COHOMOLOGÍA

Author

Eigenvalue

PUCP

2026-1

Índice

1 Cohomología de $\mathbb{R}^n$

El objetivo de esta sección es calcular todos los niveles de cohomología de $\mathbb{R}^n$. En concreto probaremos que:

$$H^k(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{si } k = 0, \\ \{0\}, & \text{si } k \geq 1. \end{cases}$$

Comenzaremos calculando la cohomología de $\mathbb{R}^1$

Proposición 1. *Se cumple que:*

$$H^k(\mathbb{R}) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \textit{si } k = 0, \\ \{0\}, & \textit{si } k = 1. \end{cases}$$

Demostración. Si $k = 0$, el conjunto $ker\{C^\infty(\mathbb{R}) \xrightarrow{d} \Omega^1(\mathbb{R})\}$ coincide con el conjunto $\{\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ con f constante $\}$. Por ultimo, obtenemos lo siguiente:

$$H^0(\mathbb{R}) = \frac{\mathbb{R}}{\{0\}} = \mathbb{R}.$$

Si $k = 1$, tenemos la siguiente cadena:

$$C^\infty(\mathbb{R}) \xrightarrow{d} \Omega^1(\mathbb{R}) \xrightarrow{d} 0.$$

Luego, si tomamos $fdx \in \Omega^1(\mathbb{R})$ y consideramos la función $g(x) = \int_0^x f(t)dt$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$. Obtenemos que $dg = fdx$. Es decir, toda 1-forma de $\mathbb{R}$ es exacta lo cual implica que:

$$H^1(\mathbb{R}) = \{0\}.$$

□

Notemos que el argumento usado para calcular $H^0(\mathbb{R})$ generaliza para $H^0(\mathbb{R}^n)$ dado que toda función de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$ con derivada nula en todo punto es constante.

Proposición 2. *Se cumple que:*

$$H^0(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$$

Demostración. El conjunto $ker\{C^\infty(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{d} \Omega^1(\mathbb{R})\}$ coincide con el conjunto $\{\mathbb{R}^n \xrightarrow{f}$

$\mathbb{R}$ con f constante $\}$. Por ultimo, obtenemos lo siguiente:

$$H^0(\mathbb{R}^n) = \frac{\mathbb{R}}{\{0\}} = \mathbb{R}.$$

$\square$

Continuemos con el calculo de la cohomología en $\mathbb{R}^2$.

Proposición 3. *Se cumple que:*

$$H^2(\mathbb{R}^2) = \begin{cases} \mathbb{R}, & si\ k = 0, \\ \{0\}, & si\ 1 \leq k \leq 2. \end{cases}$$

Demostración. El caso $k = 0$ sigue de proposición 2.Para $k = 1$, tomemos $\omega = fdx + gdy$ cerrada, lo cual implica que

$$d\omega = (\partial_x g - \partial_y f)dx \wedge dy = 0.$$

Luego, $\partial_x g - \partial_y f = 0$ lo cual implica que:

$$f(x,y) = \int_0^y \partial_x g(x,t) + a(x)$$

Remplazando obtenemos que $\omega = \int_0^y \partial_x g dx + a(x)dx + gdy$. Notemos que $\eta = \int_0^y \partial_x g dx + gdy$ es una forma exacta con primitiva $\theta = \int_0^y g$ y $\beta = a(x)dx$ también lo es por proposicion 1.

Para $k = 2$, tenemos la siguiente cadena:

$$\Omega^1(\mathbb{R}^2) \xrightarrow{d} \Omega^2(\mathbb{R}^2) \xrightarrow{d} 0.$$

Tomemos $\omega = fdx \wedge dy$, si consideramos $\eta = \int_0^x fdy$ y derivando exteriormente obtenemos que:

$$d\eta = \omega.$$

Es decir, toda 2-forma de $\mathbb{R}^2$ es exacta lo cual implica que $H^2(\mathbb{R}) = \{0\}$. $\square$

Proposición 4. *Se cumple que:*

$$H^k(\mathbb{R}^3) = \begin{cases} \mathbb{R}, & si\ k = 0, \\ \{0\}, & si\ k \geq 1. \end{cases}$$

Demostración. El caso $k = 0$ sigue de proposición 2.Para $k = 1$, tomemos $\omega = fdx +$

$gdy + hdz$ cerrada, lo cual implica que:

$$d\omega = (\partial_x g - \partial_y f)dx \wedge dy + (\partial_y h - \partial_z g)dy \wedge dz + (\partial_x h - \partial_z f)dz \wedge dx = 0$$

Igualando a cero cada termino obtenemos que $\partial_x g - \partial_y f = 0$, $\partial_y h - \partial_z g = 0$ y $\partial_x h - \partial_z f = 0$. Si despejamos las dos ultimas ecuaciones obtenemos que:

- $g = \int_0^z \partial_y h + b(x,y)$.
- $f = \int_0^z \partial_x h + a(x,y)$.

