No.

Date

048

840 − 48 = 792

792

972 − 279 = 693

693

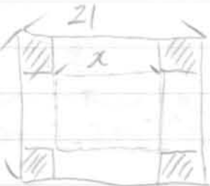
963 − 369 = 594

594

954 − 459 = 495

495

954 − 459 = 495



底面の正方形の1辺を x cm

高さは $\frac{1}{2}(24-x)$ cm

容積 y cm³

$$\begin{array}{r} 21 \\ 21 \\ \hline 21 \\ 42 \\ \hline 441 \end{array}$$

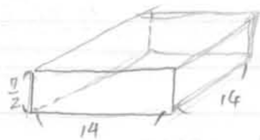
$$y = x^2 \times \frac{1}{2}(21 - x)$$

$$= \frac{21}{2}x^2 - \frac{x^3}{2}$$

$$y' = -\frac{3}{2}x^2 + 21x$$

$$= -\frac{3}{2}x(x-14)$$

$x = 0, 14$ 最大値 → 14



$$y = 14^2 \times \frac{1}{2}(21-14)$$

$$= 196 \times \frac{7}{2}$$

$$= 98 \times 7$$

$$= 686$$

宿題

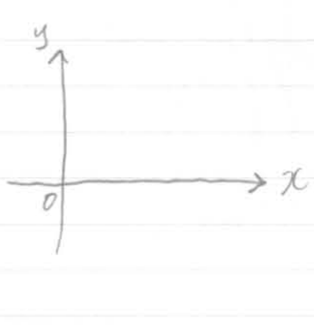
10l の水そうから毎秒 0.5l ずつ水が流れでる。x 秒後に水そうに残った水の量を y l とする

① $x = 0$ のとき y の値（初期値）はいくらか A. $x=0$ $y = 10 - 0.5x$ $y = 10l$

② x を1変化させたときの y の変化量はいくらか A. x を1変化 $f(1) = 10 - 0.5x = 9.5l$

③ 関数の式を求めよ

④ 関数のグラフを書け



x	0	1	2	3	4
y	10	9.5	9	8.5	8

1 1

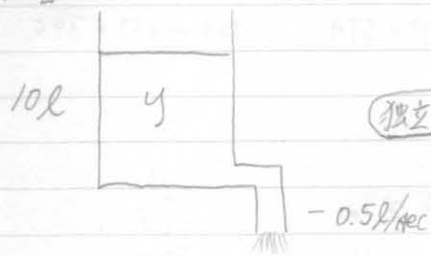
−0.5

$$y = -0.5x + 10$$

No.

Date . .

宿題解答



xの変化量	1	1	1	1	
独立変数 x	0	1	2	3	4
yの変化量	−0.5	−0.5	−0.5	−0.5	
従属変数 y	10	9.8	9	8.5	8

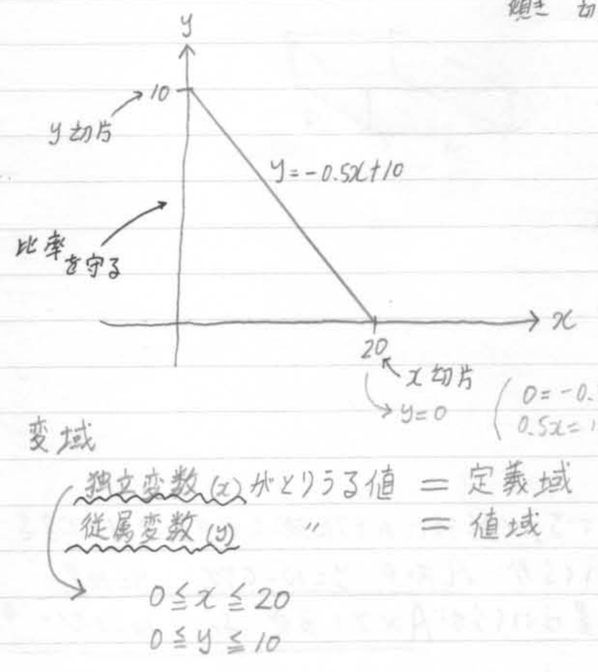
(じゅうぞく)

