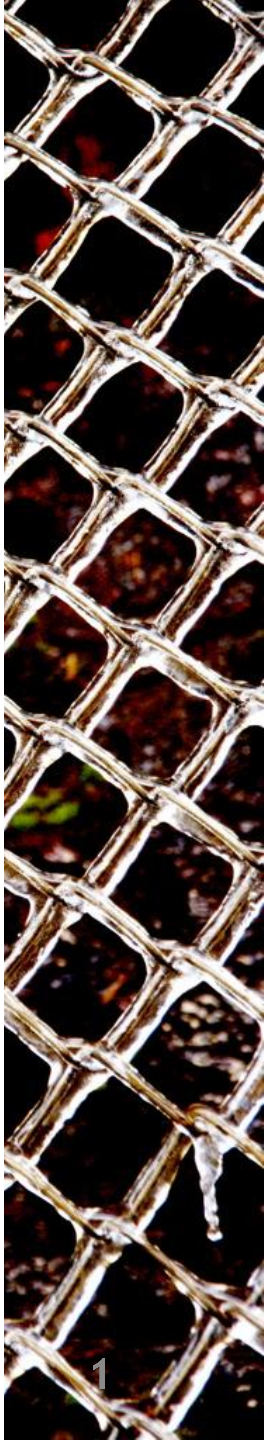
生産情報システム工学

#12 ボロノイ図(1)

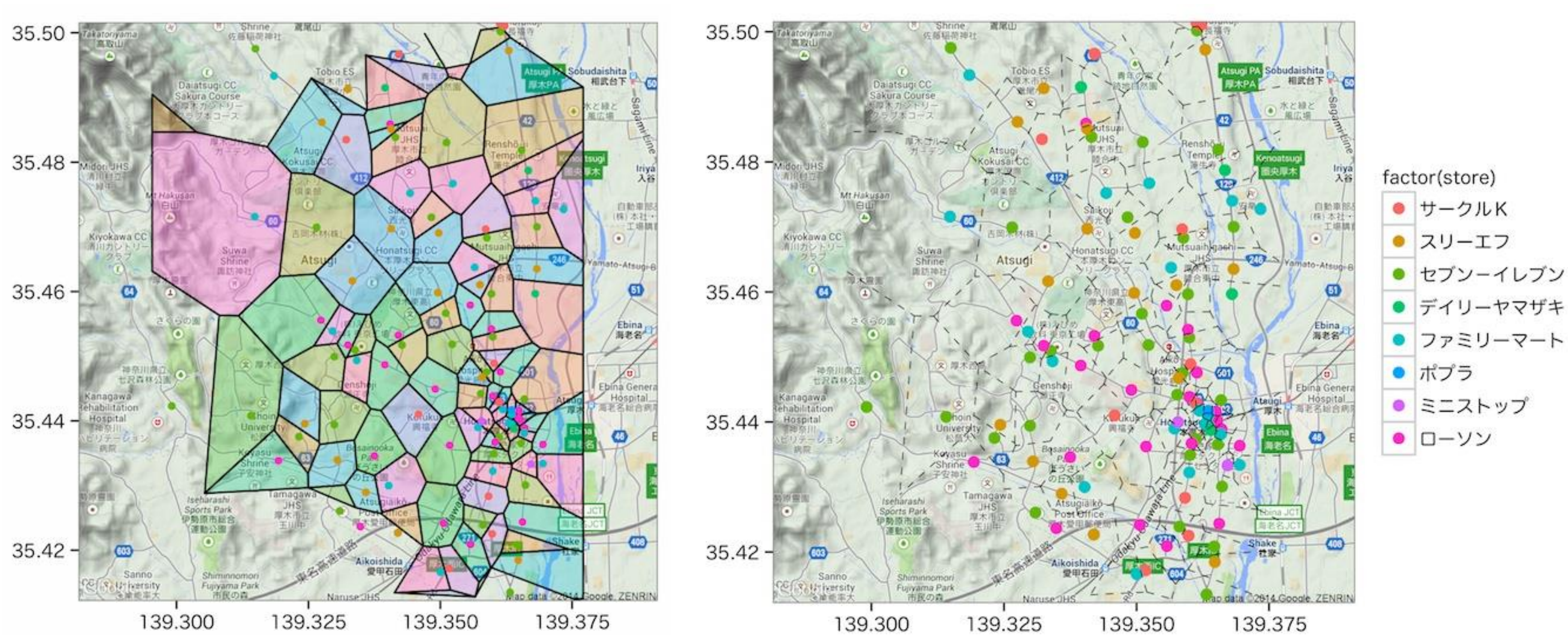
2015/07/8(水)

溝口 知広　准教授(居室：61-408室)
mizo@cs.ce.nihon-u.ac.jp



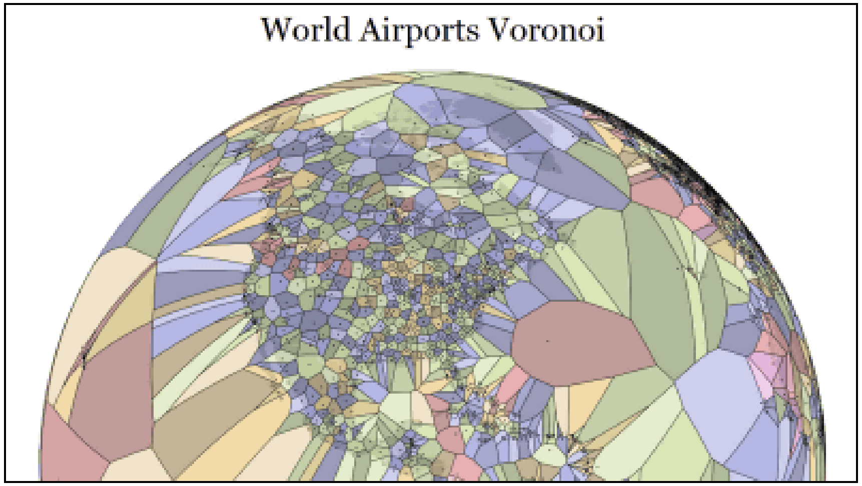
4.0 はじめに

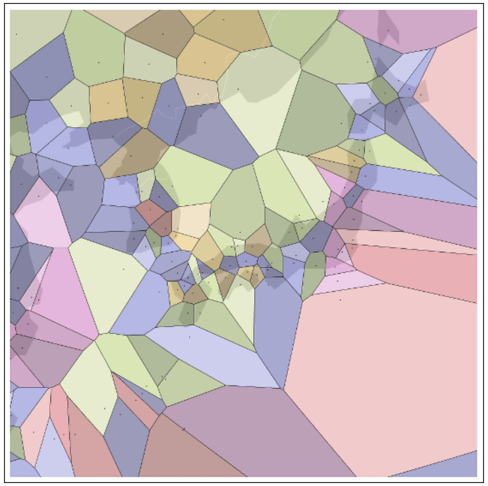
- ボロノイ図(Voronoi diagram)
  - 最近点問題を解くために提案されたデータ構造
  - 例：最寄りのコンビニはどこ？勢力圏は？



4.0 はじめに

- 世界の空港の位置をボロノイ図で表現
  - http://gigazine.net/news/20140516-world-voronoi-airport/

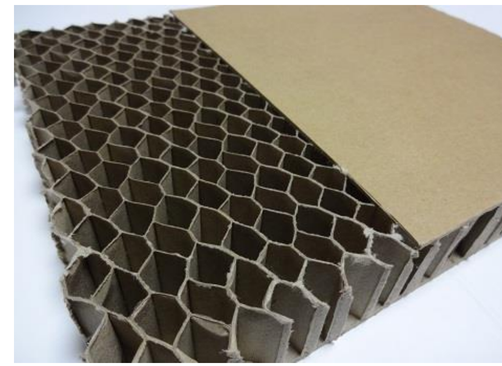




- ボロノイ分割のアプリ
  - www.raymondhill.net/voronoi/rhill-voronoi.html

4.0 はじめに

■ 自然界におけるボロノイ図の例

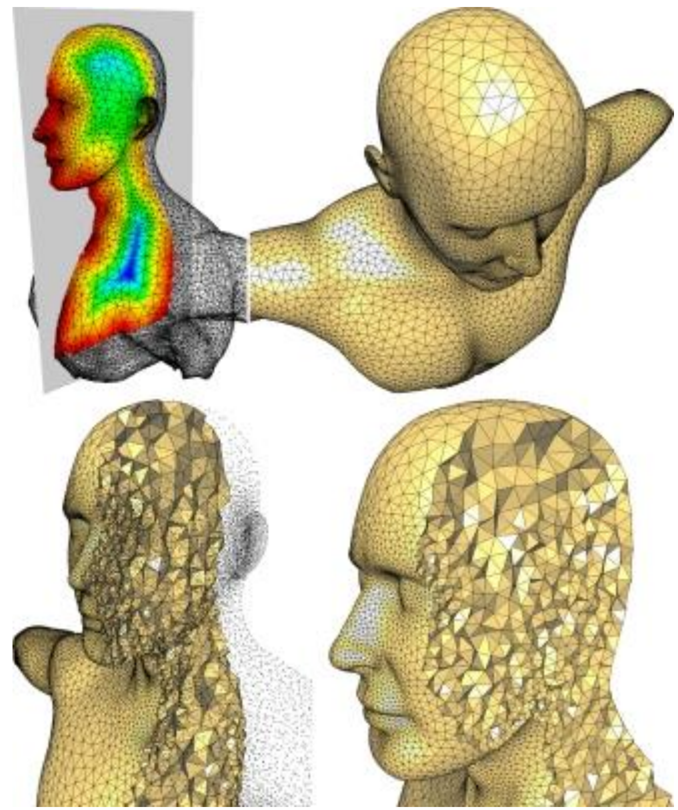


蜂の巣

ハニカム構造
(蜂の巣の応用)

