



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PEA 3306 - 2020

SEGUNDO EXERCÍCIO COMPUTACIONAL
Indutância e Força Magnética Em Solenoide
Com Êmbolo

Nome: Guilherme Akira Alves dos Santos

NUSP: 11027484

Professor: Luiz Lebensztajn

Turma: 02

São Paulo – SP

2020

SUMÁRIO

1. Dados do problema para o grupo	03
2. Cálculo Analítico da Indutância e da Força	03
3. Sumário das simulações	06
3.1. Núcleo de material μ_{1000}	06
3.1.1. $e_i = 0.1$ cm	06
3.1.2. $e_i = 0.2$ cm	08
3.1.3. $e_i = 0.3$ cm	09
3.1.4. $e_i = 0.4$ cm	11
3.1.5. $e_i = 0.5$ cm	12
3.2. Núcleo de material M-15 Steel	14
3.2.1. $e_i = 0.1$ cm	14
3.2.2. $e_i = 0.2$ cm	15
3.2.3. $e_i = 0.3$ cm	17
3.2.4. $e_i = 0.4$ cm	18
3.2.5. $e_i = 0.5$ cm	20
4. Análise Qualitativa das simulações	21
5. Variação da Indutância Própria com o entreferro	22
6. Variação da Força magnética com o entreferro	23
7. Análise dos resultados, comentários e conclusões	24

1. Dados do problema

Número de espiras (N)	400
Corrente	1 A
Material do núcleo	M-15 Steel
Compr. entreferro sup. (e_s)	0.2 cm
Compr. entreferro inf. (e_i)	0.1→0.5 cm

2. Cálculo Analítico da Indutância Própria e da Força Magnética

Com um núcleo ferromagnético ideal ($\mu_c \rightarrow \infty$), considera-se apenas as relutâncias dos entreferros na modelagem de circuito magnético (aplicando o efeito de espraçamento). Estas são dadas pelas seguintes expressões:

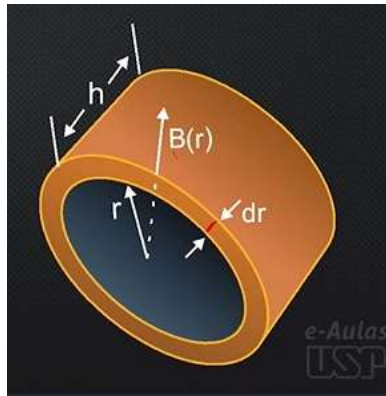


Fig. 1 - Elemento infinitesimal para cálculo da relutância em entreferro com simetria axial

$$\mathfrak{R}_{e_s} = \frac{1}{2\pi\mu_0(h+e_s)} \times \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{1}{2\pi\mu_0(h+e_s)} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\mathfrak{R}_{e_i} = \frac{e_i}{\mu_0 A}$$

Para o cálculo da relutância no entreferro superior, utilizou-se os seguintes valores das dimensões de projeto:

$$h = 2.5 \text{ cm}$$

$$a = 2.5 \text{ cm}$$

$$b = (a + e_s) \text{ cm}$$

$$e_s = 0.2 \text{ cm}$$

$$\mathfrak{R}_{e_s} = \frac{1}{2\pi\mu_0((2.5+0.2)*10^{-2})} \ln\left(\frac{(2.5+0.2)*10^{-2}}{2.5*10^{-2}}\right) = 361.009 \text{ k} \frac{A.esp}{Wb}$$

O cálculo da relutância no entreferro inferior deu-se por:

$$r = 2.5 \text{ cm}$$

$$A = \pi r^2 = \pi(2.5 * 10^{-2} + e_i)^2$$

$$e_i = 0.1 \rightarrow 0.5 \text{ cm}$$

	$e_i \text{ [cm]}$				
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
\mathfrak{R}_{e_i} $\left[\text{k} \frac{A.esp}{Wb} \right]$	374.709	694.933	969.272	1204.770	1407.239

Com o valor das relutâncias definidos, pode-se modelar o seguinte circuito magnético:

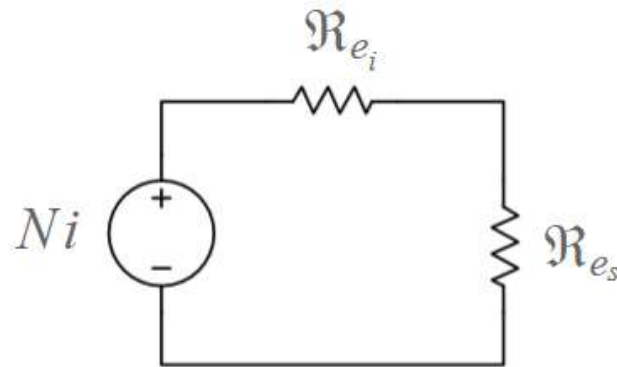


Fig. 2 - Circuito magnético simplificado do atuador eletromecânico

$$Ni = (\mathfrak{R}_{e_i} + \mathfrak{R}_{e_s})\Phi$$

Dessa forma, após algumas manipulações algébricas, encontra-se a indutância própria da seguinte forma:

$$L(e_i) = \frac{N\Phi}{i} = \frac{N^2}{\mathfrak{R}_{e_i} + \mathfrak{R}_{e_s}}$$

	e_i [cm]				
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
L [mH]	217.475	151.524	120.275	102.186	90.485

A força magnética atuante na parte móvel do êmbolo é dada pela seguinte relação:

$$F_{mag.}(e_i) = \frac{1}{2}i^2 \frac{dL(e_i)}{de_i} = -\frac{i^2}{2} \frac{\mu_0 \pi N^2 (r^2 - e_i^2)}{(\mu_0 \pi \mathfrak{R}_{e_s} (r + e_i)^2 + e_i)^2}$$

	e_i [cm]				
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$F_{mag.}$ [N]	-51.121	-21.237	-11.476	-7.117	-4.801

