# Базис, размерност координати

Александър Гуров

11 януари 2023 г.

**Определение 5.1**

Непразно множество $B$ на ненулево линейно пространство $V \neq \{\vec{\mathcal{O}}\}$ е базис на V, ако:
(i) е линейно независима система вектори
(ii) линейната обвивка $l = (B) = V$ на $B$ съвпада с V

**Пример 5.2**

Векторите
$$e_i = (\underbrace{0, ..., 0}_{\text{i-1}}, 1, \underbrace{0, ..., 0}_{\text{n-i}}), \in F^n, \quad 1 \leq i \leq n$$
с единствена нененулева компонента 1 на място i образуват базис на линейното пространство $F^n$ от наредените n-торки от поле $F$.

Доказателство. За доказателството ще използваме, че за произволни $x_1, ..., x_n \in F$ е в сила:

$$x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ie_i + ... + x_ne_n = (x_1, ..., x_i, ..., x_n)$$

От $x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ie_i + ... + x_ne_n = (x_1, ..., x_i, ..., x_n) = (0, ..., 0) \implies x_1 = x_2 = ... = x_i = ... = x_n = 0$, следователно векторите $e_1, e_2, ...e_n$ са линейно независими. Произволната наредена n-торка $x = (x_1, .., x_n) \in F^n$ е линейна комбинация $x = e_1x_1 + ... + x_ne_n$ на $(e_1, ..., e_n) \in F^n$ с коефициенти $(x_1, ..., x_n) \in F$, следователно $l(e_1, ..., e_n) = F^n$ и по дефиниция е базис на $F^n$.

**Определение 5.3**

Линейно пространство V над поле F е крайномерно, ако $V = \{\vec{\mathcal{O}}\}$ или V има краен базис $v_1, ..., v_n$.

Линейното пространство на наредените n-торки $F^n$ над поле $F$ е крайномерно, защото има краен базис:

$$e_1, ..., e_n, \text{, където } e_i = (\underbrace{0, ..., 0}_{\text{i-1}}, 1, \underbrace{0, ..., 0}_{\text{n-i}}), \in F^n, \quad 1 \leq i \leq n$$

**Твърдение 5.4**

Линейно пространство V над поле F е крайномерно тогава и само тогава, когато линейната обвивка $l(a_1, ..., a_n) = V$ е на краен брой вектори. В такъв случай, ако $V \neq \{\vec{\mathcal{O}}\}$, то можем да изберем базис на V, съставен от подмножество на $\{a_1, ..., a_n\}$.

Доказателство Ако $V = \{\vec{\mathcal{O}}\}$, то $V = l(\vec{\mathcal{O}})$ и V има краен базис. Ако $V$ има краен базис $e_1, ..., e_n$ , то $l(e_1, ..., e_n) = V$ е линейна обвивка на краен брой вектори и $V$ е крайномерно пространство. Ако $l(e_1, ..., e_n) = V$ е линейна обвивка на краен брой вектори и $e_i = \vec{\mathcal{O}}, \forall i : 1 \leq i \leq n$, то $V = \{\vec{\mathcal{O}}\}$, $V = l(\vec{\mathcal{O}})$ и V е крайномерно. Ако $l(e_1, ..., e_n) = V$ е линейна обвивка на краен брой вектори и съществува $e_i \neq \vec{\mathcal{O}}$, където $1 \leq i \leq n$, след преномериране на $e_i$ като $e_1$, то $e_1$ е линейно независим и $l(e_1) \subsetneq V$. Ако не съществува $e_i \notin l(e_1)$ при $2 \leq i \leq n$, то $V = l(e_1)$ и $e_1$ е краен базис на V, тоест V е крайномерно. В противен случай преномерираме $e_i \notin l(e_1)$ като $e_2$. По *Лемата на линейната алгебра* $e_1, e_2$ са линейно независими и образуват краен базис на $V = l(e_1, e_2)$, следователно V е крайномерно. Тъй като $e_1, ...e_n$ е краен базис, повтаряйки тази стъпка краен m на брой пъти, като $1 \leq m \leq n$, можем да съставим краен базис на V от линейно независими вектори $e_1, ..., e_m$ с $l(e_1, ..., e_m) = V$.

