双曲函数

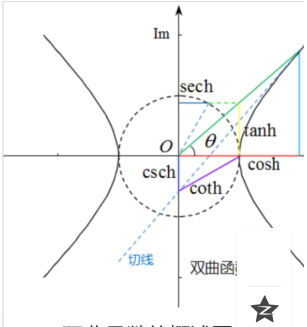
数学函数

本词条由"科普中国"科学百科词条编写与应用工作项目 审核 。

在数学中，双曲函数是一类与常见的三角函数（也叫圆函数）类似的函数。最基本的双曲函数是双曲正弦函数sinh和双曲余弦函数cosh，从它们可以导出双曲正切函数tanh等，其推导也类似于三角函数的推导。双曲函数的反函数称为反双曲函数。 [1]

双曲函数的定义域是区间，其自变量的值叫做双曲角。双曲函数出现于某些重要的线性微分方程的解中，譬如说定义悬链线和拉普拉斯方程。

中文名	双曲函数	领　域	数学函数论
外文名	Hyperbolic function	应　用	定义悬链线和拉普拉斯方程
		应用学科	数学



双曲函数的概述图

目录

定义

双曲函数（hyperbolic function）可借助指数函数定义 [1]

双曲正弦：$\sinh x=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$

双曲余弦：$\cosh x=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$

双曲正切：$\tanh x=\dfrac{\sinh x}{\cosh x}=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$

双曲余切：$\coth x=\dfrac{1}{\tanh x}=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}$

双曲正割：$\mathrm{sech} x=\dfrac{1}{\cosh x}=\dfrac{2}{e^{x}+e^{-x}}$

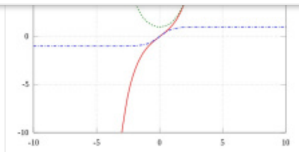
双曲余割：$\mathrm{csch} x=\dfrac{1}{\sinh x}=\dfrac{2}{e^{x}-e^{-x}}$

双曲函数出现于某些重要的线性微分方程的解中，譬如说定义悬链线和拉普拉斯方程。

如同点 (cost,sint) 定义一个圆，点 (cosh t,sinh t) 定义了右半直角双曲线x^2- y^2= 1。这基于了很容易验证的恒等式

间为 (-π/4,π/4) ,其绝对值等于双曲扇形面积 S(比单位面积 ab=a∧2=1∧2) 的两倍。

函数 cosh x 是关于 y 轴对称的偶函数。函数 sinh x 是奇函数，就是说 -sinh x = sinh (-x) 且 sinh 0 = 0。



双曲函数图像(2张)

函数性质

播报 编辑

y=sinh x，定义域：R，值域：R，奇函数，函数图像为过原点并且穿越Ⅰ、Ⅲ象限的严格单调递增曲线，函数图像关于原点对称。 [1]

y=cosh x，定义域：R，值域：[1,+∞)，偶函数，函数图像是悬链线，最低点是（0，1），在Ⅰ象限部分是严格单调递增曲线，函数图像关于y轴对称。

y=tanh x，定义域：R，值域：(-1,1)，奇函数，函数图像为过原点并且穿越Ⅰ、Ⅲ象限的严格单调递增曲线，其图像被限制在两水平渐近线y=1和y=-1之间。

y=coth x，定义域：{x|x≠0}，值域：{y||y|>1}，奇函数，函数图像分为两支，分别在Ⅰ、Ⅲ象限，函数在(-∞,0)和(0,+∞)分别单调递减，垂直渐近线为y轴，两水平渐近线为y=1和y=-1。

y=sech x，定义域：R，值域：(0,1]，偶函数，最高点是(0,1)，函数在(0,+∞)严格单调递减，(-∞,0)严格单调递增。x轴是其渐近线。

y=csch x，定义域：{x|x≠0}，值域：{y|y≠0}，奇函数，函数图像分为两支，分别在Ⅰ、Ⅲ象限，函数在(-∞,0)和(0,+∞)分别单调递减，垂直渐近线为y轴，两水平渐近线为x轴。