3. Sumário das simulações

3.1. Núcleo de material Mu_1000

3.1.1. $e_i = 0.1$ cm

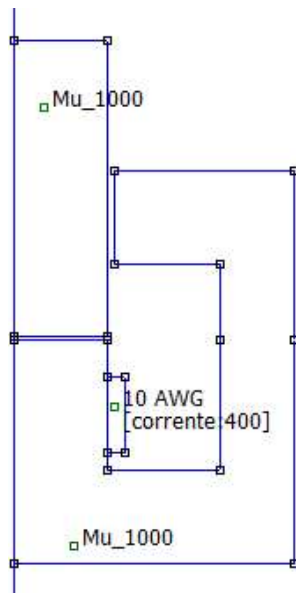


Fig. 3 - Geometria de revolução

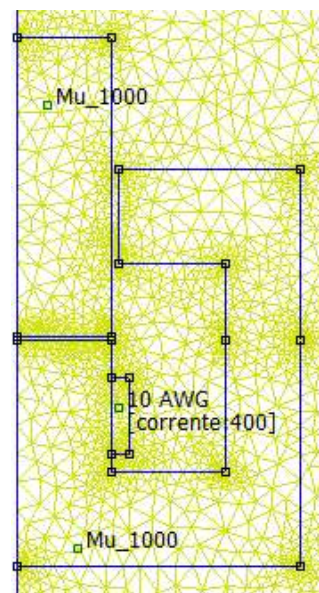


Fig. 4 - Malha de Elementos Finitos da Fig. 3

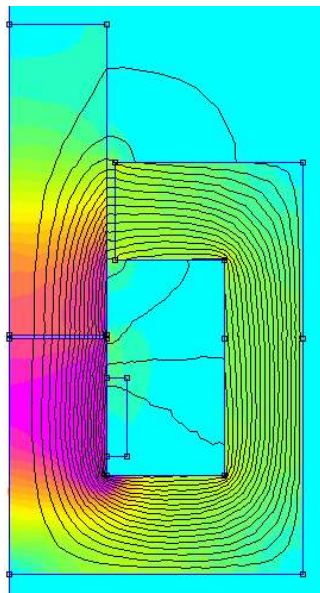


Fig. 5 - Mapa de densidade de fluxo magnético

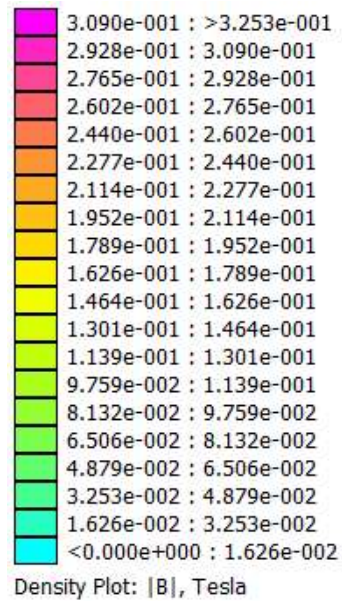


Fig. 6 - Legenda da Fig. 5

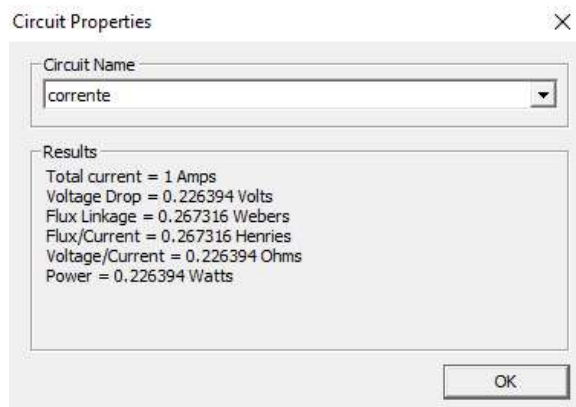


Fig. 7 - Janela pop-up Cálculo da Indutância

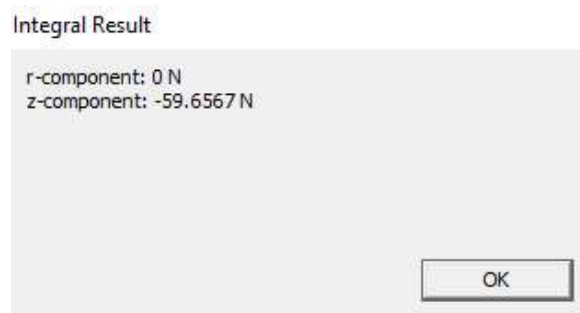


Fig. 8 - Janela Cálculo da Força Magnética

3.1.2. $e_i = 0.2 \text{ cm}$

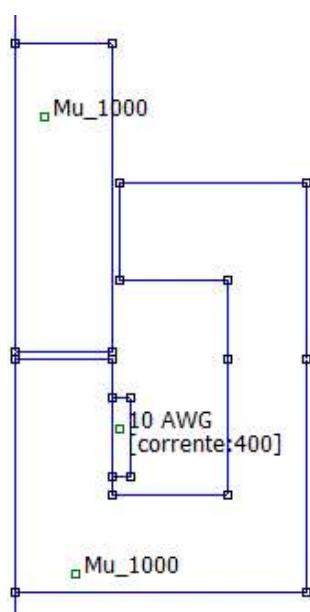


Fig. 9 - Geometria de revolução

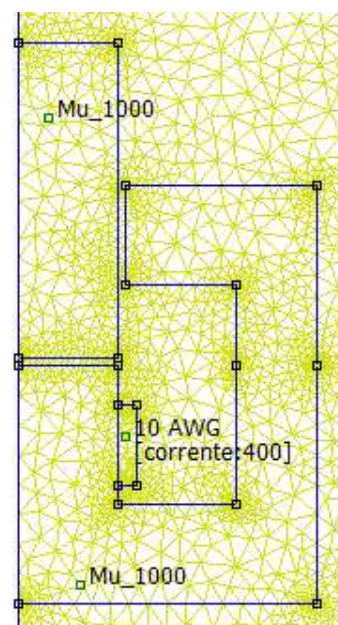


Fig. 10 - Malha de Elementos Finitos da Fig. 9

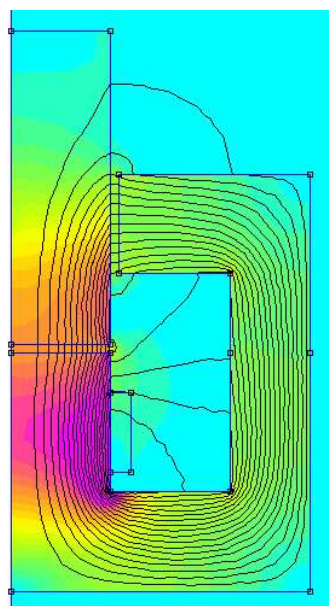


Fig. 11 - Mapa de densidade de fluxo magnético

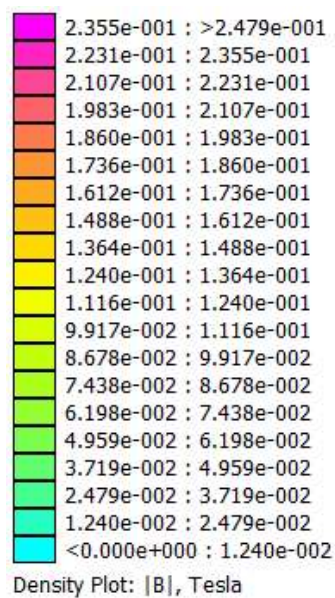