4.0 はじめに

■ 3次元の例：FEMによる自動車の衝突試験



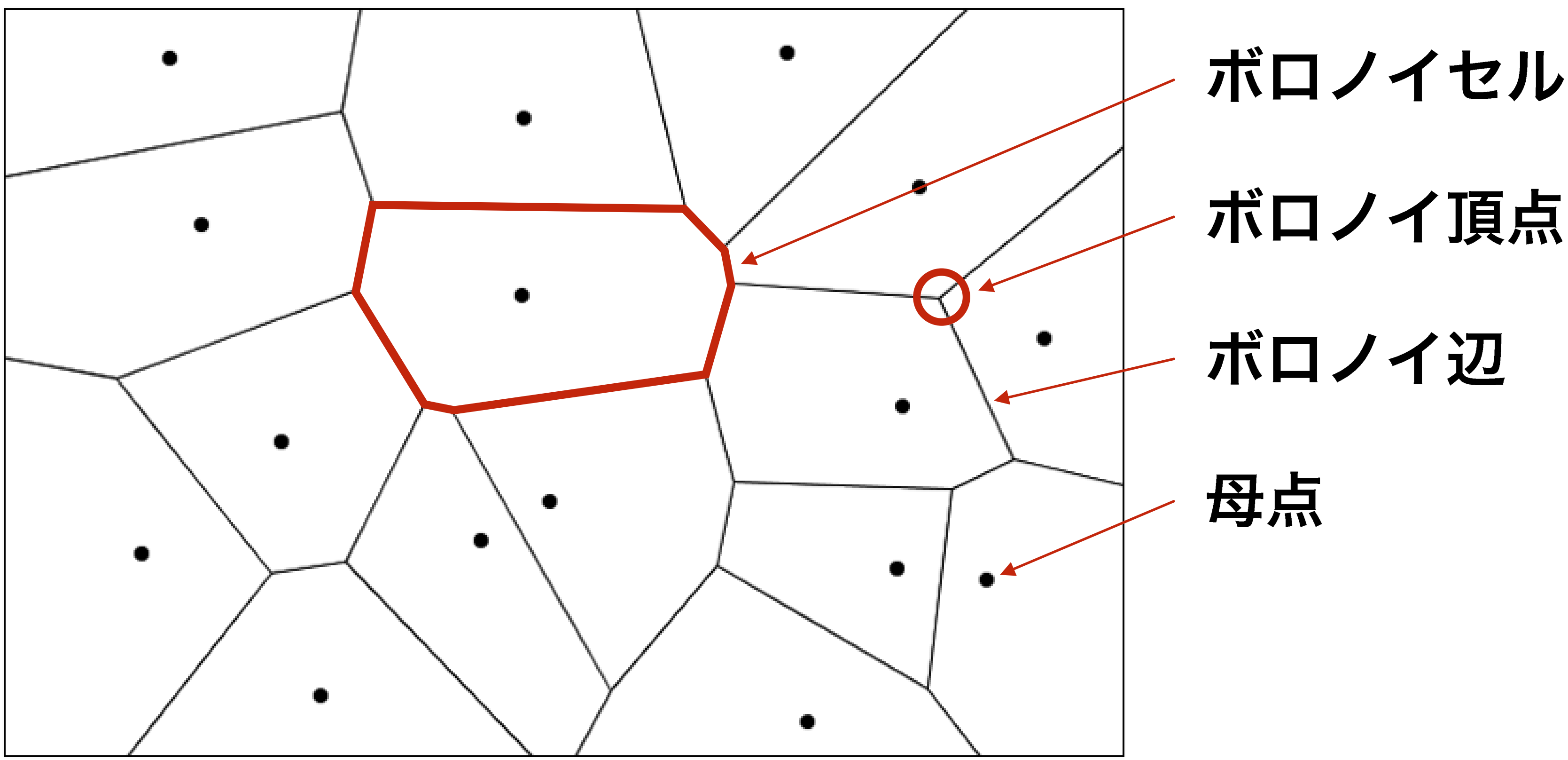
4.0 はじめに

- ボロノイ図の応用例
  - 最寄りの携帯基地局の探索
  - 有限要素法(FEM)の領域分割
  - 画像データの圧縮
  - 離散データの集約

- ボロノイ図の応用分野
  - 社会学，数学，生物学，物理学，考古学，…

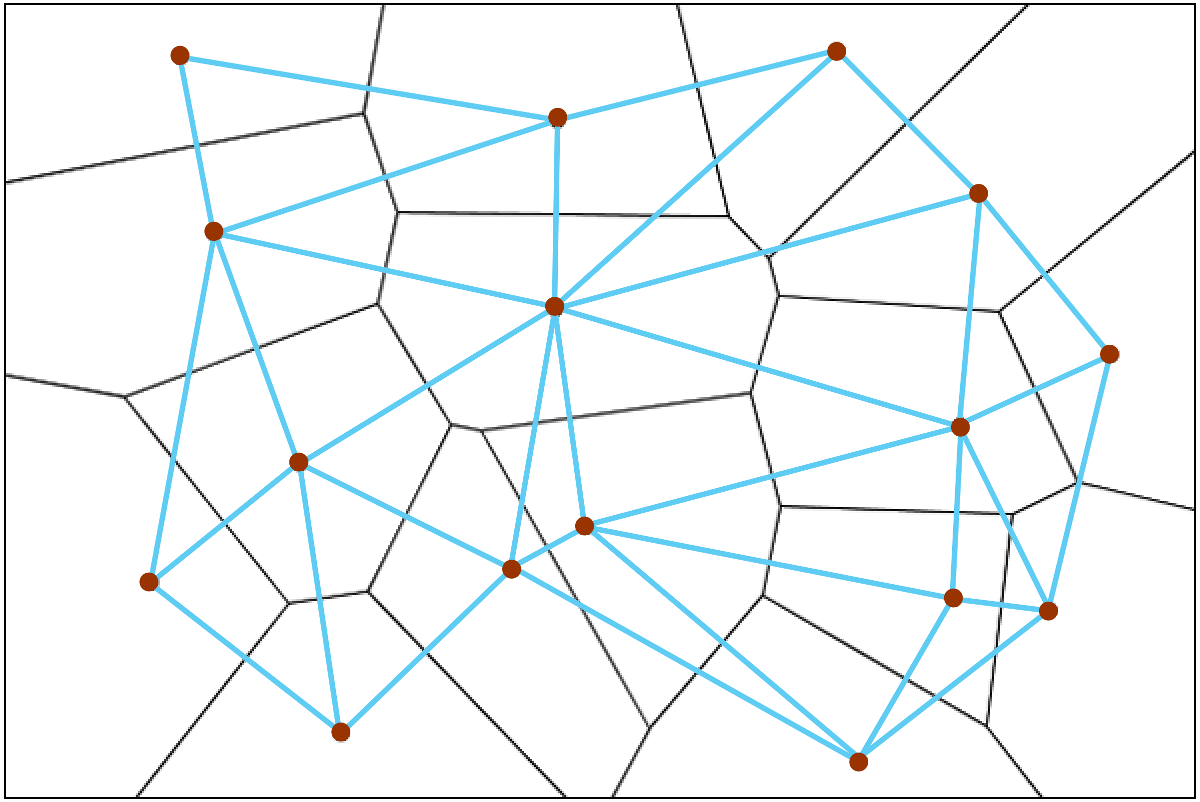
4.1 ボロノイ図の定義と性質

■ ボロノイ図



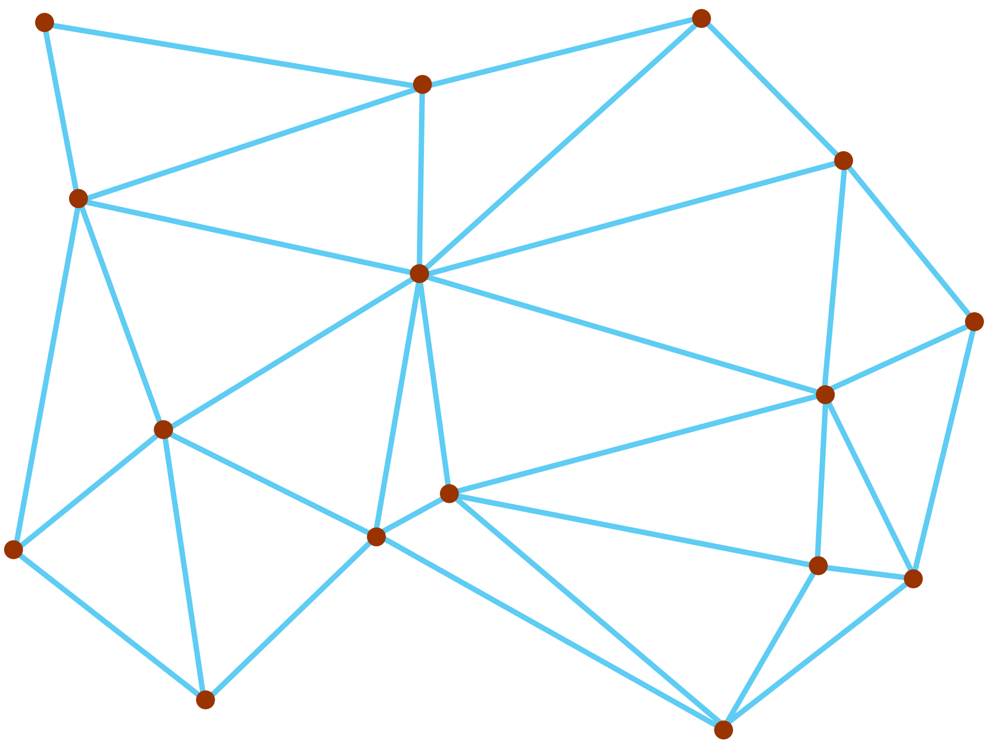
4.1 ボロノイ図の定義と性質

- ドロネー三角形分割



4.1 ボロノイ図の定義と性質

■ ドロネー三角形分割

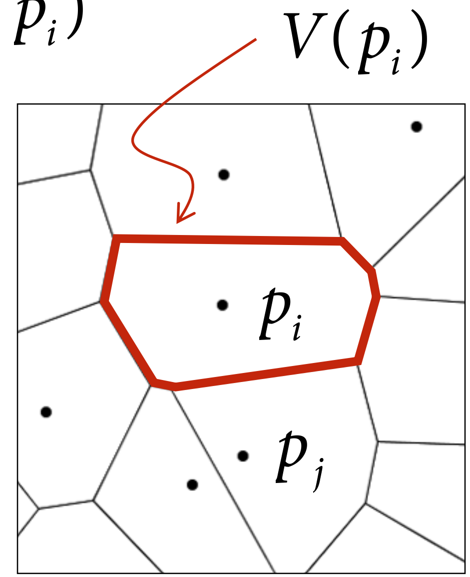


4.1 ボロノイ図の定義と性質

■ ボロノイ分割問題の一般化

- 母点集合： $S=\{p_i=(x_i,y_i)\,|\,i=1,2,\ldots,n\}$
- 点pと点qのユークリッド距離： $d(q,p_i)$
- ボロノイ領域：

$$V(p_i)=\bigcap_{i\neq j}\{q\,|\,d(q,p_i)<d(q,p_j)\}$$

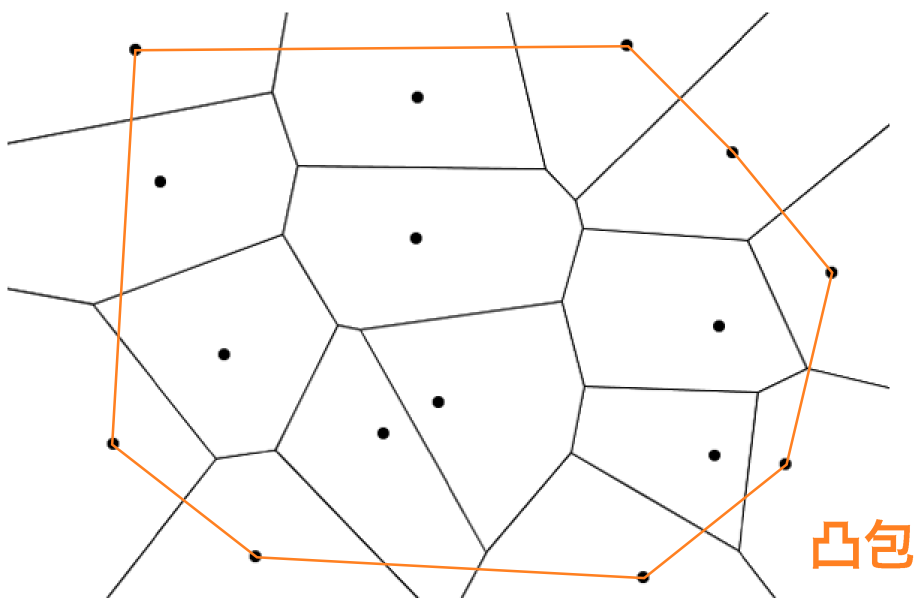


