

Домашно 2

Александър Гуров

4 януари 2023 г.

Задача 4

Първо ще търсим λ , за което е вярно $\det(A - \lambda E) = 0$.

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 9 & 2 & 14 \\ 16 & 5 & 28 \\ -8 & -2 & -13 \end{pmatrix} - \lambda E = \begin{pmatrix} 9 - \lambda & 2 & 14 \\ 16 & 5 - \lambda & 28 \\ -8 & -2 & -13 - \lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 9 - \lambda & 2 & 14 \\ 16 & 5 - \lambda & 28 \\ -8 & -2 & -13 - \lambda \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= (9 - \lambda)(5 - \lambda)(-13 - \lambda) + 2 \cdot 28 \cdot (-8) + 14 \cdot 16 \cdot (-2) - (9 - \lambda) \cdot 28 \cdot (-2) \\ &\quad - 14 \cdot (5 - \lambda) \cdot (-8) - 2 \cdot 16 \cdot (-13 - \lambda) = \\ &= (45 - 14\lambda + \lambda^2)(-13 - \lambda) - 448 - 448 + (504 - 56\lambda) + (560 - 112\lambda) \\ &\quad + (416 + 32\lambda) \\ &= -(585 - 182\lambda + 13\lambda^2 + 45\lambda - 14\lambda^2 + \lambda^3) + 584 - 136\lambda = -1 + \lambda + \lambda^2 - \lambda^3 \end{aligned}$$

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

$$-1 + \lambda + \lambda^2 - \lambda^3 = 0$$

$$\text{По метод на Хорнер: } \begin{array}{c|cccc} & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1| & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \implies (\lambda - 1)(\lambda^2 - 1) = 0$$

$$(\lambda - 1)^2(\lambda + 1) = 0 \implies \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$$

I-ви случай: $\lambda = 1$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 9 - \lambda & 2 & 14 \\ 16 & 5 - \lambda & 28 \\ -8 & -2 & -13 - \lambda \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} 9 - 1 & 2 & 14 \\ 16 & 5 - 1 & 28 \\ -8 & -2 & -13 - 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 8 & 2 & 14 \\ 16 & 4 & 28 \\ -8 & -2 & -14 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 8 & 2 & 14 \\ 16 & 4 & 28 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 8 & 2 & 14 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Съставяме ФСР с независими променливи $x_1 = m, x_2 = n$:

$$x_1 = m, x_2 = n, x_3 = \frac{-4m - n}{7}$$

$$\text{При } m = 1 : (1, 0, \frac{-4}{7})$$

$$\text{При } n = 1 : (0, 1, \frac{-1}{7})$$

II-ри случай: $\lambda = -1$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 9 - \lambda & 2 & 14 \\ 16 & 5 - \lambda & 28 \\ -8 & -2 & -13 - \lambda \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} 9 + 1 & 2 & 14 \\ 16 & 5 + 1 & 28 \\ -8 & -2 & -13 + 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 10 & 2 & 14 \\ 16 & 6 & 28 \\ -8 & -2 & -12 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 8 & 3 & 14 \\ -4 & -1 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -4 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} -4 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Съставяме ФСР с независима променлива $x_3 = m$:

$$x_1 = -m, x_2 = -2m, x_3 = m$$

$$\text{При } m = 1 : (-1, -2, 1)$$

$$\text{Базис от собствени вектори на } V = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -4 \\ 0 & 7 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Диагонална матрица на } V: D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$