Fig. 12 - Legenda da Fig. 11

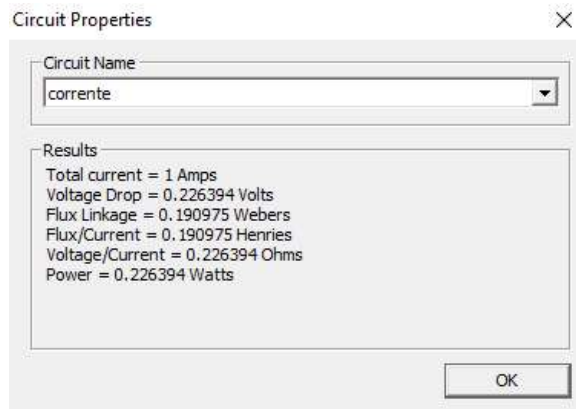


Fig. 13 - Janela pop-up Cálculo da Indutância

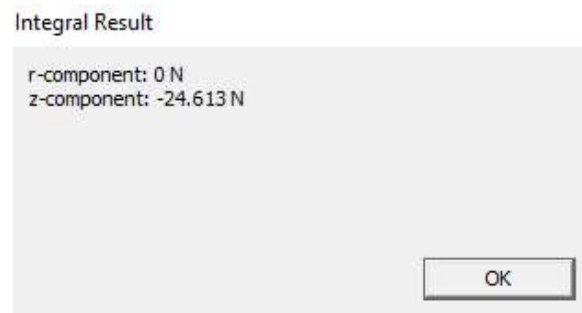


Fig. 14 - Janela Cálculo da Força Magnética

3.1.3. $e_i = 0.3 \text{ cm}$

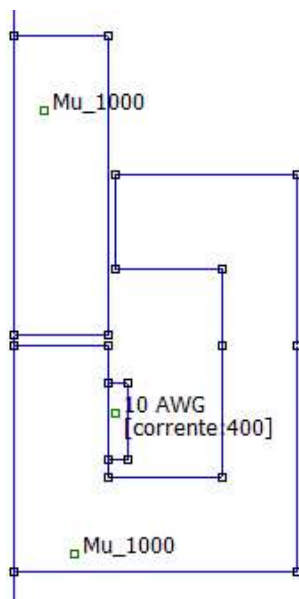


Fig. 15 - Geometria de revolução

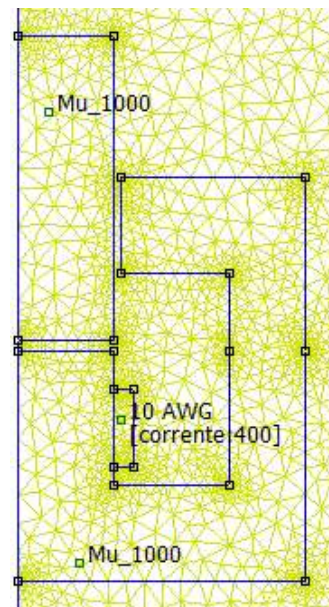


Fig. 16 - Malha de Elementos Finitos da Fig. 15

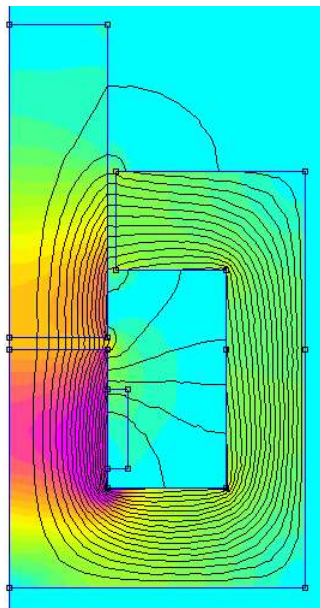


Fig. 17 - Mapa de densidade de fluxo magnético

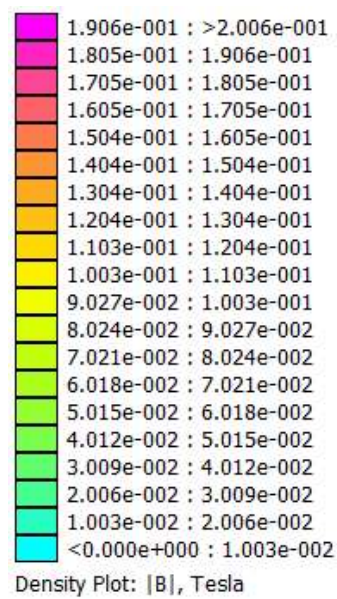


Fig. 18 - Legenda da Fig. 17

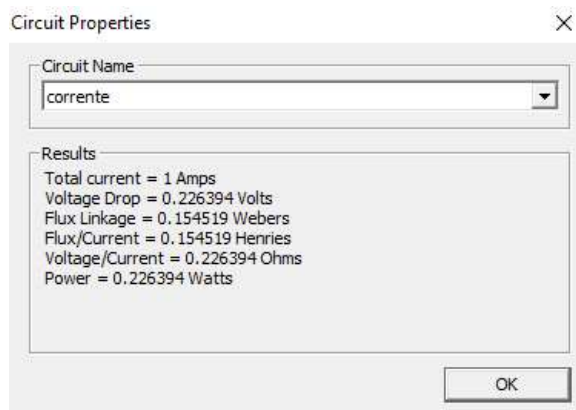


Fig. 19 - Janela pop-up Cálculo da Indutância

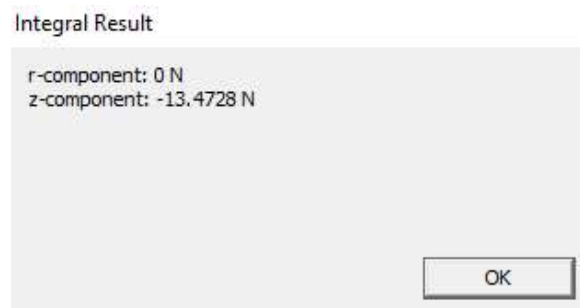


Fig. 20 - Janela Cálculo da Força Magnética

3.1.4. $e_i = 0.4 \text{ cm}$

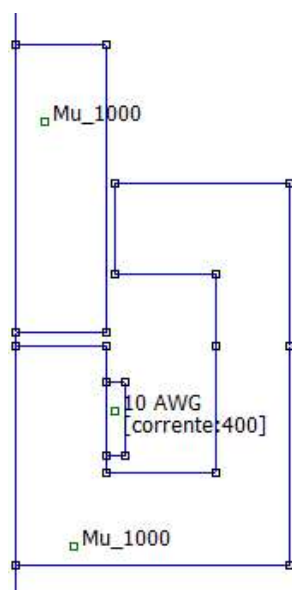


Fig. 21 - Geometria de revolução

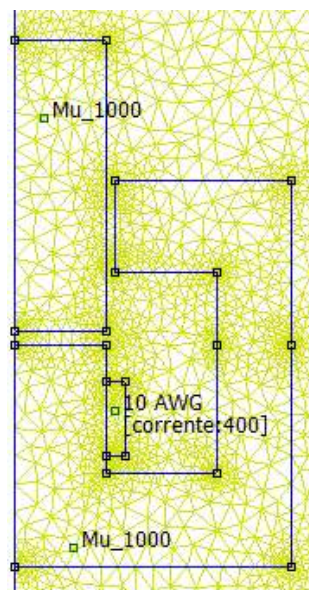


