情報理論

第2回　講義

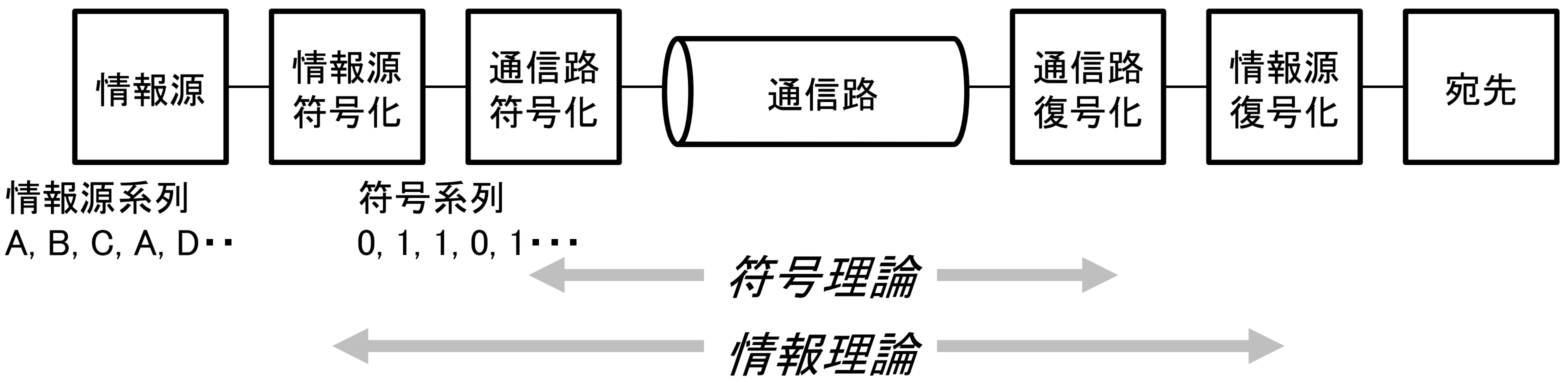
情報源の統計的性質とモデル化

2015. 4. 22

植松　芳彦

（復習）情報理論の扱う領域

1. 基本モデル
2. 情報理論と符号理論
3. 情報理論の応用分野



（復習）情報源符号化が解く問題

情報源記号あたりの平均符号長を最小化

- 情報源記号の統計的性質を考慮
- 符号の区切りが混乱しない
- 符号／復号装置の構成が簡単

情報源記号	発生確率	符号則1	符号則2
A	0.6	0 0	0
B	0.25	0 1	1 0
C	0.1	1 0	1 1 0
D	0.05	1 1	1 1 1 0

（復習）情報源の統計的性質　の例

表 5.1　英文における文字の出現確率

文字	確率	文字	確率	文字	確率
A	8.29%	J	0.21%	S	6.33%
B	1.43	K	0.48	T	9.27
C	3.68	L	3.68	U	2.53
D	4.29	M	3.23	V	1.03
E	12.08	N	7.16	W	1.62
F	2.20	O	7.28	X	0.20
G	1.71	P	2.93	Y	1.57
H	4.54	Q	0.11	Z	0.09
I	7.16	R	6.90		

情報源の統計的表現

１．情報源系列　$X_0\, X_1\, X_2 \cdots X_{n\text{-}1}$

時点0 ～ n-1 の情報源記号の時系列

X_i は時点 i に発生する情報源記号

２．情報源アルファベット $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_M\}$

各情報源記号がとりうる値

３．結合確率分布　$P_{X_0 X_1 \cdots X_{n\text{-}1}}(x_0, x_1, \cdots x_{n\text{-}1})$

$X_0 = x_0, X_1 = x_1, \cdots, X_{n\text{-}1} = x_{n\text{-}1}$ となる確率

M^n個の確率値の集合

結合確率分布の性質

結合確率分布　→　統計的性質が完全に明確化

表 3.1　X_0, X_1, X_2 の結合確率分布の例

x_0	x_1	x_2	$P(x_0, x_1, x_2)$
0	0	0	0.648
0	0	1	0.072
0	1	0	0.032
0	1	1	0.048
1	0	0	0.072
1	0	1	0.008
1	1	0	0.048
1	1	1	0.072

（条件例）

$A = \{0, 1\}$　(M=2)

$X_0\ X_1\ X_2$　(n=3)

