

Estudio de la elasticidad en barras de acero y latón: Módulo de Young

Basili Lucía, Rodríguez Arianna, Sakamoto Lara
luciabasili2@gmail.com, ariannarodri2004@gmail.com, laranaomi1994@gmail.com

Laboratorio 4. Verano 2025 – Lunes y Jueves 8 - 14 hs.
Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, UBA

Resumen

Este trabajo tiene como objetivo principal estudiar la elasticidad de materiales metálicos, particularmente en varillas de acero y latón, a través del análisis de sus oscilaciones. Se midió el módulo de Young de ambos materiales a partir de la excitación de sus modos normales y su relación con la atenuación de la luz. Para ello se realizaron ajustes exponenciales a los picos de las señales, para hallar el coeficiente de amortiguamiento de la señal. Posteriormente se hizo un análisis de Fourier para poder hallar la frecuencia de resonancia del sistema. Con estos resultados se pudo obtener el Módulo de Young. Para una varilla de latón se realizó un ajuste lineal de los valores obtenidos mediante la relación de dispersión donde de su pendiente se obtuvo el módulo de Young $E_{laton} = (71 \pm 4)$ GPa. Por último de las 2 mediciones para la varilla de acero se obtuvo de la relación de dispersión un Módulo de Young de $E_{acero_1} = (205 \pm 3)$ GPa respectivamente y $E_{acero_2} = (206 \pm 3)$ GPa. Los resultados obtenidos permitieron caracterizar la rigidez de los materiales y compararlos con valores tabulados, analizando la precisión y confiabilidad del método experimental.

1. Introducción

El estudio de la elasticidad de los materiales es fundamental para evaluar su resistencia y adecuación en distintas aplicaciones, como en la construcción de infraestructuras o el desarrollo de materiales resistentes.

En este contexto, la elasticidad juega un papel clave, ya que describe la capacidad de un material para deformarse y luego recuperar su tamaño y forma original ante una perturbación. Existe una cantidad física que cuantifica la elasticidad de los materiales, llamada Módulo de Young; es una propiedad física de los cuerpos sólidos y se puede calcular de diversas formas.

1.1. Marco teórico

En particular, si se tiene una barra sujeta de un extremo y libre del otro, podemos conocer su elasticidad al analizar su frecuencia de oscilación ante una perturbación mecánica inicial. Veamos que si $y(x, t)$ es el apartamiento vertical del equilibrio en una posición x a un dado

tiempo t , la expresión más general para el movimiento de una barra [1] es

$$y(x, t) = [A \cos(k_n x) + B \cosh(k_n x) + C \sin(k_n x) + D \sinh(k_n x)] \sin(\omega_n t + \phi_0) e^{-\alpha t} \quad (1)$$

donde k_n es el número de onda que define el modo normal de oscilación, asociada a ella ω_n la frecuencia angular de oscilación, ϕ_0 la fase inicial, t el tiempo y α un parámetro asociado al amortiguamiento de las oscilaciones.

Específicamente, las primeras dos variables están relacionadas entre sí por medio de la relación de dispersión para ondas de flexión

$$\omega_n = \sqrt{\frac{IE}{\rho_l} k_n^4 - \alpha^2} \quad (2)$$

donde I es el momento de inercia con respecto a su eje de simetría (para un cilindro $I = \frac{\pi d^4}{64}$ con d el diámetro del cilindro), ρ_l la densidad por unidad de longitud y E el módulo de Young [1].

Finalmente, planteando las condiciones de contorno para una varilla con un extremo libre en la ecuación (1) se llega a la expresión

$$\cos(k_n L) \cosh(k_n L) + 1 = 0 \quad (3)$$

donde quedan determinados los modos de oscilación de la barra por los k_n y L su longitud. Algunos de los primeros modos están dados por $k_1 = 1.875/L$, $k_2 = 4.694/L$ y $k_3 = 7.855/L$ [2].

Entonces, al observar la ecuación (1) es de esperar que al excitar uno de los extremos de la varilla las oscilaciones sigan la distribución de un oscilador subamortiguado, dada por el factor exponencial. De esta forma, conociendo la frecuencia de oscilación de la barra por medio de (2) podemos conocer su resistencia ante una perturbación mecánica sobre uno de sus extremos.

