Домашно 2

Александър Гуров

3 януари 2023 г.

Задача 1

От уравненията:

$$a_1 = (1, -1, 1, -1, -1), a_2 = (2, 1, 1, 1, -1), a_3 = (1, 1, -1, 1, 1)$$

Съставяме система уравнения:

$$\left| \begin{array}{cccccc} x_1 & -x_2 & +x_3 & -x_4 & -x_5 & = 0 \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & -x_5 & = 0 \\ x_1 & +x_2 & -x_3 & +x_4 & +x_5 & = 0 \end{array} \right.$$

А от нея съставяме матрица:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

И я решаваме:

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3} & 0 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Векторите $a_1 = (1, 0, 0, 0, 0), a_2 = (0, 1, 0, 1, 0)$ и $a_3 = (0, 0, 1, 0, -1)$ са ЛНЗ и образуват базис базис на U.

Дадена е хомогенната система линейни уравнения за U:

$$\left|\begin{array}{cccccc} x_1 & -x_2 & +2x_3 & -3x_4 & +7x_5 & =0 \\ 2x_1 & +x_2 & -3x_3 & -6x_4 & +4x_5 & =0 \\ x_1 & -x_2 & -2x_3 & -3x_4 & +3x_5 & =0 \end{array}\right.$$

От тази система линейни уравнения съставяме матрица и я решаваме:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 7 \\ 2 & 1 & -3 & -6 & 4 \\ 1 & -1 & -2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 7 \\ 0 & 3 & -7 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Съставяме ФСР с независими променливи x_4 и x_5:

$$x_4 = p, x_5 = q : x_3 = -q, x_2 = q, x_1 = 3p - 4q$$
$$(3p - 4q, q, -q, p, q)$$
$$\text{При } x_4 = 1 : (3, 0, 0, 1, 0)$$
$$\text{При } x_5 = 1 : (-4, 1, -1, 0, 1)$$

$$\text{ФСР на W:} \left|\begin{array}{ccccc} 3x_1 & +x_4 & =0 & & \\ -4x_1 & +x_2 & -x_3 & +x_5 & =0 \end{array}\right. \tag{3}$$

$$\text{Базис на W:} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

За да намерим базиса на $U + W$, трябва да обединим техните базиси (на $U(1)$, на W(4)):

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 4 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & -4 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Получаваме базиса на $U + W$. Сега чрез твърдението:

$$dim(U + W) = dimU + dimW - dim(U \cap W)$$

Намираме размерността на $dim(U \cap W)$:

$$4 = 3 + 2 - dim(U \cap W)$$

$$dim(U \cap W) = 1$$

За да намерим базиса на сечението $U \cap W$, трябва да обединим ФСР на U и дадената хомогенната система линейни уравнения за W. От базиса на U(1) съставяме следната ФСР на U:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = 0 \ x_2 = q, \ x_3 = s, \ x_4 = -q, \ x_5 = s$$

При $x_2 = 1 : (0, 1, 0, -1, 0)$

При $x_3 = 1 : (0, 0, 1, 0, 1)$

$$\text{ФСР на U:} \left| \begin{array}{lll} x_2 & -x_4 & = 0 \\ x_3 & x_5 & = 0 \end{array} \right. \tag{5}$$

Обединяваме ФСР на U(5) и дадената в условието система за W:

$$\left| \begin{array}{cccccc} x_1 & -x_2 & +2x_3 & -3x_4 & +7x_5 & = 0 \\ 2x_1 & +x_2 & -3x_3 & -6x_4 & +4x_5 & = 0 \\ x_1 & -x_2 & -2x_3 & -3x_4 & +3x_5 & = 0 \\ x_2 & -x_4 & = 0 & & & \\ x_3 & +x_5 & = 0 & & & \end{array} \right.$$

Съставяме матрица и я решаваме:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 7 \\ 2 & 1 & -3 & -6 & 4 \\ 1 & -1 & -2 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Заместваме първите 3 реда с вече опростената матрица на системата уравнения за W(2):

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

За да намерим базис на $U \cap W$, трябва да направим ФСР на $U \cap W$. Съставяме ФСР с независима променлива x_5:

$$x_1 = -p,\ x_2 = p,\ x_3 = -p,\ x_4 = p,\ x_5 = p$$

При $x_5 = 1 : (-1, 1, -1, 1, 1)$
ФСР на $U \cap W : -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0$
Базис на $U \cap W : (-1, 1, -1, 1, 1)$