全状態数$M^n = 8$

結合確率分布の性質

部分的な記号列の結合確率分布を求める

$$P_{X_0}(x_0) = \sum_{x_1=0}^{1} \cdot\cdot \sum_{x_{n-1}=0}^{1} P_{X_0 X_1 \cdot\cdot X_{n-1}}(x_0, x_1, \cdot\cdot\, x_{n-1}) \qquad \text{(式3.5)}$$

表 3.1　X_0, X_1, X_2 の結合確率分布の例

x_0	x_1	x_2	$P(x_0, x_1, x_2)$
0	0	0	0.648
0	0	1	0.072
0	1	0	0.032
0	1	1	0.048
1	0	0	0.072
1	0	1	0.008
1	1	0	0.048
1	1	1	0.072

*X0=0*の確率（*X1*以降はとりうる全ての状態）

$$P_{X_0}(0) = 0.8$$

*X0=1*の確率（*X1*以降はとりうる全ての状態）

$$P_{X_0}(1) = 0.2$$

結合確率分布の性質

$$P_{X_0 X_1}(x_{0,} x_1) = \sum_{x_1=0}^{1} \cdot\cdot \sum_{x_{n-1}=0}^{1} P_{X_0 X_1 \cdot\cdot X_{n-1}}(x_0, x_1, \cdot\cdot\, x_{n-1}) \quad \text{（式3.6）}$$

表 3.1 X_0, X_1, X_2 の結合確率分布の例

x_0	x_1	x_2	$P(x_0, x_1, x_2)$
0	0	0	0.648
0	0	1	0.072
0	1	0	0.032
0	1	1	0.048
1	0	0	0.072
1	0	1	0.008
1	1	0	0.048
1	1	1	0.072

表 3.2 X_0, X_1 の結合確率分布の例

x_0	x_1	$P(x_0, x_1)$
0	0	0.72
0	1	0.08
1	0	0.08
1	1	0.12

結合確率分布の性質

自分で求めてみよう･･･

表 3.1　X_0, X_1, X_2 の結合確率分布の例

x_0	x_1	x_2	$P(x_0, x_1, x_2)$
0	0	0	0.648
0	0	1	0.072
0	1	0	0.032
0	1	1	0.048
1	0	0	0.072
1	0	1	0.008
1	1	0	0.048
1	1	1	0.072

*X1=0*の確率
（*X0, X2*はとりうる全ての状態）

$$P_{X_1}(0) =$$

*X2=0*の確率
（*X0, X1*はとりうる全ての状態）

$$P_{X_2}(0) =$$

結合確率分布の性質

条件付き確率分布を求める

$$P_{X_1 \mid X_0}(x_1|x_0) = P_{X_0 X_1}(x_0, x_1) \;/\; P_{X_0}(x_0) \qquad \text{（式3.8）}$$

表 3.1 X_0, X_1, X_2 の結合確率分布の例

x_0	x_1	x_2	$P(x_0, x_1, x_2)$
0	0	0	0.648
0	0	1	0.072
0	1	0	0.032
0	1	1	0.048
1	0	0	0.072
1	0	1	0.008
1	1	0	0.048
1	1	1	0.072

$P_{X_0 X_1}(0, 0) = 0.72$

$P_{X_0}(0) = 0.8$

$X_0=0$が発生した条件下で$X_1=0$が発生する確率

$$P_{X_1 \mid X_0}(0|0) = 0.9$$

結合確率分布の性質

$$P_{X_2|X_0X_1}(x_2|x_0,x_1) = P_{X_0X_1X_2}(x_0,x_1,x_2)\,/\,P_{X_0X_1}(x_0,x_1)$$

（式3.9）

表 3.1　X_0, X_1, X_2 の結合確率分布の例

x_0	x_1	x_2	$P(x_0, x_1, x_2)$
0	0	0	0.648
0	0	1	0.072
0	1	0	0.032
0	1	1	0.048
1	0	0	0.072
1	0	1	0.008
1	1	0	0.048
1	1	1	0.072