- 平面上の点qで，Sの中で最も近い点がp_iであるという性質を持つものを集めてできる集合
- Sに属する各点p_iが，他よりも自分に近い点の集合を囲い込んでできる領域(=勢力圏)

4.1 ボロノイ図の定義と性質

■ ボロノイ図の性質

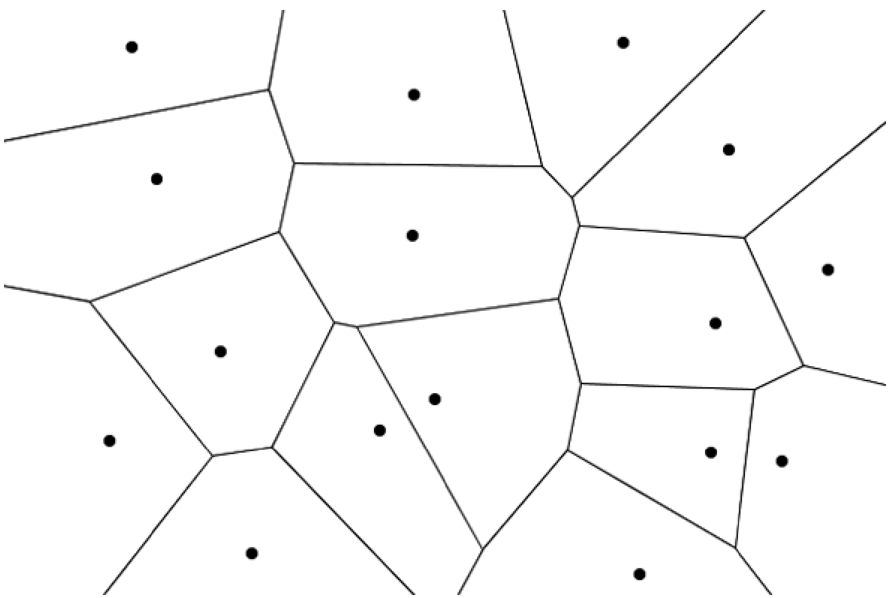
1. ボロノイ領域$V(p_i)$は凸である
2. ボロノイ領域$V(p_i)$が有界でないための必要十分条件は，　p_iが母点集合Sの凸包の境界上の点であることである（有界：境界があるという意味）



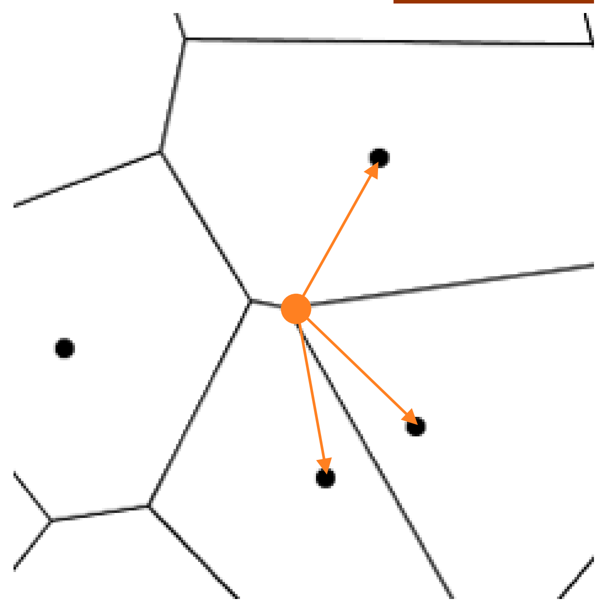
4.1 ボロノイ図の定義と性質

■ ボロノイ図の性質

3. 全てのボロノイ頂点はちょうど3つの辺の共通点である．すなわち，各ボロノイ頂点は，それに最も近い3つの母点から等距離にある



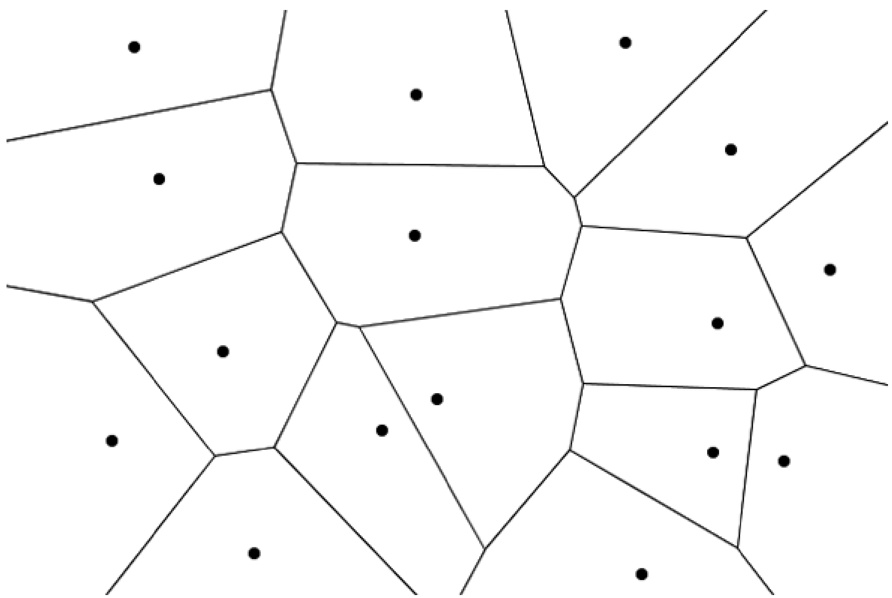
拡大図



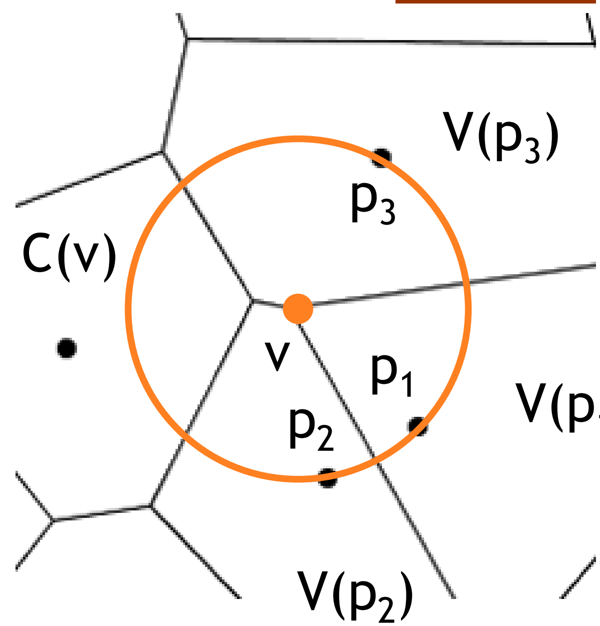
4.1 ボロノイ図の定義と性質

■ ボロノイ図の性質

4. ボロノイ頂点vが$V(p_1)$,$V(p_2)$,$V(p_3)$の共通点とする．3つの母点p_1,p_2,p_3を通る円をC(v)で表すと，C(v)はSの他の母点を含まない