En este trabajo se propone medir el módulo de Young para distintos materiales utilizando el caso particular planteado. Se espera ver el decaimiento en amplitud de las señales temporales, dadas por el amortiguamiento de la varilla. A partir de ellas, utilizando la transformada de Fourier, podemos recuperar el espectro de frecuencias del sistema y conocer la frecuencia n -ésima ω_n excitada para así determinar E .

2. Desarrollo experimental

Con el objetivo de medir el módulo de Young de distintos materiales, se buscó conocer la frecuencia de oscilación de cada uno de ellos a partir de una excitación mecánica inicial. Para ello, se relacionó la rigidez de dos varillas, una de latón y otra de acero, cuyos valores tabulados son conocidos [2] siendo para el latón $E_{\text{latón}} = 125$ GPa, y para el acero $E_{\text{acero}} = 210$ GPa, con la intensidad de luz al decaer la amplitud de sus oscilaciones. Para ello se utilizó el esquema experimental que se observa en la Figura 1.

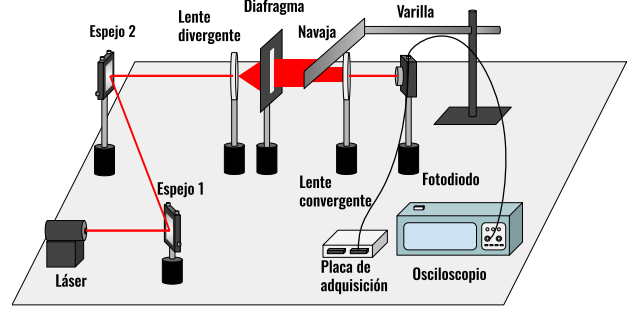


Figura 1: Esquema experimental utilizado. Todos los dispositivos se montaron sobre una mesa óptica.

Se hizo incidir el haz de un láser Melles Griot (Clase IIIa) de longitud de onda $\lambda = 670$ nm sobre una navaja sujeta a una de las varillas (de (0.6 ± 0.1) cm de diámetro cada una de las varillas utilizadas) por medio de un soporte.

Para poder direccionar con mayor precisión el punto de incidencia, regulando los dos grados de libertad del haz, se utilizaron los espejos 1 y 2. El primero de ellos se utilizó para controlar la componente horizontal, mientras que el segundo para la vertical.

Como el haz de luz proveniente del láser es aproximadamente una fuente puntual, y se buscaba que este cubriese gran parte de la navaja, se utilizó una lente divergente de distancia focal $f = -125$ mm. Esta permitió expandir el área de incidencia del láser.

Por otro lado, como se pretendía excitar verticalmente la navaja permitiendo que esta tape y destape partes del haz al oscilar la varilla, se buscó concentrar un haz definido sobre ella. Para ello, se utilizó una rendija cuadrada con el fin de eliminar los destellos del haz circular que proveía el láser. De esta manera, conseguimos una franja vertical sobre la navaja a costo de perder intensidad.

Queriendo que el haz interceptado converja sobre el sensor de un fotodiodo Thorlabs DET36A/M cuyo rango es de (350 - 110) nm y salida de (0 - 10) V, se colocó una lente convergente de distancia focal $f = 200$ mm a aproximadamente 21 cm de él. Esta distancia fue elegida de tal forma que el diodo se encuentre lo más cercano al punto focal de la lente.

Finalmente, para visualizar de forma inme-

diata la distribución de intensidad al atravesar la navaja se conectó el diodo a un osciloscopio Tektronix TDS 1002B. Además, se utilizó una placa de adquisición National Instruments NI USB 6210 para adquirir los datos simultáneamente.

Una vez finalizado el armado experimental, se propuso excitar la varilla con pequeños tiros manuales en su extremo libre, procurando que las oscilaciones sean lo más verticales posibles para no excitar los modos horizontales de la misma. En consecuencia, la navaja oscilaba cubriendo distintas porciones del haz incidente, y con ello variando la intensidad de la luz captada por el diodo.

Dado que el soporte permitía modificar el largo de la varilla (dejando fijo uno de sus extremos y libre al que contenía a la navaja), este proceso se realizó para distintas longitudes y además se lo replicó para ambas varillas de acero y latón.