Fig. 22 - Malha de Elementos Finitos da Fig. 21

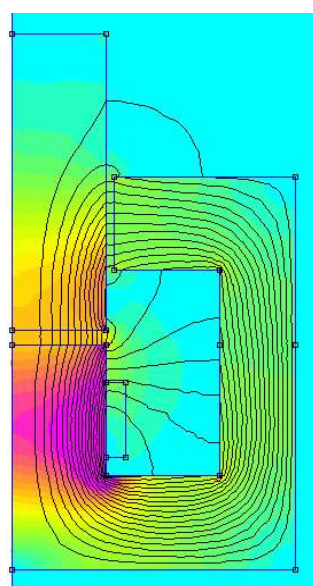


Fig. 23 - Mapa de densidade de fluxo magnético

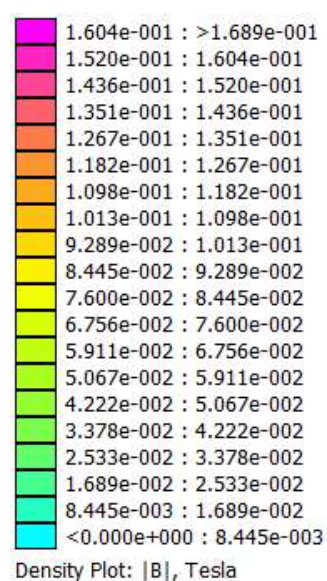


Fig. 24 - Legenda da Fig. 23

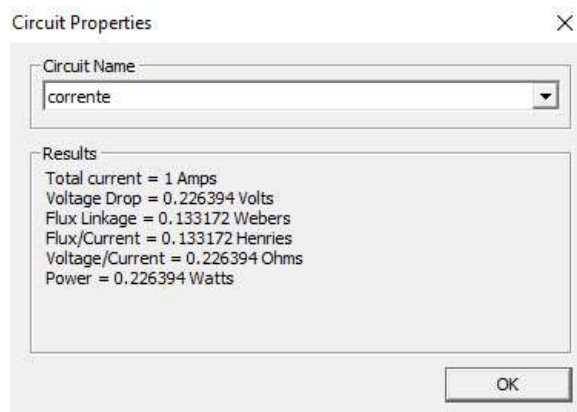


Fig. 25 - Janela pop-up Cálculo da Indutância

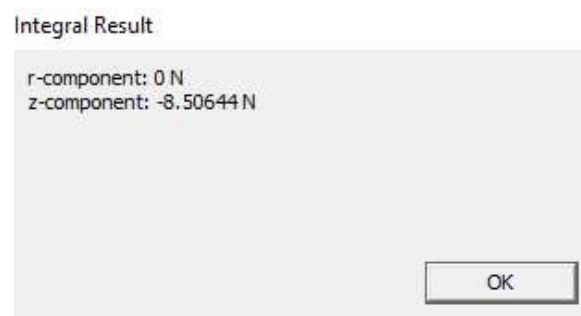


Fig. 26 - Janela Cálculo da Força Magnética

3.1.5. $e_i = 0.5 \text{ cm}$

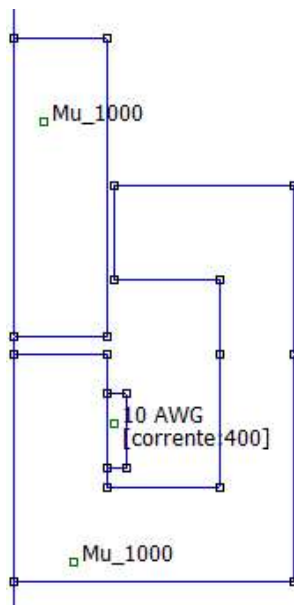


Fig. 27 - Geometria de revolução

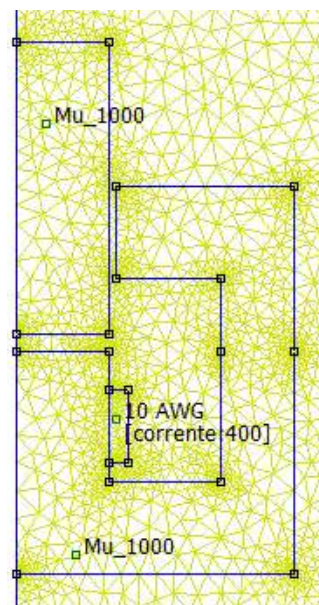


Fig. 28 - Malha de Elementos Finitos da Fig. 27

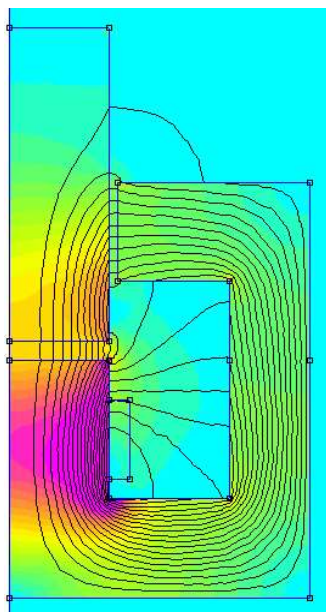


Fig. 29 - Mapa de densidade de fluxo magnético

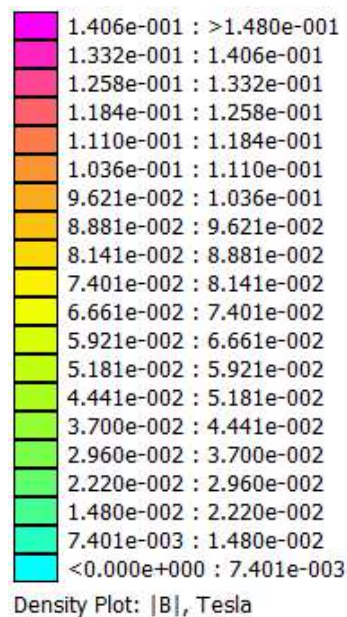


Fig. 30 - Legenda da Fig. 29

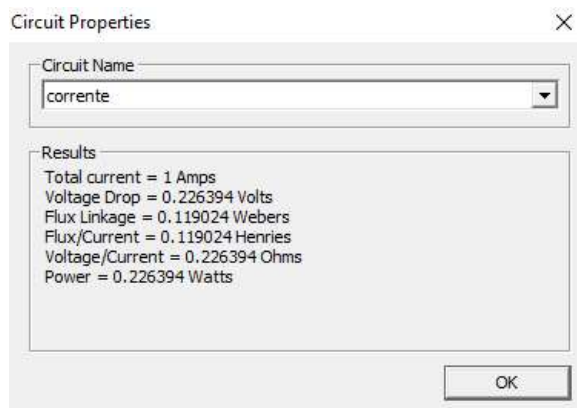


Fig. 31 - Janela pop-up Cálculo da Indutância

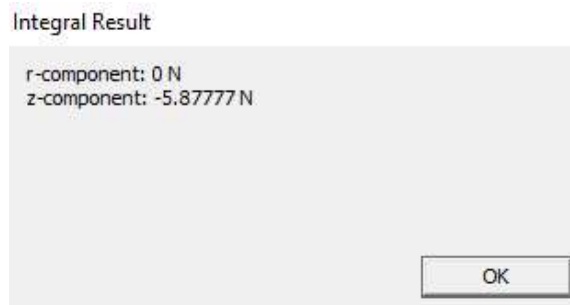