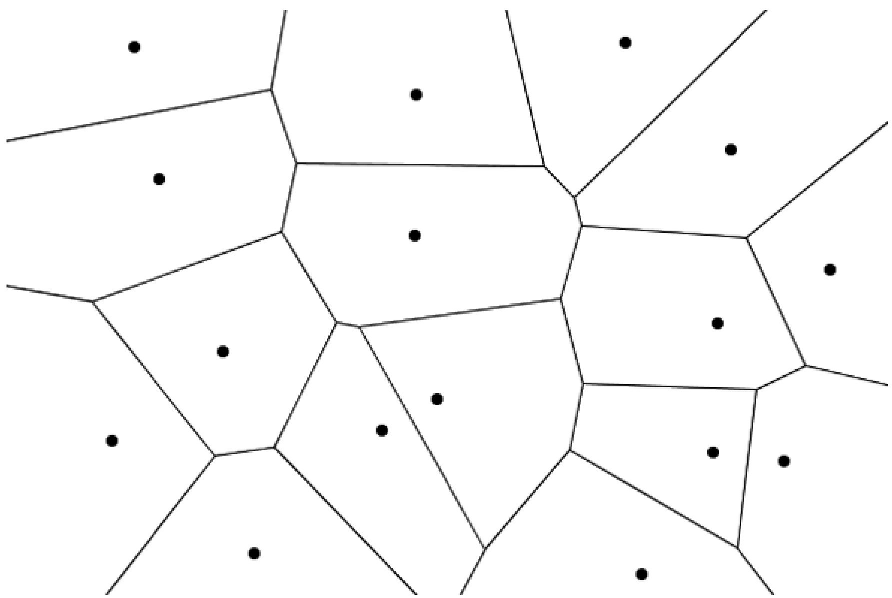
拡大図



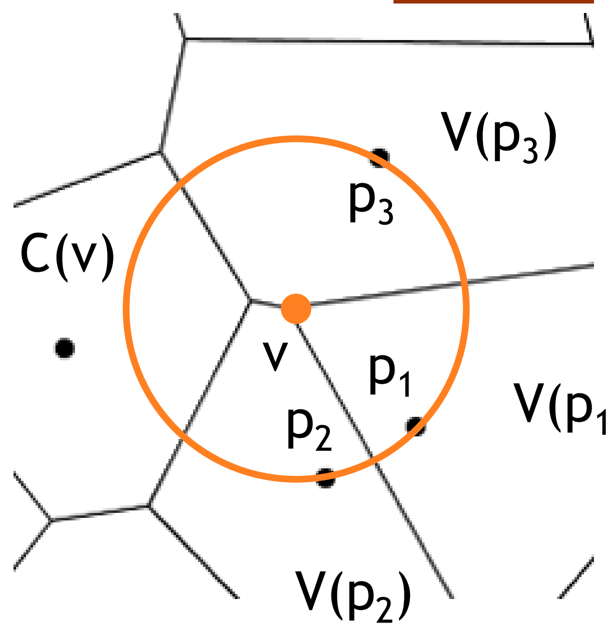
4.1 ボロノイ図の定義と性質

■ ボロノイ図の性質

5. ボロノイ頂点vが$V(p_1), V(p_2), V(p_3)$の共通点とする．3つの母点p_1, p_2, p_3を通る円を$C(v)$で表すと，$C(v)$はSの他の母点を含まない



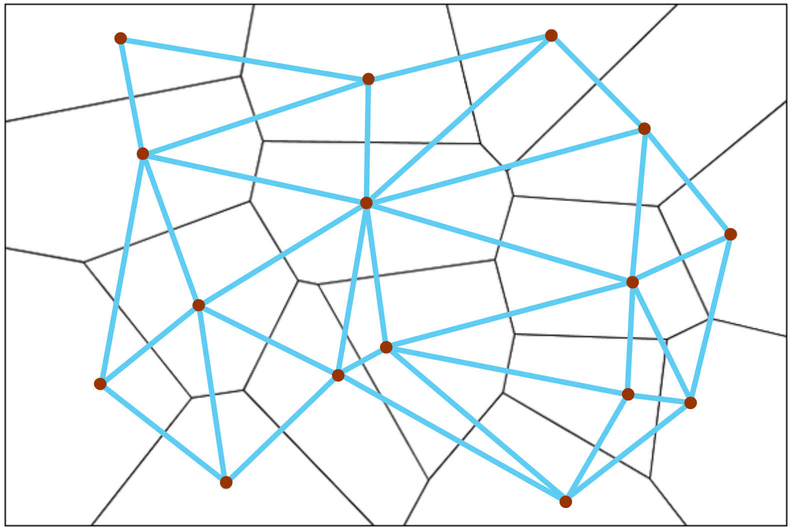
拡大図



4.1 ボロノイ図の定義と性質

■ ボロノイ図の性質

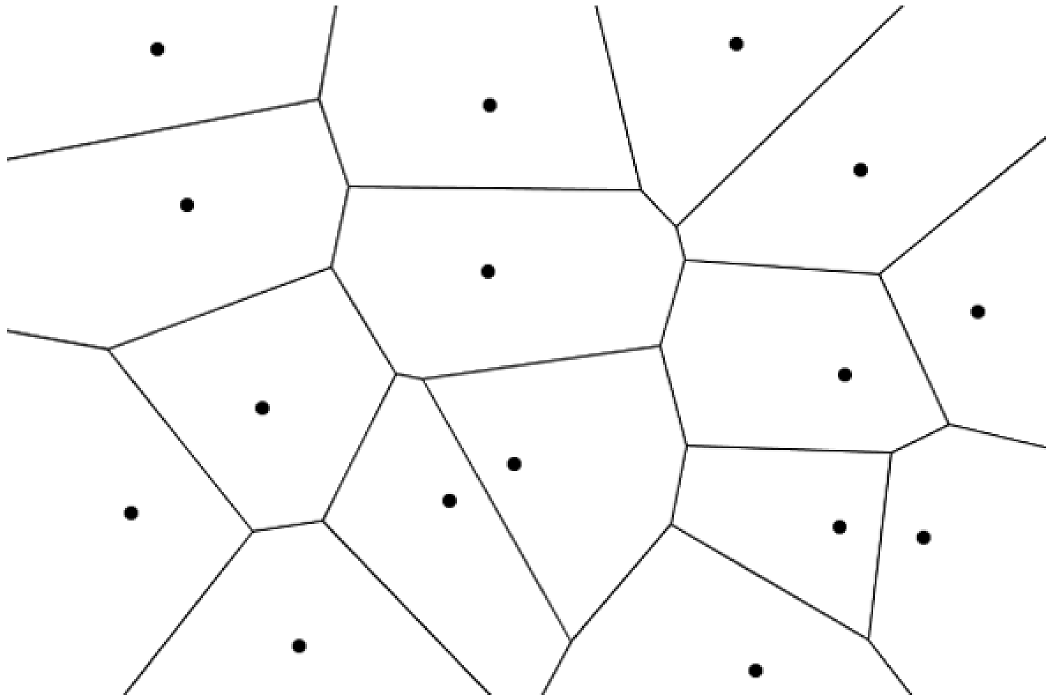
6. 点集合Sのボロノイ図に対して，ボロノイ辺を共有する2つの母点を直線線分で結ぶと，ボロノイ点の次数がすべて3であるから，点集合Sの三角形分割が得られる．これをドローネ三角形分割 (Delaunay triangulation)と呼ぶ．



