Теоретично домашно

Александър Гуров

21 януари 2023 г.

1 Задача

а) Функцията $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е ограничена отгоре, ако съществува $\lambda \in \mathbb{R}$, за което е изпълнено условието: $\exists \lambda \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R} : f(x) \leq \lambda$ и λ се нарича горна граница (мажоранта). Функцията f не е ограничена отгоре, ако е изпълнено:

$$\begin{aligned}
&\neg(\exists \lambda \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R} : f(x) \leq \lambda) \equiv \\
&\equiv \forall \lambda \in \mathbb{R}\ \neg(\forall x \in \mathbb{R} : f(x) \leq \lambda) \equiv \\
&\equiv \forall \lambda \in \mathbb{R}\ \exists x \in \mathbb{R} : \neg(f(x) \leq \lambda) \equiv \\
&\equiv \forall \lambda \in \mathbb{R}\ \exists x \in \mathbb{R} : f(x) > \lambda
\end{aligned}$$

б) Функцията $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ има най-голяма стойност, ако съществува $x_1 \in \mathbb{R}$, за което е изпълнено условието: $\exists x_1 \in \mathbb{R}\ \forall x_2 \in \mathbb{R} : f(x_1) \geq f(x_2)$ и λ се нарича горна граница (мажоранта). Функцията f няма най-голяма стойност, ако е изпълнено:

$$\begin{aligned}
&\neg(\exists x_1 \in \mathbb{R}\ \forall x_2 \in \mathbb{R} : f(x_1) \geq f(x_2)) \equiv \\
&\equiv \forall x_1 \in \mathbb{R}\ \neg(\forall x_2 \in \mathbb{R} : f(x_1) \geq f(x_2)) \equiv \\
&\equiv \forall x_1 \in \mathbb{R}\ \exists x_2 \in \mathbb{R} : \neg(f(x_1) \geq f(x_2)) \equiv \\
&\equiv \forall x_1 \in \mathbb{R}\ \exists x_2 \in \mathbb{R} : f(x_1) < f(x_2)
\end{aligned}$$

в) (Коши) Нека $f : D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}$. f е непрекъсната в $x_0 \in D$, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$ такова, че ако $x \in D$ и $|x - x_0| < \delta$, то $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Функцията f се нарича непрекъсната, ако f е непрекъсната във всяка точка от дефиниционната си област, тоест:

$$\forall x_0 \in D\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D, |x - x_0| < \delta :\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Функцията f не е непрекъсната, когато:

$$\begin{aligned}
&\neg(\forall x_0 \in D\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D, |x - x_0| < \delta :\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon) \equiv \\
&\equiv \exists x_0 \in D\ \neg(\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D, |x - x_0| < \delta :\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon) \equiv \\
&\equiv \exists x_0 \in D\ \exists \varepsilon > 0\ \neg(\exists \delta > 0\ \forall x \in D, |x - x_0| < \delta :\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon) \equiv \\
&\equiv \exists x_0 \in D\ \exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \neg(\forall x \in D, |x - x_0| < \delta :\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon) \equiv \\
&\equiv \exists x_0 \in D\ \exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x \in D, \neg(|x - x_0| < \delta :\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon) \equiv \\
&\equiv \exists x_0 \in D\ \exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x \in D, |x - x_0| \geq \delta :\ \neg(|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon) \equiv \\
&\equiv \exists x_0 \in D\ \exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x \in D, |x - x_0| \geq \delta :\ |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon
\end{aligned}$$

(Хайне) Нека $f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}$. Казваме, че функцията f е непрекъсната в $x_0 \in D$, ако за всяка редица $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D$ от стойности на аргумента, която клони към x_0, съответната редица от функционални стойности $f(x_n)_{n=1}^{\infty}$ клони към $f(x_0)$. Функцията f е непрекъсната, ако f е непрекъсната във всяка точка от дефиниционната си област, тоест:

$$\forall x_0 \in D\ \forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D,\ x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0 : f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x_0)$$

Фунцкията f не е непрекъсната, когато:

$$\begin{aligned}
\neg(\forall x_0 \in D\ \forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D,\ x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0 : f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x_0)) \equiv \\
\equiv \exists x_0 \in D\ \neg(\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D,\ x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0 : f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x_0)) \equiv \\
\equiv \exists x_0 \in D\ \exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D,\ \neg(x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0 : f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x_0)) \equiv \\
\equiv \exists x_0 \in D\ \exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D,\ \neg(x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0) : \neg(f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x_0))
\end{aligned}$$