En la siguiente sección se desarrollará sobre como es posible recuperar la frecuencia de resonancia (o bien el espectro de frecuencias) con la que se excitó a las varillas. Para ello, se utilizará una descomposición de Fourier de las señales crudas.

3. Resultados y discusión

En esta sección se presentan los resultados obtenidos a partir del análisis experimental del comportamiento oscilatorio de las varillas de acero y latón. Se realizó un estudio detallado del decaimiento de la señal del láser detectada por el fotodiodo y su relación con la frecuencia de oscilación de cada material.

3.1. Corrección de las señales crudas

Se adquirieron las señales de voltaje en función del tiempo con una frecuencia de muestreo $f = 25$ kHz. Se observó el decaimiento exponencial de la amplitud de la señal pero montado sobre una lineal decreciente. Este fenómeno no se observaba en el osciloscopio sino al momento de adquirir los datos, por lo que atribuimos esta discrepancia al DAQ.

A partir de los datos adquiridos con la placa de adquisición, se realizaron ajustes lineales para corregir posibles desplazamientos en la señal de voltaje. El ajuste lineal se realizó a partir del

último $\approx 60\%$ de los datos, región donde la amplitud de la señal sinusoidal es baja, lo que hace que la tendencia lineal sea más evidente. Esta tendencia lineal se restó a la señal original, obteniendo así una señal corregida, con su media centrada en el origen (ver Fig.2).

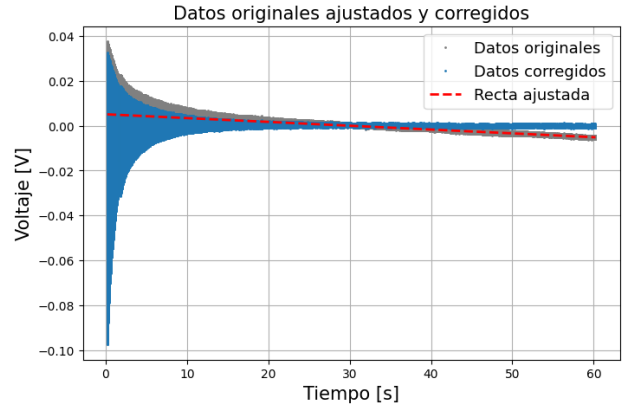


Figura 2: Señal original en gris de una medición de latón de largo (22.7 ± 0.1) cm con la señal corregida en celeste y en rojo el ajuste lineal utilizado.

Una vez realizado este proceso para todas las señales obtenidas con el DAQ, se procedió a analizar las señales corregidas.

3.2. Varilla de latón

Una vez corregidos los datos según lo explicado en la sección anterior, analizamos las señales crudas levantadas por la placa de adquisición para el barrido de longitudes. En la Figura 3 se observa el comportamiento amortiguado de las oscilaciones para una longitud fija $L = (17.7 \pm 0.1)$ cm de la varilla de latón. En ella se aprecia cómo la amplitud decae consistentemente con el modelo teórico dado por el parámetro α de la ecuación (1), hasta llegar a una amplitud cercana a los 0 V.

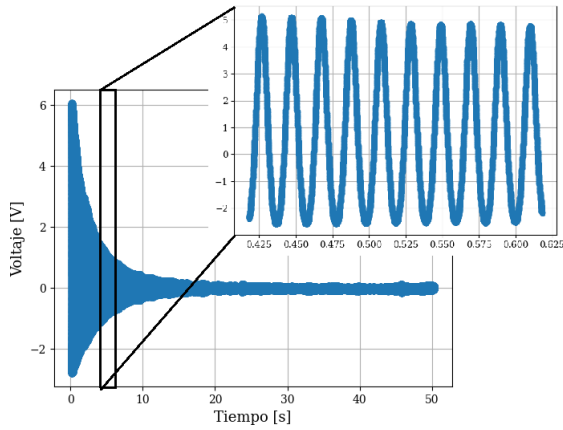


Figura 3: Señal corregida del decaimiento de las oscilaciones de la varilla de latón y una ampliación de la señal en un intervalo temporal más corto.