4.1 ボロノイ図の定義と性質

■ ボロノイ図の性質

7. n点のボロノイ図は高々2n-5個の頂点と高々3n-6本の辺を持つ

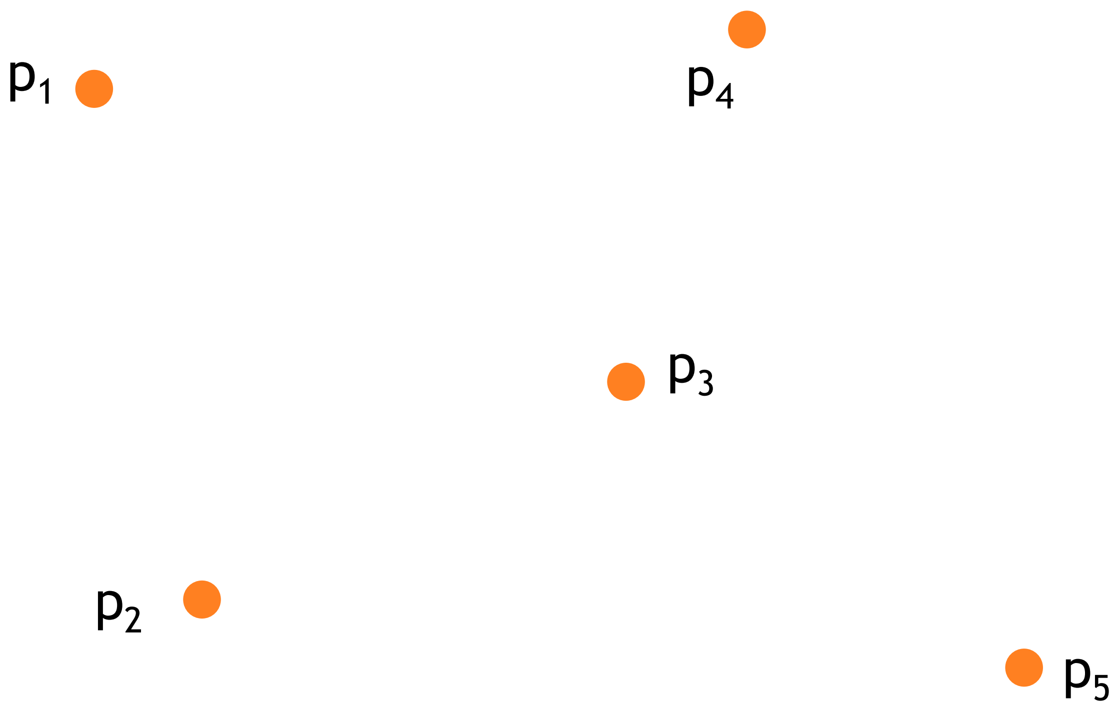


4.2 構成法

- ボロノイ図を構成する様々なアルゴリズム
  1. 直接法
     - 垂直二等分線の定義による方法　(計算量：$O(n^3)$)
  2. 逐次添加法
     - 3点から始めて1点ずつ添加する方法　(計算量：$O(n^2)$)
  3. Fortuneの走査法
     - 巧妙で高速な方法，難しい　(計算量：$O(n\log n)$)

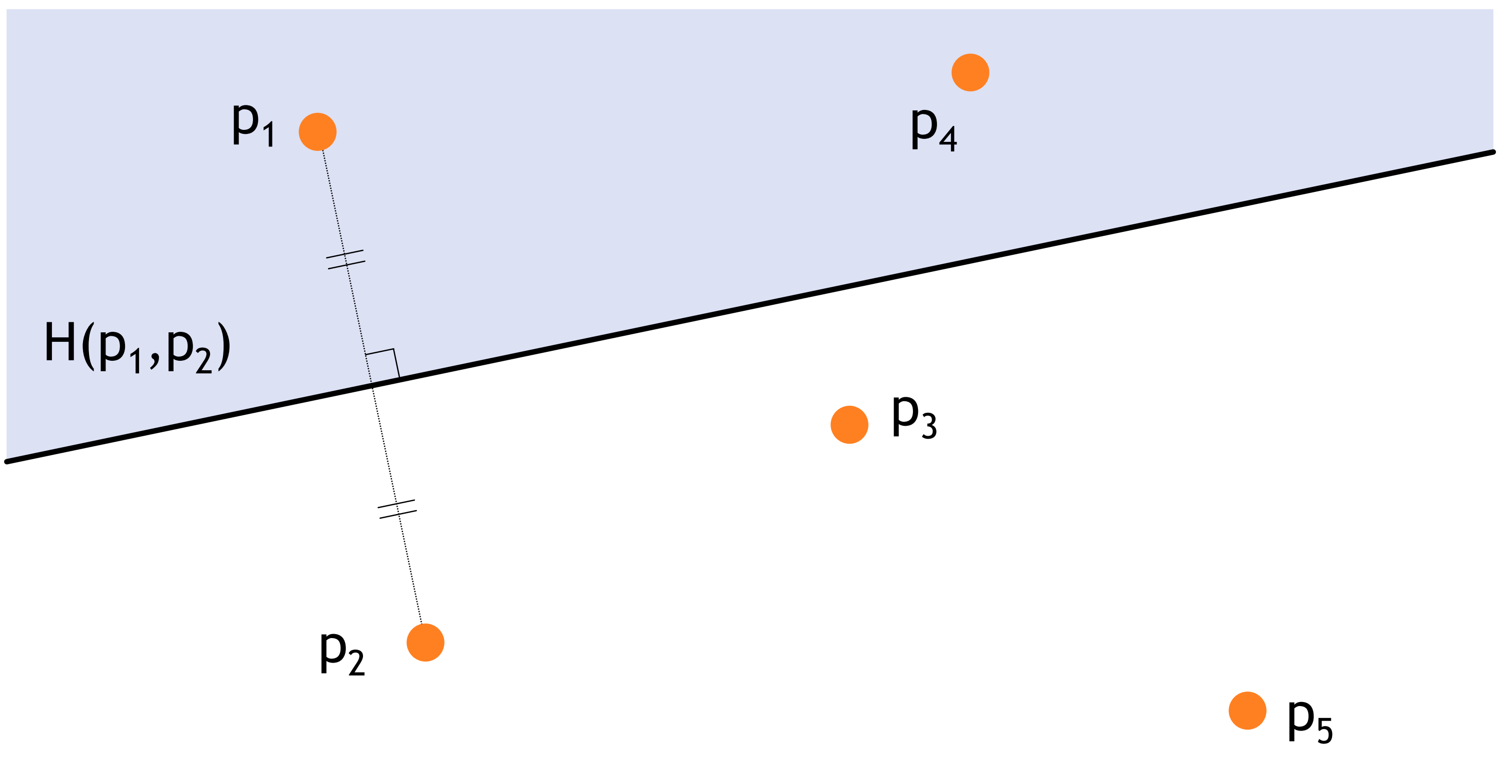
4.2.0 直接法

- $V(p_1)$の計算手順
  0. 入力母点集合



4.2.0 直接法

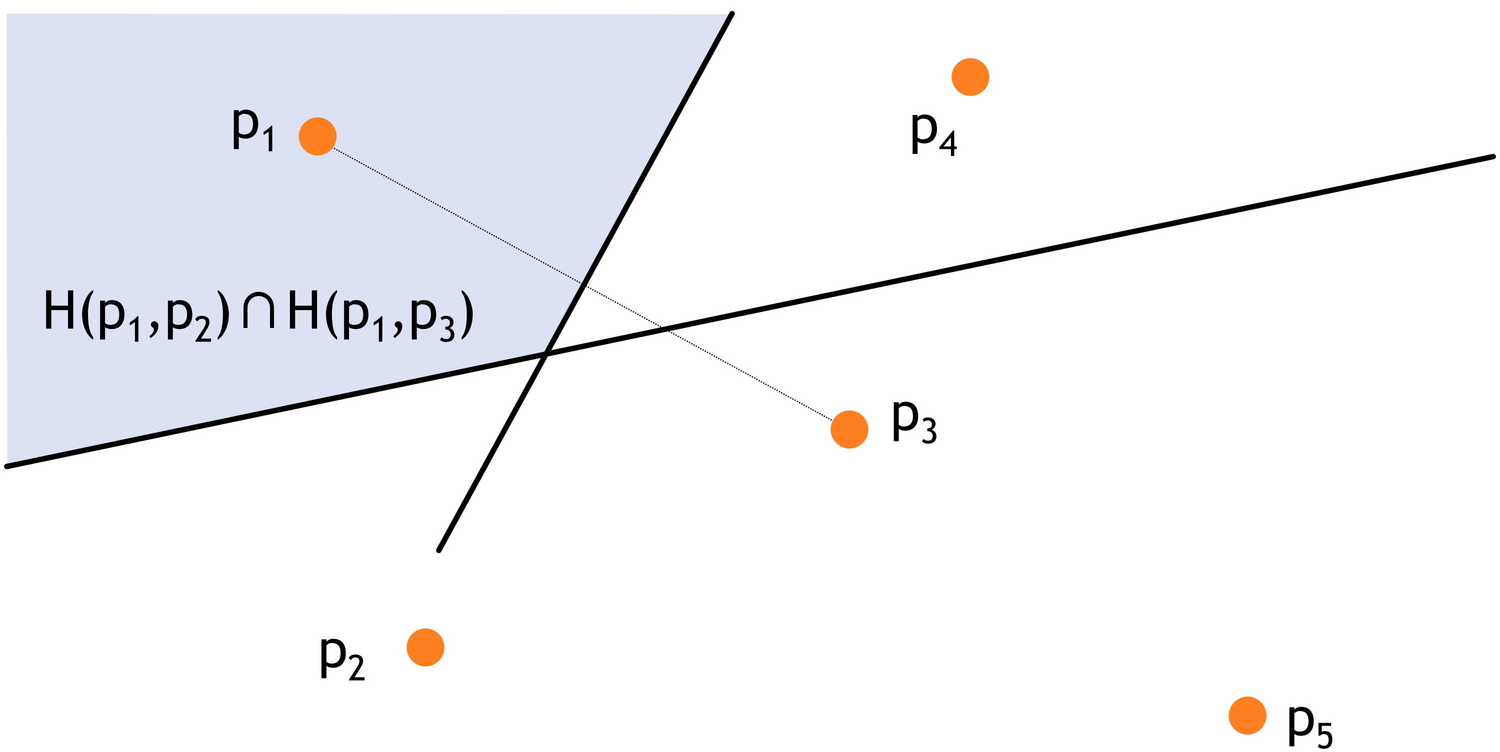
- $V(p_1)$の計算手順
  1. p_1とp_2の垂直二等分線を求め，その直線を境界線とするp_1側の半平面を$H(p_1,p_2)$求める