Fig. 32 - Janela Cálculo da Força Magnética

3.2. Núcleo de material M-15 Steel

3.2.1. $e_i = 0.1 \text{ cm}$

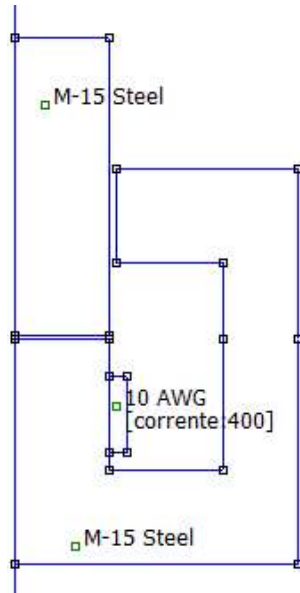


Fig. 33 - Geometria de revolução

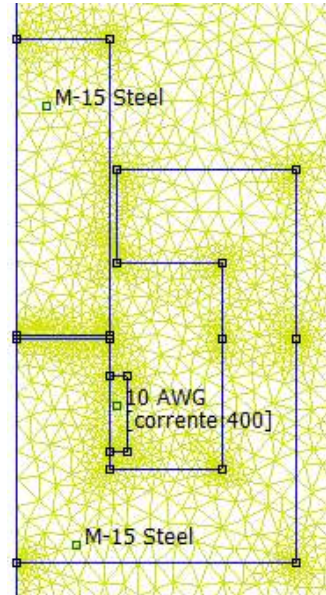


Fig. 34 - Malha de Elementos Finitos da Fig. 33

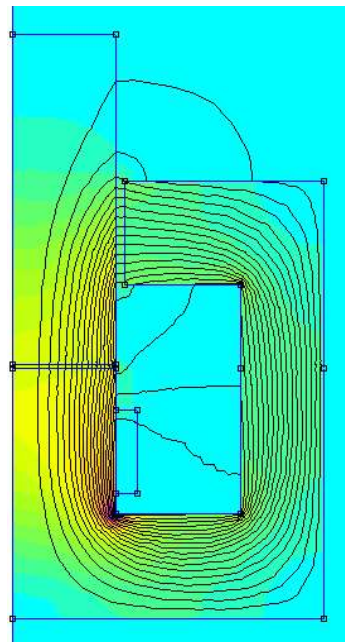


Fig. 35 - Mapa de densidade de fluxo magnético

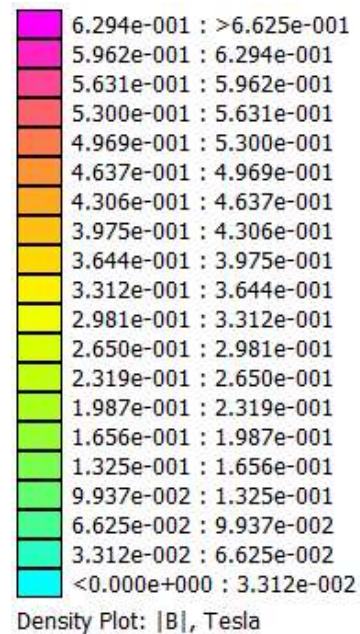


Fig. 36 - Legenda da Fig. 35

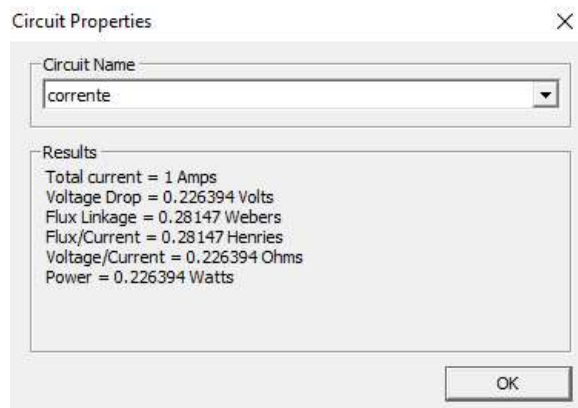


Fig. 37 - Janela pop-up Cálculo da Indutância

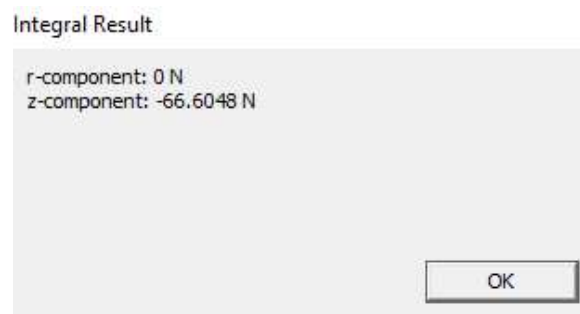


Fig. 38 - Janela Cálculo da Força Magnética

3.2.2. $e_i = 0.2 \text{ cm}$

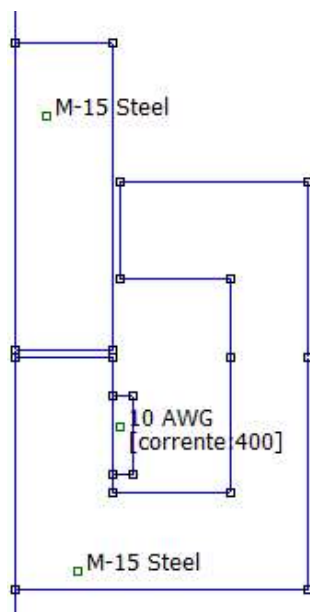


Fig. 39 - Geometria de revolução

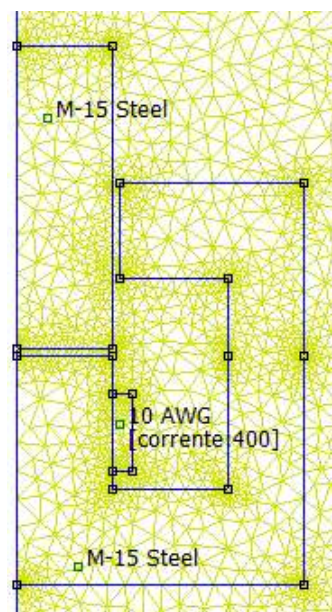


Fig. 40 - Malha de Elementos Finitos da Fig. 39

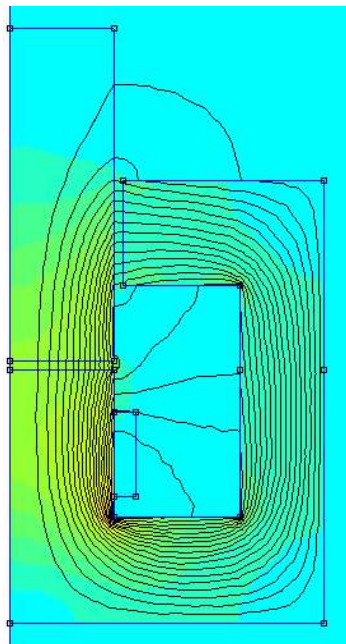
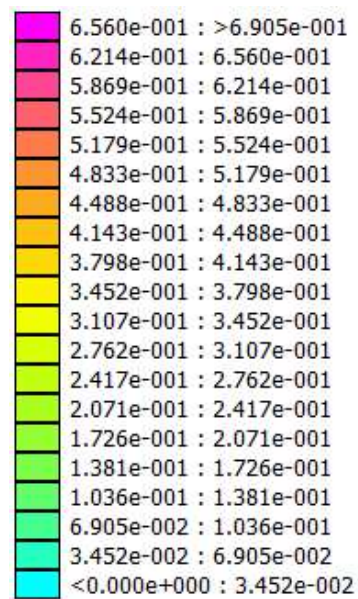


