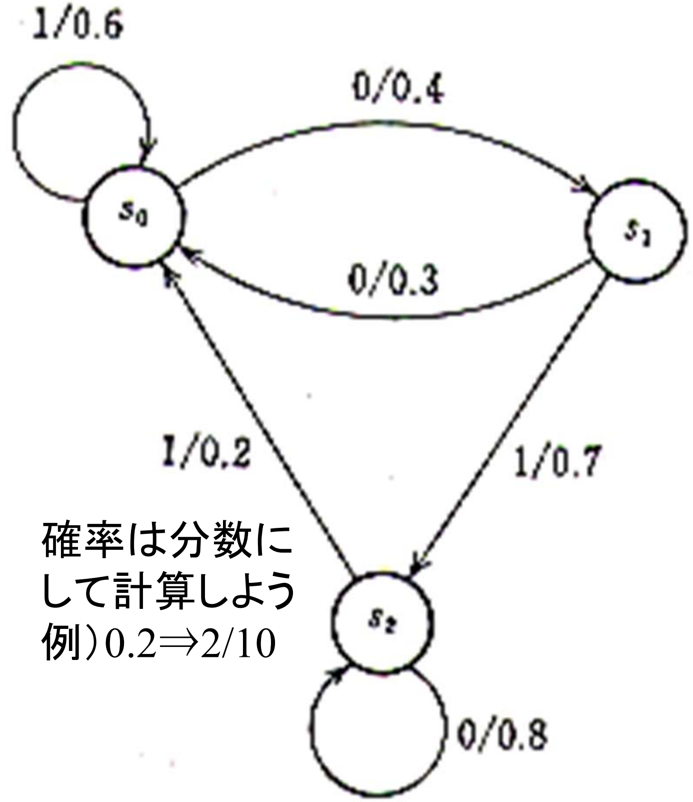


図 3.4 一般化されたマルコフ情報源の状態図

確率は分数にして計算しよう
例）0.2⇒2/10

[立式]

$$
\begin{bmatrix} w_0 & w_1 & w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_0 & w_1 & w_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}
$$

$$
w_0 + w_1 + w_2 = 1
$$

[計算]

【演習3】以前の公務員試験問題

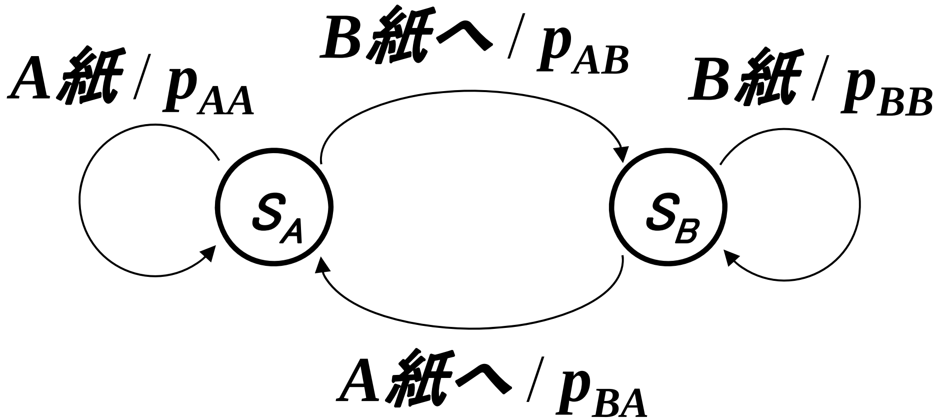
ある地域では、どの家庭もA紙又はB紙を購読しており、最近の調査で次のことが明らかになった。

・ある月にA紙を購読していた家庭の85％はその翌月もA紙を購読し、残り15％は翌月B紙を購読する。
・ある月にB紙を購読していた家庭の75％はその翌月もB紙を購読し、残り25％は翌月A紙を購読する

この状態が長期間続いたとき、その地域におけるA紙の占有率はいくらになるか？

【演習3】以前の公務員試験問題(考え方)

- 各家庭がA紙／B紙を選択する判断は独立とし，ある1家庭がA紙／B紙を選択している状態をS_A，S_Bとして状態図を書いてみる．その上で状態をS_A，S_Bに存在する確率w_A，w_Bを求める．



[立式]

$$\begin{bmatrix} w_A & w_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_A & w_B \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_{AA} & p_{AB} \\ p_{BA} & p_{BB} \end{bmatrix}$$

$$w_A + w_B = 1$$

[計算]