与三角函数关系

播报 编辑

双曲函数与三角函数有如下的关系： [2]

$$\sinh x = -i \sin ix$$

$$\cosh x = \cos ix$$

$$\tanh x = -i \tan ix$$

$$\coth x = i \cot ix$$

$$\operatorname{sech} x = \sec ix$$

$$\operatorname{csch} x = i \csc ix$$

恒等式

播报 编辑

与双曲函数有关的恒等式如下： [1]

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\tanh x \cdot \coth x = 1$$

$$1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$$

$$\coth^2 x - 1 = \operatorname{csch}^2 x$$

加法公式

$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

$$\tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}$$

减法公式

$$\sinh(x-y) = \sinh x \cosh y - \cosh x \sinh y$$

$$\cosh(x-y) = \cosh x \cosh y - \sinh x \sinh y$$

$$\tanh(x-y) = \frac{\tanh x - \tanh y}{1 - \tanh x \tanh y}$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x = 2\cosh^2 x - 1 = 2\sinh^2 x + 1$$

$$\tanh 2x = \frac{2\tanh x}{1+\tanh^2 x}$$

三倍角公式

$$\sinh 3x = 3\sinh x + 4\sinh^3 x$$

$$\cosh 3x = 4\cosh^3 x - 3\cosh x$$

半角公式

$\sinh \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{\cosh x - 1}{2}}$ ，正负由x/2决定。

$$\cosh \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{\cosh x + 1}{2}}$$

$$\tanh \frac{x}{2} = \frac{\cosh x - 1}{\sinh x} = \frac{\sinh x}{1+\cosh x}$$

导数

播报 编辑

$$(\sinh x)' = \cosh x$$

$$(\cosh x)' = \sinh x$$

$$(\tanh x)' = sech^2 x = 1 - \tanh^2 x$$

$$(\coth x)' = -csch^2 x$$

$$(sechx)' = -sechx \cdot \tanh x$$

$$(cschx)' = -cschx \cdot \coth x$$

不定积分

播报 编辑

$$\int \sinh x dx = \cosh x + C$$

$$\int \cosh x dx = \sinh x + C$$

$$\int \tanh x\, dx = \ln(\cosh x) + C$$

$$\int \coth x\, dx = \ln(\sinh x) + C$$

$$\int \operatorname{sech} x\, dx = \arctan(\sinh x) + C$$

$$\int \operatorname{csch} x\, dx = \ln\left|\tanh \frac{x}{2}\right| + C$$

级数表示

播报 编辑

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\cdots$$

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\cdots$$

其他级数可根据双曲函数与三角函数的关系，用ix代替x（有些函数需要再乘以i或-i）即可。

实际应用

播报 编辑

双曲函数并非单纯是数学家头脑中的抽象，在物理学众多领域可找到丰富的实际应用实例。 [3]

阻力落体

解：

小石块遵循的运动方程为

mdv/dt=mg— μv^2 （1）

这是Riccati方程，它可以精确求解。

依标准变换方式，设

v=（m/μ）/（z′/z） （2）

代入（1）式，再作化简，有

z" —（gμ /m)z=0 （3）

（3）式的通解是

z=C1exp（√gμ /m t）＋C2exp（－√gμ /m t） （4）

其中，C1和C2是任意常数。

由于小石块在初始时刻是静止的，初始条件为

v（0）=0 （5）

这等价于

z′（0）=0 （6）

因此，容易定出

C2=C1 （7）

将（7）式代入（4）式，再将（4）式代入（2）式，就可得

满足初始条件的解

v=√mg/μ tanh（√μg/m t）（8）

我们可以作一下定性的分析。小石块初始时刻静止。因此，随着时间增加，开始时小石块速度较小，小石块所受的阻力影响较小，此时，小石块与不受阻力的自由落体运动情况相类似，小石块加速度几乎是常数。起始段t和v的关系是直线。当小石块速度很大时，重力相对于阻力来说可以忽略，阻力快速增加到很大的数值，导致小石块的速度几乎不再增加。此时，小石块加速度接近零，v几乎不随时间而变化。一段时间后，v相不多是一平行于t轴的直线。