Fig. 41 - Mapa de densidade de fluxo magnético



Density Plot: |B|, Tesla

Fig. 42 - Legenda da Fig. 41

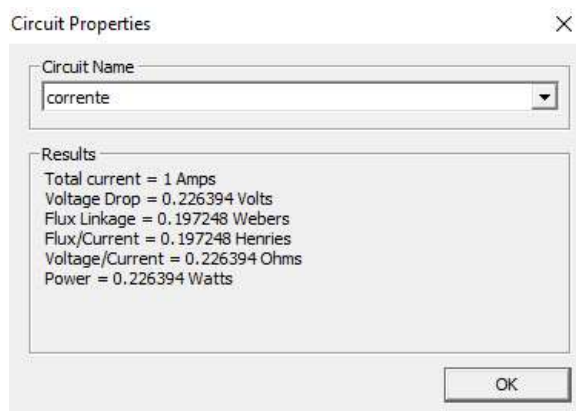


Fig. 43 - Janela pop-up Cálculo da Indutância

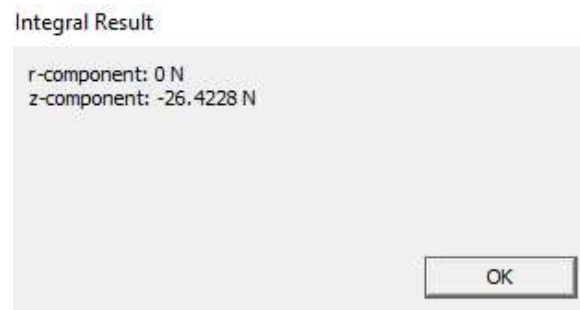


Fig. 44 - Janela Cálculo da Força Magnética

3.2.3. $e_i = 0.3 \text{ cm}$

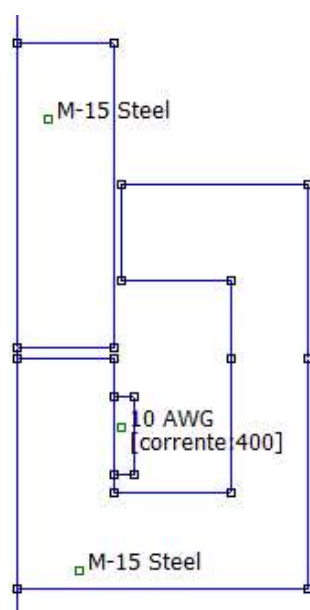


Fig. 45 - Geometria de revolução

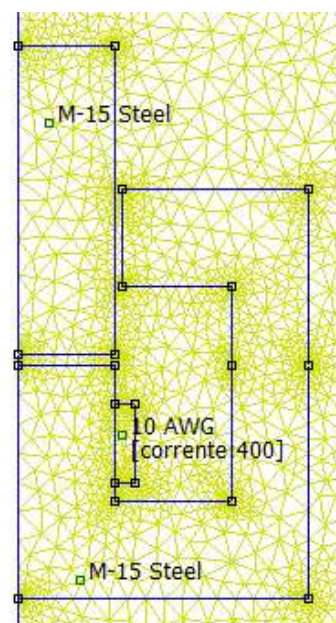


Fig. 46 - Malha de Elementos Finitos da Fig. 45

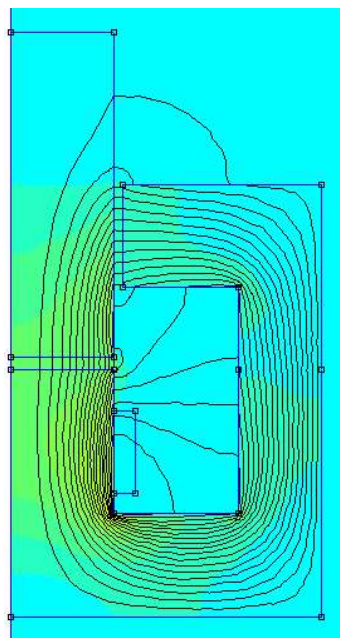


Fig. 47 - Mapa de densidade de fluxo magnético

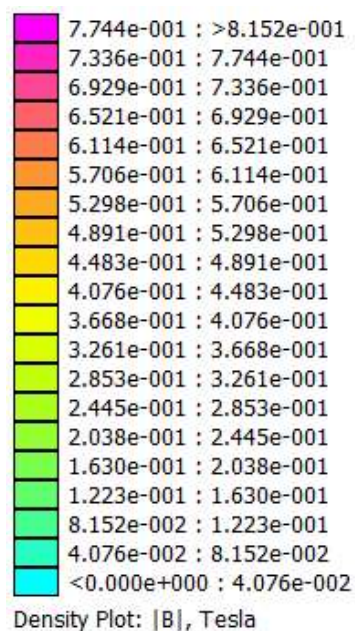


Fig. 48 - Legenda da Fig. 47

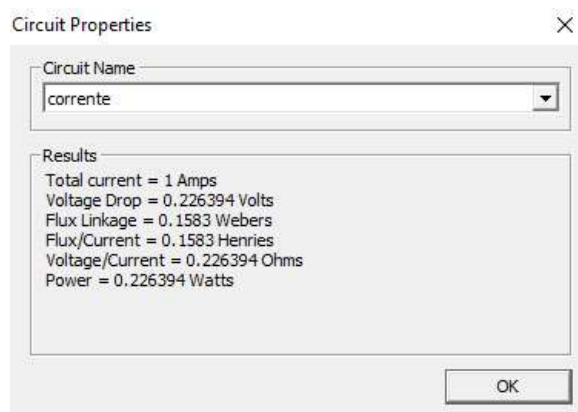


Fig. 49 - Janela pop-up Cálculo da Indutância

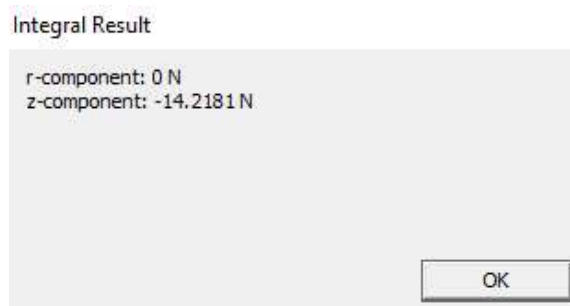


Fig. 50 - Janela Cálculo da Força Magnética

3.2.4. $e_i = 0.4 \text{ cm}$

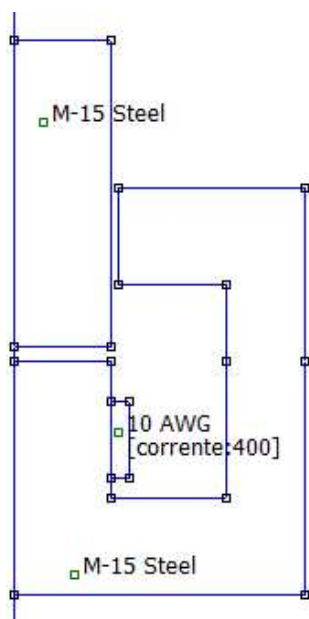


Fig. 51 - Geometria de revolução

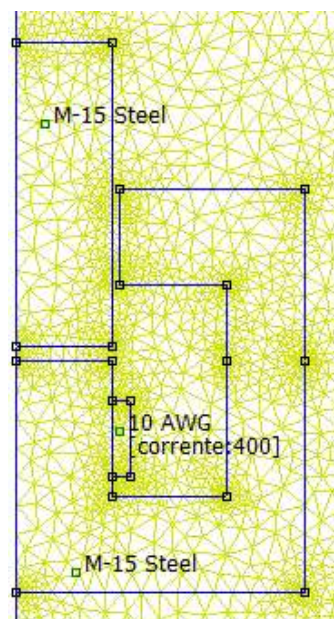


Fig. 52 - Malha de Elementos Finitos da Fig. 51

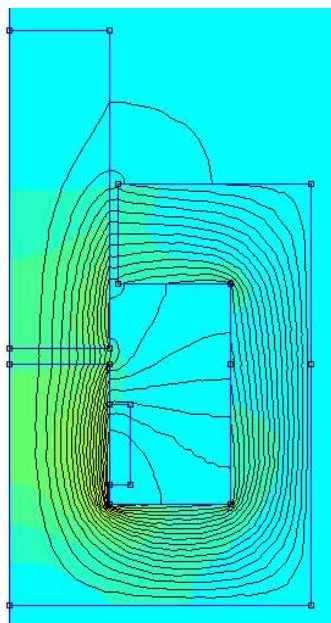


Fig. 53 - Mapa de densidade de fluxo magnético

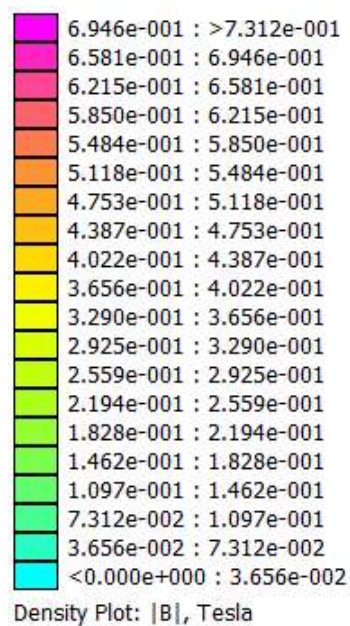


Fig. 54 - Legenda da Fig. 53

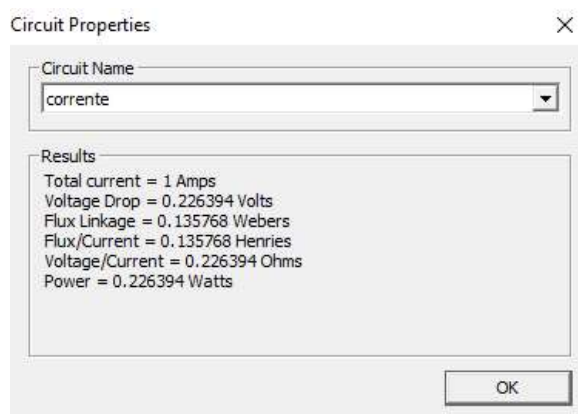


Fig. 55 - Janela pop-up Cálculo da Indutância

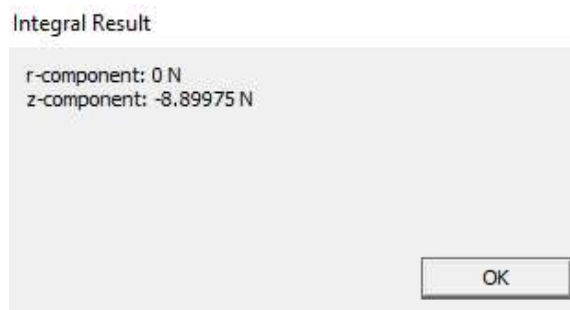


Fig. 56 - Janela Cálculo da Força Magnética

3.2.5. $e_i = 0.5 \text{ cm}$

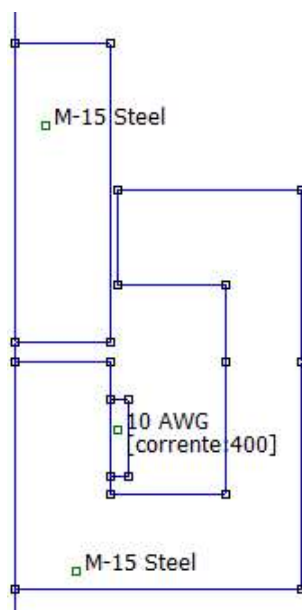


Fig. 57 - Geometria de revolução

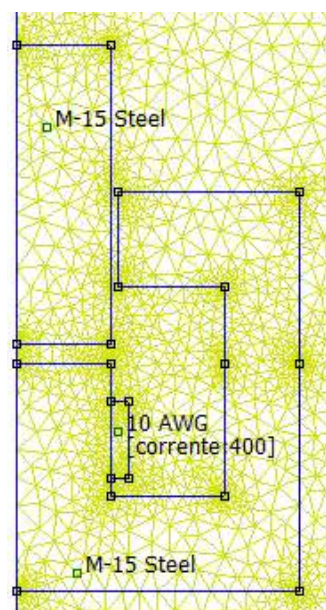


Fig. 58 - Malha de Elementos Finitos da Fig. 57

