

Compendio del corso:
**Fondamenti di Teoria Quantistica dei
Campi**

Gabriele Cembalo

A.A. 2025-2026



Università degli Studi di Torino
Dipartimento di Fisica
Via Giuria, 1, Torino (TO)

Informazioni legali

Questo materiale è una rielaborazione personale del corso di **Fondamenti di Teoria Quantistica dei Campi**, tenuto dal **Prof. C. Angelantonj** presso l'**Università degli Studi di Torino**.

Il contenuto riportato non rappresenta materiale ufficiale del docente né dell'università, e può contenere interpretazioni soggettive o errori. Tutti i diritti su slide, dispense o altri materiali forniti dal docente restano riservati ai rispettivi autori e non sono inclusi in questi appunti. Questi appunti sono condivisi a solo scopo didattico e divulgativo, senza fini di lucro, e sono destinati a supportare lo studio personale degli studenti.

È distribuito con licenza **Creative Commons Attribution - Non Commercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0)**.

Puoi copiarlo, distribuirlo e modificarlo, **a patto di attribuirne la paternità e non usarlo a fini commerciali**.

Per maggiori informazioni sulla licenza:

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/deed.it>

Science is not a collection of
truths. It is a continuing
exploration of mysteries.

Freeman Dyson

Prefazione

In questo documento voglio raccogliere le mie note rispetto gli appunti relativi al corso di "**Fondamenti di Teoria Quantistica dei Campi**" svolto dal professor C. Angelantonj e seguito all'*Università degli studi di Torino* nell'a.a. 2025-2026 aggiungendo eventualmente i riferimenti a vari libri (più o meno utili a seconda della volontà di approfondire). Questi appunti sono una riscrittura degli appunti presi in aula, quindi la fonte principale sono le note del/la professore/ssa, ma i libri sono fondamentali per una completa comprensione degli argomenti. Durante il corso sono stati consigliati diversi libri (indicati in Bibliografia), cercherò di indicare i vari riferimenti bibliografici all'inizio di ogni capitolo.

Queste note sono piccole parti che ho ritenuto utili durante lo studio per l'esame. Sono spudoratamente prese dalle note di E. Chiarotto, per cui non è nulla di originale. Chiaramente sono basate sui libri. Non sono presenti in queste note argomenti aggiuntivi rispetto al contenuto del corso e delle [note principali](#), ma solamente un altro modo di derivare i stessi risultati.

Chiaramente sono da intendere come degli appunti personali scritti in bella, eventuali sviste, errori o inesattezze sono dovute alla mia ignoranza, ma soprattutto ho scritto questi appunti in modo da "*spiegare*" a me stesso l'argomento, quindi alcune parti potrebbero sembrare troppo prolisse o troppo superficiali per alcuni. In ogni caso fa piacere se possono aiutare qualcun'altro. Spero in ogni caso di esser riuscito a scrivere un documento chiaro e ben strutturato.

Alcune volte posso non far riferimento ad un particolare testo o corso passato, in questi casi mi sto riferendo ai MIEI appunti riguardanti quell'argomento. Una mia collezione di appunti è presente nella mia pagina personale di GitHub: [gCembalo.github.io](https://github.com/gCembalo).

Qualsiasi errore/refuso può essere inviato alla mia mail personale: gabriele.cembalo02@gmail.com.

Ultimo aggiornamento: 23/12/2025

Contents

1	Campo scalare	1
1.1	Propagatore di Lehmann-Kallen e autostati di una teoria interagente	1
1.2	Disaccoppiamento degli stati a multiparticelle	3
1.3	Operatori di creazione e distruzione	5
1.4	Formula di LSZ	6
1.5	Esempio sulla funzione di Green	10
1.6	Potenziale di Yukawa scalare (scattering tra nucleoni e pioni)	12
1.6.1	Caso non relativistico	15
2	Campo spinoriale	17
2.1	LSZ	17
3	Campo vettoriale	25
3.1	Esempio annichilazione di fermioni	25
3.2	Esempio del Bhabha scattering	28
3.3	Esempio sul segno di un loop di fermioni	32
3.4	Osservazione sulla teoria di Yang-Mills	32
4	Integrali funzionali	35
4.1	Legame tra path integral e prodotto T-ordinato nel vuoto . .	35
4.2	Spazio delle coordinate	37
4.3	Rotazione di Wick	37
4.4	Esempio $\lambda\phi^4$	39
5	Modello standard	41
5.1	Rottura spontanea di simmetria (Wigner e Nambu-Goto) . .	41
5.2	Rottura della simmetria e spettro di massa	42
5.3	Esempio di rottura della simmetria	44
5.3.1	Sostituzione 1	45
5.3.2	Sostituzione 2	46
5.4	Fotone massivo tramite Goldstone	46
5.4.1	Sostituzione	47

Bibliography

49

Chapter 1

Campo scalare

1.1 Propagatore di Lehmann-Kallen e autostati di una teoria interagente

L'inizio è uguale a quello della mia sezione.

Visto il caso $x^0 > y^0$, possiamo definire il propagatore interagente, in analogia al caso libero, come:

$$\Delta_F = \langle \Omega | T[\phi(x)\phi(y)] | \Omega \rangle \quad (1.1.1)$$

$$= \theta(x^0 - y^0) \langle \Omega | \phi(x)\phi(y) | \Omega \rangle + \theta(y^0 - x^0) \langle \Omega | \phi(y)\phi(x) | \Omega \rangle \quad (1.1.2)$$

$$= \sum_{\alpha} |\langle \Omega | \phi(0) | \alpha \rangle|^2 \left[e^{-ip_{\alpha}(x-y)} \theta(x^0 - y^0) + e^{-ip_{\alpha}(y-x)} \theta(y^0 - x^0) \right]. \quad (1.1.3)$$

Possiamo definire la densità spettrale come:

$$\rho(q) = \sum_{\alpha} (2\pi)^4 \delta^4(q - p_{\alpha}) |\langle \Omega | \phi(0) | \alpha \rangle|^2 \quad (1.1.4)$$

che è una densità di massa/energia, e in cui $q = p_{\alpha}$ (per via della δ) e in cui $q_0^2 > 0$, ovvero tale per cui q_{μ} è un oggetto time-like.

Notiamo che Δ_F è un'invariante di Lorentz, per cui, anche $\rho(q)$ dovrà esserlo. Scriviamo dunque:

$$\rho(q) = \theta(q^0) \sigma(q^2) \quad (1.1.5)$$

in cui:

$$\sigma(q^2) = \int_0^{\infty} d(m^2) \sigma(m^2) \delta(q^2 - m^2) \quad (1.1.6)$$

che chiamiamo *spettro di massa*. Possiamo scrivere il propagatore interagente

(1.1.3) come:

$$\Delta_F = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \rho(q) \left[e^{-iq(x-y)} \theta(x^0 - y^0) + e^{-iq(y-x)} \theta(y^0 - x^0) \right] \quad (1.1.7)$$

$$= \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \theta(q^0) \int_0^\infty d(m^2) \sigma(m^2) \delta(q^2 - m^2) \left[e^{-iq(x-y)} \theta(x^0 - y^0) + e^{-iq(y-x)} \theta(y^0 - x^0) \right] \quad (1.1.8)$$

$$= \int_0^\infty d(m^2) \sigma(m^2) \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\delta(q^0 - E_{q,m})}{2 E_{q,m}} \left[e^{-iq(x-y)} \theta(x^0 - y^0) + e^{-iq(y-x)} \theta(y^0 - x^0) \right] \quad (1.1.9)$$

$$= \int_0^\infty d(m^2) \sigma(m^2) \Delta_F^0(x - y, m^2) \quad (1.1.10)$$

dove $\Delta_F^0(x - y, m^2)$ è il propagatore di Feynman per la particella libera di massa m , mentre σ rappresenta la densità degli stati (compresi gli stati legati). La rappresentazione è detta **rappresentazione di Lehmann-Kallen**. Nel caso di campo libero avevamo $\sigma(m^2) = \delta(m^2 - m_0^2)$.

Possiamo anche dimostrare che la σ è correttamente normalizzata per essere una densità. Da (1.1.10) otteniamo che:

$$\langle \Omega | [\phi(x), \phi(y)] | \Omega \rangle = \int_0^\infty d(m^2) \sigma(m^2) \langle 0 | [\phi_0(x), \phi_0(y)] | 0 \rangle \quad (1.1.11)$$

se deriviamo rispetto y^0 :

$$\langle \Omega | [\phi(x), \pi(y)] | \Omega \rangle = \int_0^\infty d(m^2) \sigma(m^2) \langle 0 | [\phi_0(x), \pi_0(y)] | 0 \rangle \quad (1.1.12)$$

in cui abbiamo ipotizzato che il potenziale di interazione non dipende dalle derivate del campo. Ovviamente, noi ricordiamo il commutatore (??), che vale a prescindere dal fatto che sia una teoria libera o interagente, per cui dobbiamo avere:

$$1 = \int_0^\infty d(m^2) \sigma(m^2) \quad (1.1.13)$$

dunque, la $\sigma(m^2)$ ha le dimensioni che deve avere.

Fin'ora non ci siamo preoccupati di distinguere stai a singola particella da stati multi-particelle. Ricordiamo che esistono 3 set di autostati possibili:

- $|0\rangle$: lo stato di vuoto libero (assenza di particelle).
- $|\alpha\rangle$: lo stato di singola particella libera di massa m_0 .

- $|\alpha, n\rangle$: lo stato legato di molte particelle, dipende dall'impulso e da altre n variabili, ha energia:

$$E_k = \sqrt{k^2 - M^2} \quad (1.1.14)$$

con $M > m_0$ e in cui M è la massa minima per stati legati, di almeno 2 particelle. Notiamo che per $m > M$ la σ assume valori continui.

Per la precisione, dopo lo stato a singola particella, possiamo avere uno stato legato a molte particelle che può avere $M < 2m_0$ (ma sempre $M > m_0$), ma dobbiamo anche notare che se escludiamo gli stati legati ci rimangono solo gli stati con $M \geq 2m_0$ (che possono avere momento relativo grande a piacere!)¹.

