18. Собствени вектори и инвариантни подпространства на линеен оператор.

Александър Гуров

18 януари 2023 г.

Определение 18.1

Характеристичният полином на квадратна матрица $A \in M_{n\times n}(F)$ от ред n е

$$f_A(x) = det(A - xE_n) = \begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-x & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-x \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^n x^n + (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn})x^{n-1} + ... + det(A).$$

Корените на $f_A(x) = 0$ се наричат характеристични корени на A.

Лема 19.2

Ако $A \in M_{n\times n}(F))$ и $B = T^{-1}AT \in M_{n\times n}(F)$ са подобни матрици, то характеристичните полиноми $f_A(x) = f_B(x)$ на A и B съвпадат.

Доказателство

$$f_B(x) = det(B - xE_n) = det(T^{-1}AT - T^{-1}(xE_n)T)$$

$$= det(T^{-1})det(A - xE_n)det(T) = det(T^{-1}T)det(A - xE_n)$$

$$= det(E_n)det(A - xE_n) = det(A - xE_n) = f_A(x)$$

Определение 18.3

Нека $\varphi : V \to V$ е линеен оператор в крайномерно пространство V над поле F. Характеристичният полином на матрицата на φ спрямо един, а оттам и всеки един базис на V се нарича характеристичен полином на φ и се бележи с $f_\varphi(x)$. Характеристичните корени на φ са корените на $f_\varphi(x)$.

Определение 18.4

Собствен вектор на линеен оператор $\varphi : V \to V$ е ненулев вектор $v \in V \setminus \{\vec{\mathcal{O}}_V\}$ с $\varphi(v) = \lambda v$ за някое $\lambda \in F$. Казваме, че λ е собствена стойност на φ, отговаряща на собствения вектор v.

Лема 18.5

Нека $\varphi : V \to V$ е линеен оператор в крайномерно линейно пространство V над поле F. Тогава собствените стойности на φ съвпадат с характеристичните корени на φ от F.

Доказателство Хомогенна система линейни уравнения $Mx = \mathbb{O}_{n\times 1}$ с квадратна матрица коефициенти $M \in M_{n\times n}(F)$ има ненулево решение тогава и само тогава, когато размерността на пространството е $n - rk(M) > 0$, еквивалентно на $rk(m) < n$, което е изпълнено единствено при $det(M) = 0$.

Нека $e = (e_1, ..., e_n)$ е базис на V и $A \in M_{n\times n}(F)$ е матрицата на φ спрямо базиса e на V. За произволен ненулев вектор $v \in V \setminus \{\vec{\mathcal{O}}_V\}$ с координати $x \in M_{n\times 1}(F) \setminus \mathbb{O}_{n\times 1}$ спрямо базиса e е вярно $\varphi(v) = \varphi(ex) = \varphi(e)x = (eA)x = e(Ax)$. Следователно v е собствен вектор на φ, отговарящ на собствена стойност $\lambda \in F$ тогава и само тогава, когато

$$e(Ax) = \varphi(x) = \lambda v = \lambda(ex) = e(\lambda x)$$

По Лема 15.3 (ii) и свойствата на единичната матрица $E_n \in M_{n\times n}(F)$, горното е еквивалентно на $Ax = \lambda x = \lambda(E_n x) = (\lambda E_n)x$ и е в сила точно когато хомогенната система линейни уравнения $(A - \lambda E_n)x = Ax - (\lambda E_n)x = O_{n\times 1}$ има ненулево решение $x \in M_{n\times 1}(F) \setminus O_{n\times 1}$. Последното условие е равносилно на $0 = det(A - \lambda E_n) = fA(\lambda)$ на детерминантата на матрицата от коефициенти $A - \lambda E_n \in M_{n\times n}(F)$, която съвпада със стойността $f_\varphi(\lambda) = fA(\lambda) = 0$ на характеристичния полином $f_\varphi(x)$ на φ в $\lambda \in F$. По този начин установихме, че $\lambda \in F$ е собствена стойност на φ тогава и само тогава, когато λ е характеристичен корен на φ, който принадлежи на F.

