15. Матрица на линейно изображение на крайномерни пространства. Смяна на базис. Трансформация на матрицата на линейно изображение при смяна на базисите. Подобни матрици

Александър Гуров

12 януари 2023 г.

Лема 15.2 (*Матричен запис на линейно изображение*)

Нека $\varphi : U \to V$ е линейно изображение, $u = (u_1, ..., u_m)$ е наредена m-торка, съставена от вектори $u_1, ..., u_m \in U$, и $A = (a_{i,j})_{i=1}^{m}{}_{j=1}^{n} \in M_{m\times n}(F)$. тогава

$$\varphi(uA) = \varphi(u)A$$

за

$$uA := (v_1, ..., v_n),\ \ v_i = (u_1, ..., u_m)\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{mj} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}u_i,$$

$$\varphi(uA) := \varphi(v_1, ..., v_n) = (\varphi(v_1), ..., \varphi(v_m)) \text{ и } \varphi(u) = (\varphi(u_1), ..., \varphi(u_m))$$

<u>Доказателство</u> От равенството на j-тия стълб на $\varphi(uA)$ и j-тия стълб на $\varphi(u)A$:

$$\varphi(v_j) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}u_i\right) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\varphi(u_i) = (\varphi(u_1), .., \varphi(u_m))\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

за всяко $1 \le j \le n$.

Определение 15.2

Нека $\varphi : U \rightarrow V$ е линейно изображение, векторите $e_1, ..., e_n$ образуват базис на линейното пространство U над поле F, векторите $f_1, ..., f_n$ образуват базис на линейното пространство V над поле F. Матрицата:

$$A = (\varphi(e_1), ..., \varphi(e_n)) \in M_{m \times n}(F)$$