Sin embargo, el amortiguamiento sigue una distribución asimétrica (arriba - abajo) respecto al origen, haciendo más pronunciada la atenuación en los picos máximos. Esto se relaciona directamente con el área de impacto del haz del láser sobre la navaja. Dado que el centro del haz se direccionó en la mitad superior del filo, al taparse y destaparse el mismo con las oscilaciones de la varilla, hubo siempre una sección del haz cubierta por la navaja. Esto provocó la pérdida de lectura en la mitad inferior de las mediciones de voltaje en la Figura 3, permitiendo explicar la distribución asimétrica observada.

Por otro lado, en el zoom de la figura es posible notar con mayor claridad un comportamiento no del todo sinusoidal, presenta una asimetría: las curvas en la parte superior están más juntas que en la inferior, debido a lo explicado en el desarrollo experimental sobre cómo el haz incidía sobre la navaja, algo que no es visible en la señal original dada la alta frecuencia de muestreo y duración de las mediciones.

Con el objetivo de medir el módulo de Young para el latón E_{laton} se buscó determinar el valor de α a partir de los picos máximos de la señal sinusoidal. Para ello se realizó un ajuste no lineal de acuerdo a la ecuación (1) como se detalla en la Figura 4, donde se consideró únicamente el término exponencial y se tomó a la amplitud decayente explicitada entre corchetes como A .

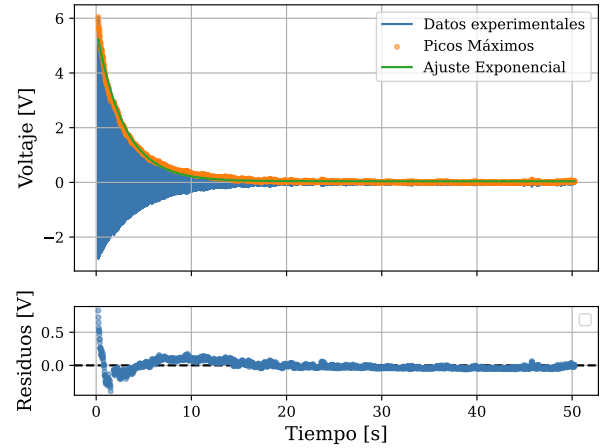


Figura 4: Decaimiento de la señal correspondiente a la varilla de latón de longitud $L = (17.7 \pm 0.1)$ cm. Además, el ajuste exponencial y los residuos de la función $Ae^{-\alpha t}$ a partir de los picos máximos donde el parámetro A corresponde al término entre paréntesis de la ecuación (1).

Se observa que los residuos no siguen una distribución aleatoria en el intervalo temporal de (0 - 15) s. Sin embargo, en la dispersión general los valores se distribuyen de forma aleatoria al aumentar el tiempo y cercanos al origen. Además, dados los valores obtenidos para el χ^2 reducido de 1.05 y un p-valor de 0.03, podemos afirmar que el ajuste predice adecuadamente los datos.

Luego, a partir del ajuste se estimó un valor para el decaimiento $\alpha = (0.344 \pm 0.001) \frac{1}{s}$. El error se obtuvo a partir del ajuste realizado donde se tuvo en cuenta el error en el voltaje proveído por el manual de la placa de adquisición National Instruments NI USB (ver Ap. 5.1). Este ajuste se realizó para todas las longitudes, cuyos decaimientos ajustados se pueden observar en la Figura 5. En ella, se puede visualizar cómo al disminuir el largo de la varilla, el amortiguamiento de la señal es más pronunciado y la amplitud inicial disminuye. Esto último se debe a que las varillas más cortas presentan mayor rigidez, lo cual limita la amplitud de la perturbación inicial y reduce la energía almacenada en la oscilación.

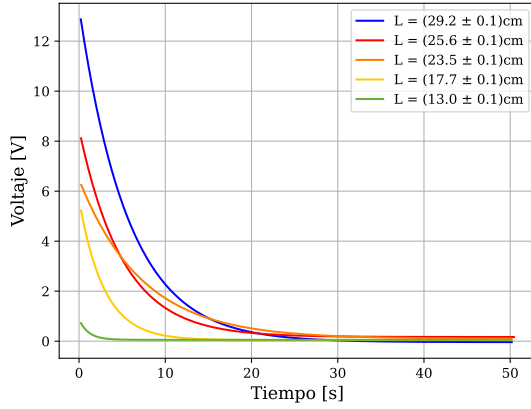


Figura 5: Ajustes exponenciales sobre los picos máximos de todas las señales del barrido de longitudes de la varilla de latón.

