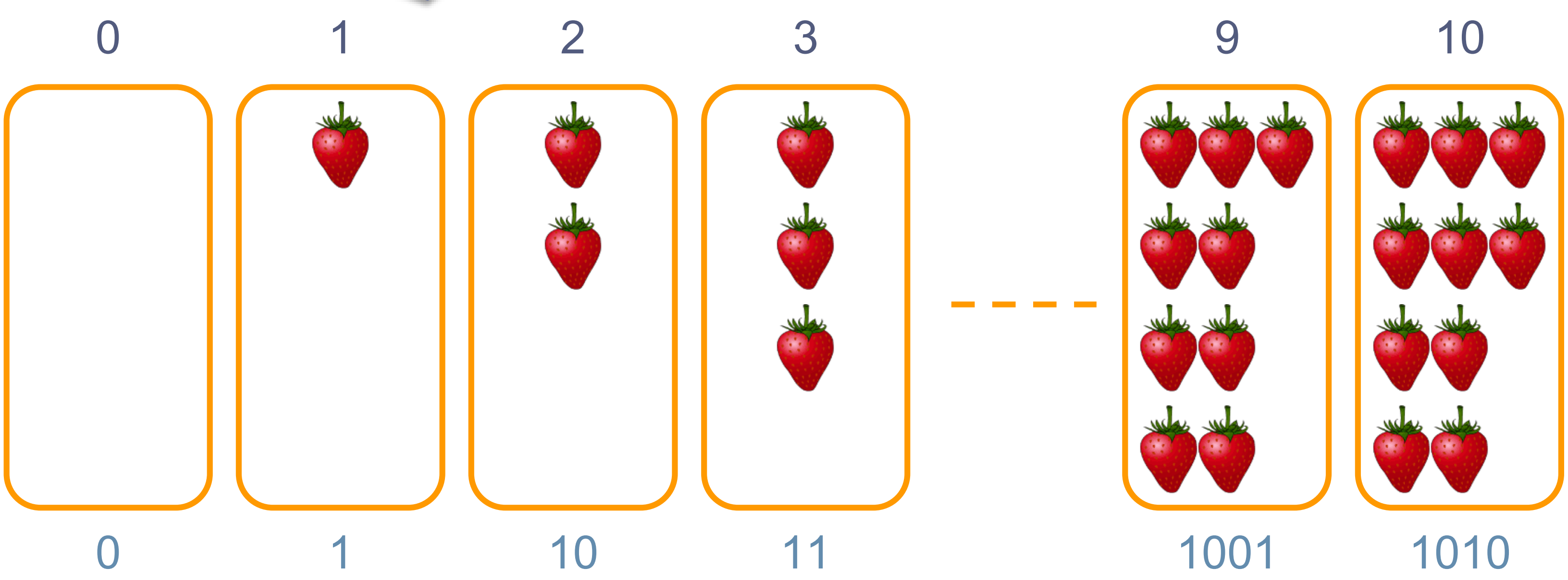
基数変換

数の表現

「0,1,2,3,4,5,6,7,8,9」の10種類の
記号を用いて数を表してみる.



「0,1」の2種類の
記号を用いて数を表してみる.

数には,
複数の表記方法がある.

r進数，基数，桁数

- r進数
  - r種類の記号で表記した数をr進数という.

【例】
  - 10種類のアラビア数字(0, 1, ・・・, 9)で表記した数：10進数

- 基数
  - r進数で数を表記するときの r を基数という.

【例】
  - 10進数で数を表記するときの基数：10

- 桁数
  - 数を数字で表記するとき，その数字の個数を桁数という.

【例】
  - 2005：4桁

10進数

- 10進数
  - 「0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9」の10種類の数字を用いる表記法である.
  - 人間が日常生活で使用している.

【例】

- $(2005)_{10}$

本講義では,【例】に示したような表記を用いて,
基数を明確に表現することにする.