Твърдение 18.6

Нека $\lambda_1, ..., \lambda_n$ са различни собствени стойности на линеен оператор $\varphi : V \to V$ в пространство V над поле F. За всяко $1 \leq i \leq n$ да предположим, че $v_{i,1}, ..., vi, k_i \in V$ са линейно независими собствени вектори на φ, отговарящи на собствената стойност λ_i. Тогава системата вектори

$$v_{i,j} | 1 \leq j \leq k_i, 1 \leq i \leq n$$

е линейно независима. В частност, ако $v_1, ..., v_n$ са собствени вектори на φ, отговарящи на различни собствени стойности $\lambda_1, ..., \lambda_n$, то $v_1, ..., v_n$ са линейно независими, защото всеки от тези собствени вектори е ненулев, а оттам и линейно независим.

Доказателство С индукция по броя n на собствените стойности на φ - $\lambda_1, ..., \lambda_n$, за $n = 1$ твърдението е изпълнено. В общия случай:
Да разгледаме линейна комбинация

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k_i} \mu_{i,j} v_{i,j} = \vec{\mathcal{O}}_V \tag{1}$$

След действието на φ имаме

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k_i} \mu_{i,j} \lambda_i v_{i,j} = \vec{\mathcal{O}}_V \tag{2}$$

съгласно $\varphi(v_{i,j}) = \lambda_i v_{i,j}$ и $\varphi(\vec{\mathcal{O}}_V) = \vec{\mathcal{O}}_V$. За да елиминираме $v_{n,1}, ..., v_{n,k_n}$, умножаваме (1) с $-\lambda n$ и прибавяме към (2). Получаваме

$$\vec{\mathcal{O}}_V = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k_i} \mu_{i,j}(\lambda_i - \lambda_n) v_{i,j} - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{k_i} \mu_{i,j}(\lambda_i - \lambda_n) v_{i,j}$$

По индукционно предположение, системата $\{v_{i,j} | 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq k_i\}$ е линейно независима, така че

$$\mu_{i,j}(\lambda_i - \lambda_n) = 0 \text{ за всички } 1 \leq i \leq n-1 \text{ и } 1 \leq j \leq k_i$$

Съгласно $\lambda_i - \lambda_n \neq 0$ за $1 \leq i \leq n-1$, стигаме до извода, че $\mu_{i,j} = 0$ за всички1 $1 \leq i \leq n-1$ и $1 \leq j \leq k_i$. Сега (1) приема вида

$$\sum_{j=1}^{k_n} \mu_{n,j} v_{n,j} = \vec{\mathcal{O}}_V$$

Съгласно линейната независимост на $v_{n,1}, ..., v_{n,k_n}$, коефициентите $\mu_{n,j} = 0$ се анулират за всички $1 \leq i \leq k_n$. Това доказва линейната независимост на

$$v_{i,j} | 1 \leq j \leq k_i, 1 \leq i \leq n.$$

Определение 18.7

(i) Спектърът на матрица $A \in M_{n\times n}(F)$ е множеството на характеристичните корени на A от основното поле F. Ако A има n различни характеристични корена от F, то казваме, че A има прост спектър.
(ii) Спектърът на линеен оператор $\varphi : V \to V$ в n-мерно пространство V над поле F е множеството на характеристичните корени на φ от F или, еквивалентно, множеството на собствените стойности на φ. Ако φ има n различни характеристични корена от F, то казваме, че φ има прост спектър.

Твърдение 18.8

(i) Нека $\varphi : V \to V$ е линеен оператор с прост спектър в n-мерно пространство V над поле F. Тогава съществува базис $v_1, ..., v_n$ на V, в който матрицата на φ е диагонална. Еквивалентно, съществува базис на V, съставен от собствени вектори за φ.
(ii) Нека $A \in M_{n\times n}(F)$ е матрица с прост спектър. Тогава съществува обратима матрица $T \in M_{n\times n}(F)$, така че $D = T^{-1}AT$ е диагонална.

