1. Use una función impar para demostrar que:

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos \pi\omega}{\omega} \sin \omega t \, d\omega = \begin{cases} \pi/2 & 0 < t < \pi \\ 0 & t > \pi \end{cases}$$

2. Use una función par para demostrar que:

$$\int_0^\infty \frac{\cos \omega t}{1+\omega^2} d\omega = \frac{\pi}{2} e^{-t}$$

3. Demuestre que:

$$\int_0^\infty \frac{\cos \omega t + \omega \, \sin \omega t}{1+\omega^2} \, d\omega = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \pi/2 & t = 0 \\ \pi \, e^{-t} & t > 0 \end{cases}$$

4. Demuestre que:

$$\int_0^\infty \frac{\sin \pi\omega \, \sin \omega \, t}{1-\omega^2} \, d\omega = \begin{cases} \frac{\pi \, \sin t}{2} & 0 \leq t \leq \pi \\ 0 & t > \pi \end{cases}$$

5. Encuentre la integral de Fourier de las siguientes:

   i. $f(t) = \begin{cases} t & 0 < t < a \\ 0 & t > a \end{cases}$

   ii. $f(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < a \\ 0 & t > a \end{cases}$

   iii. $f(t) = e^{-t} + e^{-2t}$

   iv. $f(t) = \begin{cases} t^2 & 0 < t < a \\ 0 & t > a \end{cases}$

6. Encuentre la transformada seno y coseno de:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < 1 \\ 0 & t > 1 \end{cases}$$

7. Encuentre la transformada de Fourier de las siguientes:

   i. $f(t) = \begin{cases} e^{-t} & 0 < t \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

   ii. $f(t) = \begin{cases} 1-t & |t| < 1 \\ 0 & 1 < |t| \end{cases}$

   iii. $f(t) = \begin{cases} e^{t} & |t| < 1 \\ 0 & 1 < |t| \end{cases}$

   iv. $f(t) = e^{-|t|}$

8. Demuestre las siguientes, suponga que f es sumable:

i. $\mathcal{F}\left\{e^{iat} f(t)\right\} = F(\omega - a)$

ii. $\mathcal{F}\left\{f(at)\right\} = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$

iii. $\mathcal{F}\left\{f'(t)\right\} = i\omega\, F(\omega)$

9. Suponga que $f(t)$ es sumable calcule el valor de los siguientes, justifique su respuesta:
   (a) $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\delta'(x)\,dx$
   (b) $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\delta^{(2)}(x)\,dx$
   (c) $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\delta((x-1)\,(x+1))\,dx$
   (d) $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\delta(\sin x)\,dx$

10. Suponga que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función periodica con periodo $T = 2L$, escriba su transformada de Fourier en función de δ y sus coeficientes de Fourier.

11. Demuestre para la convolución:

$$(f \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-\tau)\,g(\tau)\,d\tau$$

   las siguiente propiedades:
   (a) $\delta(x)$ es neutro respecto $\star$.
   (b) $\star$ es conmutativa.
   (c) Sea T_{x_0} el operador definido por:

$$T_{x_0}\{f\}(x) = f(x + x_0)$$

   entonces $T_{x_0}\{f\} \star g = f \star T_{x_0}\{g\}$

12. Para la función:

$$\Pi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| > 1 \\ 1 & \text{si } |x| < 1 \end{cases}$$

   calcule su transformada de Fourier y utilice el teorema de inversión para calcular:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi x)}{\pi\, x}\,dx = \int_{\mathbb{R}} sinc(\pi\, x)\,dx$$