**Твърдение 5.5**

Всеки два базиса на ненулево пространство V над поле F трябва да имат еднакъв брой независими вектори.

Доказателство Нека $a_1, ..., a_n$ и $b_1, ..., b_n$ са базиси на V. Тогава

$$a_1, ..., a_n \in V = l(b_1, ..., b_n)$$

Спрямо *Основната лема на линейна алгебра*, $n \leq m$, заради линейната независимост. Аналогично

$$b_1, ..., b_n \in V = l(a_1, ..., a_n)$$

От тук следва, че $m \leq n$, спрямо *Основната лема на линейна алгебра*. В този случай $m = n$ и всички два базиса на линейно пространство имат еднакъв брой независими вектори.

**Определение 5.6**

Броят на независими вектори на базис на линейно пространство V се нарича размерност на V и се бележи с $dim(V)$.
Размерността на нулево пространство $V = \{\vec{\mathcal{O}}\} : dim(V) = 0$.
Размерността на ненулево линейно пространство V, което не е крайномерно: $dim(V) = \infty$

**Твърдение 5.7**

Следните свойства са еквивалентни за векторите $e_1, ..., e_n$ от линейно пространство V над поле F:
(i) $e_1, ..., e_n$ е базис на V
(ii) всеки вектор $x \in V = l(e_1, ..., e_n)$ има единствено представяне:

$$x = x_1e_1 + ... + x_ne_n$$

като линейна комбинация на векторите $e_1, ..., e_n$ с коефициенти $x_1, ..., x_n$ от полето F. Наредената n-торка $(x_1, ..., x_n)$ представлява координатите на x спрямо базиса $e_1, ..., e_n$.

Доказателство $(i) \Rightarrow (ii)$ Нека произволен вектор $x$, принадлежащ на линейното пространство $V$, има две представяния като линейна комбинация на векторите $e_1, ..., e_n$ с коефициенти $x_1, ..., x_n \in F$ и $y_1, ..., y_n \in F$:

$$x_1e_1 + ... + x_ne_n = x = y_1e_1 + ... + y_ne_n$$

$$(x_1 - y_1)e_1 + ... + (x_n - y_n)e_n = \vec{\mathcal{O}}$$

Съгласно линейната независимост на $e_1, ..., e_n$ е изпълнено $x_i - y_i = 0, \forall i \in [1, n]$, следователно $x_i = y_i, \forall i \in [1, n]$ и двете представяния съвпадат, тоест x има едно единствено, представяне.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Щом x има единствено представяне като линейна комбинация на $e_1, ..., e_n$, то $x \in V = l(e_1, ..., e_n)$. В случая когато $x = \vec{\mathcal{O}}$:

$$x_1e_1 + ... + x_ne_n = \vec{\mathcal{O}} = 0e_1 + ... + 0e_n$$

съгласно Единствеността на представянето на нулевия вектор като линейна комбинация на $e_1, ..., e_n$, коефициентите $x_1, ..., x_n = 0$.

$$0e_1 + ... + 0e_n = \vec{\mathcal{O}}$$

Следователно векторите $e_1, ..., e_n$ са линейно независими, което ги прави базис на V.

**Твърдение 5.8**

Нека $V$ е ненулево линейно пространство над поле $F$. В този случай е изпълнено:
(i) $dim(V) = n$, тогава и само тогава, когато съществуват n на брой независими вектора $e_1, ..., e_n$, принадлежащи на V, и всеки n+1 на брой произволни вектора $a_1, ..., a_{n+1}$ са линейно зависими.
(ii) $dim(V) = \infty$, тогава и само тогава, когато за всяко естествено число $n$ съществуват $n$ линейно независими вектора $e_1, ..., e_n \in V$.