Доказателство (i) По определение, φ е оператор с прост спектър, ако има n различни характеристични корена $\lambda_1, ..., \lambda_n$ от F. Съгласно Твърдение 18.5, $\lambda_1, ..., \lambda_n$ са собствени стойности на φ. Ако v_i са собствени вектори на $\varphi : V \to V$, отговарящи на собствените стойности λ_i , то $v_1, ..., v_n$ са линейно независими по Твърдение 18.6. Прилагаме Твърдение 5.12 към линейно независимите вектори $v_1, ..., v_n$ от n-мерното пространство V и получаваме, че $v_1, ..., v_n$ е базис на V . Съгласно $\varphi(v_i) = \lambda_i v_i = 0.v_1 + ... + 0.v_{i-1} + \lambda_i.v_i + 0.v_{i+1} + ... + 0.v_n$ за всяко $1 \le i \le n$, матрицата на φ в базиса $v_1, ..., v_n$ е диагонална и диагоналните и елементи са равни на съответните собствени стойности,

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

и диагоналните елементи са равни на съответните собствени стойности.

(ii) Нека $e = (e_1, ..., e_n)$ е базис на n-мерно пространство V над F, а $\varphi : V \to V$ е линейният оператор с матрица $A \in M_{n\times n}(F)$ спрямо базиса e. Тогава φ има прост спектър и съгласно (i) съществува базис $v = (v_1, ..., v_n)$ на V , в който матрицата на φ е диагонална,

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Матрицата на прехода $T \in M_{n \times n}(F)$ от базиса e към базиса $v = eT$ е обратима

$$D = T^{-1}AT$$

Определение 18.9

Подпространство W на линейно пространство V е инвариантно относно линеен оператор $\varphi : V \to V$, ако $\varphi(W) \subseteq W$.

Лема 18.10

Нека $\varphi : V \to V$ е линеен оператор в линейно пространство V над поле F.
(i) За всяко $\lambda \in F$ множеството $U_\lambda = \{v \in V | \ \varphi(v) = \lambda v\}$ е φ-инвариантно подпространство на V . Ако λ е собствена стойност на φ, то $U\lambda$ е обединението на собствените вектори на φ, отговарящи на собствената стойност λ и нулевия вектор на V . Ако λ не е собствена стойност на φ, то $U_\lambda = \{\vec{\mathcal{O}}\}$ е нулевото подпространство.
(ii) Ненулев вектор $v \in V \setminus \{\vec{\mathcal{O}}_V\}$ поражда 1-мерно φ-инвариантно подпространство $l(v)$ на V тогава и само тогава, когато v е собствен вектор на оператора φ.

Доказателство (i) Подмножеството $U_\lambda = \{v \in V | \ \varphi(v) = \lambda v\}$ на V е подпространство на V , защото за произволни $u_1, u_2 \in U_\lambda$ и $\mu \in F$ е в сила $u_1 + u_2, \mu u_1 \in U_\lambda$, съгласно

$$\varphi(u_1 + u_2) = \varphi(u_1) + \varphi(u_2) = \lambda u_1 + \lambda u_2 = \lambda(u_1 + u_2) \text{ и}$$

$$\varphi(\mu u_1) = \mu\varphi(u_1) = (\mu\lambda)u_1 = (\lambda\mu)u_1 = \lambda(\mu u_1)$$

Подпространството U_λ на V е φ-инвариантно, защото за произволен вектор $u \in U_\lambda$ е изпълнено $\varphi(u) = \lambda u \in U_\lambda$.
(ii) Ако 1-мерното подпространство $l(v)$ на V е φ-инвариантно, то ненулевият вектор $v \in V \setminus \{\vec{\mathcal{O}}_V\}$ се изобразява в $\varphi(v) \in l(v)$, така че $\varphi(v) = \lambda v$ за някое $\lambda \in F$ и v е собствен вектор на φ, отговарящ на собствена стойност λ. Обратно, ако $v \in V \ \vec{\mathcal{O}}_V$ е собствен вектор на φ, отговарящ на собствена стойност λ, то произволен вектор $\mu v \in l(v)$ се изобразява в $\varphi(\mu v) = \mu\varphi(v) = \mu(\lambda v) = (\mu\lambda)v \in l(v)$ и 1-мерното подпространство $l(v)$ на V е φ-инвариантно.