4.2.0 直接法

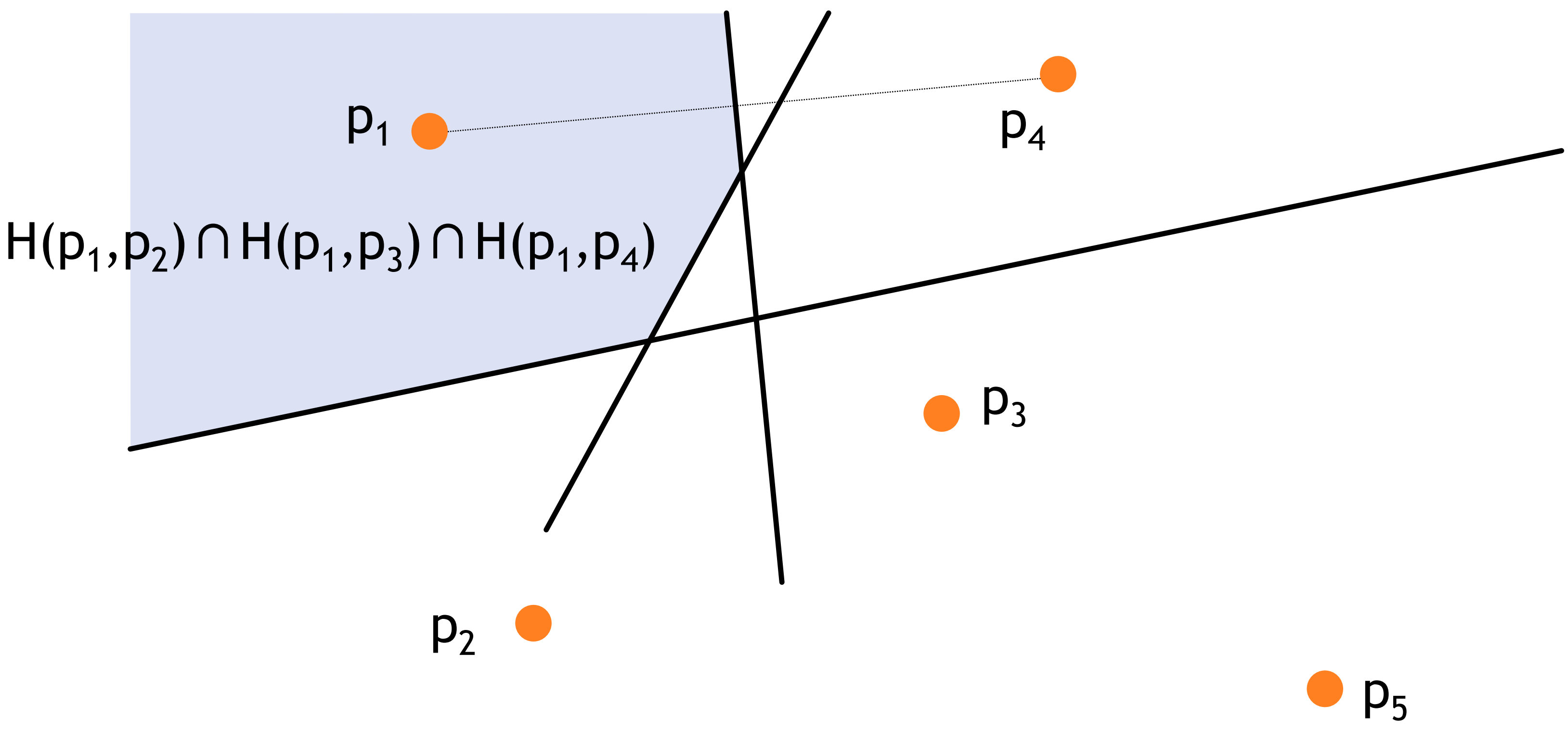
- $V(p_1)$の計算手順

2. 同様に，p_1とp_3の半平面を$H(p_1,p_3)$を求め，$H(p_1,p_2)$との共通領域$H(p_1,p_2) \cap H(p_1,p_3)$を求める



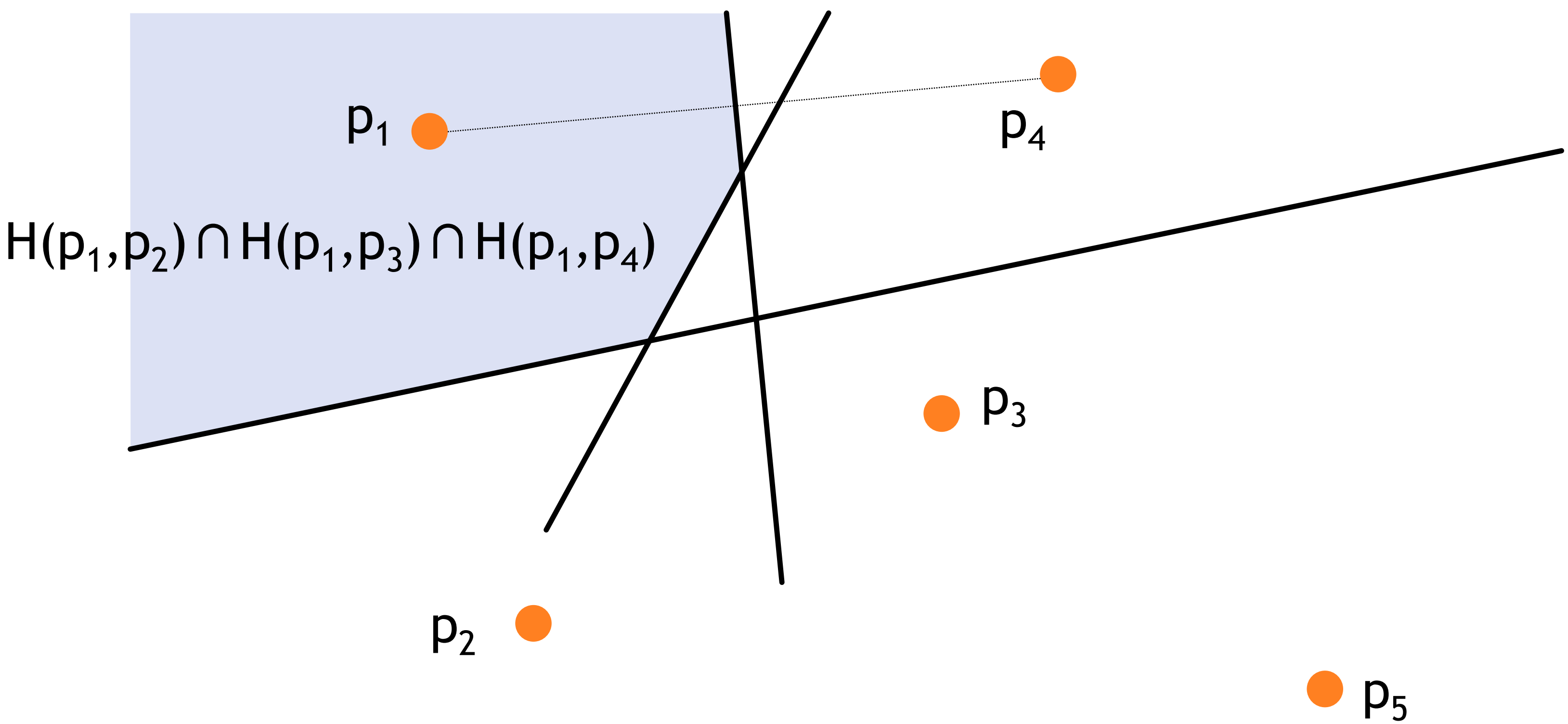
4.2.0 直接法

- $V(p_1)$の計算手順
  3. さらに，$H(p_1,p_2)\cap H(p_1,p_3)$と半平面$H(p_1,p_4)$との共通領域$H(p_1,p_2)\cap H(p_1,p_3)\cap H(p_1,p_4)$を求める