Per uno stato legato possiamo scrivere:

$$\sigma(m^2) = Z \delta(m^2 - m_0^2) + \theta(m^2 - M^2) \tilde{\sigma}(m^2) \quad (1.1.15)$$

e dunque:

$$\Delta_F = \int_0^\infty d(m^2) \Delta_F^0(x - y, m^2) [Z \delta(m^2 - m_0^2) + \theta(m^2 - M^2) \tilde{\sigma}(m^2)] \quad (1.1.16)$$

$$= Z \Delta_F^0(x - y, m_0^2) + \int_{M^2}^\infty d(m^2) \Delta_F^0(x - y, m^2) \tilde{\sigma}(m^2) \quad (1.1.17)$$

in cui il primo termine è il propagatore di un campo libero moltiplicato per una costante di normalizzazione Z (descrive una sola particella), che è utile perché se vogliamo correlare il campo libero ϕ_0 al campo interagente ϕ , allora abbiamo $\phi = \sqrt{Z} \phi_0$, cioè permette di riscalarare il campo libero.

Notiamo che imponendo la normalizzazione di $\sigma(m^2)$ abbiamo:

$$1 = \int_0^\infty d(m^2) \sigma(m^2) = Z + \int_{M^2}^\infty d(m^2) \tilde{\sigma}(m^2) \quad (1.1.18)$$

e siccome:

$$\int_{M^2}^\infty d(m^2) \tilde{\sigma}(m^2) > 0 \quad (1.1.19)$$

dobbiamo avere $Z \in (0, 1)$, dove Z dà una misura di quanto il campo interagisca con se stesso e si calcola tramite teorie perturbative.

1.2 Disaccoppiamento degli stati a multiparticelle

I riferimenti sono p. 53-54 dello Srednicki [7].

Quando abbiamo una teoria libera sappiamo che vale:

$$\langle k, n | \phi_0(x) | 0 \rangle = 0 \quad (1.2.1)$$

¹A riguardo vedi pag. 51 dello Srednicki [7].

in cui a sinistra abbiamo uno stato legato e a destra il vuoto. Vogliamo dimostrare in questa sezione che vale:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle k, n | \phi_0(x) | \Omega \rangle = 0 \quad (1.2.2)$$

ovvero che gli stati a molte particelle si disaccoppiano.

Prendiamo come stato iniziale uno stato a multiparticella, che può essere scritto come una sovrapposizione di pacchetti d'onda:

$$|\psi\rangle = \sum_n \int d^3p \psi_n(p) |p, n\rangle \quad (1.2.3)$$

e che dev'essere normalizzabile.

Notiamo che vale:

$$\langle p, n | \phi(x) | \Omega \rangle = \langle p, n | e^{ipx} \phi(0) e^{-ipx} | \Omega \rangle \quad (1.2.4)$$

$$= e^{ipx} \langle p, n | \phi(0) | \Omega \rangle \quad (1.2.5)$$

$$= e^{ipx} A_n(p). \quad (1.2.6)$$

Ora, calcoliamo:

$$\langle \psi | a^\dagger | \Omega \rangle = \sum_n \int d^3p \psi_n^*(p) \langle p, n | a^\dagger | \Omega \rangle \quad (1.2.7)$$

$$= -i(2\pi)^3 \sum_n \int d^3p \psi_n^*(p) \langle p, n | \int d^3k g(k) \int d^3x \left[e^{-ikx} \overleftrightarrow{\partial}_t \phi(x) \right] | \Omega \rangle \quad (1.2.8)$$

$$= -i(2\pi)^3 \sum_n \int d^3p d^3k d^3x \left[\psi_n^*(p) g(k) (e^{-ikx} \overleftrightarrow{\partial}_t \langle p, n | \phi(x) | \Omega \rangle) \right] \quad (1.2.9)$$

$$= -i(2\pi)^3 \sum_n \int d^3p d^3k d^3x \left[\psi_n^*(p) g(k) (e^{-ikx} \overleftrightarrow{\partial}_t e^{ipx} A_n(p)) \right] \quad (1.2.10)$$

$$= (2\pi)^3 \sum_n \int d^3p d^3k d^3x \left[\psi_n^*(p) g(k) (E_p + E_k) e^{i(p-k)x} A_n(p) \right] \quad (1.2.11)$$

$$= (2\pi)^3 \sum_n \int d^3p d^3k \left[\psi_n^*(p) g(k) (E_p + E_k) e^{i(E_p - E_k)t} A_n(p) \delta^3(p - k) \right] \quad (1.2.12)$$

ricordando che:

$$E_p = \sqrt{\vec{p}^2 + M^2} \quad (1.2.13)$$

per uno stato a multi-particella, e:

$$E_k = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} \quad (1.2.14)$$

per lo stato di singola particella. Se applichiamo la δ^3 e usiamo il fatto che $M > m$, allora nell'integrale rimane solo una fase oscillante positiva, **che quindi tende a zero** quando $t \rightarrow -\infty$, per via del lemma di Riemann-Lebesgue, per cui vediamo che gli stati a multi-particella si disaccoppiano.

1.3 Operatori di creazione e distruzione

In questa sezione cerchiamo le espressioni degli operatori di creazione e distruzione in termini dei campi scalari ϕ e ϕ^\dagger . Per semplicità indicheremo:

$$\widetilde{d^3p} = \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} \quad (1.3.1)$$

e di conseguenza le espressioni dei campi saranno:

$$\phi(x) = \int d^3\tilde{p} \left[a(p)e^{-ipx} + a^\dagger(p)e^{ipx} \right]. \quad (1.3.2)$$

Calcoliamo la derivata temporale del campo:

$$\dot{\phi}(x) = \int d^3\tilde{p} (-iE_p) \left[a(p)e^{-ipx} - a^\dagger(p)e^{ipx} \right] \quad (1.3.3)$$

e calcoliamo la quantità:

$$\int d^3x e^{iqx} \left[\dot{\phi}(x) - iE_q \phi(x) \right] = \quad (1.3.4)$$

$$= \int d^3x d^3\tilde{p} e^{iqx} \left[-iE_p (a(p)e^{-ipx} - a^\dagger(p)e^{ipx}) - iE_q (a(p)e^{-ipx} + a^\dagger(p)e^{ipx}) \right] \quad (1.3.5)$$

$$= \int d^3x d^3\tilde{p} \left[-i(E_p + E_q) a(p) e^{-i(p-q)x} + i(E_p - E_q) a^\dagger(p) e^{i(p+q)x} \right] \quad (1.3.6)$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} \left[-i(E_p + E_q) a(p) e^{-i(p-q)x} (2\pi)^3 \delta^3(p-q) + i(E_p - E_q) a^\dagger(p) e^{i(p+q)x} (2\pi)^3 \delta^3(p+q) \right] \quad (1.3.7)$$

$$= -ia(p) \quad (1.3.8)$$

in cui nel passaggio (1.3.6) abbiamo integrato su x per far comparire la δ . Dunque abbiamo trovato:

$$a(p) = i \int d^3x e^{iqx} \left[\dot{\phi}(x) - iE_q \phi(x) \right] \quad (1.3.9)$$

$$= i \int d^3x \left[e^{iqx} \overleftrightarrow{\partial}_t \phi(x) \right] \quad (1.3.10)$$

in cui abbiamo definito $\overleftrightarrow{\partial}_t = \overrightarrow{\partial}_t - \overleftarrow{\partial}_t$. Analogamente:

$$a^\dagger(p) = -i \int d^3x e^{-iqx} \left[\dot{\phi}(x) + iE_q \phi(x) \right] \quad (1.3.11)$$

$$= -i \int d^3x \left[e^{-iqx} \overleftrightarrow{\partial}_t \phi(x) \right]. \quad (1.3.12)$$

Possiamo definire, nella teoria libera, l'operatore di creazione in modo che sia indipendente dal tempo come:

$$a_p^\dagger = \int d^3k g_p(k) a^\dagger(k) \quad (1.3.13)$$

in cui abbiamo:

$$g_p(k) \propto \exp \left\{ -\frac{(\vec{k} - \vec{p})^2}{4\sigma^2} \right\} \quad (1.3.14)$$

che è un pacchetto d'onda con larghezza σ e centrato in \vec{p} . Definito con (1.3.13) abbiamo a_p^\dagger che crea una particella in un intorno di \vec{p} .

Notiamo che se supponiamo che a_p^\dagger sia della stessa forma anche in una teoria interagente, allora esso non sarà indipendente dal tempo, per cui conviene considerare:

$$|p\rangle = \lim_{t \rightarrow -\infty} a_p^\dagger(t) |\Omega\rangle. \quad (1.3.15)$$

1.4 Formula di LSZ

Per il campo interagente abbiamo una lagrangiana della forma:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2}m_0^2 \phi^2 + \mathcal{L}_{int} \quad (1.4.1)$$

le cui equazioni del moto sono:

$$(\square + m_0^2) \phi = \frac{\partial \mathcal{L}_{int}}{\partial \phi} = j_0(\phi). \quad (1.4.2)$$

Nel caso di campo libero $\mathcal{L}_{int} = 0$ e abbiamo:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_0)^2 - \frac{1}{2}m^2 \phi_0^2 \quad (1.4.3)$$

le cui equazioni del moto sono:

$$(\square + m^2) \phi_0 = 0 \quad (1.4.4)$$

in cui m è la massa fisica misurabile del campo ϕ .

Studiamo:

$$(\square + m^2) \phi = j_0(\phi) + (m^2 - m_0^2) \phi^2 = j(\phi) \quad (1.4.5)$$

la cui soluzione dipende dalla soluzione omogenea, che è la teoria libera:

$$\phi(x) = \sqrt{Z} \phi_0 + \int d^4y G_R(x-y) j(y) \quad (1.4.6)$$

Se abbiamo uno stato iniziale $|\alpha\rangle$ e vogliamo ricavare lo stato finale $|\beta\rangle$. La densità di probabilità di scattering è $S_{\alpha\beta} = \langle\beta|\alpha\rangle$, che poi possiamo legare alla sezione d'urto, che è un'osservabile.

Possiamo osservare che quando abbiamo un'interazione a corto raggio, nei due stati, iniziale e finale, quindi gli stati a $t \rightarrow \pm\infty$, rimane solo il campo *libero*, che per definizione interagisce solo con se stesso.² Infatti, si ha:

$$\begin{cases} \langle\alpha|\phi|\beta\rangle & \longrightarrow \sqrt{Z} \langle\alpha|\phi_{in}|\beta\rangle & \text{se } t = -\infty \\ \langle\alpha|\phi|\beta\rangle & \longrightarrow \sqrt{Z} \langle\alpha|\phi_{out}|\beta\rangle & \text{se } t = +\infty \end{cases} \quad (1.4.7)$$

queste sono dette **condizioni LSZ** (Lippman-Symanzik-Zimmerman), in cui si indica con ϕ il campo interagente e con ϕ_{in} e ϕ_{out} i campi liberi di stato iniziale e finale.