2進数

- 2進数
  - 「0, 1」の2種類の数字を用いる表記法である.
  - コンピュータが内部で使用している.

【例】

- $(0101)_2$

16進数

- 16進数
  - 「 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9」の10種類の数字と,
    「A, B, C, D, E, F（または a, b, c, d, e, f ）」の6種類の英字を用いる表記法である.
  - 人間がコンピュータ内部の数値を参照する場合，2進数の代わりに,
    16進数を用いることが多い.
    （2進数は桁数が多く，直観的な理解も困難なため）

【例】

- $(2D)_{16}$

10進数，2進数，16進数の関係

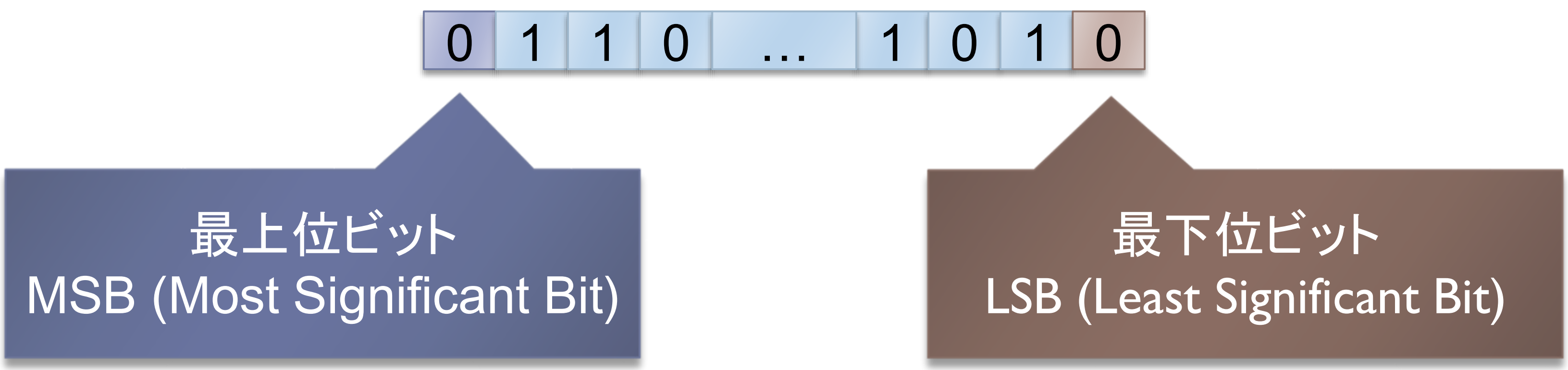
10進数	2進数	16進数
0	0000 0000	00
1	0000 0001	01
2	0000 0010	02
3	0000 0011	03
4	0000 0100	04
5	0000 0101	05
6	0000 0110	06
7	0000 0111	07
8	0000 1000	08
9	0000 1001	09
10	0000 1010	0A
11	0000 1011	0B
12	0000 1100	0C
13	0000 1101	0D
14	0000 1110	0E
15	0000 1111	0F
16	0001 0000	10
…	…	…

2進数4ビットを
16進数1桁で表記できる.

コンピュータにおける容量の単位

- 情報の容量の単位
  - ビット (bit)
    - 1個の2進数，2進数1桁
      【例】 1, 0
  - バイト (byte, B)
    - 1バイト＝8ビット
      【例】 10011101
  - ワード (word)
    - コンピュータ内部における容量の基本単位としてあらかじめ決めておくサイズ．コンピュータアーキテクチャによって異なる.
    - 1ワード＝4バイト（＝32ビット）
      【例】 10001001 10101011 11001101 11101111

最上位ビット，最下位ビット



整数の10進数表現

- 整数の10進数表現
  - 10進数で,

    $(a_3\, a_2\, a_1\, a_0)_{10}$

    と表現された値は,

    $a_3 \times 10^3 + a_2 \times 10^2 + a_1 \times 10^1 + a_0 \times 10^0$

    である.