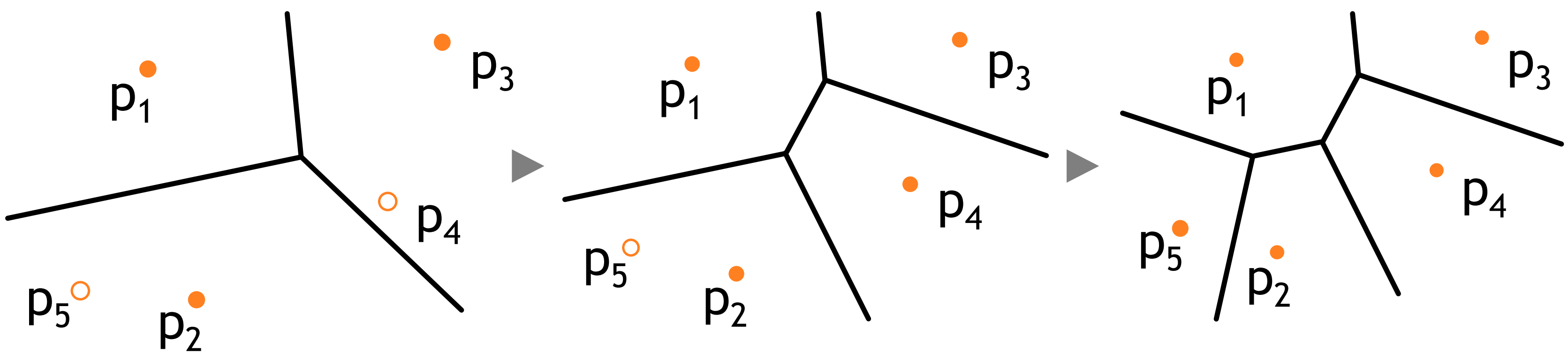
4.2.0 直接法

- V(p_1)の計算手順
  4. これを繰り返す



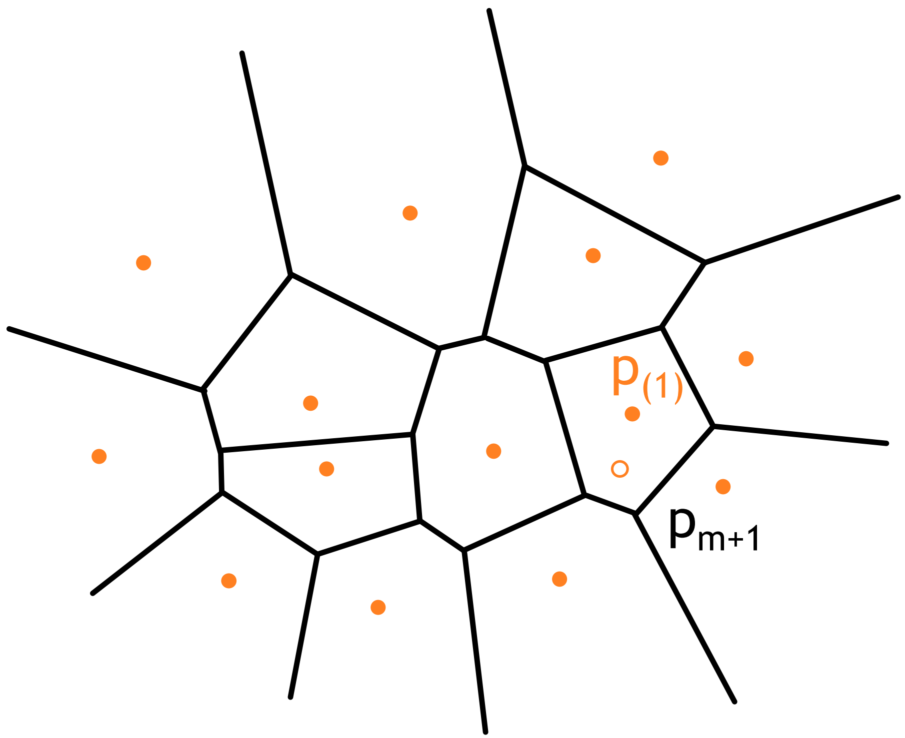
4.2.1 逐次添加法

- 逐次添加法
  - 3点p_1, p_2, p_3のボロノイ図を作成する
  - P_4から順に1点ずつ追加しながらボロノイ図を更新する



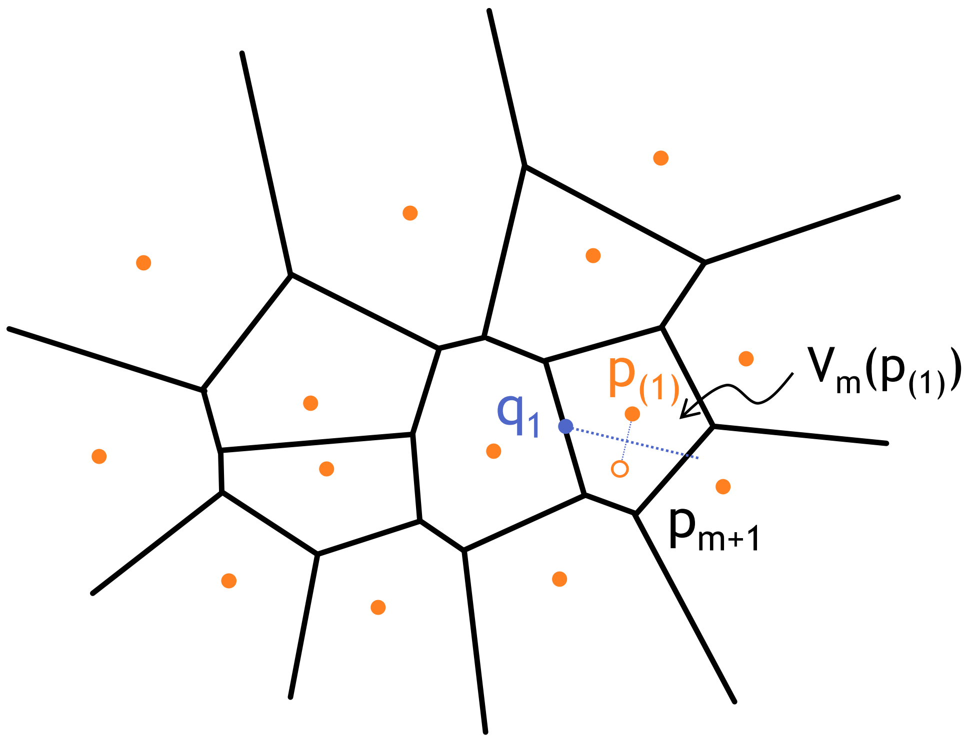
4.2.1 逐次添加法

- 逐次添加法
  - $p_1,p_2,\ldots,p_m$まで処理が終わったとする
  - p_{m+1}に最も近い母点を探し，それを$p_{(1)}$とする



4.2.1 逐次添加法

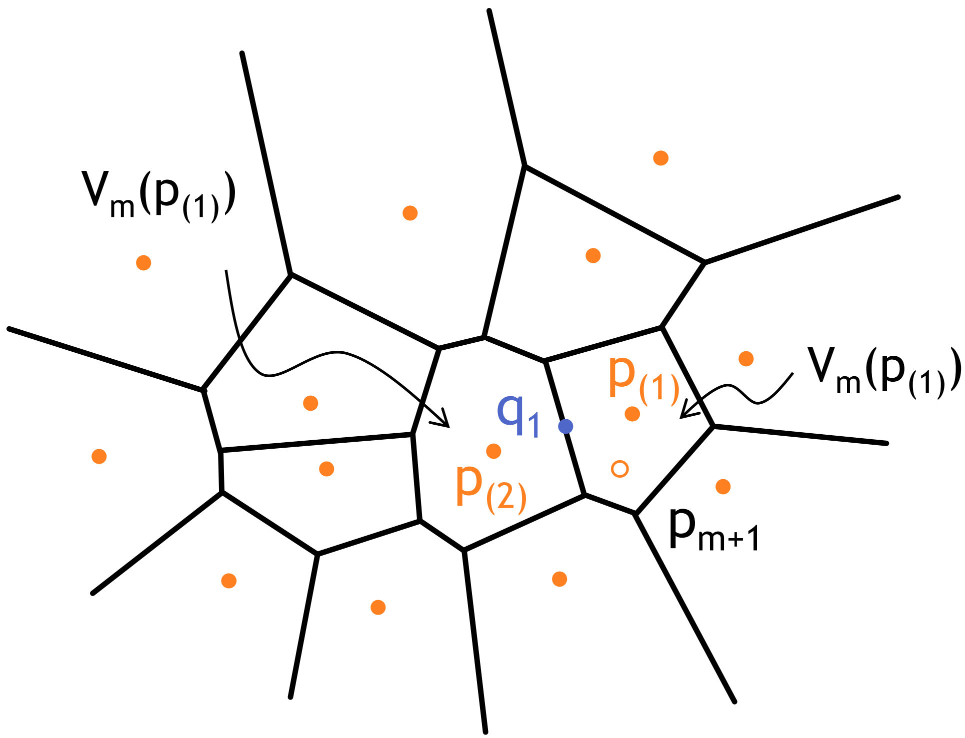
- 逐次添加法
  - 線分$p_{(1)}p_{m+1}$の垂直二等分線とボロノイ領域$V_m(p_{(1)})$の辺との交点を求め，その1つをq_1とする