① 初期値10ℓ

② 変化量（変化の割合）−0.5ℓ

③ 関数式 $y=-0.5x+10$ $\quad y=\underset{\text{傾き}}{a}x+\underset{\text{切片}}{b}$

④ グラフ



$\left(\begin{array}{l} 0=-0.5x+10 \\ 0.5x=10 \quad x=20 \end{array}\right)$

変域

独立変数(x)がとりうる値 ＝ 定義域

従属変数(y) 〃 ＝ 値域

$0 \leqq x \leqq 20$

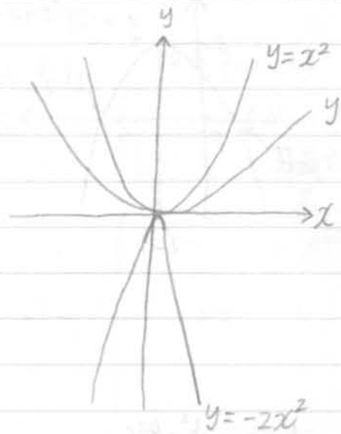
$0 \leqq y \leqq 10$

No.
Date

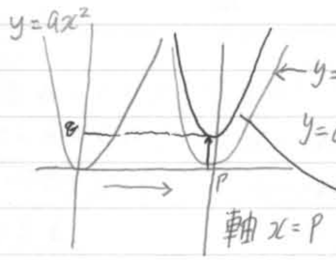
2次関数

2次関数のグラフを書く

① $y=x^2$　② $y=-2x^2$　③ $y=\frac{1}{2}x^2$



(2) $y=a(x-p)^2+q$ のグラフ



$y=a(x-p)^2$ のグラフ

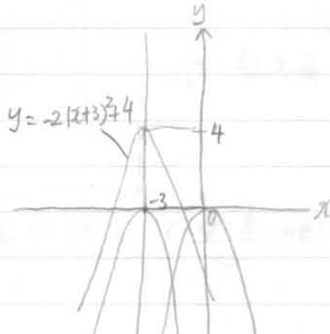
$y=ax^2$ のグラフを x 軸方向に p 平行移動

$y=a(x-p)^2$ のグラフを y 軸方向に q 平行移動

P44 例題1-8

$y=-2x^2$ x 軸方向に -3, y 軸方向に4平行移動

軸，頂点の座標



〔解〕 $y=a(x-p)^2+q$

$p=-3$　$q=4$ を代入

$y=-2\{x-(-3)\}^2+4$

$=-2(x+3)^2+4$

軸：$x=-3$　頂点 $(-3,4)$

x 切片　$y=0$ を代入

$0=-2(x+3)^2+4$

$2(x+3)^2=4$

$(x+3)^2=2$

$x+3=\pm\sqrt{2}$　$\therefore x=-3\pm\sqrt{2}$

(3) $y=ax^2+bx+c$ のグラフ

$\longrightarrow$ (2)の形に変形する(平方完成)

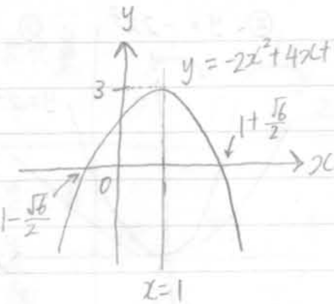
P46 例題1-9

$y=-2x^2+4x+1$ のグラフ, 軸, 頂点

$$\left.\begin{aligned} y &= -2(x^2-2x)+1 \\ &= -2\{(x-1)^2-1\}+1 \end{aligned}\right\}\text{平方完成}$$

$$= -2(x-1)^2+2+1$$

$$= -2(x-1)^2+3$$



軸 $x=1$

頂点 $(1,3)$

x切片 $0=-2(x-1)^2+3$

$2(x-1)^2=3$

$(x-1)^2=\frac{3}{2}$

$x-1=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$

$=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$

$x=1\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$

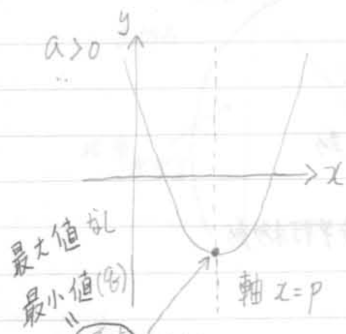
2次関数の最大値, 最小値

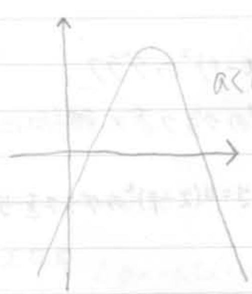
$y=ax^2+bx+c$

$=a(x-p)^2+q$

$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$

$a>0$





(1) 軸 $x=-\frac{b}{2a}$

頂点 $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$

最小値 $-\frac{b^2-4ac}{4a}$. 最大値 なし

(2) $a<0$ のとき

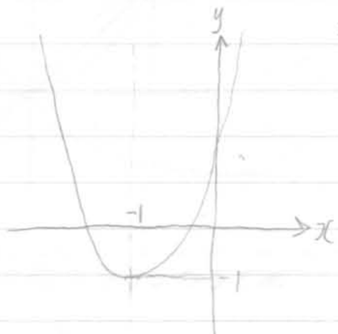
最小値 なし. 最大値 $-\frac{b^2-4ac}{4a}$

(例) $y=2x^2+4x+1$ の最大値, 最小値を求めよ

平方完成 → グラフ → 軸, 頂点, x軸との交点を求める

$y=2(x+1)^2-1$

軸の方程式 $x=-1$　頂点 $(-1,1)$



xが-1のとき

最大値　なし

最小値　-1

交点 $\left(\frac{-2+\sqrt{2}}{2},\ 0\right)$

$\left(\frac{-2-\sqrt{2}}{2},\ 0\right)$

$\boxed{\text{解の公式}\quad \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$

$\frac{-4\pm\sqrt{16-8}}{4}=\frac{-4\pm\sqrt{8}}{4}=\frac{\cancel{-4}^{\,2}\pm\cancel{2}\sqrt{2}}{\cancel{4}\,2}$

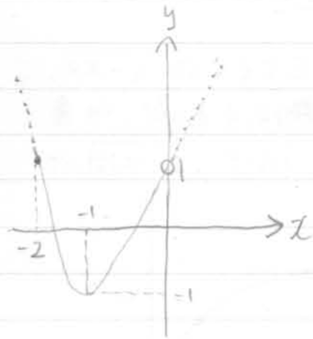
変位がつくとどうなるか? 最大値 最小値は?

(1) $-2\leqq x<0$　$x=-2$のとき 最大値 1　$x=1$のとき 最小値 -1

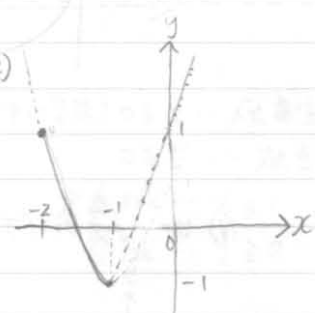
(2) $-2\leqq x\leqq -1$　$x=-2$のとき 最大値 1　$x=-1$のとき 最小値 -1

(3) $0\leqq x$　最大値なし　$x=0$のとき 最小値 1

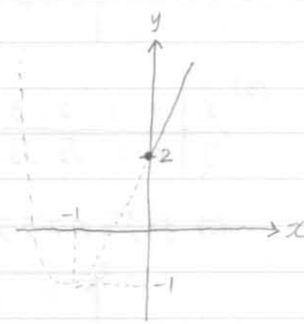
(1)



(2)



(3)



解の公式に代入して交点が求まる

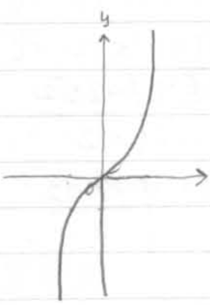
No.

