群(部分群)

吉田 努

白勢研ゼミ 2016/06/20

前回

- Tepla

今回

- 群(部分群)
- 部分群

群

- 集合Gが演算$\cdot$に対して以下を満たすとき群という
  1. (結合律)
     $a, b, c \in G$に対して, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
  2. (単位元の存在)
     $\forall a \in G$に対して, $a \cdot e = e \cdot a = a$を満たす$e \in G$が存在する
  3. (逆元の存在)
     $\forall a \in G$に対して, $a \cdot a' = a' \cdot a = e$を満たす$a' \in G$が存在する
- 集合Gが演算$\cdot$に対して群であるとき$(G, \cdot)$と表す

可換群

- 群に加えて
  - (可換律)
    $a, b \in G$に対して, $a \cdot b = b \cdot a$を満たす
- アーベル群とも呼ぶ

部分群

- 群Gの部分集合Hが群Gの演算$\cdot$に関して群になる時、Hは群Gの部分群である

部分群

- 群Gの部分集合Hが以下の2つを満たすとき
  1. $a \in H \Rightarrow a^{-1} \in H$
  2. $a, b \in H \Rightarrow ab \in H$

  部分群という

部分群

- まとめたら
  - $a, b \in H \Rightarrow a^{-1}b \in H$
- 証明

同値関係

- ある集合Sにおいて二項関係$\sim$が以下を満たすとき$\sim$はSの同値関係である
  1. 反射律
     - $a \sim a$
  2. 対称律
     - $a \sim b \Rightarrow b \sim a$
  3. 推移律
     - $a \sim b \land b \sim c \Rightarrow a \sim c$

同値類

- 集合S
- $a \in S$
- aと同値な元の集合を $\overline{a} = \{x(\in S) | x \sim a\}$ と表し同値類という
- $S_a, C(a)$でも可

商集合

- $S/\sim\ = \{S_a | a \in S\}$
  - 集合が元の集合
- $S/\sim$の和集合はSになる
- 同値関係の定義から $S_a \neq S_b \Rightarrow S_a \cap S_b = \phi$ となる

剰余群

- Gを群, Hをその部分群とする
- $a, b \in G$
- $a^{-1}b \ \in H$は同値関係
    - 証明
- この同値関係による商集合が剰余群

剰余類

- $aH = \{ah | h \in H\}$
  - ただのaの同値類
- aHがaの同値類である証明
  - 剰余類から
  - $a \sim b \Leftrightarrow a^{-1}b \in H$から

他にも

- 正規部分群
- 群の演算の遺伝
- 結構面白いが不要？

余り

- gitはIT業界の常識らしい
  - 勉強しませんか？
  - 何かを作る？