Prendiamo un solo tipo di particelle e studiamo $\langle\beta_{out}|\alpha_{in}\rangle$ in cui possiamo esplicitare una particella di impulso p , ovvero consideriamo:

$$|\alpha\rangle = |\tilde{\alpha}, p\rangle = a^\dagger(p) |\tilde{\alpha}\rangle \quad (1.4.8)$$

in cui possiamo ricordare le espressioni trovate (1.3.10) e (1.3.12).

Nota In generale, alcune delle particelle potrebbero non interagire, questo fenomeno è detto *forward scattering*: in questo caso lo stato iniziale e finale contengono una particella identica (stesso tipo e stesso momento).

Se ignoriamo il forward scattering, ovvero se ipotizziamo che tutte le particelle dello stato iniziale interagiscano, allora $\forall p \in \alpha_{in}$ abbiamo $p \notin \beta_{out}$, che si può anche scrivere come:

$$\langle\beta_{out}| a_{out}^\dagger(p) = 0 \quad (1.4.9)$$

²Ovviamente si intende limite in senso debole, fuori dall'integrale.

e viceversa. Calcoliamo l'ampiezza di scattering:

$$\langle \beta | \alpha \rangle = \langle \beta | a_{in}^\dagger(q) - a_{out}^\dagger(q) | \tilde{\alpha} \rangle \quad (1.4.10)$$

$$= -i \int d^3x \left[e^{-iqx} \overleftrightarrow{\partial}_t \langle \beta | \phi_{in}(x) - \phi_{out}(x) | \tilde{\alpha} \rangle \right] \quad (1.4.11)$$

$$= -\frac{i}{\sqrt{Z}} \left(\lim_{t \rightarrow -\infty} - \lim_{t \rightarrow +\infty} \right) \int d^3x \left[e^{-iqx} \overleftrightarrow{\partial}_t \langle \beta | \phi(x) | \tilde{\alpha} \rangle \right] \quad (1.4.12)$$

$$= \frac{i}{\sqrt{Z}} \int d^4x \partial_t \left[e^{-iqx} \overleftrightarrow{\partial}_t \langle \beta | \phi(x) | \tilde{\alpha} \rangle \right] \quad (1.4.13)$$

$$= \frac{i}{\sqrt{Z}} \int d^4x \left[e^{-iqx} (\partial_t^2 \langle \beta | \phi(x) | \tilde{\alpha} \rangle) - \langle \beta | \phi(x) | \tilde{\alpha} \rangle [\partial_t^2 e^{-iqx}] \right] \quad (1.4.14)$$

$$= \frac{i}{\sqrt{Z}} \int d^4x \left[e^{-iqx} (\partial_t^2 \langle \beta | \phi(x) | \tilde{\alpha} \rangle) + \langle \beta | \phi(x) | \tilde{\alpha} \rangle [(-\nabla^2 + m^2) e^{-iqx}] \right] \quad (1.4.15)$$

$$= \frac{i}{\sqrt{Z}} \int d^4x \left[e^{-iqx} [(\partial_t^2 - \nabla^2 + m^2) \langle \beta | \phi(x) | \tilde{\alpha} \rangle] \right] \quad (1.4.16)$$

$$= \frac{i}{\sqrt{Z}} \int d^4x \left[e^{-iqx} (\square_x + m^2) \langle \beta | \phi(x) | \tilde{\alpha} \rangle \right] \quad (1.4.17)$$

in cui: nel passaggio (1.4.12) abbiamo utilizzato le condizioni LSZ (1.4.7); in (1.4.15) abbiamo ricordato l'equazione di Klein-Gordon, per cui:

$$(\square + m^2)e^{-iqx} = (\partial_t^2 - \nabla^2 + m^2)e^{-iqx} = 0; \quad (1.4.18)$$

all'espressione (1.4.16) ci siamo arrivati integrando per parti due volte.

Tutto il calcolo che abbiamo fatto per arrivare a (1.4.17) serve ad estrarre una sola particella; se estraiano tutte le particelle arriviamo alla formula di riduzione di LSZ.

Studiamo $\langle \beta | \phi(x) | \tilde{\alpha} \rangle$ in cui estraiano nello stato finale:

$$\langle \beta | = \langle \tilde{\beta} p | = \langle \tilde{\beta} | a(p) \quad (1.4.19)$$

e rifacciamo lo stesso ragionamento fatto per arrivare a (1.4.17):

$$\langle \beta | \phi(x) | \tilde{\alpha} \rangle = \langle \tilde{\beta} | a_{out}(p) \phi(x) - \phi(x) a_{in}(p) | \tilde{\alpha} \rangle \quad (1.4.20)$$

$$= i \int d^3y \left[e^{ipy} \overleftrightarrow{\partial}_{t_y} \langle \tilde{\beta} | \phi_{out}(y) \phi(x) - \phi(x) \phi_{in}(y) | \tilde{\alpha} \rangle \right] \quad (1.4.21)$$

$$= \frac{i}{\sqrt{Z}} \left(\lim_{t \rightarrow -\infty} - \lim_{t \rightarrow +\infty} \right) \int d^3y \left[e^{ipy} \overleftrightarrow{\partial}_t \langle \tilde{\beta} | T[\phi(y) \phi(x)] | \tilde{\alpha} \rangle \right] \quad (1.4.22)$$

$$= \frac{i}{\sqrt{Z}} \int d^4y \partial_{t_y} \left[e^{ipy} \overleftrightarrow{\partial}_t \langle \tilde{\beta} | T[\phi(y) \phi(x)] | \tilde{\alpha} \rangle \right] \quad (1.4.23)$$

$$= \frac{i}{\sqrt{Z}} \int d^4y \left[e^{ipy} (\partial_{t_y}^2 \langle \tilde{\beta} | T[\phi(y) \phi(x)] | \tilde{\alpha} \rangle) - \langle \tilde{\beta} | T[\phi(y) \phi(x)] | \tilde{\alpha} \rangle (\partial_{t_y}^2 e^{ipy}) \right] \quad (1.4.24)$$

$$= \frac{i}{\sqrt{Z}} \int d^4y \left[e^{ipy} (\partial_{t_y}^2 \langle \tilde{\beta} | T[\phi(y) \phi(x)] | \tilde{\alpha} \rangle) + \langle \tilde{\beta} | T[\phi(y) \phi(x)] | \tilde{\alpha} \rangle [(-\nabla_y^2 + m^2) e^{ipy}] \right] \quad (1.4.25)$$

$$= \frac{i}{\sqrt{Z}} \int d^4y \left[e^{ipy} (\square_y + m^2) \langle \tilde{\beta} | T[\phi(y) \phi(x)] | \tilde{\alpha} \rangle \right]. \quad (1.4.26)$$

Determiniamo finalmente la formula di riduzione LSZ per gli scalari:

$$\begin{aligned} &_{out} \langle p_1, \dots, p_n | q_1, \dots, q_m \rangle_{in} = \left(\frac{i}{\sqrt{Z}} \right)^{n+m} \left[\prod_{i=1}^m \int d^4x_i e^{-iq_i x_i} (\square_{x_i} + m^2) \right] \times \\ &\times \left[\prod_{j=1}^n \int d^4y_j e^{ip_j y_j} (\square_{y_j} + m^2) \right] \langle \Omega | T[\phi(y_1) \dots \phi(y_n) \phi(x_1) \dots \phi(x_m)] | \Omega \rangle. \end{aligned} \quad (1.4.27)$$

Nello spazio dei momenti otteniamo:

$$\left[\prod_{i,j=1}^{m,n} (q_i^2 - m^2) (p_j^2 - m^2) \right] G(q_1 \dots q_m p_1 \dots p_n) \quad (1.4.28)$$

in cui il primo fattore sono i propagatori amputati tramite il calcolo dei residui, mentre il secondo fattore è la funzione di correlazione (di Green) ad $m + n$ gambe.

Per la precisione, la **funzione di correlazione (di Green) a $m + n$**

gambe è definita come:

$$\begin{aligned}
 G(q_1 \dots q_m p_1 \dots p_n) &= \left[\prod_{i=1}^m \int d^4 x_i e^{-i q_i x_i} \right] \left[\prod_{j=1}^n \int d^4 y_j e^{i p_j y_j} \right] \times \\
 &\quad \times \langle \Omega | T[\phi(y_1) \dots \phi(y_n) \phi(x_1) \dots \phi(x_m)] | \Omega \rangle \\
 &= (\sqrt{Z})^{n+m} \left[\prod_{i=1}^m \frac{i}{q_i^2 - m^2} \right] \left[\prod_{j=1}^n \frac{i}{p_j^2 - m^2} \right] \text{out} \langle p_1, \dots, p_n | q_1, \dots, q_m \rangle_{\text{in}}
 \end{aligned} \tag{1.4.29}$$

in cui possiamo osservare che ha dei poli legati alla condizione di mass-shell, inoltre, si ha che l'ampiezza di probabilità è legata al residuo della funzione di Green nei poli quando tutti i momenti vanno on-shell.

Vedi successivi per dettagli. (si?) Indichiamo con \tilde{G} la funzione di correlazione/Green (1.4.29), come facciamo sempre con le grandezze nello spazio dei momenti. La funzione di correlazione/Green amputata si ottiene eliminando i propagatori delle gambe esterne dalla funzione di Green nello spazio dei momenti (1.4.29):

$$\tilde{G}^{(n)} = \tilde{G}_A^{(n)} \prod_{i=1}^n \Delta_F(p_i). \tag{1.4.30}$$

Nota che esiste un abuso di notazione anche qui, per cui si chiama G sia la funzione di Green, sia la funzione di Green amputata; ricordiamoci però che le regole di Feynman restituiscono la funzione di Green amputata!

1.5 Esempio sulla funzione di Green

Studiamo:

$$\mathcal{L}_{int} = -\frac{\lambda}{4!} \phi^4 \tag{1.5.1}$$

e calcoliamo la funzione di correlazione/Green con 2 e con 4 gambe al prim'ordine perturbativo, utilizzando quello che abbiamo imparato da LSZ (1.4.29), dalla formula di GML (??) e dal teorema di Wick.