Date

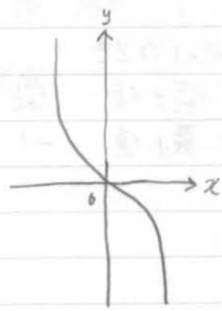
いろいろな関数とグラフ

1. 3次関数

(1) $y=x^3$ のグラフ



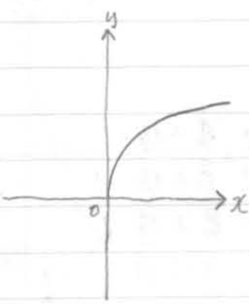
(2) $y=-x^3$ のグラフ



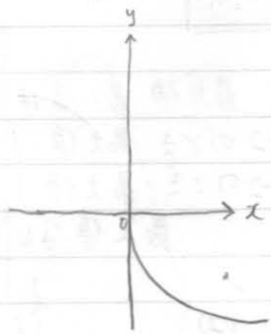
2. 無理関数

$\boxed{\text{無理式}}$ … 根号の中に文字を含む式

(3) $y=\sqrt{x}$ のグラフ



(4) $y=-\sqrt{x}$ のグラフ



(4) $x \geqq 0$ … 定義域
$y \leqq 0$ … 値域

(3)

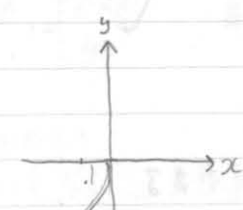
x	0	1	2	3	4
y	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2

(3)
定義域 … $x \geqq 0$（根号の中は正の数）
値域 … $y \geqq 0$

(5) $y=\sqrt{-x}$ のグラフ

定義域 … $x \leqq 0$
値域 … $y \geqq 0$

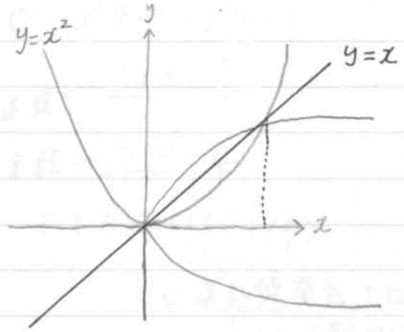
(6) $y=-\sqrt{-x}$ のグラフ



定義域 … $x \leqq 0$
値域 … $y \leqq 0$

No.
Date

$y=x^2$ のグラフとの関係 ―――― 手順

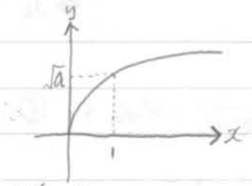


① y と x をとりかえる $x=y^2$
② この式を y について解く $y^2=x$
$y=\pm\sqrt{x}$
つまり $\boxed{y=\sqrt{x}}$ と $\boxed{y=-\sqrt{x}}$

まとめ

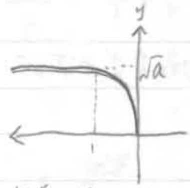
Ⅰ $y=\sqrt{ax}$ のグラフのまとめ

(1) $a>0$ のとき



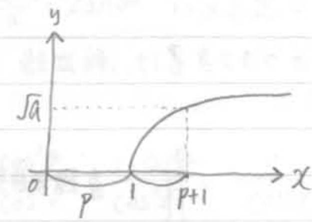
定義域 $x\geqq 0$
値域 $y\geqq 0$
増加関数

(2) $a<0$ のとき

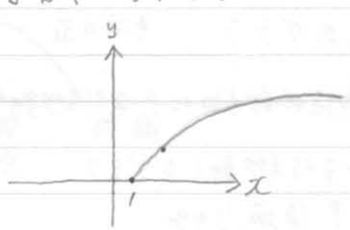


定義域 $x\leqq 0$
値域 $y\geqq 0$
減少関数

Ⅱ $y=\sqrt{a(x-p)}$ のグラフは $y=\sqrt{ax}$ のグラフを x 軸方向に p だけ平行移動したもの



(例) $y=\sqrt{2x-2}$ のグラフを書け
定義域,値域を求めよ
$y=\sqrt{2(x-1)}$, $y=\sqrt{2x}$



定義域… $x\geqq 1$
値域… $y\geqq 0$

逆関数

y の値を定めると x の値がただ一つ定まるとき x は y の関数である。これを $x=g(y)$ と書く。
ここで y と x を入れかえた関数 $y=g(x)$ を $y=f(x)$ の逆関数といい $f^{-1}(x)$ で表わす。