【例】

- $(2008)_{10}$は

  $2 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 8 \times 10^0 = 2008$

  である.

実数の10進数表現

- 実数の10進数表現
  - 10進数で,

    $(a_3\, a_2\, a_1\, a_0\, .a_{-1}\, a_{-2})_{10}$

    と表現された値は,

    $a_3 \times 10^3 + a_2 \times 10^2 + a_1 \times 10^1 + a_0 \times 10^0 + a_{-1} \times 10^{-1} + a_{-2} \times 10^{-2}$

    である.

【例】

- $(2008.15)_{10}$は

  $2 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 8 \times 10^0 + 1 \times 10^{-1} + 5 \times 10^{-2} = 2008.15$

  である.

整数のr進数表現

- 整数のr進数表現
  - r進数

    $(a_{n-1} \cdots a_1 \ a_0)_r$

    として表現された整数の値は,

    $a_{n-1} \times r^{n-1} + \cdots + a_1 \times r^1 + a_0 \times r^0$

    である.

【例】

- 2進数

    $(1011)_2$

    として表現された整数の値は,

    $1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 8 + 0 + 2 + 1 = 11$

    である.

実数のr進数表現

- 実数のr進数表現
  - r進数

    $(a_{n-1} \cdots a_1\, a_0 \,.\, a_{-1} \cdots a_{-m})_r$

    として表現された実数の値は,

    $a_{n-1} \times r^{n-1} + \cdots + a_1 \times r^1 + a_0 \times r^0 + a_{-1} \times r^{-1} + \cdots + a_{-m} \times r^{-m}$

    である.

【例】

- 2進数

  $(10.11)_2$

  として表現された実数の値は,

  $1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 + 1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} = 2 + 0 + 0.5 + 0.25 = 2.75$

  である.

基数変換

- 基数変換
  - r進数を，同じ数値を持つs進数（r≠s）に変換することを，基数変換という.

r進数から10進数への変換

- 実数のr進数表現
  - r進数

    $(a_{n-1} \cdots a_1 a_0 . a_{-1} \cdots a_{-m})_r$

    として表現された実数の値は,

    $a_{n-1} \times r^{n-1} + \cdots + a_1 \times r^1 + a_0 \times r^0 + a_{-1} \times r^{-1} + \cdots + a_{-m} \times r^{-m}$

    である.

説明済み

【例】

- 2進数

  $(10.11)_2$

  として表現された実数の値は,

  $1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 + 1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} = 2 + 0 + 0.5 + 0.25 = 2.75$

  である.

10進数からr進数への変換（整数部）

- 10進数からr進数への変換（整数部）

r進数

$(a_{n-1} \cdots a_1 a_0)_r$

として表現された整数の値を$(N)_{10}$とすると，

$N = a_{n-1} \times r^{n-1} + \cdots + a_1 \times r^1 + a_0 \times r^0$ (1)

である．式(1)を変形すると，

$N = (a_{n-1} \times r^{n-2} + \cdots + a_1 \times r^0) \times r + a_0$ (2)

となる．式(2)は，Nをrで割ったときの商が

$a_{n-1} \times r^{n-2} + \cdots + a_1 \times r^0$ (3)