Vediamo la funzione a 2 gambe:

$$G^{(2)}(x_1, x_2) = \langle \Omega | T[\phi(x_1)\phi(x_2)] | \Omega \rangle \quad (1.5.2)$$

$$\approx -i \frac{\lambda}{4!} \langle 0 | T \left[\phi_1 \phi_2 \int d^4 z \phi_z^4 \right] | 0 \rangle_C \quad (1.5.3)$$

$$= -i \frac{\lambda}{2} \int d^4 z \Delta(x_1 - z) \Delta(x_2 - z) \Delta(z - z) \quad (1.5.4)$$

$$= -\frac{i\lambda}{2} \int d^4 z \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} \tilde{\Delta}(p_1) e^{-ip_1(x_1-z)} \times \\ \times \tilde{\Delta}(p_2) e^{-ip_2(x_2-z)} \tilde{\Delta}(p) e^{-ip(z-z)} \quad (1.5.5)$$

$$= -\frac{i\lambda}{2} \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} \exp\{-i(p_1 x_1 + p_2 x_2)\} \times \\ \times \tilde{\Delta}(p_1) \tilde{\Delta}(p_2) (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \tilde{\Delta}(p) \quad (1.5.6)$$

dunque nello spazio degli impulsi abbiamo:

$$\tilde{G}^{(2)}(p_1, p_2) = -\frac{i\lambda}{2} \tilde{\Delta}(p_1) \tilde{\Delta}(p_2) (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \tilde{\Delta}(p) \quad (1.5.7)$$

la funzione di Green amputata di conseguenza è:

$$\tilde{G}^{(2)}(p_1, p_2) = -\frac{i\lambda}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \tilde{\Delta}(p) \cdot (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2) \quad (1.5.8)$$

e dunque, dalla relazione tra la funzione di Green amputata ed M :

$$M = -\frac{i\lambda}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \tilde{\Delta}(p). \quad (1.5.9)$$

Vediamo a 4 gambe:

$$G^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \langle \Omega | T[\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)] | \Omega \rangle \quad (1.5.10)$$

$$\approx -i \frac{\lambda}{4!} \langle 0 | T \left[\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \int d^4 z \phi_z^4 \right] | 0 \rangle_C \quad (1.5.11)$$

$$= -i\lambda \int d^4 z \Delta(x_1 - z) \Delta(x_2 - z) \Delta(x_3 - z) \Delta(x_4 - z) \quad (1.5.12)$$

$$= -i\lambda \int d^4 z \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p_3}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p_4}{(2\pi)^4} \tilde{\Delta}(p_1) e^{-ip_1(x_1-z)} \tilde{\Delta}(p_2) e^{-ip_2(x_2-z)} \times \\ \times \tilde{\Delta}(p_3) e^{-ip_3(x_3-z)} \tilde{\Delta}(p_4) e^{-ip_4(x_4-z)} \quad (1.5.13)$$

$$= -i\lambda \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p_3}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p_4}{(2\pi)^4} \exp\{-i(p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 + p_4 x_4)\} \times \\ \times \tilde{\Delta}(p_1) \tilde{\Delta}(p_2) \tilde{\Delta}(p_3) \tilde{\Delta}(p_4) (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) \quad (1.5.14)$$

che nello spazio degli impulsi diventa:

$$G^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4) = \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4 \exp\{-i(p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + p_4x_4)\} \times \\ \times \langle \Omega | T[\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)] | \Omega \rangle \quad (1.5.15)$$

$$\approx -i\lambda \tilde{\Delta}(p_1) \tilde{\Delta}(p_2) \tilde{\Delta}(p_3) \tilde{\Delta}(p_4) (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 + p_3 + p_4). \quad (1.5.16)$$

La funzione di Green amputata è:

$$\tilde{G}_A^{(4)} = -i\lambda (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) \quad (1.5.17)$$

dunque, dalla relazione tra la funzione di Green amputata ed M , ricaviamo:

$$M = -i\lambda. \quad (1.5.18)$$

1.6 Potenziale di Yukawa scalare (scattering tra nucleoni e pioni)

Consideriamo una teoria con 2 tipi di particelle scalari (spin 0), reali (massa μ , con campo σ) e complesse (massa m , campo ϕ). Abbiamo la lagrangiana libera che è:

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - \frac{1}{2} \mu^2 \sigma^2 + \partial_\mu \phi \partial^\mu \bar{\phi} - m^2 \phi \bar{\phi}. \quad (1.6.1)$$

Le soluzioni per i campi liberi le conosciamo già e sono:

$$\sigma = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} \left[a(p) e^{-ipx} + a^\dagger(p) e^{ipx} \right] \quad , \quad \kappa = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\sigma}} = \dot{\sigma} \quad (1.6.2)$$

$$\phi = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} \left[b(p) e^{-ipx} + c^\dagger(p) e^{ipx} \right] \quad , \quad \pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi} \quad (1.6.3)$$

$$\bar{\phi} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} \left[c(p) e^{-ipx} + b^\dagger(p) e^{ipx} \right] \quad , \quad \bar{\pi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\bar{\phi}}} = \dot{\bar{\phi}}. \quad (1.6.4)$$

Come nel caso precedente dobbiamo imporre la regola di commutazione, a tempi uguali:

$$[\phi, \bar{\pi}] = i\delta^3(x - y). \quad (1.6.5)$$

Inoltre abbiamo che:

$$\Delta_\phi(x - y) = \langle 0 | T[\phi(x) \bar{\phi}(y)] | 0 \rangle \quad (1.6.6)$$

quando $x^0 > y^0$ diventa:

$$\langle 0 | b_x b_y^\dagger | 0 \rangle \quad (1.6.7)$$

quindi, abbiamo una particella; mentre quando $x^0 < y^0$ diventa:

$$\langle 0 | c_y c_x^\dagger | 0 \rangle \quad (1.6.8)$$

e abbiamo un'antiparticella.

Se lasciamo il campo σ invariato e facciamo una trasformazione di fase su ϕ , allora otteniamo:

$$\delta\phi = i\alpha\phi \quad (1.6.9)$$

dunque, la corrente sarebbe:

$$j^\mu = i\bar{\phi} \overleftrightarrow{\partial}^\mu \phi \quad (1.6.10)$$

$$= -i\partial^\mu \bar{\phi}\phi + i\partial^\mu \phi\bar{\phi} \quad (1.6.11)$$

e la carica:

$$Q = \int d^3x j^0 \quad (1.6.12)$$

$$= i \int d^3x (\bar{\phi}\dot{\phi} - \dot{\bar{\phi}}\phi). \quad (1.6.13)$$

Se consideriamo una teoria interagente con:

$$\mathcal{L}_{int} = -g\sigma\bar{\phi}\phi \quad (1.6.14)$$

$$\mathcal{H}_{int} = g\sigma\bar{\phi}\phi \quad (1.6.15)$$

quindi con 3 gambe in ogni vertice, possiamo identificare ϕ con il nucleone (linea continua con freccia) e σ con il pione (linea tratteggiata). Ricordiamo che per l'espansione in serie di Gell-Mann-Low, in ogni vertice ho un termine abbiamo un termine $(-ig)$. Scriviamo:

$$\exp\left\{-i \int d^4x \mathcal{H}_{int}\right\} = \sum \frac{1}{n!} \left(-i \int d^4x \mathcal{H}_{int}\right)^n \quad (1.6.16)$$

$$= \sum \frac{1}{n!} \left(-ig \int d^4x \sigma\bar{\phi}\phi\right)^n \quad (1.6.17)$$

da notare poi che il fattore $1/n!$ viene sempre cancellato dai modi equivalenti di scambiare i vertici tra di loro, inoltre, per la teoria di Yukawa non abbiamo fattori di simmetria per i diagrammi, questo perché i campi in gioco non possono essere scambiati tra loro.

Alcuni esempi di interazioni sono:³

³I termini di ordine dispari sono nulli perché abbiamo un numero dispari di campi, e la C sta ad indicare il fatto che escludiamo i diagrammi con le bolle di vuoto.

- *Primo esempio*, raffigurato in figura 1.1a è:

$$\begin{aligned} \langle \Omega | T[\bar{\phi}_1 \phi_2 \bar{\phi}_3 \phi_4] | \Omega \rangle &= \langle 0 | T[\bar{\phi}_1 \phi_2 \bar{\phi}_3 \phi_4] | 0 \rangle_C + \\ &+ (-ig)^2 \int d^4z d^4w \langle 0 | T[\bar{\phi}_1 \phi_2 \bar{\phi}_3 \phi_4 \sigma(z) \phi(z) \bar{\phi}(z) \sigma(w) \phi(w) \bar{\phi}(w)] | 0 \rangle_C + \dots \end{aligned} \quad (1.6.18)$$

- *Secondo esempio*, raffigurato in figura 1.1b è:

$$\text{bra} \Omega T[\bar{\phi}_1 \phi_2 \sigma_3 \sigma_4] | \Omega \rangle = \langle 0 | T[\bar{\phi}_1 \phi_2 \sigma_3 \sigma_4] | 0 \rangle_C + \dots \quad (1.6.19)$$

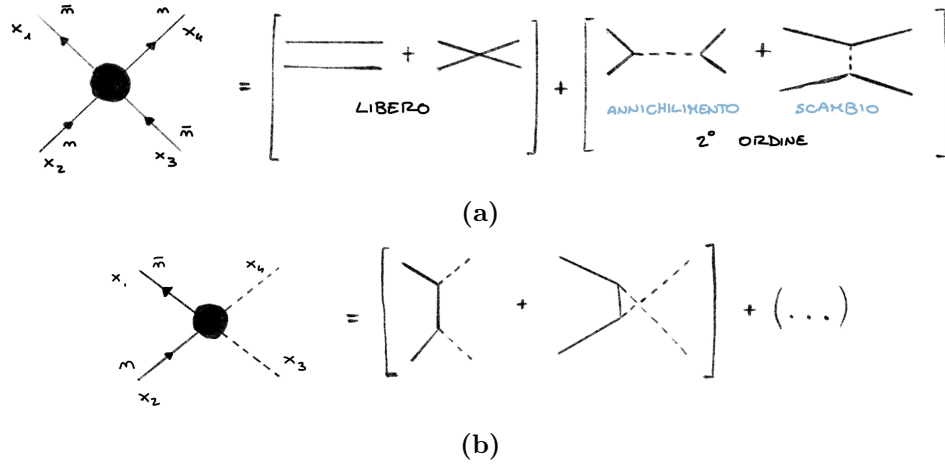


Figure 1.1: Esempi interazioni teoria $\sigma\bar{\phi}\phi$.

