Домашно 2

Александър Гуров

8 януари 2023 г.

Задача 1

Ще дефинираме обикновен граф $G(V, E)$, като n на брой точките върху окръжността и точките на пресичане ще представляват върховете, а свързващите криви, които са част от окръжността, и свързващите прави - ребрата.

Всяка пресечна точка се получава при пресичането на 2 прави. Следователно броя на пресечните точки ще бъде равен на броя групи от 4 точки, лежащи на окръжността - $\binom{n}{4}$. Броят на върховете на целия граф ще бъде сбора на броя на точките върху окръжността и на точките на пресичане:

$$n + \binom{n}{4}$$

Можем да намерим броя на правите, свързващи лежащите на окръжността n на брой точки - $\binom{n}{2}$. Всеки връх, който е точка на пресичане разделя 2 прави на 4 ребра. Следователно броят на ребрата ще бъде:

$$\binom{n}{2} + 2\binom{n}{4} + n$$

За решението на тази задача ще използваме Ойлеровата характеристика на многостените:

$$n - m + f = 2$$

$$f = 2 - n - \binom{n}{4} + \binom{n}{2} + 2\binom{n}{4} + n$$

$$f = 1\binom{n}{4} + \binom{n}{2} + 2$$

Сега трябва да извадим 1 от получения резултат, защото не броим лицето на кръга. Финалния отговор за броя лица е:

$$f = 1\binom{n}{4} + \binom{n}{2} + 1$$

Задача 2

Щом говорим за всеки обикновен граф, най-големият брой цветове нужни да оцветим граф ще бъде при пълен граф, а именно

$$\chi(K_n) = n$$

Следователно:

$$\chi(G) \leq n$$

Също така можем да получим това неравенство от формулите:

$$\begin{matrix} \chi(G) \leq \Delta(G) + 1 \\ \Delta(G) \leq n - 1 \end{matrix} \implies \chi(G) \leq n$$

Знаем броя ребра на пълен граф:

$$|E(K_n)| = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Следователно:

$$|E(G)| = m \leq \binom{n}{2}$$

$$m \leq \frac{n(n-1)}{2}$$

Нека проверим твърдението в условието $\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}$ като заместим m:

$$\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2\frac{n(n-1)}{2} + \frac{1}{4}}$$

$$\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{n^2 - n + \frac{1}{4}}$$

$$\chi(G) \leq \frac{1}{2} + n - \frac{1}{2}$$

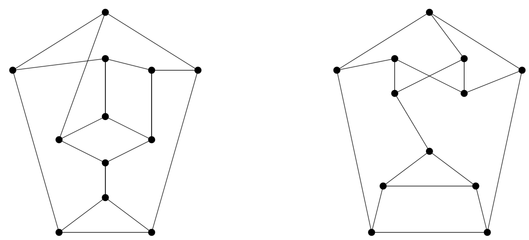
$$\chi(G) \leq n$$

Вече доказахме, че $\chi(G) \leq n$ е изпълнено, следователно:

$$\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}$$

също е вярно.

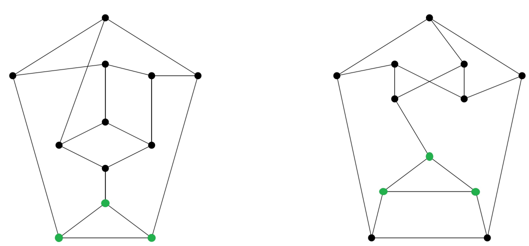
Задача 3



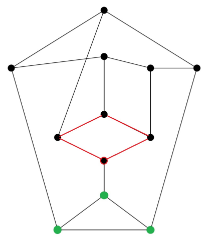
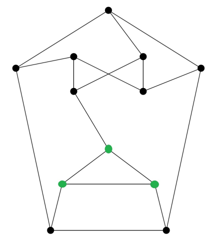
Нека обозначим левия граф $G_1(V_1, E_1)$ и десния $G_2(V_2, E_2)$. Можем да направим
няколко наблюдения:

- $|V(G_1)| = |V(G_2)| = 12$
- $|E(G_1)| = |E(G_2)| = 18$
- G_1 и G_2 са 3-регулярни

Ако започнем елементарно пренареждане на върховете на G_2, така че да бъде видимо изоморфен на G_1, ще съставим 2 нови индуцирани по върхове графа - $G_1'(V_1', E_1')$ и $G_2'(V_2', E_2')$, като V_1' и V_2' ще бъдат съответно върховете от циклите с дължина 3, ясно изразен и в двата графа:



Ето тук се натъкваме на проблем. Нито един от 3-те върха в V_1' не е съседен с връх, който да е част от цикъл с размер 4, в който не участва връх от V_2', както е един от съседните върхове на връх от V_2'.

С това можем да заключим, че е невъзможно да пренаредим G_2, така че да заеме формата на G_1, с което можем да заключим, че G_1 и G_2 не са изоморфни.

Задача 4

$$\text{Редица S е дървесна} \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} d(i) = 2n-2$$

$$(\Rightarrow) \left| \begin{array}{l} \forall G(V,E) : \sum_{u \in V} d(u) = 2m \\ \text{За всяко дърво: } m = n-1 \end{array} \right. \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} d(i) = 2(n-1) = 2n-2$$

($\Leftarrow$) Използваме индукция по n (броя на върховете в дърво):
<u>База</u> n=2, $\sum_{i=1}^{n} d(i) = 2n-2$:
В дърво с брой на върховете 2, всички степени на върховете са равни на 1. ✓
<u>Индукционно допускане</u> $\sum_{i=1}^{k} d(i) = 2k-2$ е в сила за $\forall k < n$
<u>Индукционна стъпка</u> Доказваме за дърво T с n-върха.
Взимаме произволен връх e, което не е свързан с връх от степен 1. Ако изтрием връх e, получаваме две нови дървета: $T_1 = (T-e)_1$ и $T_2 = (T-e)_2$ и за тях знаем, че:

$$n = |V(T_1)| + |V(T_2)|$$

и $|V(T_1)|$ и $|V(T_2)|$ са по-малки от n. Тогава чрез индукционната стъпка:

$$\text{За } T_1 : \sum_{i=1}^{n_1} d(i) = 2n_1 - 2 :$$

$$\text{За } T_2 : \sum_{i=1}^{n_2} d(i) = 2n_2 - 2 :$$

Когато върнем върха e, при свързването на двете дървета се получават две нови ребра, по едно инцидентно с e във всяко дърво. Следователно:

$$\sum_{i=1}^{n} d(i) = (2n_1 - 2 + 1) - (2n_2 - 2 + 1) = 2(n_1 + n_2) + 2 = 2n + 2$$