で，余りがa_0であることを示している．さらに，式(3)を変形すると

$(a_{n-1} \times r^{n-3} + \cdots + a_2 \times r^0) \times r + a_1$

となり，式(3)をrで割ったときの余りがa_1であることを示している．

このrによる除算を繰り返すことによって，r進数表現の

$a_0\ a_1 \cdots a_{n-1}$

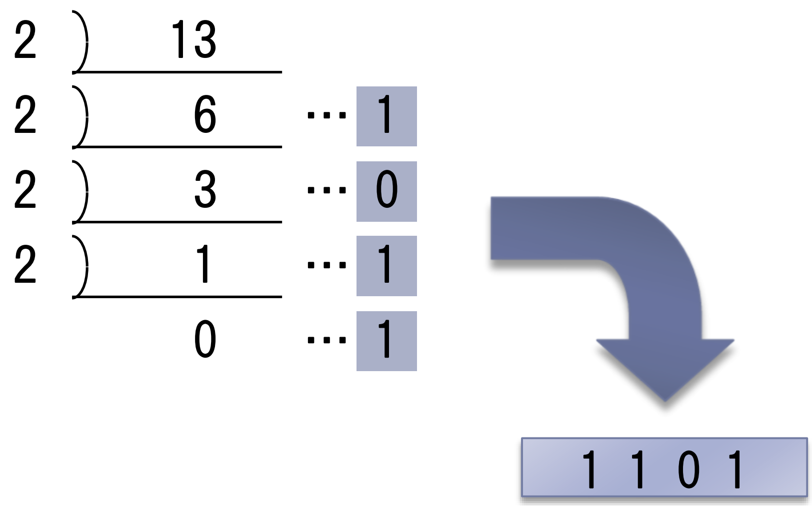
がこの順で（最下位から最上位へと）求まる．

10進数からr進数への変換（整数部）例

- r=2の場合，すなわち10進数から2進数への変換（整数部）は，2による除算の繰り返しにより実現できる．

【例】

- $(13)_{10}$を2進数へ変換



10進数からr進数への変換（小数部）

- 10進数からr進数への変換（小数部）

r進数

$$(0 . a_{-1} a_{-2} \cdots a_{-m})_r$$

として表現された小数の値を$(M)_{10}$とすると，

$$M = a_{-1} \times r^{-1} + a_{-2} \times r^{-2} + \cdots + a_{-m} \times r^{-m} \qquad (1)$$

である．式(1)の両辺にrをかけると，

$$M \times r = a_{-1} + a_{-2} \times r^{-1} + \cdots + a_{-m} \times r^{-(m-1)} \qquad (2)$$

となる．式(2)は，Mにrをかけて得た値の整数部がa_{-1}で，小数部が

$$a_{-2} \times r^{-1} + \cdots + a_{-m} \times r^{-(m-1)} \qquad (3)$$

であることを示している．さらに，式(3)にrをかけると，

$$a_{-2} + a_{-3} \times r^{-1} + \cdots + a_{-m} \times r^{-(m-2)}$$

となり，式(3)にrをかけて得た値の整数部がa_{-2}であることを示している．
このrによる乗算を繰り返すことによって，r進数表現の

$$a_{-1} a_{-2} \cdots a_{-m}$$

がこの順で（小数点以下第1位から下位へと）求まる．

10進数からr進数への変換（小数部）例1

- r=2の場合，すなわち10進数から2進数への変換(小数部)は，2による乗算の繰り返しにより実現できる．

【例】

- $(0.5625)_{10}$を2進数へ変換

0. 5625　×2 ＝ 1. 125

0. 125　×2 ＝ 0. 25

0. 25　×2 ＝ 0. 5

0. 5　×2 ＝ 1. 0

終了

0. 1001

10進数からr進数への変換（小数部）例2

- r=2の場合，すなわち10進数から2進数への変換（小数部）において，有限個の数字列で表現できない場合がある．

【例】

- $(0.3)_{10}$を2進数へ変換

0. 3	×2	=	0. 6
0. 6	×2	=	1. 2
0. 2	×2	=	0. 4
0. 4	×2	=	0. 8
0. 8	×2	=	1. 6

0. 01001…

コンピュータの内部では，数値を，有限の桁数で表現する必要がある．
そのため，数値によっては，基数変換後の数表現が持つ値は，基数変換前の数表現が持つ値と，同じ値にはならない．

演習問題

- 問題1
  - 2進数$(00011011)_2$を10進数に変換せよ.
- 問題2
  - 16進数$(0D3B)_{16}$を10進数に変換せよ.
- 問題3
  - 10進数$(95)_{10}$を2進数に変換せよ.
- 問題4
  - 10進数$(95)_{10}$を16進数に変換せよ.
- 問題5
  - 2進数$(00011011.1001)_2$を10進数に変換せよ.
- 問題6
  - 10進数$(95.6875)_{10}$を2進数に変換せよ.