Una vez determinado un valor para α , también fue necesario conocer la frecuencia fundamental excitada al perturbar la varilla. Entonces, aplicando la transformada de Fourier sobre las señales fue posible recuperar el espectro de frecuencias de las oscilaciones. Para ello, se analizó cada señal en un mismo intervalo temporal a partir de un rango de decaimiento del 10 % y se seleccionaron $N = 250$ ciclos completos (ver Ap. 5.2).

En particular, en la Figura 6 se observa el contenido espectral obtenido para la varilla de las Figuras 3 y 4. En ella se distingue un pico claro, correspondiente al primer modo de oscilación $f_1 = (49.2 \pm 0.2)$ Hz si consideramos $k_n = k_1$, y en línea roja el ancho de mitad de campana. De esta manera, caracterizados los ω_n y midiendo la densidad ρ_l de cada varilla (sabiendo que la masa de las varillas es $m_{\text{latón}} = (77.1000 \pm 0.0001)$ g y $m_{\text{acero}} = (123.2000 \pm 0.0001)$ g) se logró medir un valor para $E_{\text{latón}}$ por medio de la ecuación 2.

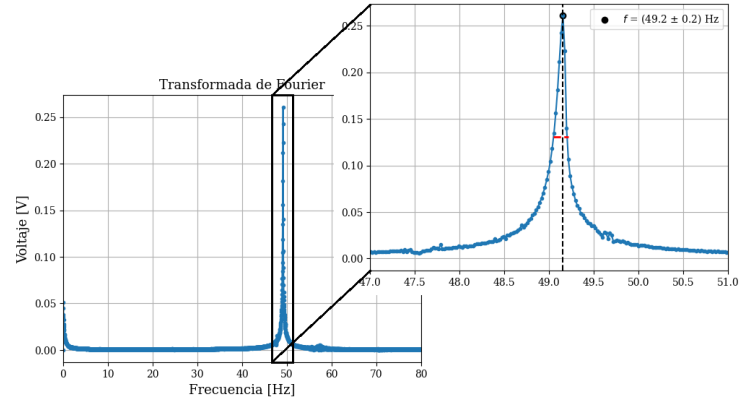


Figura 6: Respuesta espectral correspondiente a la varilla de largo $L = (17.7 \pm 0.1)$ cm. Se aprecia la frecuencia fundamental excitada en el pico máximo y en línea roja el ancho de banda a mitad de campana de la transformada de Fourier, el cual se tomó como incerteza de f .

Se realizó un ajuste lineal de la ecuación mencionada en función de la longitud de cada varilla, con el objetivo de obtener una medición más precisa para el módulo de Young. En la Figura 7 se observa cómo los datos presentan una clara distribución creciente, dada por la linealidad de la relación de dispersión. Esto se debe a lo mencionado respecto a las Figuras 3 y 5; dado que al aumentar L la resistencia ofrecida por las varillas disminuía, esto resultó en oscilaciones más lentas con frecuencias más grandes.

Por otro lado, se observa cómo la distribución de los residuos se mantiene aleatoria y cercana al origen; lo cual en adición a un valor igual a la unidad para el χ^2 reducido y un p-valor de 0.4 permite afirmar que el ajuste aproxima con eficiencia los datos obtenidos. Luego, de la pendiente del ajuste se obtuvo un valor para el módulo de Young del latón (71 ± 4) GPa. El error asociado a este valor se estimó considerando la propagación de los errores de las variables en el eje y a partir del ajuste realizado (ver Ap. 5.3).

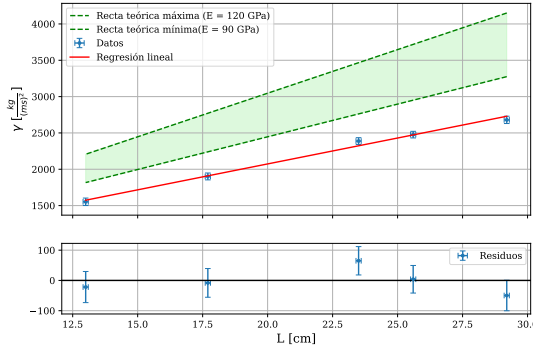


Figura 7: Ajuste lineal a partir de la ecuación (2) para el barrido de longitudes de la varilla de latón y sus respectivos residuos, con $\gamma = \frac{(\omega_n^2 + \alpha^2)}{Ik_n^4} m\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2$. En función de él se estimó el módulo de Young para el latón, y además en verde el rango tabulado para E_{laton} [3].