(1) $y=\sqrt{x}$ の逆関数を求める

① x と y を入れかえる　$x \geqq 0$

$x=\sqrt{y}$　　$y \geqq 0$

② y について解く

$y = x^2 \ (x \geqq 0)$

(2) $y=x^2$ の逆関数

$y=1$ のとき $x=\pm1$。つまり x の値が一つに定まらないので逆関数はない

→ ただし $x \geqq 0$ のときは逆関数は存在し $y=\sqrt{x}$ になる

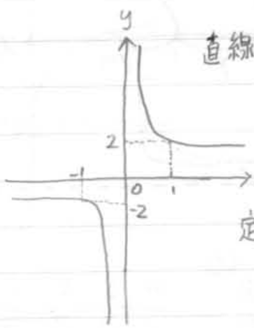
3. 分数関数

$y=\frac{2}{x}$, $y=\frac{2x+5}{x+1}$ のような関数

(1) $y=\frac{2}{x}$ のグラフを書け. 漸近線. 定義域. 値域を求めよ。

(2) $y=-\frac{2}{x}$　〃　〃　〃　〃

(1)



直線双曲線

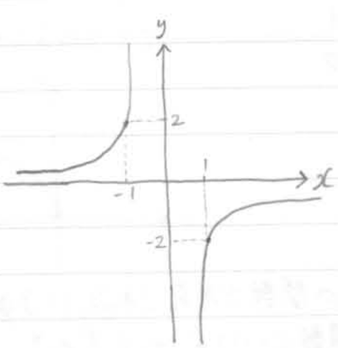
漸近線 $x=0$

$y=0$

定義域 $x \neq 0$

値域 $y \neq 0$

(2)



$y=\frac{a}{x-p}+q$ のグラフ

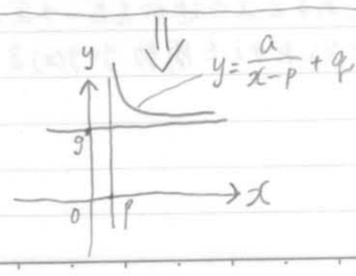
$y=\frac{a}{x}$ のグラフを x 軸方向に p 平行移動し

y 軸方向に q 平行移動したグラフ

定義域 $x \neq p$ 値域 $y \neq q$

漸近線 $x=p$. $y=q$

⇓



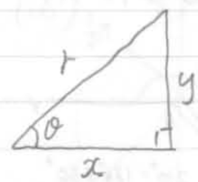
三角比・三角関数

○ 三角比の基本性質

① $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

正弦 — $\sin\theta = \frac{y}{r}$

余弦 — $\cos\theta = \frac{x}{r}$



三平方の定理
$x^2 + y^2 = r^2$

よって 左辺 $= \left(\frac{y}{r}\right)^2 + \left(\frac{x}{r}\right)^2$

$= \frac{y^2+x^2}{r^2} \xrightarrow[\text{三平方の定理}]{} \frac{\cancel{r^2}}{\cancel{r^2}} = 1 =$ 右辺　∴ 左辺 = 右辺

② $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

正接

∵ 右辺 $= \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \frac{y}{r} \div \frac{x}{r} = \frac{y}{\cancel{r}} \times \frac{\cancel{r}}{x} = \frac{y}{x} = \tan\theta$　∴ 右辺 = 左辺

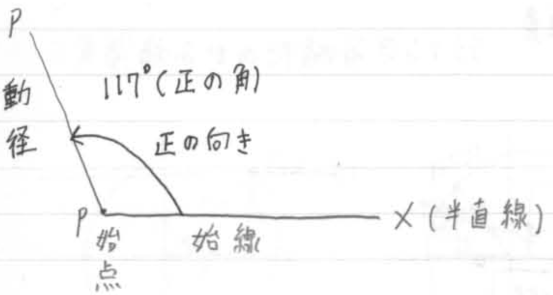
③ $1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$

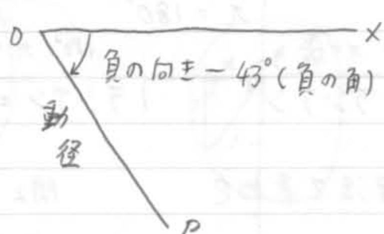
∵ 左辺 $1 + \tan^2\theta = 1 + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = 1 + \frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta} =$ 右辺

○ 三角関数

1. 角の拡張

A. 一般角 --- 回転の向きと大きさを表わした角のこと

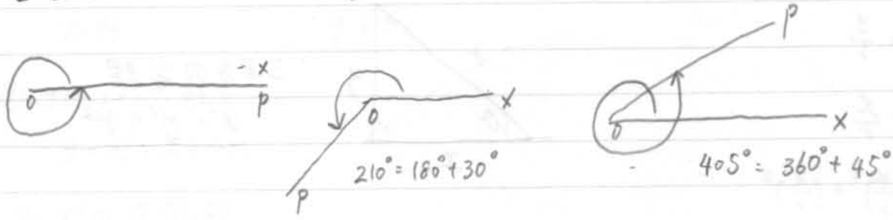




No.
Date

問題　次の角を表わす動径を示せ

①　360°　　②　210°　　③　405°



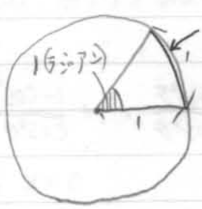
まとめ

動径 oP と始線 ox のなす角の1つを α とすると動径の oP の表わす角は　$\alpha + 360° \times n$ である

B　弧度法

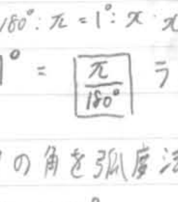
その前に…　30°, 405° ⟶ 60分法度数法という

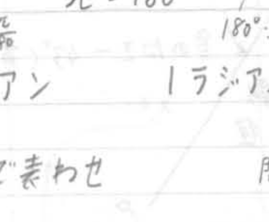
⟶ 弧を使った角の測り方



定義　1ラジアン(1弧度)

⟶ 半径1の円において半径と同じ長さ1の弧に対する中心角の大きさ





※注意　ラジアンを省略するのがふつう

$\pi = 180°$

$180° : \pi = 1° : x$　$x = \frac{\pi}{180}$　　$180° : \pi = x : 1$　$x = \frac{180}{\pi}$