$P_{X_0X_1X_2}(0, 0,0)=0.648$

$P_{X_0X_1}(0, 0)=0.72$

$X_0=0$，$X_1=0$が発生した条件下で
$X_2=0$が発生する確率

$$P_{X_2|X_0X_1}(0|0, 0) = 0.9$$

結合確率分布の性質

自分で求めてみよう・・・

表 3.1　X_0, X_1, X_2 の結合確率分布の例

x_0	x_1	x_2	$P(x_0, x_1, x_2)$
0	0	0	0.648
0	0	1	0.072
0	1	0	0.032
0	1	1	0.048
1	0	0	0.072
1	0	1	0.008
1	1	0	0.048
1	1	1	0.072

$X_0=0$, $X_1=1$が発生した条件下で
$X_2=0$が発生する確率

$$P_{X_2 \mid X_0 X_1}(0|0, 1) =$$

基礎的な情報源モデル

制約のない情報源

分析

$P_{X_0X_1\cdot\cdot X_{n-1}}(0, 0, \cdot\cdot,0,0)$

$P_{X_0X_1\cdot\cdot X_{n-1}}(0, 0, \cdot\cdot,0,1)$

...

$P_{X_0X_1\cdot\cdot X_{n-1}}(1, 1, \cdot\cdot,1,1)$

無限に多くの情報が必要

扱い易い性質を付与

特定の性質を持った情報源

分析

$P_{X_0\cdot\cdot X_{n-1}}(0,\cdot\cdot,0)$

$P_{X_0\cdot\cdot X_{n-1}}(0,\cdot\cdot,1)$

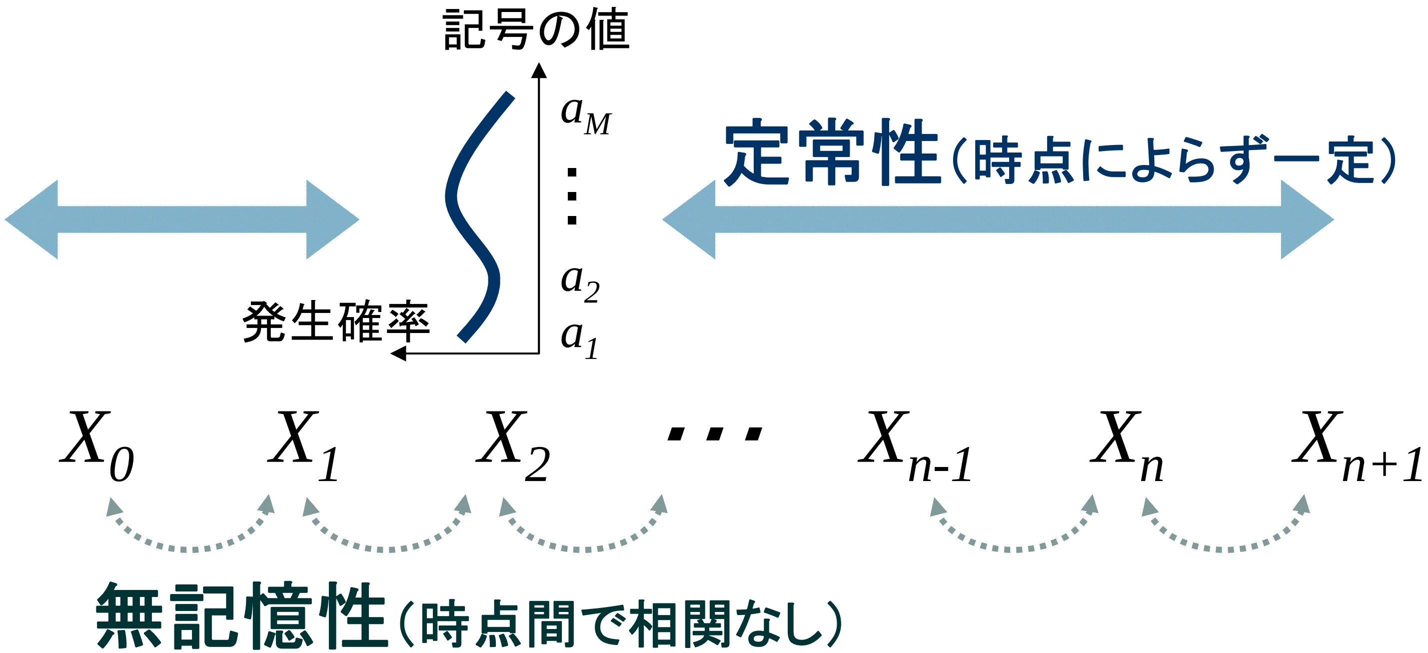
...