导线电容

真空中两条圆柱形无穷长平行直导线，横截面的半径分别为R1和R2，中心线相距为d(d >R1+R2）。试求它们间单位长度的电容。[3]

解：设这两条导线都带电，单位长度的电荷量分别是为λ和—λ。

我们可以用电像法精确求解。电像法的思路是：

由于在静电平衡情况时，导线是等势体，因而我们可设想用偶极线来取代这两条圆柱形带电导线，适当地选择偶极线的位置，使它们所产生的两个等势面恰好与原来两导线的表面重合。这样就满足了边界条件。这里采用的偶极线是两条无穷长的均匀带电平行直线，它们单位长度的电荷量也分别为λ和—λ。这偶极线便是原来两带电导线的电像。于是就可以计算电势，从而求出电容来。为此先求偶极线的等势面。

以偶极线所在的平面为z-x平面，取笛卡儿坐标系，使偶极线对称地处在z轴的两侧，它们到z轴的距离都是a。这偶极线所产生的电势便为

φ=φ1+φ2

=（λ/2πε0）ln（r1′/ r1）+（—λ/2πε0）ln（r2′/ r2)

=（λ/2πε0）ln[（r2 / r1）（r1′/ r2′）]（1）

式中r1′和r2′分别是偶极线λ和—λ到某个电势参考点的距离。为方便起见，我们取z轴上的电势为零，这样，r1′=r2′= a，于是，（1）式便化为

φ=（λ/2πε0）ln（r2 / r1） （2）

φ= （λ/4πε0）In{[（x2+a2）+y2] /[（x2—a2）+y2] } （3）

故偶极线的等势面方程便为

[（x2+a2）+y2] /[（x2—a2）+y2]=k2 （4）

式中k2 =e4πε0φ/λ （5）

令c=[（k2+1） / （k2—1）]a （6）

则（4）式可化为

（x—c）2+y2=[4k2/（k2—1）2]a 2 （7）

这表明，偶极线的等势面都是轴线平行于z轴的圆柱面，它们的轴线都在z轴上z=c处，其横截面的半径为

R=∣2k/（k2—1） ∣a （8）

这个结果启示，我们可以找到偶极线的两个等势面，使它们分别与原来两导线的表面重合。这只要下列等式成立就可以了：

a1= ∣c1∣=[（k12+1） / （k12—1）]a （9）

R1=∣2k1/（k12—1） ∣a （10）

a2= ∣c2∣=[（k22+1） / （k22—1）]a （11）

R2=∣2k2/（k22—1） ∣a （12）

d=a1+a2 （13）

由（9）至（13）式得

a12—R12=a2= a22—R22 （14）

原来两导线表面的方程是

R1： （x—a1）2+y2= R12 （15）

R2： （x+a2）2+y2= R22 （16）

利用（14）式，可以把（15）和（16）式分别化为

x2+y2+ a2= 2a1 x （17）

x2+y2+ a2= —2a2 x （18）

利用（17）和（18）两式，由⒅式得出，半径为R1和R2的两导线的电势分别为

φ1= （λ/4πε0）In[（a1+a） / （a1—a）] （19）

φ2=— （λ/4πε0）In[（a2+a） / （a2—a）] （20）

于是两导线的电势差便为

U=φ1+φ2= （λ/2πε0）In[（a1+a） （a2—a） / R1R2] （21）

用已知的量消去未知数，可以得出

U= （λ/2πε0）In[（d2—R12—R2） / 2R1R2+√[（d2—R12—R2） / 2R1R2]2—1] （22）

最后得出原来两导线为l一段的电容为

C=Q/U=2πε0l/ In[（d2—R12—R22） / 2R1R2+√[（d2—R12—R22） / 2R1R2]2—1] （23）

单位长度的电容为

c=2πε0/ In[（d2 — R12 —R22） / 2R1R2+√ [（d2—R12—R22） / 2R1R2] 2—1] （24）

利用反两曲余弦关系式

archx= In[（x+√x2—1）] （25）

对本题的精确解表示作简洁表示

c=2πε0/ arch[（d2—R12—R22） / 2R1R2] （26）

一电荷量为q、静质量为m0的粒子从原点出发，在一均匀电场E中运动，E=Eez沿z轴方向，粒子的初速度沿y轴方向，试证明此粒子的轨迹为 [4]