I diagrammi di Feynman che entrano nella definizione della matrice S (ampiezza di probabilità) sono quelli a cui vengono amputate le gambe esterne, ovvero, quelli a cui stiamo eliminando i poli della funzione di Green, ovvero stiamo trovando l'ampiezza di probabilità (on-shell) come il residuo della funzione di Green.

Da notare che per tutti i diagrammi al tree-level senza gambe esterne, si ha un fattore di simmetria finale $s = 1$.

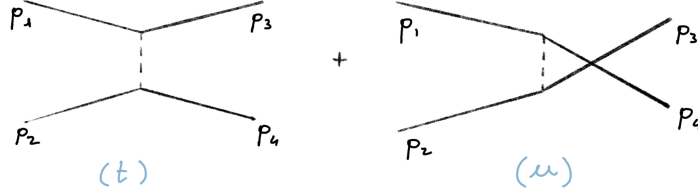
Proviamo a studiare l'ampiezza di probabilità per un processo di scambio, raffigurato in figura 1.2.

Scriviamo:

$$iT = (ig)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - \mu^2} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + k - p_3) (2\pi)^4 \delta^4(p_2 - k - p_4) \quad (1.6.20)$$

$$= -\frac{ig^2}{t - \mu^2} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \quad (1.6.21)$$

$$= M_t \cdot (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \quad (1.6.22)$$

**Figure 1.2:** Processo di scambio

ovvero:

$$M_t = -\frac{ig^2}{t - \mu^2}. \quad (1.6.23)$$

Se scambiamo p_3 e p_4 abbiamo:

$$iT = -\frac{ig^2}{u - \mu^2} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \quad (1.6.24)$$

ovvero:

$$M_u = -\frac{ig^2}{u - \mu^2}. \quad (1.6.25)$$

Se vogliamo ritrovare la probabilità, prima sommiamo le ampiezze e poi ne facciamo il quadrato (altrimenti perdiamo i termini di interferenza); inoltre per calcolare l'ampiezza di probabilità dobbiamo prendere il residuo considerando particelle on-shell e ignorando le gambe esterne. In sintesi:

$$|M_{tot}|^2 = |M_u + M_t|^2 \quad (1.6.26)$$

$$= |M_u|^2 + |M_t|^2 + 2 \operatorname{Re}\{M_u M_t^\dagger\} \quad (1.6.27)$$

da notare che in questo caso i diagrammi hanno tutti segno positivo perché abbiamo solo scalari (quando avremo anche i fermioni potremmo avere dei segni relativi).

1.6.1 Caso non relativistico

Osserviamo che:

$$(p^\mu - p'^\mu)^2 = (p^0 - p'^0)^2 - (\vec{p} - \vec{p}')^2 \quad (1.6.28)$$

ma nel limite non relativistico abbiamo che $p^0 = p'^0$ e dunque:

$$M = -\frac{ig^2}{(p_1 - p_3)^2 - \mu^2} \approx \frac{ig^2}{|\vec{p}_1 - \vec{p}_3|^2 + \mu^2} = \frac{ig^2}{|\vec{q}|^2 + \mu^2}. \quad (1.6.29)$$

Se siamo nel limite non relativistico vale l'approssimazione di Born:

$$\tilde{V}(q) = |M| = \frac{g^2}{|\vec{q}|^2 + \mu^2} \quad (1.6.30)$$

ovvero che il modulo di M è la trasformata di Fourier del potenziale. Dunque troviamo:

$$V(x) = g^2 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}}}{|\vec{q}|^2 + \mu^2} \quad (1.6.31)$$

$$= \frac{g^2}{(2\pi)^2} \int_{-1}^{+1} d(\cos \theta) \int_0^\infty dq q^2 \frac{e^{-irq \cos \theta}}{q^2 + \mu^2} \quad (1.6.32)$$

$$= \frac{g^2}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dq \frac{q^2}{q^2 + \mu^2} \left(\frac{e^{-irq}}{-irq} - \frac{e^{irq}}{-irq} \right) \quad (1.6.33)$$

$$= \frac{g^2}{ir(2\pi)^2} \int_0^\infty dq \frac{q}{q^2 + \mu^2} (e^{irq} - e^{-irq}) \quad (1.6.34)$$

$$= \frac{g^2}{ir(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dq \frac{q e^{irq}}{q^2 + \mu^2} \quad (1.6.35)$$

in cui abbiamo indicato $r = |\vec{x}|$ e $q = |\vec{q}|$, arrivati a questo punto possiamo deformare il cammino ed utilizzare il lemma di Jordan:

$$V(x) = \frac{g^2}{r(2\pi)^2} \text{Res} \left\{ \frac{q e^{irq}}{q^2 + \mu^2} \right\}_{q=i\mu} \quad (1.6.36)$$

$$= \frac{g^2}{4\pi r} e^{-\mu r} \quad (1.6.37)$$

che è il potenziale di Yukawa; quindi, g rappresenta per i nucleoni l'equivalente della carica elettrica, inoltre è un potenziale a corto raggio per particelle massive (è una sorta di generalizzazione del potenziale coulombiano).

Chapter 2

Campo spinoriale

2.1 LSZ

L'equazione del moto per la teoria interagente è:

$$(i\not{D} - m_0)\psi = j_0 \quad (2.1.1)$$

che è leggermente diversa al caso della teoria libera in cui avevamo:

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}_0(i\not{D} - m)\psi_0 \quad ; \quad (i\not{D} - m)\psi_0 = 0. \quad (2.1.2)$$

Possiamo porre:

$$j = j_0 + (m - m_0)\psi \quad (2.1.3)$$

in modo da poter riscrivere l'equazione del moto (2.1.1) come:

$$(\not{D} - m)\psi = j \quad (2.1.4)$$

la cui soluzione si trova usando la soluzione dell'omogenea, ossia il campo libero (??), e la funzione di Green, che è il propagatore:

$$\psi(x) = \sqrt{Z} \psi_0 + \int d^4x S_{rel}(x - y) j(y) \quad (2.1.5)$$

in cui il fattore \sqrt{Z} tiene conto dell'autointerazione.

Quindi, scelti due stati normalizzati, si ha:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \langle \alpha | \psi | \beta \rangle = \sqrt{Z} \langle \alpha | \psi_{in} | \beta \rangle \quad (2.1.6)$$

e analogamente:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \langle \alpha | \psi | \beta \rangle = \sqrt{Z} \langle \alpha | \psi_{out} | \beta \rangle \quad (2.1.7)$$

dove abbiamo indicato con ψ_{in} e ψ_{out} i campi liberi iniziali e finali in cui abbiamo solo l'autointerazione; inoltre, le ψ rappresentano pacchetti d'onda.

Vogliamo studiare:

$$S_{\alpha\beta} = \langle \beta | \alpha \rangle \quad (2.1.8)$$

esplicitiamo la presenza di una particella con momento p ed elicità s :

$$|\alpha\rangle \longrightarrow |\alpha, (p, s)\rangle \quad (2.1.9)$$

per far ciò abbiamo bisogno di esprimere gli operatori di creazione e distruzione in funzione dei campi (relazioni di inversione). Ricordo che abbiamo:

$$\psi(x) = \sum_s \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} \left[b_s(p) u_s(p) e^{-ipx} + d_s^\dagger(p) v_s(p) e^{ipx} \right] \quad (2.1.10)$$

e che valgono le seguenti relazioni:

$$\bar{u}_s(p) \gamma^\mu u_r(p) = \bar{v}_s(p) \gamma^\mu v_r(p) = 2p^\mu \delta_{sr} \quad (2.1.11)$$

$$\bar{u}_s(p) \gamma^0 v_r(-p) = \bar{v}_s(p) \gamma^0 u_r(-p) = 0. \quad (2.1.12)$$

Possiamo svolgere i conti:

$$\int d^3x \bar{u}_r(p) \gamma^0 \psi(x) e^{ipx} = \quad (2.1.13)$$

$$= \int d^3x \bar{u}_r(p) \gamma^0 \left(\sum_s \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2E_q} \left[b_s(q) u_s(q) e^{-iqx} + d_s^\dagger(q) v_s(q) e^{iqx} \right] \right) e^{ipx} \quad (2.1.14)$$

$$= \sum_s \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2E_q} \int d^3x \left\{ \bar{u}_r(p) \gamma^0 \left[b_s(q) u_s(q) e^{-iqx} + d_s^\dagger(q) v_s(q) e^{iqx} \right] \right\} \quad (2.1.15)$$

$$= \sum_s \int \frac{d^3q}{2E_q} \bar{u}_r(p) \gamma^0 \left[u_s(q) b_s(q) e^{-i(E_q - E_p)t} \delta^3(q - p) + v_s(q) d_s^\dagger(q) e^{i(E_q + E_p)t} \delta^3(q + p) \right] \quad (2.1.16)$$

$$= \sum_s \frac{1}{2E_p} \left[\bar{u}_r(p) \gamma^0 u_s(p) b_s(p) + \bar{u}_s(p) \gamma^0 v_s(-p) d_s^\dagger(-p) e^{i(2E_p)x} \right] \quad (2.1.17)$$

$$= \hat{b}_r(p) \quad (2.1.18)$$

analogamente possiamo vedere:

$$\int d^3x \bar{\psi}(x) \gamma^0 v_r(p) e^{ipx} = \quad (2.1.19)$$

$$= \int d^3x \left(\sum_s \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2E_q} \left[b_s^\dagger(q) \bar{u}_s(q) e^{iqx} + \right. \right. \\ \left. \left. + d_s(q) \bar{v}_s(q) e^{-iqx} \right] \right) \gamma^0 v_r(p) e^{ipx} \quad (2.1.20)$$

$$= \sum_s \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2E_q} \int d^3x \left[b_s^\dagger(q) \bar{u}_s(q) e^{iqx} + d_s(q) \bar{v}_s(q) e^{-iqx} \right] \gamma^0 v_r(p) \quad (2.1.21)$$

$$= \sum_s \frac{1}{2E_q} \left[b_s^\dagger(-p) \bar{u}_s(-p) e^{-i(2E_p)x} + d_s(p) \bar{v}_s(p) \right] \gamma^0 v_r(p) \quad (2.1.22)$$

$$= \hat{d}_r(p). \quad (2.1.23)$$

Dunque abbiamo trovato per le particelle:

$$\hat{b}(p, s) = \int d^3x \bar{u}_s(p) \gamma^0 \psi_0(x) e^{ipx} \quad (2.1.24)$$

$$\hat{b}^\dagger(p, s) = \int d^3x \bar{\psi}_0(x) \gamma^0 u_s(p) e^{-ipx} \quad (2.1.25)$$

e per le anti-particelle:

$$\hat{d}(p, s) = \int d^3x \bar{\psi}_0(x) \gamma^0 v_r(p) e^{ipx} \quad (2.1.26)$$

$$\hat{d}^\dagger(p, s) = \int d^3x \bar{v}_r(p) \gamma^0 \psi_0(x) e^{-ipx}. \quad (2.1.27)$$