$P_{X_0\cdot\cdot X_{n-1}}(1,\cdot\cdot,1)$

まず有限な情報で分析
制約のない問題の分析
に活用

記憶のない定常情報源

1. 無記憶性：各時点で発生する情報源記号が他の時点で発生する記号に依存しない（相関なし）
2. 定常性：各情報源アルファベットの発生確率が各時点で不変（時点によらず一定）



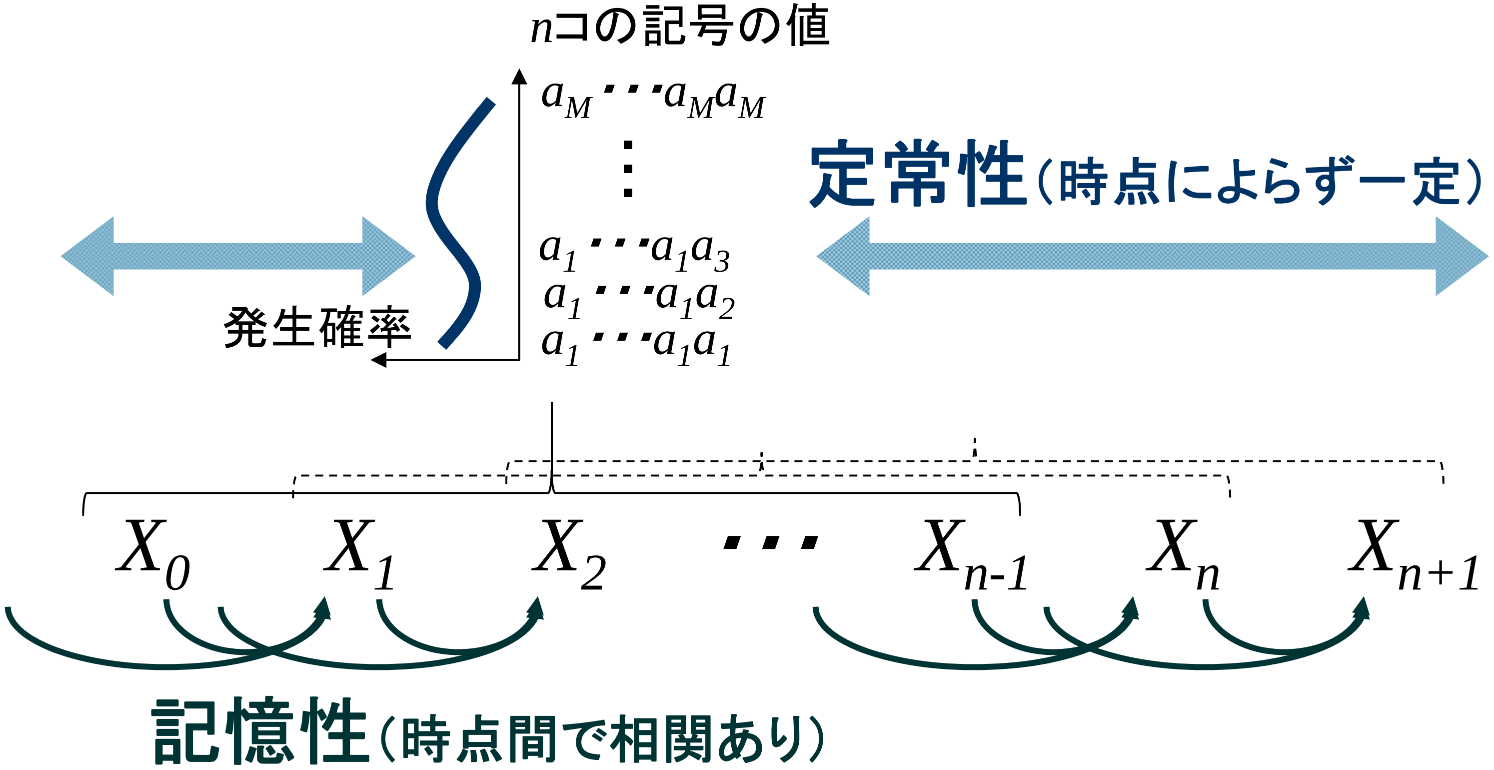
記憶のない定常情報源

３. 時点によらず一定な確率分布を $P_X(x)$ とすると結合確率分布は以下のように書ける

$$P_{X_0 X_1 \cdots X_{n-1}}(x_0, x_1, \cdots x_{n-1}) = \prod_{i=0}^{n-1} P_X(x_i) \qquad \text{（式3.10）}$$