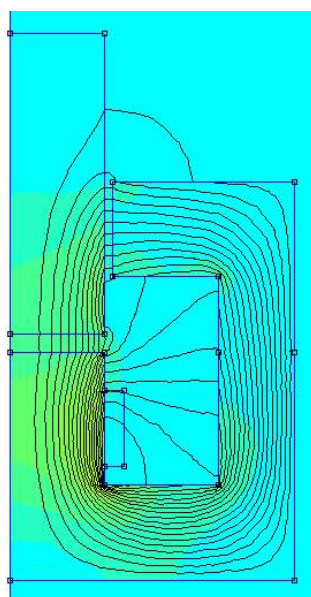


Fig. 59 - Mapa de densidade de fluxo magnético

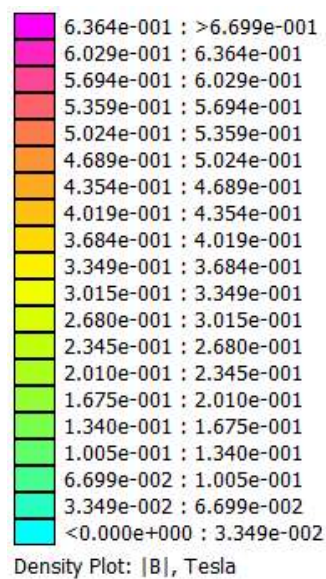


Fig. 60 - Legenda da Fig. 59

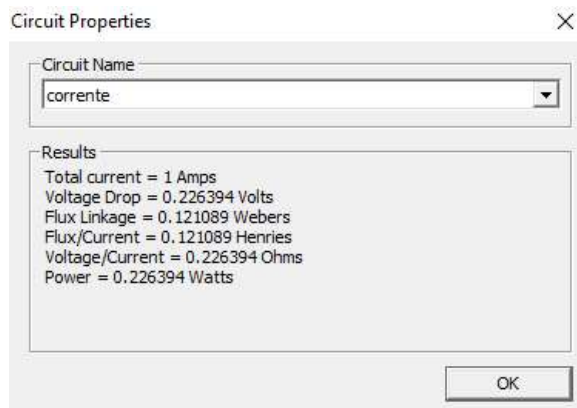


Fig. 61 - Janela pop-up Cálculo da Indutância

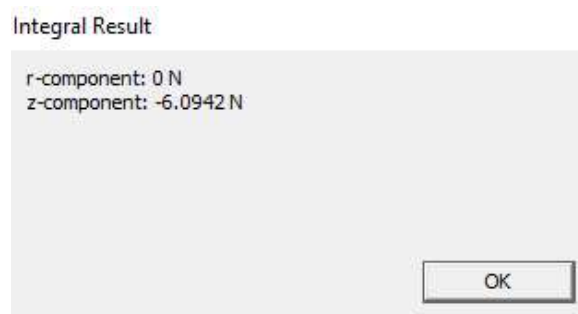


Fig. 62 - Janela Cálculo da Força Magnética

4. Análise Qualitativa das Simulações, Comentários e Conclusões

Por meio das simulações, torna-se notável que o fluxo magnético – o qual permeia o núcleo ferromagnético – diminui com o aumento do espaçamento no entreferro inferior do atuador estudado. Este resultado ocorre exatamente como o esperado, pois o aumento do entreferro causa o aumento da relutância magnética do mesmo, esta qual implica na diminuição do fluxo magnético pelo circuito.

Outra característica possível de identificar nos casos analisados, foi que o material Mu_1000 (permeabilidade magnética linear) esteve mais próximo do comportamento esperado analiticamente do que quando comparado ao comportamento do material M-15 Steel (permeabilidade magnética não-linear).

Nota-se, também, que existem linhas de campo atravessando a região de ar no meio do núcleo do atuador, representando a dispersão das mesmas – algo que praticamente não ocorreria no cenário ideal onde $\mu_c \rightarrow \infty$.

5. Variação $L(e_i)$ - Resultados

L [mH]	e_i [cm]				
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
<i>Analítico</i>	217.475	151.524	120.275	102.186	90.485
<i>Mu_1000</i>	267.316	190.975	154.519	133.172	119.024
<i>M - 15 Steel</i>	281.470	197.248	158.300	135.768	121.089

