PARTICIÓN DE LA UNIDAD

Author
Eigenvalue
PUCP
2026-1

Índice

1. Funciones en $\mathbb{R}$ 3

2. Partición de la Unidad 5

3. Teorema de encaje de Whitney 7

1 Funciones en $\mathbb{R}$

El objetivo de esta sección es construir una función de la recta en la recta infinitamente diferenciable y constante es un intervalo compacto. Iniciaremos con un resultado que servirá como punto de partida para nuestro objetivo.

Teorema 1. *La siguiente función*

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}, t \mapsto \begin{cases} exp(-1/t^2), & si\ t > 0, \\ 0, & si\ t \leq 0. \end{cases}$$

es infinitamente diferenciable.

Probaremos que f es infinitamente diferenciable por inducción, entonces calculemos su primera derivada.

Proposición 1. *La siguiente función es la derivada de f.*

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f'} \mathbb{R}, t \mapsto \begin{cases} 2/t^3 exp(-1/t^2), & si\ t > 0, \\ 0, & si\ t \leq 0. \end{cases}$$

Demostración. Para $t < 0$ entonces $f'(t) = 0$, si $t > 0$ entonces $f'(t) = 2/t^3 exp(-1/t^2)$. Si la queremos hallar en cero necesitamos analizar el siguiente limite

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(t) - f(0)}{t - 0}$$

Cuando t tiende a cero por la izquierda el resultado es cero. Si t tiende a cero por la derecha, queda por calcular

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{exp(-1/t^2)}{t} \underset{\text{C.v}}{=} \lim_{t \to +\infty} \frac{t}{exp(t^2)} \underset{\text{L.H}}{=} 0$$

□

Proposición 2. *Dado $n \in \mathbb{N}$, denotamos la n-esima derivada de f como $f^{(n)}$. Ademas, se cumple que*

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f^{(n)}} \mathbb{R}, t \mapsto \begin{cases} p(t) exp(-1/t^2), & si\ t > 0, \\ 0, & si\ t \leq 0. \end{cases}$$

con $p(.)$ una función racional.

Demostración. Procederemos por inducción. Para $n = 1$, ya se probó en la proposición 1.

Para $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n+1)}(t) = 0$ cuando $t \leq 0$ y $f^{(n+1)}(t) = (p'(t) + 2p(t)/t^3)exp(-1/t^3)$ cuando $t > 0$. Luego, solo queda por analizar el siguiente limite

$$\lim_{t \to 0} \frac{f^{(n+1)}(t) - f(0)}{t - 0}$$

Cuando t tiende a cero por la izquierda el resultado es cero. Si t tiende a cero por la derecha, queda por calcular

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{q(t)exp(-1/t^2)}{t} \underset{\text{C.v+L'H}}{=} 0$$

□

Luego, f es una función infinitamente diferenciable o suave pues todas sus $n-$simas derivadas existen.

A partir de f construiremos una nueva función que conecte a cero con uno en un tiempo "finito". Dado $r > 0$, consideremos la función $\phi_r(t) = \frac{f(t)}{f(t)+f(r-t)}$ para cualquier $t \in \mathbb{R}$. Entre sus características tenemos:

1. ϕ_r es una función suave pues es suma y composición de funciones suaves.
2. $0 \leq \phi_r \leq 1$
3. $\phi_r = 1$ en $[r, +\infty)$
4. $\phi_r = 0$ en $(-\infty, 0]$

Por ultimo, con las herramientas desarrolladas previamente ya estamos listos para probar el objetivo de la sección.

Teorema 2. *Dado $\epsilon > 0$, la función*

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}, x \mapsto 1 - \phi_r(|x| - \epsilon)$$

es suave no negativa, constante igual a uno en $\overline{B_\epsilon(0)}$ y nula para todo $x \in M$ con $|x| \geq r + \epsilon$.

Demostración. Notemos que $\varphi(t) = 1$ si y solo si $x \in \overline{B_\epsilon(0)}$. Además, $\varphi \restriction_{\mathbb{R}^n - \{0\}}$ es suave pues es la composición y diferencia de funciones suaves y $\varphi \restriction_{\overline{B_\epsilon(0)}}$ es suave porque es constante, luego φ es una función suave en $\mathbb{R}^n$. □

2 Partición de la Unidad

Previo a mostrar el objetivo central de esta sección, introduciremos algunas definiciones necesarias.