4.2.1 逐次添加法

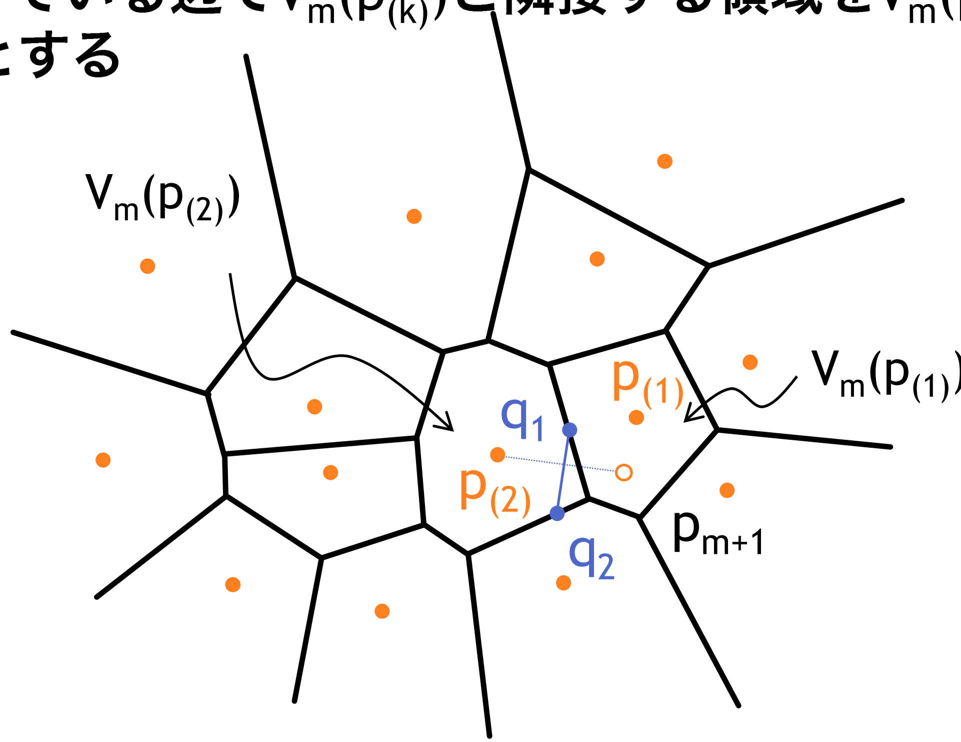
■ 逐次添加法

- q_1がのっている辺で$V_m(p_{(1)})$隣接する領域を$V_m(p_{(2)})$とし，k=2とする



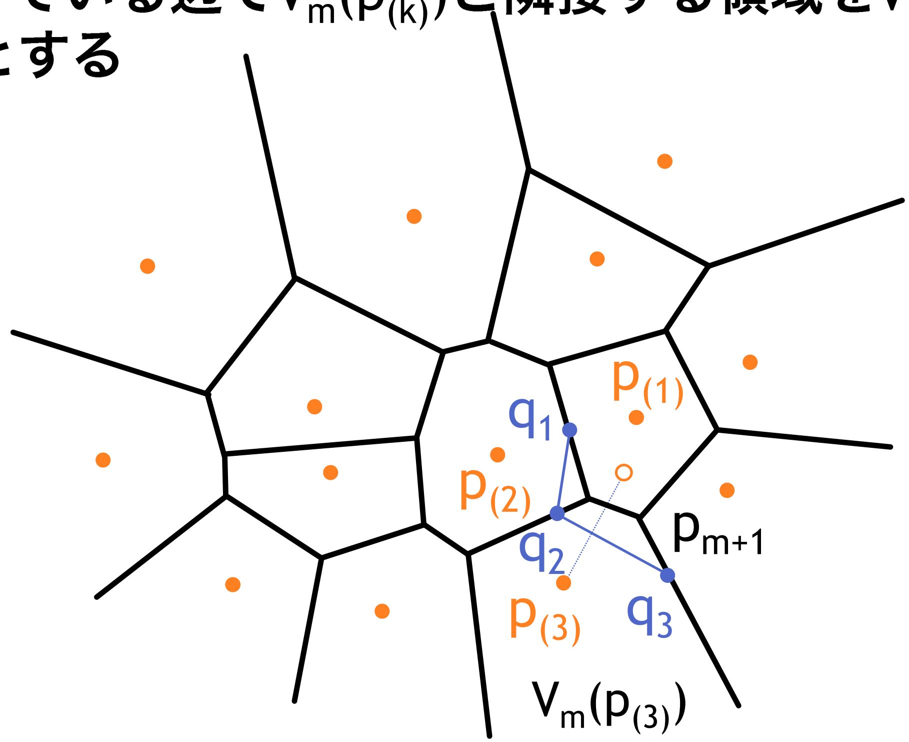
4.2.1 逐次添加法

- 逐次添加法
  - 線分$p_{(k)}p_{m+1}$の垂直二等分線と領域$V_m(p_{(k)})$の辺との交点を求める． q_{k-1}と異なる交点q_kをとする．
  - q_kがのっている辺で$V_m(p_{(k)})$と隣接する領域を$V_m(p_{(k+1)})$とし，$k \leftarrow k+1$とする



4.2.1 逐次添加法

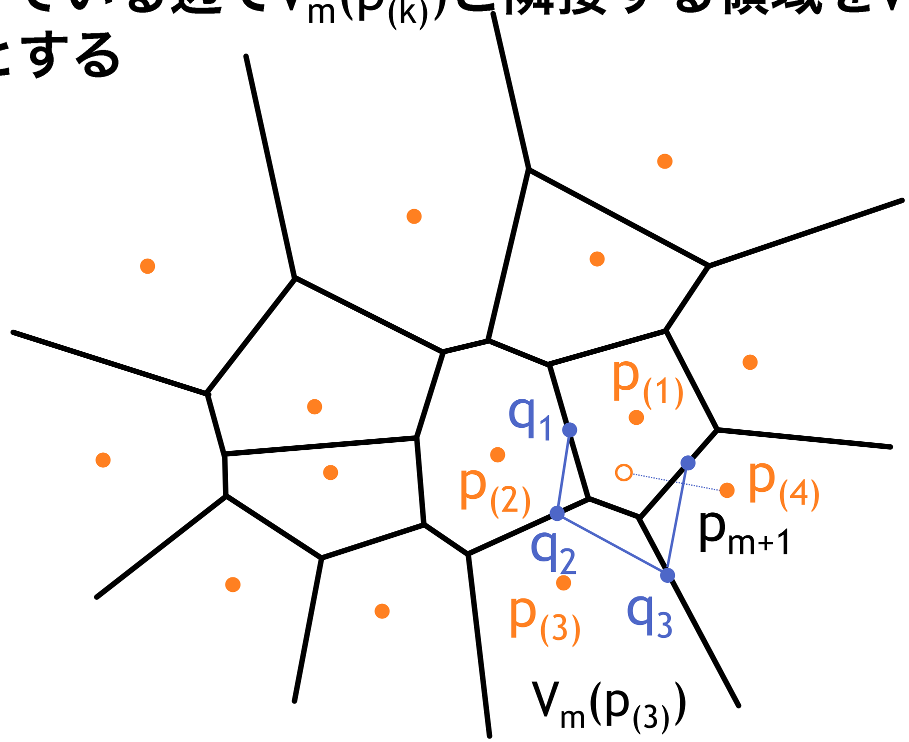
- 逐次添加法
  - 線分$p_{(k)}p_{m+1}$の垂直二等分線と領域$V_m(p_{(k)})$の辺との交点を求める． q_{k-1}と異なる交点q_kをとする．
  - q_kがのっている辺で$V_m(p_{(k)})$と隣接する領域を$V_m(p_{(k+1)})$とし，$k \leftarrow k+1$とする



4.2.1 逐次添加法

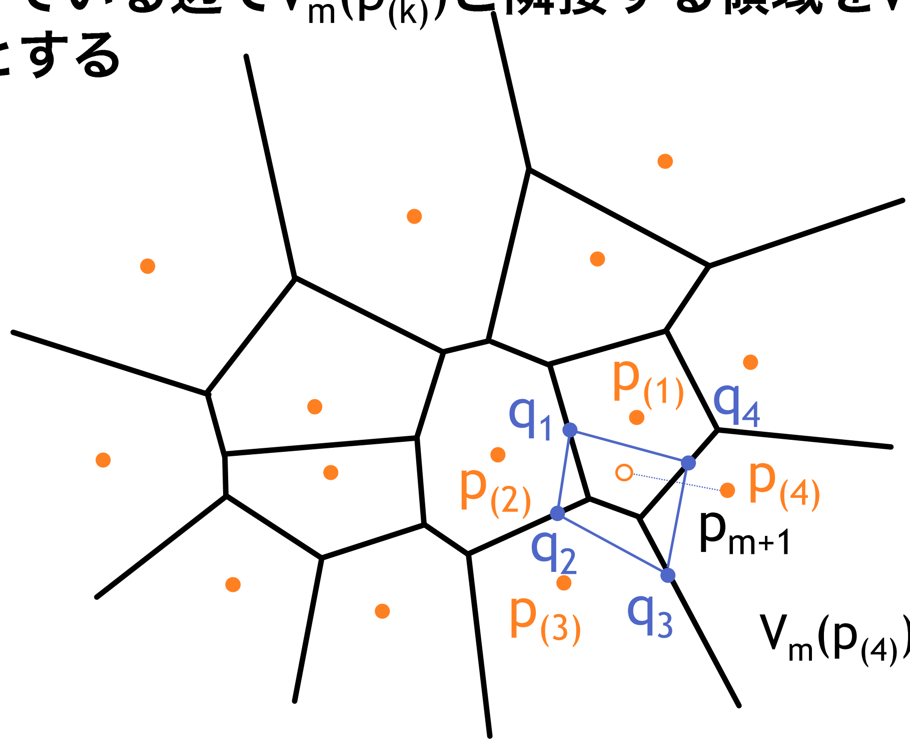
■ 逐次添加法

- 線分$p_{(k)}p_{m+1}$の垂直二等分線と領域$V_m(p_{(k)})$の辺との交点を求める． q_{k-1}と異なる交点q_kをとする．
- q_kがのっている辺で$V_m(p_{(k)})$と隣接する領域を$V_m(p_{(k+1)})$とし，$k \leftarrow k+1$とする



4.2.1 逐次添加法

- 逐次添加法
  - 線分$p_{(k)}p_{m+1}$の垂直二等分線と領域$V_m(p_{(k)})$の辺との交点を求める． q_{k-1}と異なる交点q_kをとする．
  - q_kがのっている辺で$V_m(p_{(k)})$と隣接する領域を$V_m(p_{(k+1)})$とし，$k \leftarrow k+1$とする



4.2.1 逐次添加法

- 逐次添加法
  - 多角形q1q2…qk-1が母点p_{m+1}のボロノイ領域$V_{m+1}(p_{m+1})$になる
  - $V_{m+1}(p_{m+1})$内にあるボロノイ図V_mの部分は消す