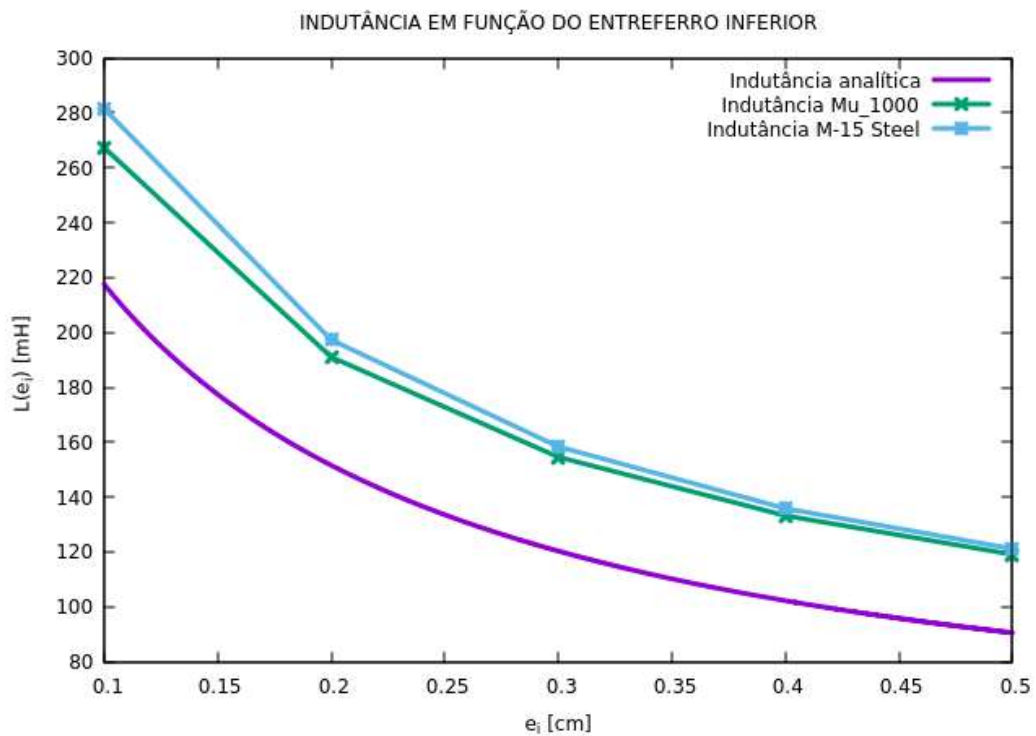


Fig. 63 - Comparação dos valores obtidos de $L(e_i)$ para cada material

6. Variação $F(e_i)$ - Resultados

$F_{mag.}$ [N]	e_i [cm]				
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
<i>Analítico</i>	-51.121	-21.237	-11.476	-7.117	-4.801
<i>Mu_1000</i>	-59.657	-24.613	-13.473	-8.506	-5.878
<i>M - 15 Steel</i>	-66.605	-26.423	-14.218	-8.900	-6.094

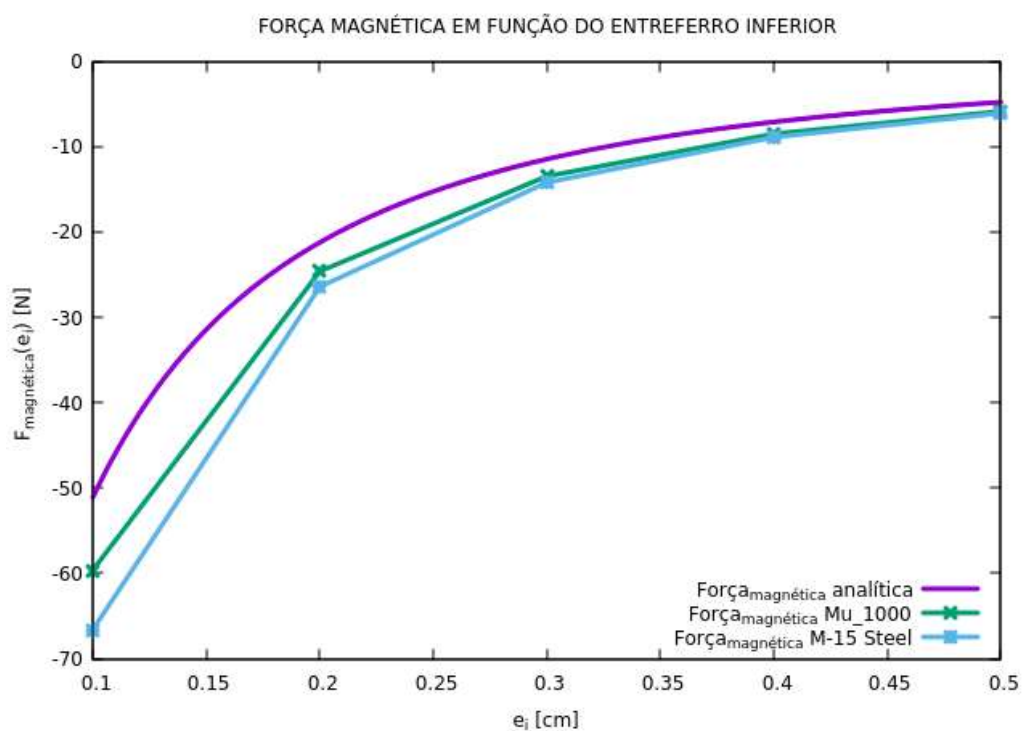


Fig. 64 - Comparação dos valores obtidos de $F_{magnética}(e_i)$ para cada material

7. Análise Quantitativa e Qualitativa de L e F, Comentários e Conclusões

Percebe-se a seguinte relação entre tamanho do entreferro, relutância do circuito e indutância própria:

$$e_i \uparrow \quad \mathfrak{R} \uparrow \quad L \downarrow$$

Com a redução da indutância, implica a formação de uma força oposta ao aumento do entreferro. Assim, $F_{\text{magnética}} < 0$ (vide fórmula para cálculo da força magnética) ao longo do deslocamento do entreferro. Este resultado condiz com o princípio da mínima relutância.

Os gráficos plotados na etapa anterior carregam informações interessantes a serem analisadas: é notável que o valor analítico representa uma barreira inferior para a indutância e para o módulo da força magnética gerada pelo circuito.

Analisando o quão discrepante a simplificação ideal (analítica) é, quando comparada aos resultados reais obtidos nas simulações com os materiais Mu_1000 e M-15 Steel, respectivamente, obteve-se os seguintes valores de erro relativo para as indutâncias:

$$Erro_L(e_i) \% = \left| \frac{L_{\text{analítico}}(e_i) - L_{\text{material}}(e_i)}{L_{\text{material}}(e_i)} \right| \times 100\%$$

$Erro_L(e_i) \%$	$e_i [cm]$				
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
<i>Mu_1000</i>	18.645	20.658	22.161	23.268	23.977
<i>M - 15 Steel</i>	22.736	23.181	24.021	24.735	25.274

A mesma análise é realizada para a força magnética atuante na parte móvel do êmbolo. Assim, chega-se aos seguintes dados:

$$Erro_F(e_i) \% = \left| \frac{F_{analítico}(e_i) - F_{material}(e_i)}{F_{material}(e_i)} \right| \times 100\%$$

$Erro_F(e_i) \%$	$e_i [cm]$				
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
Mu_1000	14.308	13.717	14.822	16.330	18.327
$M - 15 Steel$	23.247	19.628	19.285	20.034	21.221

Esses valores indicam que há um preço a se pagar: o ato de ignorar as relutância do núcleo ferromagnético para simplificação do modelo matemático implica em resultados consideravelmente destoantes dos dados reais (variações entre 13% e 25%). Dessa forma, a simplificação adotada ($\mu_c \rightarrow \infty$) é útil para princípios educacionais e/ou sistemas que não exijam muita precisão. Em demais situações torna-se necessária a solução do problema considerando a relutância magnética do núcleo ferromagnético. Para resultados analíticos mais próximos da realidade, seria necessário considerar a permeabilidade magnética do núcleo, considerar a dispersão do fluxo e talvez melhorar a modelagem utilizada para o espraçamento nos entreferros.

Muitas vezes o cálculo considerando todas essas variáveis se torna inviável de resolver manualmente com exatidão. Portanto, algoritmos numéricos/computacionais tornam-se essenciais para a análise do problema, assim como realizado por meio do MEF (Método dos Elementos Finitos) neste EC2.