x=（W0/qE）[cosh（qEy/p0c）—1]（1）

式中p0是粒子出发时动量的值，W0是它出发时的能量。

解：

带有电荷量q的粒子在电磁场E和B中的相对论性的运动方程为

dp/dt=q（E+v×B） （2）

式中v是粒子的速度，p是粒子的动量

p=mv=mv0/√1 - v2/c2 （3）

本题运动方程的分量表示式为

dpx=qE

dpy=0

dpz=0 （4）

解之，有

px =qEt+C1

py = C2

pz = C3 （5）

代入t=0时初始条件

px（0）=0

py（0）= p0

pz（0）= 0 （6）

定出积分常数后，可知

px=qEt

py= p0

pz= 0 （7）

粒子的能量为

W=mc2

=√p2c2+m02c4

=√（px2+ py2+ pz2）c2+m02c4

=√q2E2 c2t2+W02 （8）

因dx/dt=qEt/m=qEc2t/√q2E2 c2t2+W02 （9）

积分得

x=∫[qEc2t/√q2E2 c2t2+W02]dt

= [√q2E2 c2t2+W02 - W02]/qE （10）

又由（7）式得

dy/dt=p0/m=p0c2/√q2E2 c2t2+W02 （11）

积分得

y=∫[p0c2 /√q2E2 c2t2+W02]dt

=（p0c /qE）arsh（qEct/W0） （12）

x=（W0/qE）[√1+ sinh2（qEy/ p0c） - 1]（14）

利用恒等变换公式

cosh2x—sinh2x=1 （15）

（55）式可以写成

x=（W0/qE）[cosh2（qEy/ p0c） - 1]（16）

（16）式是一种悬链线。

讨论：

因双曲余弦泰勒级数展开式是

cosh（x）=1+x2/2!+x4/4!+x6/6!+……（17）

当v/c →0时，保留前2项，得

x=（qE/2m v02）y2 （18）

（18）式是抛物线轨迹。《普通物理学》教材用经典牛顿力学求解，普遍会给有这个结果。这表示，非相对论确是相对论在v/c →0时的极限。或者说，（18）式成立的条件是v/c<<1，这也是牛顿力学的适用范围。

非线性方程

如著名的KdV（Korteweg-de Vries）方程的形式为 [4]

ux+uux+βuxxx=0 （1）

它是非线性的频散方程，其中β是频散系数。用双曲函数展开法求其某些特殊精确解。

解：

考虑其行波解

u（x，t）=φ（ξ） （2）

其中，

ξ=kx - ωt+ξ0 （3）

KdV方程成为

- ωφξ+kφφξ+k3βφξξξ=0 （4）

记

f=1/（coshξ+r）,g=sinhξ/（coshξ+r） （5）

尝试

φ=a0+a1f+a2g （6）

注意存在关系式

df/dξ= - fg

dg/dξ=1 - g2 - rg

g2=1 - 2rf+（r2 - 1）f2 （7）

将（7）式代入（5）式，并在（6）式的帮助下使所得方程中各项只含有f和g的幂次项，且g的幂次项不大于1。合并f和g的同次幂项并取其系数为零，就得到方程（4）对应的非线性代数方程组