Sin embargo, en la figura también se representa con sombreado verde el rango del valor tabulado para E_{laton} de (90 - 120) GPa [3], que parece diferir significativamente con el ajuste de los datos. Al observar el resultado obtenido para el módulo de Young, podemos decir que es considerablemente menor al valor tabulado para el latón puro. Esta discrepancia puede deberse a la incertidumbre en la composición exacta del material de la varilla utilizada en el experimento, ya que no se contaba con información precisa sobre su aleación. Es posible que la varilla contuviera otros elementos o impurezas que modificaran sus propiedades mecánicas, afectando la rigidez y, en consecuencia, el valor del módulo de Young obtenido experimentalmente.

3.3. Varilla de acero

Para determinar el módulo de Young para el acero inoxidable, se realizó un análisis análogo al expuesto en la sección anterior, aunque para este caso se dejó fija la longitud de la varilla y se tomaron dos mediciones con $L = (30.0 \pm 0.1)$ cm.

En primer lugar, al excitar la varilla, las oscilaciones presentaron un comportamiento consistente con el observado en la Figura 3. Por ende, habiendo repetido el preprocesado de los datos descrito en la Sección 3.1., se realizó un ajuste exponencial a partir de la ecuación 1 a la señal envolvente y se obtuvieron los valores para el parámetro de decaimiento $\alpha_1 = 0.1138 \pm 0.0007) \frac{1}{s}$ y $\alpha_2 = (0.1159 \pm 0.0006) \frac{1}{s}$.

Luego, para identificar la frecuencia de resonancia del primer modo de oscilación se realizó el mismo análisis de Fourier sobre las señales de la varilla de acero, utilizando el criterio mencionado en la Sección 3.2.. A partir de ello, se ubicó un pico máximo en cada medición, similar al observado en la Figura 6, obteniéndose las frecuencias fundamentales $f_1 = (35.08 \pm 0.08)$ Hz y $f_2 = (35.04 \pm 0.08)$ Hz.

Finalmente, recurriendo a la relación de dispersión de la ecuación (2) se obtuvo el valor $E_{acero} = (205 \pm 3)$ GPa para ambas mediciones. Aunque este a una diferencia de 2σ predice de forma exacta el valor tabulado para el acero, de $E_{acero} = 210$ GPa [2], podemos atribuir esta discrepancia con la composición del material. Dado que no conocemos con certeza el material de las varillas, no podemos asegurar que la varilla sea puramente de acero; sin embargo sí fue posible obtener un valor para cuantificar la elasticidad de la varilla utilizada.

4. Conclusiones

A partir del estudio de la flexión de dos varillas cilíndricas de distintos materiales, una de latón y otra de acero inoxidable, se logró medir experimentalmente el módulo de Young para cada material. Para ello, mediante el análisis de sus señales temporales de acuerdo al comportamiento oscilatorio descrito en la ecuación (1), se caracterizó el coeficiente de amortiguamiento α de cada varilla. Además, el análisis de Fourier de dichas señales permitió recuperar las frecuencias fundamentales de oscilación ω_n , dadas al perturbar las barras, y en consecuencia obtener los valores de E_{acero} y E_{laton} por medio de la relación de dispersión (2).

En la Sección 3.1. se detectó un error sistemático de detección en la placa de adquisición DAQ, el cual mostraba un comportamiento lineal decreciente en el último 60 % de los datos. Para ello, fue necesario reconstruir las señales para que sus medias se encuentren centradas en el origen.

Hecho esto, en el apartado siguiente se estudió la elasticidad de una varilla de latón mediante una regresión lineal para el barrido de longitudes. Se observó que al perturbar la varilla, la amplitud de sus oscilaciones decaía con un amor-

tiguamiento acorde al modelo teórico utilizado. Luego, utilizando un ajuste no lineal se detectaron y ajustaron los picos máximos del decaimiento, obteniendo así un valor para α .