$1° = \boxed{\frac{\pi}{180°}}$ ラジアン　　1ラジアン $= \boxed{\frac{180}{\pi}}°$

問1　次の角を弧度法で表わせ

(1)　210°

$210 \times \frac{\pi}{180} = \frac{7}{6}\pi$

(2)　30°　$= \frac{\pi}{6}$

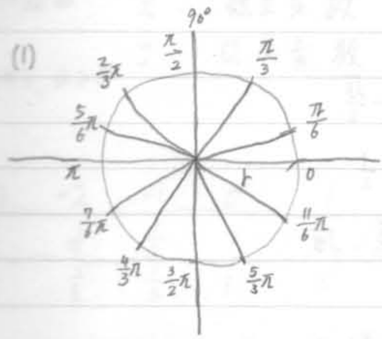
問2　次の角を度数法で表わせ

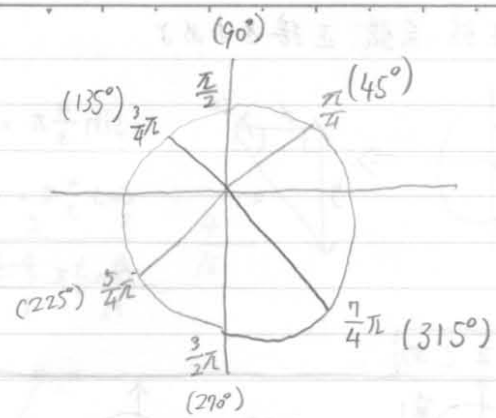
(1)　$\frac{\pi}{4} = 45°$

(2)　$\frac{2}{3}\pi = 120°$

[illegible]

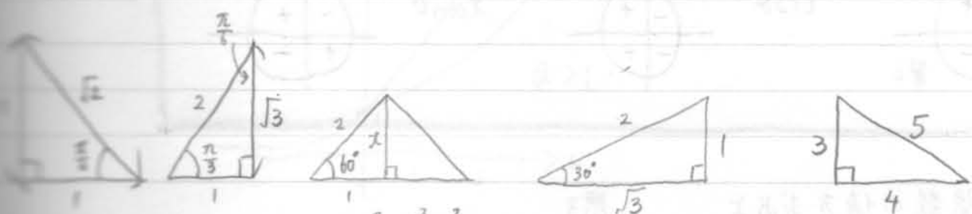
(1)





180

よくある直角三角形



$1^2 + x^2 = 2^2$

$x^2 = 3$

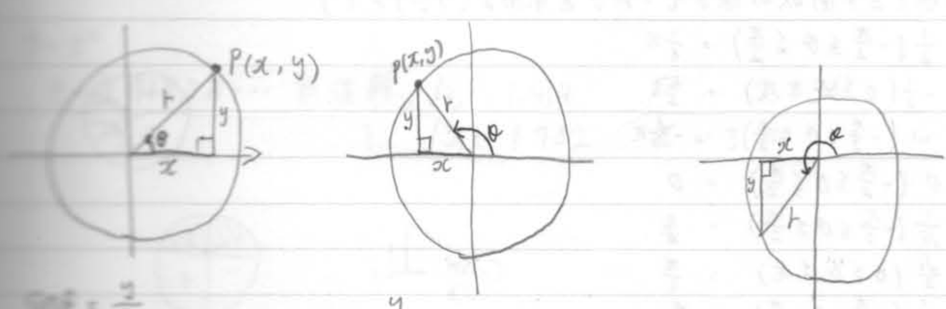
$x = \sqrt{3}$

$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$　　$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$　　$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$　　$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$　　$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan\frac{\pi}{4} = 1$　　$\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$　　$\tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

2　三角関数とそのグラフ

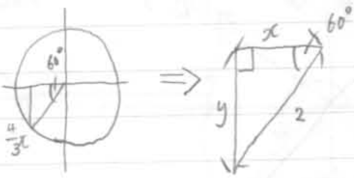


$\sin\theta = \frac{y}{r}$ (正弦)　$\cos\theta = \frac{x}{r}$ (余弦)　$\tan\theta = \frac{y}{x}$ (正接)　: θの関数

No.

Date

問1　$\frac{4}{3}\pi$の正弦，余弦，正接を求めよ．



$\sin\frac{4}{3}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

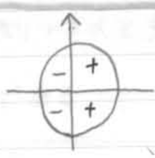
$\cos\frac{4}{3}\pi = -\frac{1}{2}$

$\tan\frac{4}{3}\pi = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}$

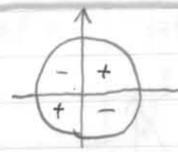
符号のまとめ

$\sin\theta$

$\cos\theta$

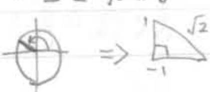


$\tan\theta$



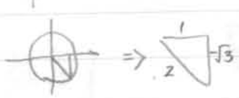
問2　次の三角関数の値を求めよ

(1) $\sin\frac{3}{4}\pi$



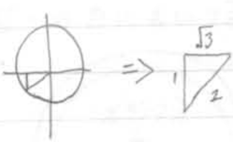
$= \frac{1}{\sqrt{2}}$

(2) $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$



$= \frac{1}{2}$

(3) $\tan\left(-\frac{5}{6}\pi\right)$



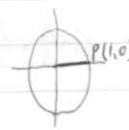
$= \frac{-1}{-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