記憶のある定常情報源

1. 記憶性：各時点で発生する情報源記号が過去の時点で発生する記号に依存
2. 定常性：任意の情報源系列長nに対し以下が成立



記憶のある定常情報源

3. 前ページの（拡張した）定常性を式で表現すると以下のように書ける

$$P_{X_0X_1\cdots X_{n-1}}(x_0, x_1, \cdots x_{\mathrm{n-1}})$$

$$= P_{X_iX_{i+1}\cdots X_{i+n-1}}(x_0, x_1, \cdots x_{\mathrm{n-1}}) \qquad \text{（式3.11）}$$

エルゴード情報源

1．定常情報源の一つ

2．充分長い任意の系列に統計的性質が表れる

例）サイコロを何度も振ったとき，１の目が出た回数は全体の１／６　⇒　時間平均確率が１／６

3．集合平均と時間平均が同一

集合平均：多数のサイコロを同時に振ったとき１の目がでるサイコロは全体の１／６

⇒集合平均確率が１／６

エルゴード情報源

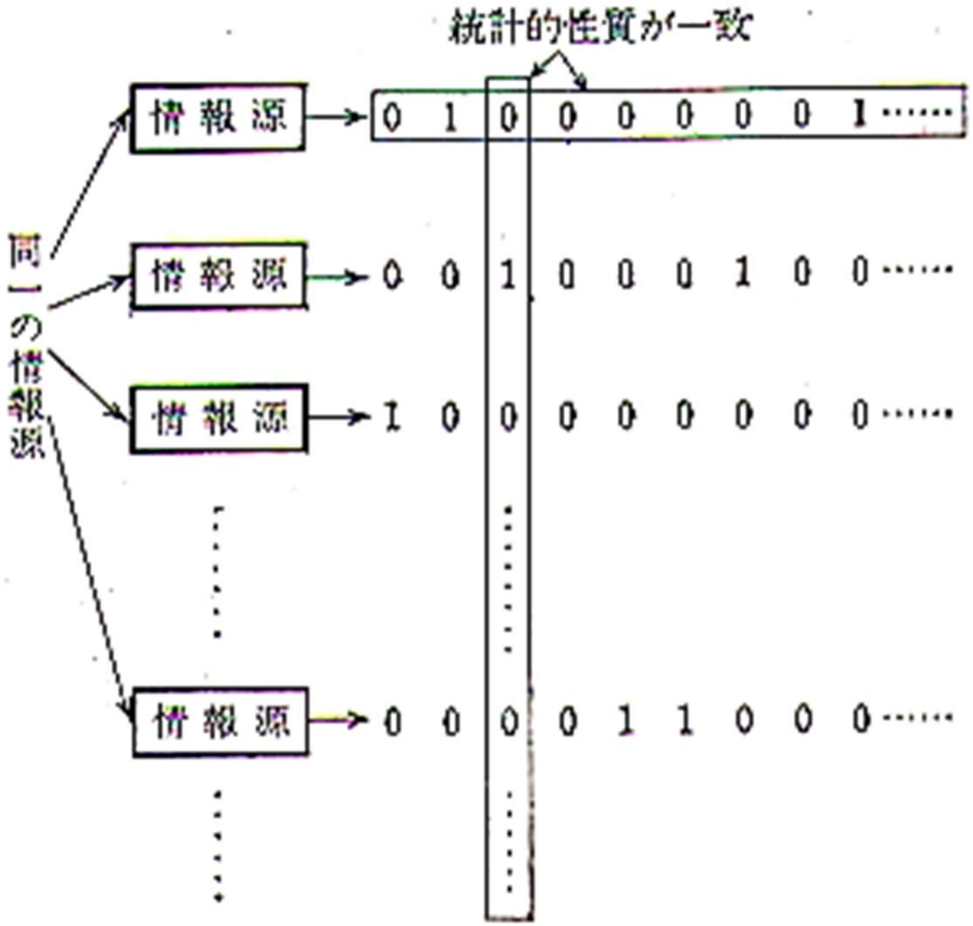


図 3.1 エルゴード性