

Домашно 2

Александър Гуров

8 януари 2023 г.

Задача 1

Ще дефинираме обикновен граф $G(V, E)$, като n на брой точките върху окръжността и точките на пресичане ще представляват върховете, а свързващите прави и криви, които са част от окръжността - ребрата.

Всяка пресечна точка се получава при пресичането на 2 прави. Следователно броя на пресечните точки ще бъде равен на броя групи от 4 точки, лежащи на окръжността - $\binom{n}{4}$. Броят на върховете на целия граф ще бъде сбора на броя на точките върху окръжността и на точките на пресичане:

$$n + \binom{n}{4}$$

Можем да намерим броя на правите, свързващи лежащите на окръжността n на брой точки - $\binom{n}{2}$. Всеки връх, който е точка на пресичане разделя 2 прави на 4 ребра. Следователно броят на ребрата ще бъде:

$$\binom{n}{2} + 2\binom{n}{4} + n$$

За решението на тази задача ще използваме Ойлеровата характеристика на многостените:

$$n - m + f = 2$$

$$f = 2 - n - \binom{n}{4} + \binom{n}{2} + 2\binom{n}{4} + n$$

$$f = 1\binom{n}{4} + \binom{n}{2} + 2$$

Сега трябва да извадим 1 от получения резултат, защото не броим лицето на кръга. Финалният отговор за броя лица е:

$$f = 1\binom{n}{4} + \binom{n}{2} + 1$$

Задача 2

Щом говорим за всеки обикновен граф, най-големият брой цветове нужни да оцветим граф ще бъде при пълен граф, а именно

$$\chi(K_n) = n$$

Следователно:

$$\chi(G) \leq n$$

Също така можем да получим това неравенство от формулите:

$$\begin{aligned} \chi(G) &\leq \Delta(G) + 1 \\ \Delta(G) &\leq n - 1 \end{aligned} \implies \chi(G) \leq n$$

Знаем броя ребра на пълен граф:

$$|E(K_n)| = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Следователно:

$$\begin{aligned} |E(G)| = m &\leq \binom{n}{2} \\ m &\leq \frac{n(n-1)}{2} \end{aligned}$$

Нека проверим твърдението в условието $\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}$ като заместим m :

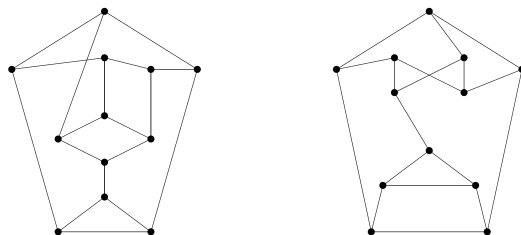
$$\begin{aligned} \chi(G) &\leq \frac{1}{2} + \sqrt{2 \frac{n(n-1)}{2} + \frac{1}{4}} \\ \chi(G) &\leq \frac{1}{2} + \sqrt{n^2 - n + \frac{1}{4}} \\ \chi(G) &\leq \frac{1}{2} + n - \frac{1}{2} \\ \chi(G) &\leq n \end{aligned}$$

Вече доказахме, че $\chi(G) \leq n$ е изпълнено, следователно:

$$\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}$$

също е вярно.

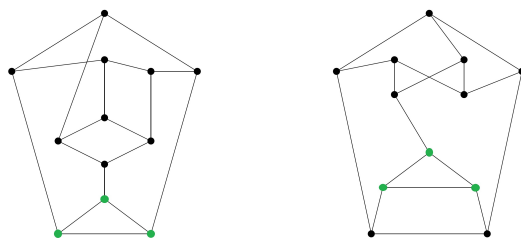
Задача 3



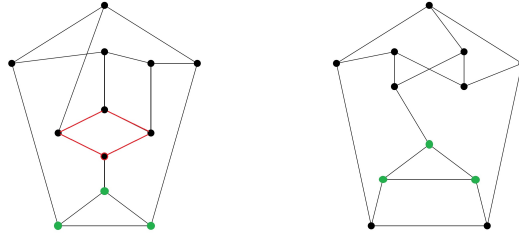
Нека обозначим левия граф $G_1(V_1, E_1)$ и десния $G_2(V_2, E_2)$. Можем да направим няколко наблюдения:

- $|V(G_1)| = |V(G_2)| = 12$
- $|E(G_1)| = |E(G_2)| = 18$
- G_1 и G_2 са 3-регулярни

Ако започнем елементарно пренареждане на върховете на G_2 , така че да бъде видимо изоморфен на G_1 , ще съставим 2 нови индуцирани по върхове графа - $G'_1(V'_1, E'_1)$ и $G'_2(V'_2, E'_2)$, като V'_1 и V'_2 ще бъдат съответно върховете от циклите с дължина 3, ясно изразен и в двата графа:



Ето тук се натъкваме на проблем. Нито един от 3-те върха в V'_1 не е съседен с връх, който да е част от цикъл с размер 4, в който не участва връх от V'_2 , както е един от съседните върхове на връх от V'_2 .



С това можем да заключим, че е невъзможно да пренаредим G_2 , така че да заеме формата на G_1 , с което можем да заключим, че G_1 и G_2 не са изоморфни.

Задача 4

$$\text{Редица } S \text{ е дървесна} \iff \sum_{i=1}^n d(i) = 2n - 2$$

$$(\Rightarrow) \left| \begin{array}{l} \forall G(V, E) : \sum_{u \in V} d(u) = 2m \\ \text{За всяко дърво: } m = n - 1 \end{array} \right. \implies \sum_{i=1}^n d(i) = 2(n - 1) = 2n - 2$$

(\Leftarrow) Използваме индукция по n (броя на върховете в дърво):

База $n=2$, $\sum_{i=1}^n d(i) = 2n - 2$:

В дърво с брой на върховете 2, всички степени на върховете са равни на 1. ✓

Индукционно допускане $\sum_{i=1}^k d(i) = 2k - 2$ е в сила за $\forall k < n$

Индукционна стъпка Доказваме за дърво T с n -върха.

Взимаме произволен връх e , което не е свързан с връх от степен 1.

Ако изтрием връх e , получаваме две нови дървета: $T_1 = (T - e)_1$ и $T_2 = (T - e)_2$ и за тях знаем, че:

$$n = |V(T_1)| + |V(T_2)|$$

и $|V(T_1)|$ и $|V(T_2)|$ са по-малки от n . Тогава чрез индукционната стъпка:

$$\text{За } T_1 : \sum_{i=1}^{n_1} d(i) = 2n_1 - 2 :$$

$$\text{За } T_2 : \sum_{i=1}^{n_2} d(i) = 2n_2 - 2 :$$

Когато върнем върха e , при свързването на двете дървета се получават две нови ребра, по едно инцидентно с e във всяко дърво. Следователно:

$$\sum_{i=1}^n d(i) = (2n_1 - 2 + 1) + (2n_2 - 2 + 1) = 2(n_1 + n_2) + 2 = 2n + 2$$