問3

(1) $\sin 0 = \frac{0}{1} = 0$

$\cos 0 = \frac{1}{1} = 1$

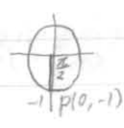
$\tan 0 = \frac{0}{1} = 0$



(2) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{-1}{1} = -1$

$\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{0}{1} = 0$

$\tan\left(-\frac{\pi}{2}\right) =$ ~~※~~ 定義できない



問4　次のθの範囲で三角関数の値をもつ角θを求めよ(ラジアンで)

(1) $\sin\theta = \frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{6}\pi$

(2) $\cos\theta = -\frac{1}{2}\left(0 \leqq \theta \leqq \pi\right) = \frac{2}{3}\pi$

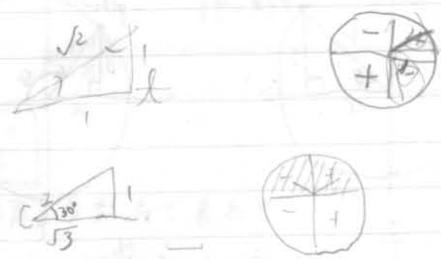
(3) $\tan\theta = -1\left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{4}\pi$

(4) $\sin\theta = 0\left(-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right) = 0$

(5) $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$

(6) $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(0 \leqq \theta \leqq \pi\right) = \frac{\pi}{6}$

(7) $\tan\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$



No.

Date

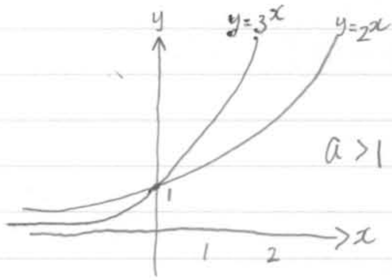
指数関数

$\underset{底}{\underbrace{a}}$ → $y = a^{\boxed{x}}$ → 指数　　x … 独立変数

$a \neq 1,\ a > 0$　　y … 従属変数

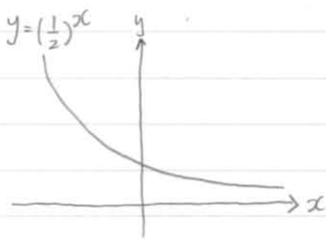
$y = 2^x$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16
$y = 3^x$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27	



$y = (\frac{1}{2})^x = (x^{-1})^x = 2^{-x}$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$



$y = e^x$

$e = 2.71828\cdots$ 無理数　$\sqrt{2} \cdots 1.414$　　$\sqrt{5} \cdots 2.236$

$\sqrt{3} \cdots 1.732$.　$\pi = 3.14$

No.

Date

対数

$q = a^p \Longleftrightarrow p = \log_a \boxed{q}$　　$y = \log_a x \Longleftrightarrow x = a^y$

かきかえる　真数

底

対数法則

問2

(1) $\log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$

情報源

マルコフ情報源

符号化の条件

瞬時に符号化できる符号，瞬時符号であるための条件

各種情報源符号

ハフマン符号，最少符号長となる符号

ランレングスハフマン符号，算術符号

情報源符号化の定理

符号長の下限を与える

シャノン第1定理ともいう.

情報源のエントロピー

↳ 多様性の尺度

情報源の事象の多様性

→ 情報源のエントロピー

平均符号長は情報源のエントロピーとなる.

情報量 $I(P)$

P 事象の発生確率

$I(P) = -\log_2 P$

発生確率Pが少ないほど
情報量が大となる.

石油が発見されるという事象

→ 発生確率小，情報量大.

太陽が東からのぼる.

→ 発生確率1 情報量0

No.

Date

通信路符号化の限界

通信路に誤りがある場合
　どこまで情報が送れるのか.

英文を 0.1 の列への変換
　符号化.
　　㊞ 情報源符号化 ⟶ 効率的な符号化を学ぶ
　　㊫ 通信路符号化

情報理論の応用分野

　通信の分野
　音声. 映象の記録, DVDへの記録, HDD, 圧縮

電話音声
　PCM符号化　　64 kbit/sec
　　　　　　　　　bPs

　音声のデジタル化
　携帯電話への符号化　　16 kbPs
　　　　　　　　1/4 の圧縮
　　　　　　50 kbPs まで圧縮可能といわれている
　日本語の原こうの読む速度 … 400文字/分　1文字 8bit

400文字/分 × 8bit/文字
　= 3200 bit/60秒
　= 50 bit/sec

No.

Date

情報を得ることの効果

情報源のエントロピーが減少

(あいまいさ)

情報量の計測

情報源からの出力を符号化

符号長で情報量を計測

各種の符号化手法の中で平均符号長が最少となる

符号化の手法を用いる

その符号長で情報量とする

平均符号長の下限

シャノンが理論的に導く

情報源符号化定理 (シャノンの第1定理)

下限が情報源のエントロピー

現在の問題は

下限となる具体的な符号化手法を構築すること

平均情報量 I

Iがある性質を持つ情報源のエントロピーと

$$I = \sum_{i=1}^{n} P_i \quad I(P_i)$$

平均

各事象の情報量

No.

Date

$P_{x_2|x_0 x_1}(0|0\,0)$ を表3.1と表3.2よりもとめよ

$P_{x_2|x_0 x_1}(0|0\,0)$

$$= \frac{P_{x_0 x_1 x_2}(0.0\,0)}{P_{x_0 x_1}(0.0)} = \frac{0.648}{0.72} = 0.9$$

演習

$P_{x_1|x_0 x_2}(1|0\,1)$ を表3.1と表3.2を用いてもとめよ

$$P_{x_1|x_0 x_2}(1|0\,1) = \frac{P_{x_0 x_1 x_2}(0,1,1)}{P_{x_0 x_2}(0.1)}$$

$P_{x_0 x_2}(0.1)$

$= P_{x_0 x_1 x_2}(0\,0\,1) \cdots 0.072$

$= P_{x_0 x_1 x_2}(0\,1\,1) \cdots 0.048$

$$= \frac{0.048}{0.048 + 0.072} = \frac{0.048}{0.12} = 0.4$$

No.