- 6βk3b1（r2 - 1）2=0

- 6βk3a1（r2 - 1）=0

- 2kb1（r2 - 1） (- 6βk2r+ a1）=0

- k（ - 6βk2r a1+ a12 - b12+ b12r2）=0

b1（4βk3+ka0 - ka0r2+3ka1 r - 7βk3 r2+ cr2 - c）=0

用计算机代数系统Maple对此超定方程组进行运算，可求得k≠0，ω≠0时的一个非平凡精确解

φ=（ω - βk3）/k+6βk2/（coshξ+1）=0 （9）

其中，k、ω、ξ0为任意常数。

（9）式是孤波解。

从以上的讨论中可知，无论是在经典或近代的物理学内容中，还是在正在发展中的物理学内容中，双曲函数起着不可或缺的重要作用。

悬链线

形如y=a cosh(x/a)(a为常数）的函数的图象又叫悬链线，可以由柔软的绳子得到，有点象抛物线，但其实两者差距很大.据说莱布尼兹（Leibniz）于1690年最先解出悬链线方程，惠更斯（Huygens）和伯努利兄弟（Jacob Bernoulli,Johann Bernoulli）随其后.惠更斯在1691年把悬链线命名为catenary. 悬链线与抛物线有这样的关系：悬链线是直线上滚动的抛物线的焦点的运动轨迹.悬链线的顶点的渐开线是曳物线（tractrix).这条曳物线的渐进线称为悬链线的准线，悬链线绕准线旋转形成的曲面叫做悬链面。 [3]

数学证明

设最低点A处受水平向左的拉力H，右悬挂点处表示为C点，在AC弧线区段任意取一段设为B点，则B受一个斜向上的拉力T，设T和水平方向夹角为θ，绳子的质量为m。 [3]

受力分析有： Tsinθ=mg Tcosθ=H tanθ=dy/dx=mg/H mg=ρs

其中s是右段AB绳子的长度，ρ是绳子线重量密度，代入得微分方程dy/dx=ρs/H

利用弧长公式ds=√（1+dy^2/dx^2）*dx；所以s=∫√（1+dy^2/dx^2）*dx

所以把s带入微分方程得dy/dx=ρ∫√（1+dy^2/dx^2）*dx/H;....（1）

对于（1）设p=dy/dx微分处理 得 p'=ρ/H*√（1+p^2）......（2）

p'=dp/dx 对（2）分离常量求积分 ∫dp/√（1+p^2）=∫ρ/H*dx 得ln[p+√（1+p^2）]=ρx/H+C，即asinhp（反双曲正弦）=ρx/H+C

当x=0时，dy/dx=p=0带入得C=0

整理得asinhp=ρx/H

另详解：（ln[p+√（1+p^2）]=ρx/H）

p=sh（ρx/H）（1+p^2=e^（2ρx/H)-2pe^（ρx/H)+p^2）

（p=[e^（ρx/H)-e^(-ρx/H)]/2=dy/dx）

y=ch （ρx/H)* H / ρ （y=H/（2ρ）*[e^（ρx/H)+e^(-ρx/H)]）

令a=H/ρ：y=a*cosh (x/a) （y=a[e^(x/a)+e^(-x/a)]/(2)= a*cosh(x/a）） 。

词条图册

更多图册 >

参考资料

1 杨波尔斯基, A.P.. 双曲函数[M]. 中央民族学院出版社, 1987.

2 文泽. 双曲函数与三角函数间的关系[J]. 中等数学, 1985(3).

3 林旋英、张之翔．电动力学题解：科学出版社，1999

4 吕克璞, 石玉仁, 段文山,等. KdV-Burgers方程的孤波解[J]. 物理学报, 2001, 50(11):2074-2076.

郭冠平，张解放．关于双曲函数方法求孤波解的注记．《WanFang》，2002

朱加民．Hyperbolic function method for solving nonlinear differential-different e…《VIP》，2005

Huang DingJiang等．Extended hyperbolic function method and new exact solitary wave sol…《物理学报》，2004

李建平，蒙建波．基于双曲函数的变步长LMS算法及其分析．《CNKI;WanFang》，2011

查看全部 ›

搜索发现

双曲函数公式 双曲正弦函数 双曲函数求导 双曲线知识点 初二函数

初中函数入门 函数题 matlab中国 matlab 深度学习 数学函数