Приемаме без доказателство следната

Теорема 18.11 (*Основна Теорема на алгебрата*)

Всички корени на непостоянен полином $f(x) \in \mathbb{C}[x] \setminus \mathbb{C}$ с комплексни коефициенти са комплексни числа $\alpha \in \mathbb{C}$.

Твърдение 18.12

Всеки линеен оператор $\varphi : V \to V$ в крайномерно линейно пространство V над полето $\mathbb{C}$ на комплексните числа има 1-мерно φ-инвариантно подпространство.

Твърдение 18.13

Всеки линеен оператор $\varphi : V \to V$ в крайномерно пространство V над полето на реалните числа $\mathbb{R}$ има 1-мерно или 2-мерно φ-инвариантно подпространство.

Избираме базис $e = (e_1, ..., e_n)$ на V и разглеждаме матрицата $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ на φ спрямо e. Ако A има реален характеристичен корен $\lambda \in \mathbb{R}$, то λ е собствена стойност на φ и произволен собствен вектор $v \in V \setminus \{\vec{\mathcal{O}}_V\}$ на φ, отговарящ на собствената стойност λ поражда 1-мерно φ-инвариантно подпространство $l(v)$ на V. Отсега нататък ще предполагаме, че всички характеристични корени на φ и на A са комплексни нереални числа и ще докажем, че тогава φ има 2-мерно φ-инвариантно подпространство.

За целта разглеждаме координатния изоморфизъм $C : V \to M_{n \times 1}(\mathbb{R})$, съпоставящ на вектор $ex \in V$ координатния му стълб $C(ex) = x$ спрямо e. Изображението

$$\varphi_O : M_{n \times 1}(\mathbb{R}) \to M_{n \times 1}(\mathbb{R}), \ \varphi_O(x) = Ax$$

е линейно съгласно

$$\varphi_o(x + y) = A(x + y) = Ax + Ay = \varphi_o(x) + \varphi_o(y) \text{ и}$$

$$\varphi_o(\lambda x) = A(\lambda x) = \lambda(Ax) = \lambda \varphi_o(x)$$

за произволни$x, y \in M_{n \times 1}(\mathbb{R})$ и $\lambda \in \mathbb{R}$. В диаграмата

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\text{c}} & M_{n \times 1}(\mathbb{R}) \\ \Big\downarrow \varphi & & \Big\downarrow \varphi_0 \\ V & \xrightarrow{\text{c}} & M_{n \times 1}(\mathbb{R}) \end{array}$$

имаме $C\varphi = \varphi_o C$, съгласно

$$C\varphi(ex) = C(\varphi(e)x) = C((eA)x) = C(e(Ax)) = Ax = \varphi_o(x) = \varphi_o C(ex).$$

Влагаме наредените n-торки реални числа $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ в наредените n-торки комплексни числа $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ като елементите с нулеви имагинерни части на компонентите. Тогава линейният оператор

$$\varphi_o : M_{n\times 1}(\mathbb{R}) \to M_{n\times 1}(\mathbb{R}),\ \varphi_o(x) = Ax$$

има $\mathbb{C}$-линейно продължение до линеен оператор

$$\varphi_o^{\mathbb{C}} : M_{n\times 1}(\mathbb{C}) \to M_{n\times 1}(\mathbb{C}),\ \varphi_o^{\mathbb{C}}(w) = Aw$$

с $\varphi_o^{\mathbb{C}}|_{M_{n\times 1}(\mathbb{R})} = \varphi_o$, участващ в диаграмата

$$\begin{array}{ccc} M_{n\times 1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_{n\times 1}(\mathbb{C}) \\ \Big\downarrow \varphi_o & & \Big\downarrow \varphi_0^{\mathbb{C}} \\ M_{n\times 1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_{n\times 1}(\mathbb{C}) \end{array}$$