Date

記憶のない定常情報源

さいころを用いた情報源

情報源アルファベットA　　出力確率 $\frac{1}{6}$

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$　　さいころの目の出方は過去の出方に依存しない

→記憶のないという性質

無記憶性

さいころの目の発生確率

いつも同じ →定常性

結合確率が積の形で表わせる

$P_{X_0 X_1 \cdots X_{n-1}}(x_0, x_1, \cdots x_{n-1})$

$= P_{X_0}(x_0) \times P_{X_1}(x_1) \times \cdots \times P_{X_{n-1}}(x_{n-1})$

$= \prod_{i=0}^{n-1} P_X(x_i)$　　Π：積　Σ：和

記憶のある定常情報源

英文の本の例

The の発生確率

T・h・e のアルファベットの発生確率にならない

発生確率は高い

どのページを開いても The の発生確率は等しい

→定常性

$P_{X_0 X_1 \cdots X_{n-1}}(x_0, x_1, \cdots, x_{n-1})$

$= P_{X_i X_{i+1} \cdots X_{i+n-1}}(x_0, x_1, \cdots, x_{n-1})$

時点をずらしても結合確率は等しい

記憶のある情報源の定常性

No.

Date

エルゴート情報源

1つの情報源の出力を長い時間観測

→情報源の統計的性質が判かる

統計的性質の調べ方

集合平均から求める

多くの情報源の出力の平均から求める

(例)

10個の情報源の出力

1の出力が2個の場合

→1の発生確率 $\frac{2}{10} \cdot \frac{1}{5}$ となる

時間平均から求める

1つの情報源の出力の平均から求める

エルゴート性とは

集合平均と時間平均が一致する

エルゴート性のある情報源の利点

情報源として1つだけ準備すれば統計的性質がわかる

マルコフ情報源

記憶のある定常情報源

マルコフ情報源では

過去の有限個の出力にのみ依存して出力が決まる

m重マルコフ情報源では

m個過去の出力にのみ依存

単純マルコフ情報源では

直前の出力にのみ依存 m=1に相当

No.

Date

m重マルコフ情報源の統計的性質

$n \geq m$

$P_{x_i|x_{i-1}\cdots x_{i-n}}(x_i|x_{i-1}\cdots x_{i-n}) = P_{x_i|x_{i-1}\cdots x_{i-m}}(x_i|x_{i-1}\cdots x_{i-m})$

時点の出力

となり m個の過去の出力のみに依存.

単純マルコフ情報源の統計的性質

$P_{x_i|x_{i-1}\cdots x_{i-n}}(x_i|x_{i-1}\cdots x_{i-n})$

$= P_{x_i|x_{i-1}}(x_i|x_{i-1})$ 直前の出力のみ依存.

図3.2

単純マルコフ情報源

時点 i の出力 x_i

Y_iは記憶のない2元定常情報源の出力.

$x_i = x_{i-1} \oplus Y_i$

排他論理和

$0 \oplus 0 = 0 \quad 0 \oplus 1 = 1$

$1 \oplus 0 = 1 \quad 1 \oplus 1 = 0$

$P(Y_i = 0) = P$

$P(Y_i = 1) = 1 - P$

$P_{x_i|x_{i-1}}(0|0)$ を求めよ.

$x_i = x_{i-1} \oplus Y_i$ へ $x_i = 0$ $x_{i-1} = 0$ を代入

$0 = 0 + Y_i$ より $Y_i = 0$

$Y_i = 0$ となる確率は $P(Y_i = 0) = P$ となる.

従って

$P_{x_i|x_{i-1}}(0|0) = P$

No.

Date

m重マルコフ情報源

現時点の出力が直前のm個の出力のみに依存する情報源

$$P_{X_i|X_{i-1} \cdots X_{i-m}}(x_i|x_{i-1} \cdots x_{i-m})$$

単純マルコフ情報源

m=1 の場合（直前の出力のみに依存）

$$P_{X_i|X_{i-1}}(x_i|x_{i-1})$$

図3.2

単純マルコフ情報源

以下の条件付き確率をおめよ

$$P_{X_i|X_{i-1}}(0|1)$$

条件

1. 記憶のない定常2元情報源

出力 Y_i

出力確率 $P(Y_i=0)=P$

$P(Y_i=1)=1-P$

2. 出力 X_i

$X_i = X_{i-1} \oplus Y_i$

$=1-P$

$X_i=0 \quad X_{i-1}=1$ より

$0=1 \oplus Y_i$

排他的論理和

従って

$Y_i=1$

$P(Y_i=1)=1-P$ より

$P_{X_i|X_{i-1}}(0|1)=1-P$

No.

Date

マルコフ情報源と状態遷移

S_0　S_1　マルコフ情報源の状たい

S_0　直前の出力が"0"であった状たい

S_1　直前の出力が"1"であった状たい。

$$S_0 \xrightarrow{1/P} S_1$$

1 : 状態遷移時の出力

P : 状態遷移確率

マルコフ情報源の条件付き確率

$P_{x_i|x_{i-1}}(0|0)$

$= P_{x_i|x_{i-1}}(0|S_0) \quad = 1-P$

S_0からS_0への遷移確率となる

$P_{x_i|x_{i-1}}(0|1)$

$= P_{x_i|x_{i-1}}(0|S_1) \quad = P$

S_1からS_0への遷移確率となる。

図3.4の情報源

"0"を出力する状態遷移

1	$S_0 \longrightarrow S_1$	遷移確率	= 0.4
2	$S_2 \longrightarrow S_2$	〃	= 0.8
3	$S_1 \longrightarrow S_0$	〃	= 0.3

$P(0|\underbrace{0000\cdots0}_{m個}) = 0.3$ or 0.4 or 0.8

3通り

上記の条件付確率が決まらない。

→ m重マルコフ情報源ではない。

一般化されたマルコフ情報源

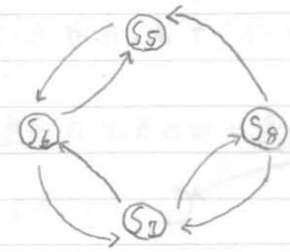
No.