Definición 1. *Dado X espacio topológico y $\{U_i\}_{i\in I}$ una cobertura por abiertos. Decimos que $\{V_j\}_{j\in J}$ es un cubrimiento subordinado a $\{U_i\}$. Si es un cubrimiento por abiertos de X y para cualquier $j \in J$ existe $i \in I$ tal que $V_j \subset U_i$.*

Definición 2. *Dado M una variedad diferenciable y $\{U_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento por abiertos localmente finito. Una partición de la unidad correspondiente a $\{U_i\}_{i\in I}$ es la siguiente información.*

1. *$\{M \xrightarrow{\phi_i} R\}_{i\in I}$ colección de funciones suaves y $\phi_i \geq 0$ para cualquier $i \in I$.*
2. *supp(ϕ_i) es subconjunto de algún U_j para cualquier $i \in I$.*
3. *$\sum_{i\in I} \phi_i(x) = 1$ para cualquier $x \in M$.*

El objetivo de esta sección es construir particiones de la unidad en una variedad diferenciable. En concreto, probaremos el siguiente teorema.

Teorema 3. *Dado M una variedad diferenciable y $\{U_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento por abiertos de M. Entonces, existe $\{V_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ un cubrimiento subordinado a $\{U_i\}$ y una partición de la unidad correspondiente a $\{V_j\}$.*

El esquema que seguiremos es primero probar que cualquier cubrimiento de una variedad diferenciable admite un cubrimiento subordinado numerable y localmente finito. Posteriormente, junto con la función desarrollada en la sección 1, construiremos una partición de la unidad asociada.

Teorema 4. *Sea M una variedad diferenciable y $\{U_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento por abiertos. Entonces existe un atlas $\{(V_j, h_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ con las siguientes propiedades:*

1. *$\{V_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ es un refinamiento localmente finito de $\{U_i\}_{i\in I}$,*
2. *Si denotamos $K(r) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid |x| < r\}$. La imagen de h_j es $K(3)$ para cualquier $j \in \mathbb{N}$.*
3. *La colección $\{h_j^{-1}K(1)\}_{j\in\mathbb{N}}$ es un cubrimiento por abiertos de M.*
   A este tipo de atlas de llamaremos buen atlas.

Dividiremos la prueba del Teorema 4 en proposiciones independientes. Las Proposiciones 3 a 5 tratan sobre la topología de M, y la Proposicion 6 conciernen a su estructura de variedad.

Proposición 3. *Dado M una variedad diferenciable. Entonces existe una cobertura por compactos $\{C_i\}_{i\in\mathbb{N}}$.*

Demostración. Sea $p \in M$. Dado que localmente M es homeomorfa a un abierto euclidiano, existe K vecindad compacta alrededor de p. Tomemos B elemento de la base de M tal que $p \in B \subset K$. Dado que M es un espacio Hausdorff, B posee clausura compacta. □

Proposición 4. *Dado M variedad diferenciable y K compacto. Existe K_1 compacto tal que $K \subset int(K_1)$.*

Demostración. Tomemos $p \in K$, dado que M es localmente compacto y Hausdorff entonces existe U_p vecindad de p con clausura compacta. Luego, $K \subset \bigcup_{p\in K} U_p$. Por la compacidad de K, existen $U_{p_1}, U_{p_2}, \ldots, U_{p_m}$ que cubren a K. Tomemos $K_1 = \overline{U_{p_1}} \cup \overline{U_{p_2}} \cdots \cup \overline{U_{p_m}}$, es compacto pues es la unión finita de conjuntos compactos y K esta contenido en su interior pues

$$K \subset \bigcup_i U_{p_i} \subset \bigcup_i \overline{U_{p_i}} = K_1$$

Y dado que $int(K_1)$ es el abierto mas grande contenido en K_1 entonces $\bigcup_i U_{p_i} \subset int(K_1)$ □

Proposición 5. *Dado M una variedad diferenciable. Entonces existe una cobertura por compactos $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tal que $A_i \subset int(A_{i+1})$.*

Demostración. Por la proposición 3 existe $\{C_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ cobertura por compactos de M. Ahora consideremos $A_1 = C_1$, y para $n \in \mathbb{N}$,gracias a la proposición 4, tomamos A_n compacto tal que contiene en su interior a $C_n \cup A_{n-1}$. La colección $\{C_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ contiene a $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ y por como esta definida se cumple que $A_i \subset int(A_{i+1})$ para cualquier $i \in \mathbb{N}$. □

Proposición 6. *Dado M variedad diferenciable, K subconjunto de M compacto y U vecindad de K y $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ cobertura por abiertos de M. Entonces existe colección finita de cartas $\{h_i : V_i \to K(3)\}$ tal que los conjuntos $h_i^{-1}K(1)$ cubren a K y $V_i \subset U$ con $V_i \subset U_\lambda$ para algún $\lambda \in \Lambda$.*

Demostración. Tomemos $p \in K$, dado que $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es una cobertura de M entonces $p \in U_\lambda$ para algún $\lambda \in \Lambda$. Ahora consideremos $V = U \cap U_\lambda$ abierto en M pues es la intersección de dos abiertos en M. Luego, consideremos la carta $h_p : V_p \to K(3)$ con $V_p \subset V$ y $h_p(p) = 0$, esto gracias a que por ser V abierto de M , posee estructura de variedad diferenciable. Además V_p es abierto en M pues es abierto en un abierto de

M. Ahora consideremos la colección de abiertos $\{h_p^{-1}K(1)\}_{p\in K}$ que cubren a K, por la compacidad de K pasamos a una subcolección finita y la prueba finaliza. $\square$

Con las herramientas hasta ahora desarrolladas ya estamos listos para probar el teorema 4.