Линейният оператор $\varphi_o^{\mathbb{C}}$ в n-мерното пространство $M_{n\times 1}(\mathbb{C})$ над C има комплексен характеристичен корен $\lambda \in \mathbb{C}$, който е характеристичен корен на A, а оттам и на φ. Следователно $\lambda = a + bi \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ с $a, b \in R$, $b \neq 0$ е комплексно нереално число и съществува собствен вектор $w \in M_{n\times 1}(\mathbb{C}) \setminus \{O_{n\times 1}\}$ на $\varphi_o^{\mathbb{C}}$, отговарящ на собствената стойност λ. Полагаме $w = u + iv$ за $u, v \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ и сравняваме реалните и имагинерните части в равенствата

$$\begin{aligned} Au + iAv = A(u+iv) = Aw = \varphi_o^{\mathbb{C}}(w) &= \lambda w = (a+bi)(u+iv) \\ &= (au - bv) + i(bu + av), \end{aligned}$$

за да изведем

$$\varphi_o(u) = Au = au - bu,\ \varphi_o(v) = Au = au - bv. \tag{3}$$

Линейната обвивка $l(u,v)$ е φ_o-инвариантно подпространство на $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ и $l(eu, ev)$ е φ-инвариантно подпространство на V, съгласно

$$\varphi(eu) = \varphi(e)u = (eA)u = e(Au) = e(au - bv) = a(eu) - b(ev) \in l(eu, ev),$$

$$\varphi(ev) = \varphi(e)v = (eA)v = e(Av) = e(bu + av) = b(eu) + a(ev) \in l(eu, ev),$$

откъдето $\varphi(\alpha(eu) + \beta(ev)) = \alpha\varphi(eu) + \beta\varphi(ev) \in l((eu), ev)$ за $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Ще докажем линейната независимост на u, v, за да получим, че $l(eu, ev)$ е 2-мерно φ-инвариантно подпространство на V, и да докажем твърдението. Да допуснем, че $u, v \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ са линейно зависими и съществуват реални числа $p, q \in R, (p,q) \neq (0,0)$ с

$$\mathbb{O}_{n\times 1} = pu + qv$$

Действайки с φ_o върху () получаваме

$$\mathbb{O}_{n\times 1} = \varphi_o(\mathbb{O}_{n\times 1}) = \varphi_o(pu + qv) = p\varphi_o(u) + q\varphi_o(v) =$$
$$p(au - bv) + q(bu + av) = (pa + qb)u + (qa - pb)v$$

За да елиминираме v от () и (), умножаваме почленно () с $qa - pb \in \mathbb{R}$, () с $-q \in R$ и събираме. Това дава

$$\mathbb{O}_{n\times 1} = [p(qa - pb) - q(pa + qb)]u = (-p^2 b - q^2 b)u = -(p^2 + q^2)bu$$

От $p, q \in \mathbb{R}$, $(p, q) \neq (0, 0)$ следва, че $p^2 + q^2 \in \mathbb{R} > 0$ е строго положително реално число. По предположение, $\lambda = a + bi \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ е комплексно нереално число, така че $b \neq 0$. Затова $-(p^2 + q^2)b \neq 0$ е ненулево реално число и () изисква $u = \mathbb{O}_{n\times 1}$. Сега от действието на φ_o върху u получаваме, че

$$\mathbb{O}_{n\times 1} = \varphi_o(\mathbb{O}_{n\times 1}) = \varphi_o(u) = Au = au - bv = -bv$$

използвайки (3). Поради $-b \neq 0$, оттук следва $v = \mathbb{O}_{n\times 1}$ и стигаме до извода, че собственият вектор $w = u + iv = \mathbb{O}_{n\times 1} \in M_{n\times 1}(\mathbb{C})$ на $\varphi_o^{\mathbb{C}}$ е нулев. Противоречието установява линейната независимост на $u, v \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ и доказва твърдението.