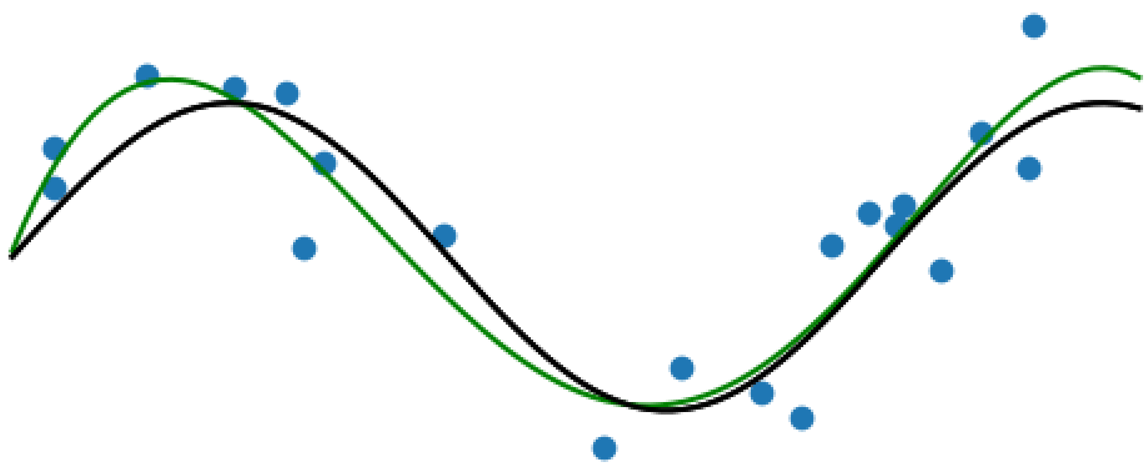
Techniques d'apprentissage

TP1



Lauren Picard Antoine Gélin
Julien Brosseau
Université de Sherbrooke

Professeur : M. Pierre-Marc Jodoin
Mail : pierre-marc.jodoin@usherbrooke.ca

20 Septembre 2019

1

Démontrons la propriété de l'entropie suivante dans le cas discret :

$$H[x, y] = H[x|y] + H[x]$$

On a :

$$\begin{aligned}
H[x, y] &= -\sum_x \sum_y p(x, y) log_2 p(x, y) \texttt{ par définition} \\
&= -\sum_x \sum_y p(x, y) log_2 (p(y|x)p(x)) \texttt{ d'après la loi de Bayes} \\
&= -\sum_x \sum_y p(x, y)(log_2 p(y|x) + log_2 p(x)) \texttt{ d'après les propriétés du logarithme} \\
&= -\sum_x \sum_y p(x, y) log_2 p(y|x) - \sum_x \sum_y p(x, y) log_2 p(x) \texttt{ d'après les propriétés de la somme} \\
&= H[y|x] - \sum_x p(x) log_2 p(x) \texttt{ par définition}
\end{aligned} \tag{1}$$

Ainsi on retrouve : $\boxed{\text{H[x,y] = H[y|x] + H[x]}}$

2

Démontrons la propriété de l'information mutuelle suivante dans le cas discret :

$$I[x, y] = H[x] - H[x|y]$$

On sait par définition que :

$$I[x, y] = KL(p(x, y)||p(x)p(y)$$

d'après la loi de Kullback-Leibler
Or :

$$KL(p(x)||q(x)) = \sum_x p(x) log_2 \frac{p(x)}{q(x)}$$

pour deux lois de probabilités p et q. Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}
I[x, y] &= \sum_{xy} p(x, y) log_2 \frac{p(x, y)}{p(x)p(y)} \\
&= \sum_{xy} p(x, y)(log_2 p(x, y) - log_2 (p(x)p(y))) \\
&= \sum_{xy} p(x, y)(log_2 p(x|y) + log_2 p(y) - log_2 p(x) - log_2 p(y)) \\
&= \sum_{xy} p(x, y) log_2 p(x|y) - \sum_x \sum_y p(x, y) log_2 p(x) \\
&= -H[x|y] - \sum_x p(x) log_2 p(x)
\end{aligned} \tag{2}$$

Ainsi on retrouve bien $\boxed{\text{I[x,y] = H[x] - H[x|y]}}$

3

Démontrons la propriété suivante dans le cas discret :

$$Cov[x, y] = E_{xy}[xy] - E[x]E[y]$$

où Cov est la fonction de covariance et E est l'espérance mathématique.

On a :

$$\begin{aligned} Cov[x, y] &= E[(x - E[x])(y - E[y])] \texttt{ par définition} \\ &= E[xy - xE[y] - yE[x] + E[x]E[y]] \texttt{ par propriété de l'espérance} \\ &= E[xy] - E[xE[y]] - E[yE[x]] + E[E[x]E[y]] \\ &= E[xy] - E[y]E[x] - E[x]E[y] + E[x]E[y] \end{aligned} \tag{3}$$

Ainsi, on retrouve $\boxed{\text{Cov[x,y] = E[xy] - E[X]E[y]}}$