Demostración. Por la proposición 5 tomemos $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ cobertura por compactos de M tal que $A_i \subset A_{i+1}$. Dado $i \in \mathbb{N}$, notemos que $intA_{i+2} - A_{i-1}$ es un conjunto abierto. $A_{i+1} - intA_i$ es un compacto pues está contenido en A_{i+1} compacto, es cerrado en M y M es Hausdorff. Ahora gracias a la proposicion 6 consideramos $\{h_j : V_j \to K(3)\}$ colección finita de cartas tal que los conjuntos $h_j^{-1}K(1)$ cubren a $A_{i+1} - intA_i$ y $V_j \subset intA_{i+2} - A_{i-1}$ con $V_j \subset U_\lambda$ para algún $\lambda \in \Lambda$. Entonces el atlas deseado es la reunión de las colecciones para cada $j \in \mathbb{N}$. $\square$

Y por ultimo demostraremos la existencia de particiones de la unidad. Es decir, probaremos el teorema 3.

Demostración. Consideremos una atlas subordinado a $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$con las características que otorga el teorema 4, al cual denotaremos por $\{V_j, h_j\}_{j\in\mathbb{N}}$. Además, por la proposición 2 tomemos $\varphi : \mathbb{R}^n \to R$ tal que $\varphi \circ i_{K(1)} = 1$ y nula para todo $x \in \mathbb{R}^n$ con $|x| \geq 2$. Luego, definimos la función

$$\phi_i = \begin{cases} \varphi \circ h_i, & \text{en } V_i, \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

La cual es suave pues $\phi_i \circ i_{V_i}$ es suave y $\phi_i \circ i_{M-\phi_i^{-1}\overline{K(2)}}$ es suave pues es nula , Luego, notemos que la función $s = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i$ esta bien definida pues para cada $x \in M$ $s(x)$ es finito pues la colección $\{V_i\}$ es localmente finita. Además, la función s es suave pues localmente es la suma finita de funciones suaves. Notemos que para $x \in M$ $s(x)$ es positivo pues x está en algún elemento de $\{V_j\}$. Por ultimo consideremos la colección de funciones $\{\varphi_i = \phi_i/s\}$ la cual es una partición de la unidad correspondiente a $\{V_i\}$. $\square$

3 Teorema de encaje de Whitney

Como aplicación de la sección anterior probaremos el siguiente teorema.

Teorema 5. *Dado M^m variedad diferenciable compacta, entonces existe $g : M \to \mathbb{R}^N$ encaje con N lo suficientemente grande.*

Demostración. Consideremos un buen atlas $\{(U_i, \varphi_i)\}$ al cual lo podemos considerar finito pues M es compacta. Tomemos una partición de la unidad asociada a dicho atlas y consideremos las función

$$\gamma_i = \begin{cases} \phi_i\varphi_i, & x \in U_i, \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

La cual es suave pues localmente lo es. Por ultimo, consideremos la función

$$\phi(x) = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m, \phi_1, \ldots, \phi_m)$$

Si ϕ fuera una inmersión inyectiva automáticamente es un encaje debido a que M es compacta. Ahora verifiquemos que es inyectiva, tomamos x, y tal que $\phi(x) = \phi(y)$, luego $\phi_j(x) = \phi_j(y)$ no nulo para algún j. Luego, dado que x, y pertenecen a U_j entonces $\varphi_j(x) = \varphi_j(y)$ lo cual implica que $x = y$ pues φ_j es un homemorfismo. Por ultimo verifiquemos que el el diferencial de ϕ en cada punto es inyectivo. Dado $p \in M$ y $v \in T_pM$,

$$d_p\phi(v) = (D_p\phi_1(v)\varphi_1(x)+\phi_1(x)D_p\varphi_1(v), \ldots, D_p\phi_m(v)\varphi_m(x)+\phi_m(x)D_p\varphi_m(v), D_p\phi_1(v), \ldots, D_p\phi_m(v))$$

Luego, si $d_p\phi(v) = 0$ entonces tomemos que $D_p\phi_i(v) = 0$ para todo i. Dado que $x \in U_i$ para algún i, entonces $D_p\varphi_i(v) = 0$ lo cual implica que $v = 0$ pues $D_p\varphi$ es un isomorfismo. $\square$