Remplazando obtenemos que $\omega = \int_0^z \partial_x h dx + \int_0^z \partial_y h dy + hdz + a(x,y)dx + b(x,y)dy$. Notemos que $\eta = \int_0^z \partial_x h dx + \int_0^z \partial_y h dy + hdz$ es una forma exacta con primitiva $\theta = \int_0^z h$ y $\beta = a(x,y)dx + b(x,y)dy$ es una forma cerrada como consecuencia de $\partial_x g - \partial_y f = 0$. Además, de la proposicion 3 existe $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ tal que $d\alpha = \beta$, lo cual implica $\omega = d(\eta + \alpha)$. Por ultimo, toda 1-forma de $\mathbb{R}^3$ es exacta lo cual implica que $H^1(\mathbb{R}) = \{0\}$.

En caso $k = 2$ tomemos $\omega = f dx \wedge dy + gdy \wedge dz + hdz \wedge dx$ cerrada, lo cual implica que:

$$d\omega = (\partial_x g + \partial_y h + \partial_z f)dx \wedge dy \wedge dz$$

Igualando a cero el único termino obtenemos que $\partial_x g + \partial_y h + \partial_z f = 0$. Si despejamos f obtenemos que:

$$f = \int_0^z -\partial_x g - \partial_y h + A(x,y)$$

Si reemplazamos obtenemos que $\omega = (\int_0^z -\partial_x g - \partial_y h)dx \wedge dy + gdy \wedge dz + hdz \wedge dx + A(x,y)dx \wedge dy$. Notemos que $\eta = (\int_0^z -\partial_x g - \partial_y h)dx \wedge dy + gdy \wedge dz + hdz \wedge dx$ es exacta con primitiva $\theta = \int_0^z hdx - \int_0^z gdy$ y $A(x,y)dx \wedge dy$ es cerrada. Además, de la proposicion 4 existe $\alpha \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$ tal que $d\alpha = A(x,y)dx \wedge dy$, lo cual implica $\omega = d(\eta + \alpha)$. Por ultimo, toda 2-forma de $\mathbb{R}^3$ es exacta lo cual implica que $H^2(\mathbb{R}) = \{0\}$.

En caso $k = 3$ tomemos $\omega = f dx \wedge dy \wedge dz$, en este caso consideremos $\eta = \int_0^z f dx \wedge dz$ y observemos que $d\eta = \omega$.Por ultimo, toda 3-forma de $\mathbb{R}^3$ es exacta lo cual implica que $H^3(\mathbb{R}) = \{0\}$. $\square$

A lo largo de las pruebas parece que el argumento es inductivo. Por ejemplo , para calcular el primer nivel de cohomología de $\mathbb{R}^3$ utilizamos los niveles de cohomología de R^2. Por ello lo razonable es proceder por inducción para el objetivo de esta sección.

Teorema 1.

$$H^k(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{R}, & si\ k = 0, \\ \{0\}, & si\ k \geq 1. \end{cases}$$

Demostración. El caso $k = 0$ esta cubierto por la proposición 2. Procederemos por inducción en n, para ello tomemos $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ cerrada y consideremos la base dual $\{dx_1, \ldots, dx_{n-1}, dt\}$ y expresemos a ω como:

$$\omega = \sum \eta_I dx_I + \sum \beta dx_J \wedge dt$$

Con I, J multiindices donde no aparece t y $\beta_J dx_J$ una k-1 forma. Si derivamos obtenemos que:

$$d\omega = \sum_I d_x \eta_I \wedge dx_I + \left(\sum_I (-1)^k \frac{\partial \eta_I}{\partial t} dx_I + \sum_J d_x \beta_J \wedge dx_J \right) \wedge dt = 0$$

Igualando los términos a cero obtenemos que:

$$\sum_I \eta_I dx_I = (-1)^{k+1} \int_0^t \left(\sum_J d_x \beta_J \wedge dx_J \right) + \lambda$$

Donde la integran se da en cada coordenada. Con λ una forma en la cual sus coordenadas solo dependen de $\{x_1, x_2, \ldots x_{n-1}\}$. Notemos que λ es una forma cerrada como consecuencia de $\sum_I d_x \eta_I \wedge dx_I = 0$, por ende es una forma exacta si aplicamos la hipótesis inductiva. Además, si consideramos $\alpha = (-1)^{k+1} \int_0^t (\sum_J \beta_J \wedge dx_J)$ y hacemos los calculos obtenemos que $\omega = d(\alpha + \theta)$ con $d\theta = \lambda$. Por ultimo, toda k-forma de $\mathbb{R}^n$ es exacta lo cual implica que $H^k(\mathbb{R}) = \{0\}$. para $k \geq 1$. $\square$