Al repetir este proceso para el barrido de longitudes, se detectó que al disminuir el largo de la barra, la amplitud decaía de forma más pronunciada debido a la rigidez de las varillas ante valores de L más pequeños. Esto también estaba relacionado a la limitación de la amplitud de las oscilaciones al disminuir la energía almacenada por las varillas más cortas.

Por otro lado, mediante el análisis de Fourier se recuperó el contenido espectral de cada medición y se detectaron las frecuencias fundamentales asociadas a las perturbaciones iniciales. Finalmente, mediante una regresión lineal se estimó un valor para $E_{laton} = (71 \pm 4)$ GPa el cual difiere con su valor tabulado y se atribuyó la diferencia del modelo a la composición de la varilla utilizada. De no estar compuesta de latón puro, podríamos explicar el valor para el módulo de Young obtenido.

Respecto a la Sección 3.3., se observó un comportamiento análogo a la observado en la varilla de latón. El análisis de la varilla de acero arrojó el valor para el acero inoxidable de $E_{acero} = (205 \pm 3)$ GPa en ambas mediciones, cuya discrepancia con el valor tabulado se atribuyó a la incerteza de la composición de la varilla. Sin embargo, esta medición permitió cuantificar la elasticidad de la varilla de acero.

Si bien los ajustes fueron adecuados y los valores obtenidos muestran coherencia con la teoría, la dispersión de los datos y la posible presencia de impurezas en los materiales introducen incertidumbre en los resultados. Futuras mediciones con un mayor número de longitudes y materiales de composición certificada permitirían mejorar la precisión en la determinación del módulo de Young.

5. Apéndice

5.1. Error en el voltaje

Para el error se tuvo en cuenta el error propio de la medición de voltaje otorgado por el manual del DAQ:

$Error\ Lectura\ de\ Voltaje = Lectura \cdot (Error\ de\ Ganancia) + Rango \cdot (Error\ de\ Desplazamiento) + Incertidumbre\ por\ Ruido.$

Además se sumó la desviación estándar de los picos en la región a partir de la cual la amplitud se mantiene constante.

5.2. Región para la transformada de Fourier

En la siguiente figura se muestra la región tomada para realizar la transformada de Fourier para el caso de la medición correspondiente al largo $L = (17.7 \pm 0.1)$ cm.

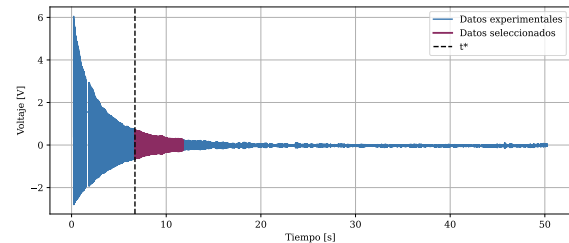


Figura 8: Región tomada para la Transformada de Fourier donde t^* corresponde al punto temporal donde la señal decae en un 10 %. A partir de este punto se toman $N = 250$ picos.

5.3. Error en la determinación del Módulo de Young

En esta sección se presenta la expresión utilizada para la propagación de errores en el cálculo del Módulo de Young. Despejando $E \cdot L$ de la ecuación 2, se puede observar que el error en el eje y de la Figura 7 corresponde al error propagado de la anterior expresión. Así entonces la propagación de errores estará dada por:

$$\Delta\gamma = \sqrt{(L \cdot \Delta E)^2 + (E \Delta L)^2} \quad (4)$$

donde ΔE el error correspondiente a cada una de los valores de E para las cuales se tuvo en cuenta el error instrumental de las longitudes y el error en la frecuencia obtenida de la transformada de Fourier. Por otro lado, ΔL es el error instrumental de la cinta métrica utilizada.

Referencias

- [1] Landau, L.D. & Lifshitz, E.M. (1959) "Theory of Elasticity", Pergamon Press, Oxford. Disponible en: https://pierre.ag.gerard.web.ulb.be/textbooks/books/Landau_Lifshitz_T7.pdf
- [2] Pablo Cobelli, "Young Estático y Dinámico". Disponible en: https://github.com/pablocobelli/laboratorio4/blob/main/Practicas/Young-Estatico_y_Dinamico/guia_modulo_Young.pdf
- [3] AZO Materials. (2019). Copper alloys - Brasses. Disponible en: <https://www.azom.com/properties.aspx?ArticleID=63>