Доказателство (i) $dim(V) = n$, следователно съществуват n линейно независими вектора $e_1, ..., e_n \in V$ са базис. Нека вземем произволни $n+1$ вектора от $a_1, ..., a_{n+1} \in V$:

$$a_1, ..., a_{n+1} \in V = l(e_1, ..., e_n)$$

Спрямо *Основната емата на линейната алгебра*, $a_1, ..., a_{n+1}$ са линейни зависими, защото $n+1 > n$. В обратната посока, нека $e_1, ..., e_n$ са n линейно зависими вектора и $a_1, ..., a_{n+1} \in V$ са n+1 линейно зависими вектора. Нека допуснем, че $l(e_1, ..., e_n) \neq V$, което означава, че $l(e_1, ..., e_n) \subsetneq V$. Следователно съществува $e_{n+1} \in V \setminus l(e_1, ..., e_n)$, за който $e_1, ..., e_n, e_{n+1}$ са линейно независими, но всички n+1 вектора са линейно зависими, и това противоречие доказва, че $l(e_1, ..., e_n) = V$ и е базис на V.

(ii) Нека допуснем, че $dim(V) = \infty$ и съществуват $n \geq 2$ линейно зависими вектора $e_1, ..., e_n$. Нека n е минималната възможна стойност, за която това е изпълнено. Следователно съществуват n-1 линейно зависими вектора $e_1, ..., e_{n-1}$. Съгласно (i) оттук следва, че $dim(V) = n - 1$, което е противоречие и доказва дясната посока. В обратната посока, нека $dim(V) \neq \infty$. От предположението знаем, че за естествено число n съществуват n линейно независими вектора $e_1, ..., e_n \in V$. Нека $dim(V) = n$. Тогава спрямо (i), трябва да съществуват n+1 линейно зависими вектора, което е в противоречие с предположението. Тогава $dim(V) = \infty$.

**Твърдение 5.9**

Следните условия са еквивалентни за n вектора $e_1, ..., e_n$ от n-мерно линейно пространство V над поле F:
(i) $e_1, ..., e_n$ са линейно независими
(ii) $l(e_1, ..., e_n) = V$ (iii) $e_1, ..., e_n$ е базис на V

Доказателство По определението на базис, от (iii) следват (i) и (ii).

$(i) \Rightarrow (ii)$ и $(iii)$ Твърдим, че ако $e_1, ..., e_n$ са n линейно независими вектора от n-мерно линейно пространство V, то $l(e_1, ...e_n) = V$ и $e_1, ...e_n$ е базис на V. Нека допуснем, че $l(e_1, ...e_n) \neq V$, тогава съществува $e_{n+1} \in V \setminus l(e_1, ...e_n)$ и $e_1, ...e_n, e_{n+1}$ са линейно независими по Лема за линейна независимост. Но спрямо Твърдение 5.8 (i), щом $dim(V) = n$, n+1 вектора са линейно зависими. Това противоречие доказва, че ако $e_1, ...e_n$ са линейно независими, то $l(e_1, ...e_n) = V$. $(ii) \Rightarrow (i)$ и $(iii)$ Твърдим, че ако $l(e_1, ...e_n) = V$, то $e_1, ..., e_n$ са линейно независими и следователно базис на V. В противен случай, от линейната зависимост на $e_1, ..., e_n$, следва съществуването на индекс $1 \leq i \leq n$ с $a \in l(e_1, ..., e_{n-1}, e_{n+1}, ..., e_n)$. Тогава:

$$l(e_1, ..., e_{n-1}, e_i, e_{n+1}, ..., e_n) \subseteq l(e_1, ..., e_{n-1}, e_{n+1}, ..., e_n)$$

и с включването

$$l(e_1, ..., e_{n-1}, e_{n+1}, ..., e_n) \subseteq l(e_1, ..., e_{n-1}, e_i, e_{n+1}, ..., e_n)$$

получаваме

$$V = l(e_1, ..., e_{n-1}, e_{n+1}, ..., e_n) = l(e_1, ..., e_n)$$

Съгласно предишно доказателство на Твърдение 5.4, съществува базис на V, който се съдържа в множеството $e_1, ..., e_{n-1}, e_{n+1}, ..., e_n$ и размерността на V е $dim(V) \leq n-1$. Това е противоречие с предположението $dim(V) = n$ и доказва, че ако $l(e_1, ...e_n) = V$, то $l(e_1, ...e_n) = V$ и $e_1, ...e_n$ е базис на V.