Date

マルコフ連鎖

状態遷移のみが記述された

状態遷移



$\{ s_5 \quad s_7 \} \rightleftarrows \{ s_6 \quad s_8 \}$

$\{ s_5 \quad s_7 \}$ と $\{ s_6 \quad s_8 \}$ が交互に現われる

→ 同期性

閉じた状態集合

→ 既約マルコフ情報源

閉じた状態集合でかつ非同期的

→ 正規マルコフ情報源

遷移確率　状たい s_i から状たい s_j への

遷移確率 P_{ij} と記述

遷移確率行列　Π と記述

Π 　P_{ij} を ij 要素とする行列

No.

Date

演習

図3.4のマルコフ情報源の状態遷移確率行列 Π を作成せよ.

$$\Pi = \begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} \\ P_{20} & P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0.7 \\ 0.2 & 0 & 0.8 \end{pmatrix}$$

$P_{ij}(t)$

$t=1$ の場合

1時点後 = 1回の状態遷移後

t 〃 = t 〃

1回の状態遷移 t S_i から S_j へ 遷移する確率

⟶ 状態遷移確率 P_{ij}

正規マルコフ情報源では

$\lim_{t \to \infty} P_{ij}(t) = u_j$ となり初期状態に依存しない値になる

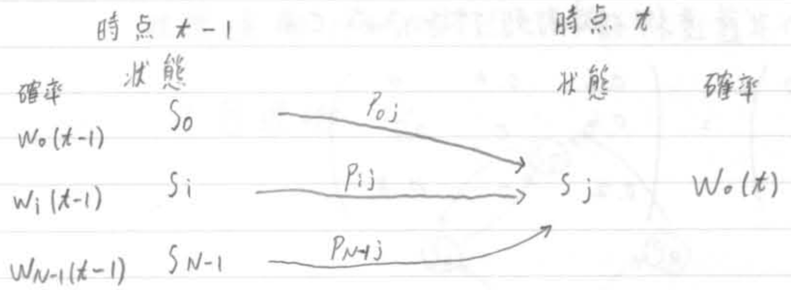
$$\Pi^t = \begin{pmatrix} P_{00}(t) & & P_{0\,N-1}(t) \\ \vdots & P_{ij}(t) & \\ P_{N-1\,0}(t) & & P_{N-1,N-1}(t) \end{pmatrix}$$ と 定義

$$U = \begin{pmatrix} u_0 & u_1 & & u_{N-1} \\ u_0 & u_1 & & u_{N-1} \end{pmatrix}$$ とする

Π^t と U を用いる正規マルコフ情報源では

$$\lim_{t \to \infty} \Pi^t = U$$

$W_j(t)$ を求める.



時点 $t-1$ と 時点 t の状態の関係から

$$W_j(t) = \sum_{i=0}^{N-1} W_i(t-1)\, P_{ij}$$

$W_j(t)$ のベクトル表現 W_t を用いる

$$W_t = (W_0(t)\ \ W_1(t),\ \ W_j(t) \cdots W_{N-1}(t))$$

$W_t = W_{t-1}\Pi$　　となる

t に関する漸化式を展開すると

$$W_t = W_{t-1}\Pi = W_{t-2}\Pi \times \Pi = W_{t-2}\Pi^2$$

$$= W_0\Pi^t$$

従って　W_t の極限分布 ($t \to \infty$ の時の分布)

W_∞ は

$$W_\infty = \lim_{t \to \infty} W_t = \lim_{t \to \infty} W_0\Pi^t$$

$$= W_0 \lim_{t \to \infty} \Pi^t$$

正規マルコフ情報源 では

$$\lim_{t \to \infty} \Pi^t = U$$

従って極限分布 W_∞ は

$$W_\infty = W_0 U$$

No.

Date

$$W_\infty = (W_0(\infty) \quad W_1(\infty) \quad \cdots \quad W_{N-1}(\infty))$$

$$= W_0 U$$

$$= (W_0(0) \ W_1(0) \ \cdots \ W_{N-1}(0)) \times \begin{pmatrix} u_0 & u_1 & u_i & \cdots & u_{N-1} \\ u_0 & u_1 & u_i & \cdots & u_{N-1} \end{pmatrix}$$

$$W_i(\infty) = W_0(0)\,u_i + W_1(0)\,u_i + \cdots + W_{N-1}(0)\,u_i$$

$$= u_i \underbrace{(W_0(0) + W_1(0) + \cdots + W_{N-1}(0))}_{= 1}$$

$$= u_i$$

極限分布 W_∞ のポめ方

$W_t = W_{t-1}\,\Pi$ を用いる

$t \to \infty$ とすると

$W_\infty = W_\infty\,\Pi$ となる

W_∞ を W と書く

$W = (W_0 \ \ W_1 \ \cdots \ W_{N-1})$ とする.

$W = W\Pi$ → 状態遷移図より作成

Wは極限状態分布であるから

$W_0 + W_1 + \cdots + W_{N-1} = 1$

Wは n次連立方程式の解となる