Tornando al nostro problema iniziale (2.1.8) possiamo considerare una particella nello stato iniziale $|\alpha\rangle$ ed ignorare il forward-scattering, e calcolare:

$$\langle \beta | \alpha \rangle = \langle \beta | b_{in}^\dagger(p, s) | \tilde{\alpha} \rangle \quad (2.1.28)$$

$$= \langle \beta | b_{in}^\dagger(p, s) - b_{out}^\dagger(p, s) | \tilde{\alpha} \rangle \quad (2.1.29)$$

$$= \langle \beta | \int d^3x \left[\bar{\psi}_{in}(x) - \bar{\psi}_{out}(x) \right] \gamma^0 u_s(p) e^{-ipx} | \tilde{\alpha} \rangle \quad (2.1.30)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{Z}} \left(\lim_{t \rightarrow -\infty} - \lim_{t \rightarrow +\infty} \right) \int d^3x \langle \beta | \bar{\psi}(x) | \tilde{\alpha} \rangle \gamma^0 u_s(p) e^{-ipx} \quad (2.1.31)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{Z}} \int d^4x \partial_t \left[\langle \beta | \bar{\psi}(x) | \tilde{\alpha} \rangle \gamma^0 u_s(p) e^{-ipx} \right] \quad (2.1.32)$$

$$= \frac{i}{\sqrt{Z}} \int d^4x \left[i \left(\partial_t \langle \beta | \bar{\psi}(x) | \tilde{\alpha} \rangle \right) \gamma^0 u_s(p) e^{-ipx} + \right. \\ \left. + i \langle \beta | \bar{\psi}(x) | \tilde{\alpha} \rangle \gamma^0 u_s(p) \partial_t e^{-ipx} \right] \quad (2.1.33)$$

possiamo ricordare che valgono (??), in particolare la prima, che ci permette di scrivere:

$$i\gamma^0 \partial_0 e^{-ipx} u_s(p) = \gamma^0 p_0 e^{-ipx} u_s(p) \quad (2.1.34)$$

$$= -(\gamma^i p_i - m) e^{-ipx} u_s(p) \quad (2.1.35)$$

$$= -(i\gamma^i \partial_i - m) e^{-ipx} u_s(p) \quad (2.1.36)$$

e dunque possiamo riprendere i nostri conti:

$$\begin{aligned} \langle \beta | \alpha \rangle &= \frac{i}{\sqrt{Z}} \int d^4x \left[i \langle \beta | \bar{\psi}(x) | \tilde{\alpha} \rangle \gamma^0 \overleftarrow{\partial}_0 u_s(p) e^{-ipx} - \right. \\ &\quad \left. - \langle \beta | \bar{\psi}(x) | \tilde{\alpha} \rangle (i\gamma^i \partial_i - m) e^{-ipx} u_s(p) \right] \end{aligned} \quad (2.1.37)$$

$$= \frac{i}{\sqrt{Z}} \int d^4x \left[\langle \beta | \bar{\psi}(x) | \tilde{\alpha} \rangle (i\gamma^0 \overleftarrow{\partial}_0 + i\gamma^i \overleftarrow{\partial}_i + m) u_s(p) e^{-ipx} \right] \quad (2.1.38)$$

$$= \frac{i}{\sqrt{Z}} \int d^4x \left[\langle \beta | \bar{\psi}(x) | \tilde{\alpha} \rangle (i\overleftarrow{\not{\partial}} + m) u_s(p) e^{-ipx} \right]. \quad (2.1.39)$$

Possiamo fare il conto analogo per l'antiparticella iniziale:

$$\langle \beta | \alpha \rangle = \left\langle \tilde{\beta} \left| d_{in}^\dagger(p, s) \right| \alpha \right\rangle \quad (2.1.40)$$

$$= \left\langle \tilde{\beta} \left| d_{in}^\dagger(p, s) - d_{out}^\dagger(p, s) \right| \alpha \right\rangle \quad (2.1.41)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{Z}} \left(\lim_{t \rightarrow -\infty} - \lim_{t \rightarrow +\infty} \right) \int d^3x \bar{v}_r(p) \gamma^0 \left\langle \tilde{\beta} \left| \psi(x) \right| \alpha \right\rangle e^{-ipx} \quad (2.1.42)$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{\sqrt{Z}} \int d^4x \left[\bar{v}_r(p) \gamma^0 \partial_t \left(\left\langle \tilde{\beta} \left| \psi(x) \right| \alpha \right\rangle \right) e^{-ipx} + \right. \\ &\quad \left. + \bar{v}_r(p) \gamma^0 \left\langle \tilde{\beta} \left| \psi(x) \right| \alpha \right\rangle \partial_t e^{-ipx} \right] \end{aligned} \quad (2.1.43)$$

a questo punto possiamo riutare la relazione (??) per scrivere:

$$\bar{v}_r(p) \gamma^0 \partial_0 e^{-ipx} = -i\bar{v}_r(p) \gamma^0 p_0 e^{-ipx} \quad (2.1.44)$$

$$= i\bar{v}_r(p) (\gamma^i p_i + m) e^{-ipx} \quad (2.1.45)$$

$$= i\bar{v}_r(p) (i\gamma^i \partial_i + m) e^{-ipx} \quad (2.1.46)$$

che ci fa arrivare a:

$$\begin{aligned} \langle \beta | \alpha \rangle &= \frac{i}{\sqrt{Z}} \int d^4x \left[\bar{v}_r(p) (i\gamma^0 \partial_0) \left(\left\langle \tilde{\beta} \left| \psi(x) \right| \alpha \right\rangle \right) e^{-ipx} - \right. \\ &\quad \left. - (\bar{v}_r(p) (i\gamma^i \partial_i + m) e^{-ipx}) \left\langle \tilde{\beta} \left| \psi(x) \right| \alpha \right\rangle \right] \end{aligned} \quad (2.1.47)$$

$$= \frac{i}{\sqrt{Z}} \int d^4x \left[e^{-ipx} \bar{v}_r(p) (i\overrightarrow{\not{\partial}} - m) \left\langle \tilde{\beta} \left| \psi(x) \right| \alpha \right\rangle \right] \quad (2.1.48)$$

e possiamo vedere che il risultato finale è analogo al caso di particella (2.1.39), ma con un segno opposto sul termine di derivata.

Ovviamente dovremmo calcolare anche tutte le altre componenti, ma i conti sono analogi e i risultati complessivi sono:

$$\begin{cases} \langle \beta | b_{in}^\dagger(p, s) | \alpha \rangle = +\frac{i}{\sqrt{Z}} \int d^4x \left[\langle \beta | \bar{\psi} | \alpha \rangle (i \overleftarrow{\not{\partial}} + m) u_s(p) e^{-ipx} \right] \\ \langle \beta | b_{out}(p, s) | \alpha \rangle = -\frac{i}{\sqrt{Z}} \int d^4x \left[e^{+ipx} \bar{u}_s(p) (i \overrightarrow{\not{\partial}} - m) \langle \beta | \psi | \alpha \rangle \right] \\ \langle \beta | d_{in}^\dagger(p, s) | \alpha \rangle = +\frac{i}{\sqrt{Z}} \int d^4x \left[e^{-ipx} \bar{v}_s(p) (i \overleftarrow{\not{\partial}} - m) \langle \beta | \psi | \alpha \rangle \right] \\ \langle \beta | d_{out}(p, s) | \alpha \rangle = -\frac{i}{\sqrt{Z}} \int d^4x \left[\langle \beta | \bar{\psi} | \alpha \rangle (i \overleftarrow{\not{\partial}} + m) v_s(p) e^{+ipx} \right]. \end{cases} \quad (2.1.49)$$

Se estraiamo una particella dopo aver già estratto $n+m$ campi, ignorando come sempre il forward scattering, possiamo inserire un fattore $(-1)^{m+n}$ che si semplifica per gli scambi:

$$\langle \beta | T[\psi_{\alpha_1}(y_1) \dots \psi_{\alpha_n} \bar{\psi}_{\beta_1}(z_1) \dots \bar{\psi}_{\beta_m}(z_m)] b_{in}^\dagger | \alpha \rangle = \quad (2.1.50)$$

$$= \langle \beta | T[\psi \dots \bar{\psi}] b_{in}^\dagger | \alpha \rangle - (-1)^{m+n} \langle \beta | b_{out}^\dagger T[\psi \dots \bar{\psi}] | \alpha \rangle \quad (2.1.51)$$

$$= \langle \beta | T[\psi \dots \bar{\psi}] (b_{in}^\dagger - b_{out}^\dagger) | \alpha \rangle. \quad (2.1.52)$$

Infatti, facendo passare b_{out}^\dagger attraverso tutti i campi esso prende un segno $(-1)^{m+n}$, che si compensa con il segno scelto, dopodiché facciamo gli stessi passaggi di prima.

