Conversione di un'EDO del Secondo Ordine in un Sistema di Primo Ordine

Gabriele Cembalo

26 novembre 2025

Indice

1 Obiettivo

Dato un problema descritto da un'equazione differenziale ordinaria (EDO) di **secondo ordine**, vogliamo trasformarlo in un **sistema equivalente di equazioni del primo ordine**. Questo è utile per l'analisi qualitativa e soprattutto per la risoluzione numerica.

2 Forme iniziali

Caso scalare:

$$y'' = f(t, y, y') \tag{1}$$

Caso vettoriale:

$$\mathbf{y}'' = \mathbf{F}(t, \mathbf{y}, \mathbf{y}') \tag{2}$$

$$\mathbf{y}, \mathbf{y}' \in \mathbb{R}^n \tag{3}$$

2.1 Procedura di conversione

2.1.1 Introduzione delle variabili ausiliarie

Definiamo la derivata prima come una nuova variabile:

$$v = y' \qquad \text{(caso scalare)} \tag{4}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{y}' \qquad \text{(caso vettoriale)} \tag{5}$$

2.1.2 Riscrittura del sistema del primo ordine

Caso scalare:

$$\begin{cases} y' = v \\ v' = f(t, y, v) \end{cases} \tag{6}$$

Caso vettoriale:

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = \mathbf{v} \\ \mathbf{v}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{y}, \mathbf{v}) \end{cases} \tag{7}$$

2.1.3 Forma compatta con vettore di stato

Definiamo il vettore di stato:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n} \tag{8}$$

Allora il sistema diventa:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{G}(t, \mathbf{x}) \tag{9}$$

2.1.4 Condizioni iniziali

Per un'EDO di secondo ordine, servono:

$$y(t_0) = y_0, \qquad y'(t_0) = v_0 \tag{10}$$

In forma di stato:

$$\mathbf{x}(t_0) = \begin{pmatrix} y_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \tag{11}$$

3 Associazione tra indici del vettore di stato e RHS

Quando si implementa numericamente un sistema del primo ordine, si usa spesso la notazione:

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} Y[0] \\ Y[1] \\ \vdots \\ Y[n] \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} R[0] \\ R[1] \\ \vdots \\ R[n] \end{pmatrix} \tag{12}$$

dove $\mathbf{R}$ rappresenta la *Right-Hand-Side function*, ovvero $\mathbf{R} = \dfrac{d\mathbf{Y}}{dt}$.

3.1 Regola fondamentale

$$\boxed{R[i] = \frac{d}{dt} Y[i]} \tag{13}$$

Questo significa che l'**ordine degli elementi in $\mathbf{R}$ deve rispettare esattamente l'ordine delle variabili in $\mathbf{Y}$**.

3.2 Esempio (caso scalare)

Dato:

$$y'' = f(t, y, y') \tag{14}$$

definiamo:

$$Y[0] = y, \qquad Y[1] = y' \tag{15}$$

Allora le equazioni diventano:

$$\begin{cases} R[0] = \dfrac{d}{dt} Y[0] = Y[1] \\ R[1] = \dfrac{d}{dt} Y[1] = f(t, Y[0], Y[1]) \end{cases} \tag{16}$$

3.3 Osservazioni fondamentali

- Non esiste un ordine "giusto" universale per $Y[i]$, **ma** qualsiasi ordine si scelga deve essere mantenuto coerente anche in $\mathbf{R}$.
- Se si cambia l'ordine delle variabili in $\mathbf{Y}$, si deve cambiare anche l'ordine delle corrispondenti equazioni in $\mathbf{R}$.
- L'associazione è sempre diretta: $Y[i] \longleftrightarrow R[i]$.

3.4 Schema riassuntivo

$$\boxed{\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} y' \\ f(t, y, y') \end{pmatrix}} \tag{17}$$

4 Esempi applicativi

4.1 Oscillatore armonico semplice

$$y'' + \omega^2 y = 0 \tag{18}$$

$$\begin{cases} y' = v \\ v' = -\omega^2 y \end{cases} \tag{19}$$

4.2 Pendolo semplice (non linearizzato)

$$\theta'' + \frac{g}{L} \sin\theta = 0 \tag{20}$$

$$\begin{cases} \theta' = \omega \\ \omega' = -\frac{g}{L} \sin\theta \end{cases} \tag{21}$$

4.3 Equazione del moto gravitazionale

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = -\frac{GM}{|\mathbf{x}|^3}\mathbf{x} \tag{22}$$

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{v} \\ \mathbf{v}' = -\frac{GM}{|\mathbf{x}|^3}\mathbf{x} \end{cases} \tag{23}$$

5 Ricetta riassuntiva

1. Data un'equazione del tipo $y'' = f(t, y, y')$, introduci $v = y'$.
2. Scrivi il sistema:
$$\begin{cases} y' = v \\ v' = f(t, y, v) \end{cases} \tag{24}$$
3. Definisci il vettore di stato $\mathbf{Y} = (y, v)^T$.
4. Costruisci la RHS rispettando la corrispondenza:
$$R[i] = \frac{d}{dt} Y[i] \tag{25}$$
5. Specifica le condizioni iniziali $y(t_0)$ e $v(t_0)$.

5.1 Utilità pratica

Questa procedura consente di applicare direttamente metodi numerici di integrazione (Euler, Runge–Kutta, metodi impliciti) e facilita lo studio qualitativo del sistema, come stabilità, attrattori o linearizzazione.