Домашно 2

Александър Гуров

3 януари 2023 г.

Задача 2

$$\begin{aligned}\Phi(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4) =& (4x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4)e_1 + (x_1 - x_2 + x_3 + x_4)e_2 \\ &+ (x_1 - 2x_3 + qx_4)e_3 + (px_1 + x_2 - 5x_3 - 3x_4)e_4\end{aligned}$$

Съставяме матрица спрямо (e_1, e_2, e_3, e_4):

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & q \\ p & 1 & -5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}$$

Намираме базиса на $ker(\Phi)$ чрез векторите с координати (x_1, x_2, x_3) спрямо базиса (e_1, e_2, e_3), които са от $ker(\Phi)$, тоест отиват в $\vec{0}$.

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & q \\ p & 1 & -5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & q \\ p & 1 & -5 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & q-1 \\ 0 & 1+p & -p-5 & -p-3 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & q+1 \\ 0 & 0 & 2p-2 & p-1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 2p-2 & p-1 \\ 0 & 0 & 0 & q+1 \end{pmatrix}$$

I-ви случай: $q = -1, p = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Съставяме ФСР с независими променливи $e_3 = m, e_4 = n$:

$$e_1 = 2m + n, e_2 = 3m + 2n, e_3 = m, e_4 = n$$

При $m = 1 : (2, 3, 1, 0)$
При $n = 1 : (1, 2, 0, 1)$

$$\text{Базис на } ker(\Phi) : \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$dim(ker(\Phi)) + dim(im(\Phi)) = m$$

Чрез водещите единици на базиса на $ker(\Phi)$ съставяме базиса на $im(\Phi)$.

$$\text{Базис на } im(\Phi) : \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

II-ри случай: $q \neq -1, p = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q+1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Съставяме ФСР с независима променлива $e_3 = m$:

$$e_1 = 2m, e_2 = 3m, e_3 = m, e_4 = 0$$

При $m = 1 : (2, 3, 1, 0)$
Базис на $ker(\Phi) : (2, 3, 1, 0)$

$$\text{Базис на } im(\Phi) : \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & q & -3 \end{pmatrix}$$

III-ти случай: $q = -1, p \neq 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 2p-2 & p-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Съставяме ФСР с независима променлива $e_3 = m$:

$$e_1 = 0, e_2 = -m, e_3 = m, e_4 = -2m$$

При $m = 1 : (0, -1, 1, -2)$
Базис на $ker(\Phi) : (0, -1, 1, -2)$

$$\text{Базис на } im(\Phi) : \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & p \\ -3 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

IV-ти случай: $q \neq -1, p \neq 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 2p-2 & p-1 \\ 0 & 0 & 0 & q+1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Не съществува базис на $ker(\Phi)$.

$$\text{Базис на } im(\Phi) : \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & p \\ -3 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -5 \\ 2 & 1 & q & -3 \end{pmatrix}$$