第5章　演算アーキテクチャ

5.1.2　負の数の表現

整数の表現

- 整数の表現
  - 符号-絶対値表現
  - 補数表現
    - 1の補数表現
    - 2の補数表現

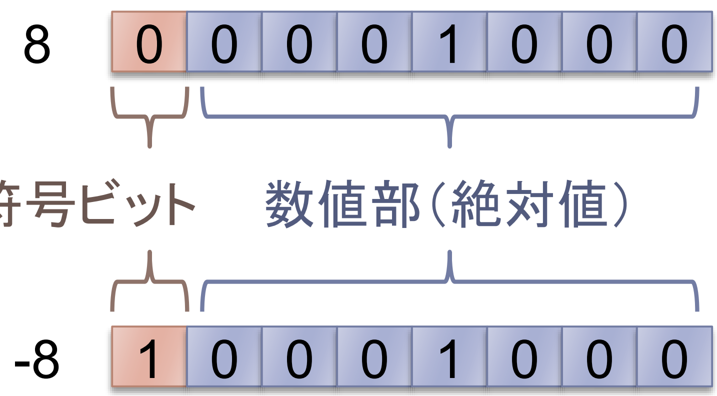
（次ページ以降，詳細に説明する．）

符号-絶対値表現

- 符号-絶対値表現
  - 符号ビットと数値部(絶対値)により構成される.
  - 最上位ビットを符号ビットとし，正数の場合には｢0｣，負数の場合には｢1｣として表す.
  - 残りのビットを数値部とし，数値の絶対値を表す.

【例】

- $(8)_{10}$と $(-8)_{10}$



1の補数表現

- 1の補数表現
  - 定義
    - 2進数で表現された正数Nの，符号桁を含めた各桁を，それぞれ1から減算することによって得られる数表現をN’とするとき，N’をNの「1の補数表現」といい，N’は負数 -Nを表す．
    - また，負数 -Nの「1の補数表現」は，正数Nを表す．
    - なお，最上位ビットが「0」ならば正数，最上位ビットが「1」ならば負数である．

1の補数表現（例）

【例】

- $(8)_{10}$と $(-8)_{10}$

8	0	0	0	0	1	0	0	0
-8	1	1	1	1	0	1	1	1

互いに
1の補数の関係

実際には,
各ビットを反転すれば
1の補数が得られる.