2 Задача

а) Числовата редица $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена, следователно $\exists b, c \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} : b \leq a_n \leq c$ По теоремата на Болцано-Вайерщрас (Принцип за компактност), в числовата редица съществува поне една точка на сгъстяване. Дефиницията на $lim\ sup\ a_n$ е най-дясната точка на сгъстяване на редицата. Следователно $\forall \varepsilon > 0\ \forall n \in \mathbb{N} : |a_n - lim\ sup\ a_n| < \varepsilon$. Множеството $V = \{\forall n \in \mathbb{N}\ \forall \varepsilon > 0 : lim\ sup\ a_n + \varepsilon < a_n \leq c\}, V \subseteq \mathbb{N}$ от индекси на елементи от числовата редица, които се намират между $lim\ sup\ a_n$ и горната граница на числовата редица $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ще бъде крайно или празно. Тоест допълнението на V, $\overline{V}$ ще бъде кофинитно и ще бъде дефинирано $\overline{V} = \{\forall n \in \mathbb{N}\ \forall \varepsilon > 0 : a_n < lim\ sup\ a_n + \varepsilon\}$, с което доказваме, че $lim\ sup\ a_n$ е същесвена мажоранта. Множеството от същесвените мажоранти съвпада с множеството V, от което е очевидно, че е ограничено отдолу и долната му граница съвпада с $lim\ sup\ a_n$.

б) Можем да представим редицата c_n, като $sup(\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \setminus \{a_k\}_{k=1}^{n})$. Тогава

$$\lim_{n\to 0} sup(\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \setminus \{a_k\}_{k=1}^{n}) = sup(\{a_k\}_{k=1}^{\infty}) = lim\ sup\ a_n$$

в) Както доказахме в 2а), $\overline{V}$ е кофинитно и $\overline{V} = \{\forall n \in \mathbb{N}\ \forall \varepsilon > 0 : a_n < lim\ sup\ a_n + \varepsilon\}$, следователно почти всички членове на редицата се намират в $(-\infty, lim\ sup\ a_n + \varepsilon)$.

г) От точките на сгъстяване на $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$\begin{aligned}
\forall \varepsilon > 0\ \forall n_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0 : a_n \leq lim\ sup\ a_n + \frac{\varepsilon}{2} \\
\forall \varepsilon > 0\ \forall n_2 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0 : b_n \leq lim\ sup\ b_n + \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

При $n_0 = max(n_1, n_2)$. Следователно

$$\forall \varepsilon > 0\ \forall n \geq n_0 : a_n + b_n \leq lim\ sup\ a_n + lim\ sup\ b_n + \varepsilon$$

Тогава $lim\ sup\ _{n\to 0}\ (a_n + b_n) \leq lim\ sup\ _{n\to 0}\ a_n + lim\ sup\ _{n\to 0}\ b_n$.

3 Задача

Функцията $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ е диференцируема и от това знаем, че е непрекъсната. Следователно за $\forall x \in (a, +\infty)$ съществува $f'(x)$. Също знаем, че f е ограничена, тоест $\forall x \in (a, +\infty)\ \exists b, c \in \mathbb{R} : b \leq f(x) \leq c$. Нека вземем две произволни точки $m, n \in (a, +\infty), n > m$. От теоремата на Лагранж знаем, че съществува $\xi \in (m, n)$, за което е изпълнено

$$f'(\xi) = \frac{f(n) - f(m)}{n - m}$$

Нека съставим две редици $\forall \varepsilon > 0\ \{m_k\}_{k=1}^{\infty}, m_k = a + k$, $\forall \varepsilon > 0\ \{n_k\}_{k=1}^{\infty}, n_k = a + k + 1$. Нека разгледаме производната на $x_k \in (m_k, n_k), k \to \infty$:

$$f'(x_k) = \frac{f(n_k) - f(m_k)}{n_k - m_k}$$

Със сигурност можем да съставим $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, които имат производна, само трябва да докажем, че $f'(x) = 0$. f е ограничена, следователно $b \leq f(m_k) \leq c$ и $b \leq f(n_k) \leq c$ и

$$2b \leq \frac{f(n_k) - f(m_k)}{n_k - m_k} \leq 2c$$

От редиците $n_k - m_k = a + k + 1 - a - k = 1$:

$$2b \leq f(n_k) - f(m_k) \leq 2c$$

ако $d = max(b, c)$, то

$$|f(n_k) - f(m_k)| \leq 2d$$

Тъй като f е ограничена, разликата на $f(n_k)$ и $f(m_k)$ ще намалява и ще се изпълни сходимостта във формата на Коши:

$$|f(n_k) - f(m_k) - 0| \leq \varepsilon \Rightarrow f(n_k) - f(m_k) \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$$

$$f'(x_k) \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$$