**Твърдение 5.10**

Нека V е n-мерно линейно пространство над поле F, а W е подпространство на V. Тогава $dim(W) \leq dim(V) = n$ с равенство $dim(W) = dim(V)$, тогава и само тогава, когато $W = V$ съвпадат.

Доказателство Нека подпространството W на линейното пространство V има $dim(W) \geq dim(V) = n$. Тогава $dim(W) = m \in \mathbb{N}$, то съгласно предишно Твърдение 5.8(i), съществуват m линейно независими вектора $w_1, ..., w_m \in W$, $m \geq n+1$. В този случай $dim(W) = \infty$, по Твърдение 5.8 (ii) съществуват m линейно независими вектори $w_1, ..., w_m \in W, \forall m \in \mathbb{N}$. Независимо от дали W е крайномерно или не, имаме n+1 линейно независими вектора $w_1, ..., w_n, w_{n+1} \in W \subseteq V$. Въз основа на Твърдение 5.8 (i), това е противоречие на $dim(W) = n$ и доказва $dim(W) \leq dim(V)$. Ако $dim(W) = dim(V) = n$, то произволни n линейно независими вектора

$$e_1, ..., e_n \in W \subseteq V$$

и спрямо Твърдение 5.9 образуват базис на W и базис на V. Следователно

$$W = l(e_1, ..., e_n) = V$$

**Твърдение 5.10**

Нека $b_1, ..., b_k$ са линейно независими вектори от n-мерно линейно пространство V над поле F. Тогава $k \leq n$ и векторите $b_1, ..., b_k$ могат да се допълнят до базис $b_1, ..., b_k, b_{k+1} ..., b_n$ на V.

Доказателство Нека $e_1, ..., e_n$ е базис на V. Линейната независимост на $b_1, ..., b_k \in V = l(e_1, ..., e_n)$ изисква $k \leq n$ съгласно *Основната лема на линейната алгебра*. Същото следва от Твърдение 5.8 (i) , съгласно което произволни n + 1 вектора в n-мерно пространство V са линейно зависими, така че ако $b_1, ..., b_k$ са линейно независими, то $k \leq n$. Ако k = n, то линейно независимите вектори $b_1, ..., b_n$ в n-мерно линейно пространство V образуват базис на V по Твърдение 5.9. За k < n е в сила строго включване $l(b_1, ..., b_k) \subsetneq V$, защото от $l(b_1, ..., b_k) = V$ за линейно независими вектори $b_1, ..., b_k$ следва, че $b_1, ..., b_k$ е базис на V и $n > dim(V) = k$. Избираме вектор $b_{k+1} \in V \setminus l(b_1, ..., b_k)$. Тогава $b_1, ..., b_k, b_{k+1}$ са линейно независими по Лема за линейна независимост. Ако k + 1 = n, то $l(b_1, ..., b_k, b_{k+1}) = V$ . В случая k + 1 < n имаме $l(b1, ..., bk, bk{+}1) \subsetneq V$ и съществува $b_{k+2} \in V \backslash l(b1, ..., bk, bk+1)$. Тогава векторите $b_1, ..., b_k, b_{k+1}, b_{k+2}$ са линейно независими по Лема за линейна независимост.Ако продължим по този начин, след краен брой стъпки получаваме n линейно независими вектора $b_1, ..., b_k, b_{k+1}, ..., b_n$ от n-мерното пространство V така, че $b_1, ..., b_k, b_{k+1}, ..., b_n$ е базис на V съгласно Твърдение 5.9.