2の補数表現

- 2の補数表現
  - 定義
    - n桁の整数を持つNの2の補数表現N”は，負数 -Nを表現しており，以下のような関係を持つ．

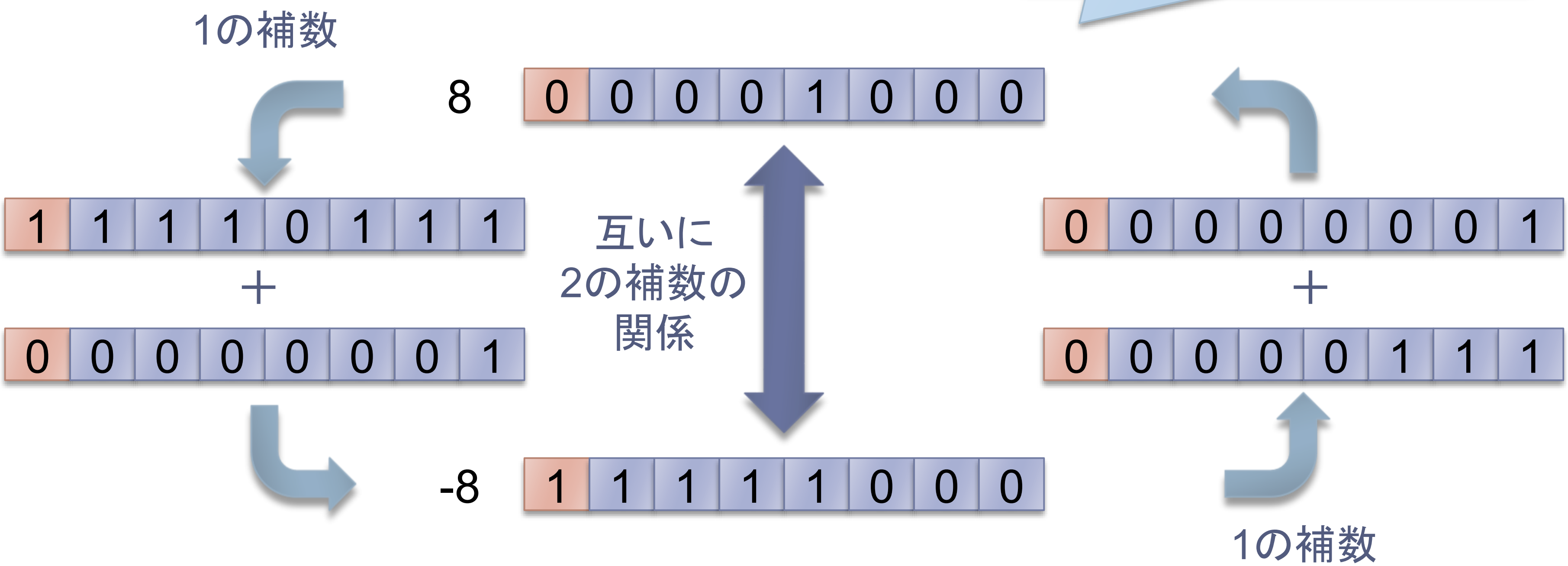
      $N+N'' = 2^n$
    - また，負数 -Nの2の補数表現は，正数Nを表す．
    - なお，最上位ビットが「0」ならば正数，最上位ビットが「1」ならば負数である．

2の補数表現（例）

【例】

- $(8)_{10}$と $(-8)_{10}$

実際には，各ビットを反転し，
最下位ビットに1を加えれば，
2の補数が得られる．
（次ページ参照）



2の補数表現（補足説明）

- n桁の2進数で表現されたNと，その1の補数N'において，各桁の和をとると，

  $$N+N' = 1\times 2^{n-1} + \cdots + 1\times 2^{1} + 1\times 2^{0}$$
  $$= 2^{n} - 1$$

  となる．
- 一方，Nと，その2の補数表現N"は，

  $$N+N" = 2^{n}$$

  という関係を持つ．
- よって

  $$N" = 2^{n} - N = 2^{n} - (-N' + 2^{n} - 1) = N'+1$$

  である．

まず，各ビットを反転して1の補数を求め，
その後，最下位ビットに1を加えれば，
2の補数が得られる．

符号-絶対値表現，2の補数表現

n桁で2進表現された整数Nの
2の補数により表現できる範囲
$-2^{n-1} \leqq N \leqq 2^{n-1}-1$

2進表現	10進数値 （符号–絶対値表現）	10進数値 （2の補数表現）
1111	−7	−1
1110	−6	−2
1101	−5	−3
1100	−4	−4
1011	−3	−5
1010	−2	−6
1001	−1	−7
1000	−0	−8
0111	+7	+7
0110	+6	+6
0101	+5	+5
0100	+4	+4
0011	+3	+3
0010	+2	+2
0001	+1	+1
0000	+0	0

演習問題

- 問題7
  - $(00101011)_2$の1の補数を求めよ.
- 問題8
  - $(00101011)_2$の2の補数を求めよ.
- 問題9
  - 1バイトの2進整数が表現できる10進数の範囲を示せ.
    ここで，2進整数は，2の補数表現を用いるものとする.
- 問題10
  - 4バイトの2進整数が表現できる10進数の範囲を示せ.
    ここで，2進整数は，2の補数表現を用いるものとする.