Supponendo di avere n particelle ed m antiparticelle nello stato iniziale $|\alpha\rangle$ e di avere s particelle e t antiparticelle nello stato finale $\langle\beta|$, si ha che:

$$\langle \beta_{(s,t)} | \alpha_{(n,m)} \rangle = \langle \Omega | [(b_1 \dots b_s)(d_1 \dots d_t)]_{out} [(b_1^\dagger \dots b_n^\dagger)(d_1^\dagger \dots d_m^\dagger)]_{in} | \Omega \rangle \quad (2.1.53)$$

che per come abbiamo scritto le (2.1.49) possiamo riordinarle come segue:

$$\langle \beta_{(s,t)} | \alpha_{(n,m)} \rangle = \langle \Omega | (d_1^\dagger \dots d_m^\dagger)_{in} (b_1^\dagger \dots b_s^\dagger)_{out} (b_1^\dagger \dots b_n^\dagger)_{in} (d_1^\dagger \dots d_t^\dagger)_{out} | \Omega \rangle. \quad (2.1.54)$$

Osserviamo che se t è pari allora possiamo spostare $(d_1^\dagger \dots d_t^\dagger)_{out}$ a destra senza problemi, mentre se è dispari verrà fuori un fattore $(-1)^{m+n}$, analogamente per spostare $(d_1^\dagger \dots d_m^\dagger)_{in}$ ottengo un fattore $(-1)^{n+s}$. Ora espliciti-

amo i vari pezzetti:

$$\begin{aligned}
\langle \beta_{(s,t)} | \alpha_{(n,m)} \rangle &= (-1)^{m+s} \langle \Omega | (d_1^\dagger \dots d_m^\dagger)_{in} (b_1^\dagger \dots b_s^\dagger)_{out} (b_1^\dagger \dots b_n^\dagger)_{in} (d_1^\dagger \dots d_t^\dagger)_{out} | \Omega \rangle = \\
&= (-1)^{m+t} \left(\frac{i}{\sqrt{Z}} \right)^{n+m+s+t} \left\{ \prod_{j=1}^m \int d^4 x_j e^{-i p_j x_j} \bar{v}_s(p_j) (i \vec{\not{\partial}}_j - m) \right\} \times \\
&\quad \times \left\{ \prod_{k=1}^s \int d^4 x_k e^{+i p_k x_k} \bar{u}_s(p_k) (i \vec{\not{\partial}}_k - m) \right\} \times \langle \Omega | \psi_j \psi_k \bar{\psi}_i \bar{\psi}_l | \Omega \rangle \times \\
&\quad \times \left\{ \prod_{j=1}^n \int d^4 x_i (i \vec{\not{\partial}}_i + m) u_s(p_i) e^{-i p_i x_i} \right\} \left\{ \prod_{l=1}^t \int d^4 x_l (i \vec{\not{\partial}}_l + m) v_s(p_l) e^{+i p_l x_l} \right\}.
\end{aligned} \tag{2.1.55}$$

Notiamo, e teniamo a mente, che non è segnato esplicitamente, ma gli elementi con la stessa sommatoria hanno indici spinoriali legati, nell'ordine in cui i vari elementi sono scritti:

$$\begin{aligned}
(\dots) \bar{u}_{\gamma_1}(z_1) (\dots) (i \vec{\not{\partial}} - m)_{\gamma_1 c_1} (\dots) \langle 0 | T[\psi_{c_1}(z_1) (\dots) \bar{\psi}_{\alpha_1}(x_1) (\dots)] | 0 \rangle \times \\
\times (i \vec{\not{\partial}} + m)_{\alpha_1 \alpha_1} (\dots) u_{\alpha_1}(x_1) (\dots)
\end{aligned}$$

in cui gli indici $(\alpha_1, \gamma_1, \dots)$ rappresentano gli indici del prodotto tra gli spinori.

Usando lo stesso abuso di notazione che abbiamo osservato per il caso scalare (ovvero utilizziamo G sia per indicare la funzione di Green, sia la funzione di Green amputata), possiamo scrivere la definizione delle funzioni di Green:

$$G = \bar{v}_j \bar{u}_k \langle \Omega | T[\psi_j \psi_k \bar{\psi}_i \bar{\psi}_l] | \Omega \rangle u_i v_l \tag{2.1.56}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{G} &= \left\{ \prod_{j=1}^m \int d^4 x_j e^{-i p_j x_j} \right\} \left\{ \prod_{k=1}^s \int d^4 x_k e^{+i p_k x_k} \right\} \left\{ \prod_{i=1}^n \int d^4 x_i e^{-i p_i x_i} \right\} \times \\
&\quad \times \left\{ \prod_{l=1}^t \int d^4 x_l e^{+i p_l x_l} \right\} G
\end{aligned} \tag{2.1.57}$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^{n+t} (\sqrt{Z})^{n+m+s+t} \left\{ \prod_{j=1}^m \frac{i}{\not{p}_j - m} \right\} \left\{ \prod_{k=1}^s \frac{i}{\not{p}_k + m} \right\} \times \\
&\quad \times \left\{ \prod_{i=1}^n \frac{i}{\not{p}_i + m} \right\} \left\{ \prod_{l=1}^t \frac{i}{\not{p}_l - m} \right\} \langle \beta_{(s,t)} | \alpha_{(n,m)} \rangle
\end{aligned} \tag{2.1.58}$$

che troviamo grazie alla formula LSZ. La funzione di correlazione/Green amputata si ottiene eliminando i propagatori delle gambe esterne dalla funzione di Green nello spazio dei momenti:

$$\tilde{G}^{(n)} = \tilde{G}_A^{(n)} \prod_{i=1}^n \Delta_F(p_i). \quad (2.1.59)$$

Chapter 3

Campo vettoriale

3.1 Esempio annichilazione di fermioni

I riferimenti sono p. 131-136 del Peskin e Schroeder [4].

Consideriamo la QED, dunque una lagrangiana:

$$\mathcal{L} = -e \bar{\psi} \gamma_\mu \psi A^\mu \quad (3.1.1)$$

e studiamo il processo:

$$e^- + e^+ \longrightarrow \mu^- + \mu^+$$

in cui abbiamo solo il canale s e siccome $m_\mu \approx 200 m_e$ trascuriamo solo la massa dell'elettrone. Il processo lo possiamo vedere in figura 3.1.

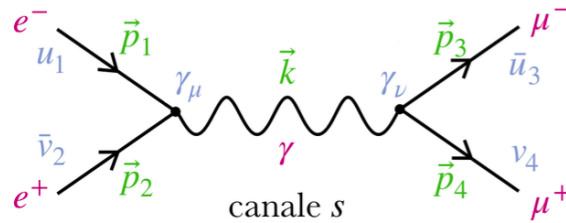


Figure 3.1: Rappresentazione canale s processo $e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$.

Utilizziamo le regole di Feynman per la QED per scrivere l'elemento di

matrice S ridotta:

$$M (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) = \quad (3.1.2)$$

$$= \left[\bar{v}(p_2) (-ie \gamma_\mu) u(p_1) \right] \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i\eta^{\mu\nu}}{k^4} \left[\bar{u}(p_3) (-ie \gamma_\nu) v(p_4) \right] \times \\ \times (2\pi)^4 \delta(k - p_3 - p_4) (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - k) \quad (3.1.3)$$

$$= \frac{-ie^2}{(p_1 + p_2)^2} (\bar{v}_2 \cdot \gamma_\mu \cdot u_1) (\bar{u}_3 \cdot \gamma^\mu \cdot v_4) (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4). \quad (3.1.4)$$

Dunque abbiamo:

$$M = M_s = \frac{-ie^2}{s} (\bar{v}_2 \cdot \gamma_\mu \cdot u_1) (\bar{u}_3 \cdot \gamma^\mu \cdot v_4) \quad (3.1.5)$$

e possiamo procedere con il calcolo della sezione d'urto non polarizzata mediando sulle polarizzazioni iniziali e sommando su quelle finali:

$$|\mathcal{M}_s|^2 = \frac{1}{4} \sum_{spin} |M_s|^2 \quad (3.1.6)$$

$$= \frac{e^4}{4s^2} \sum_{spin} (\bar{v}_2 \cdot \gamma_\mu \cdot u_1) (\bar{u}_3 \cdot \gamma^\mu \cdot v_4) (\bar{v}_4 \cdot \gamma^\nu \cdot u_3) (\bar{u}_1 \cdot \gamma_\nu \cdot v_2) \quad (3.1.7)$$

$$= \frac{e^4}{4s^2} \text{Tr} \left\{ \gamma_\mu (\not{p}_1 + m_e) \gamma_\nu (\not{p}_2 - m_e) \right\} \times \\ \times \text{Tr} \left\{ \gamma^\mu (\not{p}_3 + m_\mu) \gamma^\nu (\not{p}_4 - m_\mu) \right\} \quad (3.1.8)$$

ad alte energie $m_e \approx 0$

$$\approx \frac{e^4}{4s^2} p_1^\alpha p_2^\beta p_{3,\rho} p_{4,\sigma} \times \\ \times \text{Tr} \{ \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\beta \} \text{Tr} \{ \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\sigma - m_\mu^2 \gamma^\mu \gamma^\nu \} \quad (3.1.9)$$

$$= \frac{4e^4}{s^2} p_1^\alpha p_2^\beta p_{3,\rho} p_{4,\sigma} [\eta_{\mu\alpha} \eta_{\nu\beta} + \eta_{\mu\beta} \eta_{\nu\alpha} - \eta_{\mu\nu} \eta_{\alpha\beta}] \times \\ \times [\eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\rho} - \eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma} - m_\mu^2 \eta^{\mu\nu}] \quad (3.1.10)$$

$$= \frac{8e^4}{s^2} [(p_1 \cdot p_3) (p_2 \cdot p_4) + (p_1 \cdot p_4) (p_2 \cdot p_3) + m_\mu^2 (p_1 \cdot p_2)] \quad (3.1.11)$$

ora, notando che nel sistema di riferimento del centro di massa, con $m_e \approx 0$, abbiamo:

$$\begin{cases} p_1 = (E, E\hat{z}) & ; & p_2 = (E, -E\hat{z}) \\ p_3 = (E, \vec{k}) & ; & p_4 = (E, -\vec{k}) \end{cases} \quad (3.1.12)$$

in cui:

$$\vec{k} \cdot \hat{z} = |\vec{k}| \cos \theta = \sqrt{E^2 - m_\mu^2} \cos \theta \quad (3.1.13)$$

allora continuando i conti:

$$|\mathcal{M}_s|^2 = \frac{8e^4}{(2E)^4} \left[\left(E^2 - E \sqrt{E^2 - m_\mu^2} \cos \theta \right)^2 + \right. \\ \left. + \left(E^2 + E \sqrt{E^2 - m_\mu^2} \cos \theta \right)^2 + 2 E^2 m_\mu^2 \right] \quad (3.1.14)$$

$$= \frac{e^4}{2} \left[\left(1 - \sqrt{1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}} \cos \theta \right)^2 + \left(1 + \sqrt{1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}} \cos \theta \right)^2 + 2 \frac{m_\mu^2}{E^2} \right] \quad (3.1.15)$$

$$= e^4 \left[1 + \frac{m_\mu^2}{E^2} + \left(1 - \frac{m_\mu^2}{E^2} \right) \cos^2 \theta \right]. \quad (3.1.16)$$

Calcoliamo anche la sezione d'urto:

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{cm} = \frac{|\vec{p}_3| E_{cm}}{E_1 E_2 |\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} \frac{|\mathcal{M}|^2}{64 \pi^2 E_{cm}^2} \quad (3.1.17)$$

osserviamo che:

$$|\vec{v}_1 - \vec{v}_2| = \left| \frac{\vec{p}_1}{E_1} - \frac{\vec{p}_2}{E_2} \right| = 2 \quad (3.1.18)$$

dunque:

$$\frac{|\vec{p}_3| E_{cm}}{E_1 E_2 |\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} = \frac{\sqrt{E^2 - m_\mu^2} \cdot 2 E}{2 \cdot E^2} = \sqrt{1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}} \quad (3.1.19)$$

per semplicità possiamo porre $a = m_\mu^2/E^2$, $x = \cos \theta$ e calcolare la sezione d'urto totale:

$$\sigma_{cm} = \frac{e^4}{64 \pi^2 E_{cm}^2} \int d\Omega \sqrt{1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}} \left[1 + \frac{m_\mu^2}{E^2} + \left(1 - \frac{m_\mu^2}{E^2} \right) \cos^2 \theta \right] \quad (3.1.20)$$

$$= \frac{e^4}{32 \pi E_{cm}^2} \int_{-1}^{+1} dx \sqrt{1 - a} \left[1 + a + (1 - a) x^2 \right] \quad (3.1.21)$$

$$= \frac{e^4}{32 \pi E_{cm}^2} \sqrt{1 - a} \left[2(1 + a) + \frac{2}{3} (1 - a) \right] \quad (3.1.22)$$

$$= \frac{e^4}{12 \pi E_{cm}^2} \sqrt{1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{m_\mu^2}{E^2} \right) \quad (3.1.23)$$

$$= \frac{4\pi \alpha^2}{3 E_{cm}^2} \sqrt{1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{m_\mu^2}{E^2} \right). \quad (3.1.24)$$

Se avessimo trascurato tutte le masse avremmo ottenuto:

$$|\mathcal{M}_s|^2 = \frac{2e^4}{s^2} (t^2 + u^2) \quad (3.1.25)$$

tramite la simmetria di crossing possiamo studiare:

$$e^- + \mu^- \longrightarrow e^- + \mu^-$$

da cui otteniamo:

$$|\mathcal{M}_t|^2 = \frac{2e^4}{t^2} (s^2 + u^2). \quad (3.1.26)$$

Se avessimo studiato:

$$e^- + e^- \longrightarrow e^- + e^-$$

allora avremmo avuto anche il canale u , oltre il canale t , questo perché le particelle finali sono identiche, per cui possiamo scambiare gli impulsi e dobbiamo studiare:

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{4} \sum_{spin} |M_t + M_u|^2 \quad (3.1.27)$$

$$= |\mathcal{M}_t|^2 + |\mathcal{M}_u|^2 + \frac{1}{4} \sum_{spin} 2 \operatorname{Re} \{ M_t M_u^\dagger \}. \quad (3.1.28)$$

3.2 Esempio del Bhabha scattering

I riferimenti sono p. 355 es. 59.2 dello Srednicki [7] e p. 192 es. 5.2 del Peskin e Schroeder [4].

Consideriamo la QED con la lagrangiana:

$$\mathcal{L} = -e \bar{\psi} \gamma_\mu \psi A^\mu \quad (3.2.1)$$

e studiamo il processo:

$$e^- + e^+ \longrightarrow e^- + e^+$$

in cui abbiamo sia il canale s (di annichilazione) che il canale t (di scambio), raffigurati in figura 3.2.

A noi interessa riordinare gli elementi che troviamo nella matrice S come $\psi \bar{\psi}$, formando il propagatore $S_F(x - y) = \overline{\psi(x) \psi(y)}$, ma per fare questo dobbiamo ricordarci:

$$\{\psi, \psi\} = \{\bar{\psi}, \bar{\psi}\} = 0 \quad (3.2.2)$$

$$\{\psi(t, \vec{x}), \bar{\psi}(t, \vec{y})\} = \delta(\vec{x} - \vec{y}). \quad (3.2.3)$$

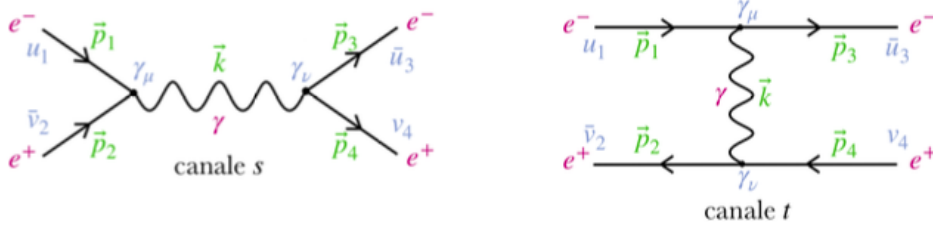


Figure 3.2: Rappresentazione canale s e t processo $e^- + e^+ \rightarrow e^- + e^+$.

Contraendo troviamo un segno relativo e l'elemento di matrice S ridotta complessivo è dato da $M = M_s - M_t$:

$$M_s = [\bar{v}(p_2) (-ie \gamma_\mu) u(p_1)] \frac{i \eta^{\mu\nu}}{k^2} [\bar{u}(p_3) (-ie \gamma_\nu) v(p_4)] \quad (3.2.4)$$

$$= \frac{-ie^2}{s} (\bar{v}_2 \cdot \gamma_\mu \cdot u_1) (\bar{u}_3 \cdot \gamma^\mu \cdot v_4) \quad (3.2.5)$$

$$M_t = [\bar{u}(p_3) (-ie \gamma_\mu) u(p_1)] \frac{i \eta^{\mu\nu}}{k^2} [\bar{v}(p_2) (-ie \gamma_\nu) v(p_4)] \quad (3.2.6)$$

$$= \frac{-ie^2}{t} (\bar{u}_3 \cdot \gamma_\mu \cdot u_1) (\bar{v}_2 \cdot \gamma^\mu \cdot v_4). \quad (3.2.7)$$

Mediamo sulle polarizzazioni iniziali e sommiamo su quelle finali:

$$|\mathcal{M}_s|^2 = \frac{1}{4} \sum_{spin} |M_s|^2 \quad (3.2.8)$$

$$= \frac{e^4}{4s^2} \sum_{spin} (\bar{v}_2 \cdot \gamma_\mu \cdot u_1) (\bar{u}_3 \cdot \gamma^\mu \cdot v_4) (\bar{v}_4 \cdot \gamma^\nu \cdot u_3) (\bar{u}_1 \cdot \gamma_\nu \cdot v_2) \quad (3.2.9)$$

$$= \frac{e^4}{4s^2} \sum_{spin} \left[(\bar{v}_2)_\alpha (\gamma_\mu)_{\alpha\beta} (u_1)_\beta \cdot (\bar{u}_1)_\gamma (\gamma_\nu)_{\gamma\delta} (v_2)_\delta \right] \times \\ \times \left[(\bar{u}_3)_\rho (\gamma^\mu)_{\rho\sigma} (v_4)_\sigma \cdot (\bar{v}_4)_\tau (\gamma^\nu)_{\tau\epsilon} (u_3)_\epsilon \right] \quad (3.2.10)$$

$$= \frac{e^4}{4s^2} \sum_{spin} \left[(\gamma_\mu)_{\alpha\beta} (\not{p}_1 + m_e)_{\beta\gamma} (\gamma_\nu)_{\gamma\delta} (\not{p}_2 - m_e)_{\delta\alpha} \right] \times \\ \times \left[(\gamma^\mu)_{\rho\sigma} (\not{p}_4 - m_e)_{\sigma\tau} (\gamma^\nu)_{\tau\epsilon} (\not{p}_3 + m_e)_{\epsilon\rho} \right] \quad (3.2.11)$$

$$= \frac{e^4}{4s^2} \text{Tr} \left\{ \gamma_\mu (\not{p}_1 + m_e) \gamma_\nu (\not{p}_2 - m_e) \right\} \text{Tr} \left\{ \gamma^\mu (\not{p}_3 + m_e) \gamma^\nu (\not{p}_4 - m_e) \right\} \quad (3.2.12)$$

alle alte energie $m_e \approx 0$

$$\approx \frac{e^4}{4s^2} p_1^\alpha p_2^\beta p_{3,\rho} p_{4,\sigma} \text{Tr} \{ \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\beta \} \text{Tr} \{ \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\sigma \} \quad (3.2.13)$$

$$= \frac{4e^2}{s^2} p_1^\alpha p_2^\beta p_{3,\rho} p_{4,\sigma} \left[\eta_{\mu\alpha} \eta_{\nu\beta} + \eta_{\mu\beta} \eta_{\nu\alpha} - \eta_{\mu\nu} \eta_{\alpha\beta} \right] \times \\ \times \left[\eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\rho} - \eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma} \right] \quad (3.2.14)$$

$$= \frac{8e^4}{s^2} \left[(p_1 \cdot p_3) (p_2 \cdot p_4) + (p_1 \cdot p_4) (p_2 \cdot p_3) \right] \quad (3.2.15)$$

$$= \frac{2e^4}{s^2} (t^2 + u^2). \quad (3.2.16)$$

Possiamo ricavare il canale t usando la simmetria di crossing:

$$|\mathcal{M}_t|^2 = \frac{2e^4}{t^2} (s^2 + u^2). \quad (3.2.17)$$

Studiamo ora il termine misto:

$$|\mathcal{M}_{st}| = \frac{1}{4} \sum_{spin} \text{Re} \left\{ M_s M_t^\dagger \right\} \quad (3.2.18)$$

$$= \frac{e^4}{4 s t} \sum_{spin} (\bar{v}_2 \cdot \gamma_\mu \cdot u_1) (\bar{u}_3 \cdot \gamma^\mu \cdot v_4) (\bar{v}_4 \cdot \gamma^\nu \cdot v_2) (\bar{u}_1 \cdot \gamma_\nu \cdot u_3) \quad (3.2.19)$$

$$= \frac{e^4}{4 s t} \text{Tr} \left\{ \gamma_\mu (\not{p}_1 + m_e) \gamma_\nu (\not{p}_3 + m_e) \gamma^\mu (\not{p}_4 - m_e) \gamma^\nu (\not{p}_2 - m_e) \right\} \quad (3.2.20)$$

alle alte energie $m_e \approx 0$

$$= \frac{e^4}{4 s t} p_{1,\alpha} p_{3,\beta} p_{4,\rho} p_{2,\sigma} \text{Tr} \left\{ \gamma_\mu \gamma^\alpha \gamma_\nu \gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\sigma \right\} \quad (3.2.21)$$

dobbiamo a questo punto ricordarci delle relazioni per le matrici γ , che puoi non solo vedere nell'Appendice ??, ma soprattutto nelle note del corso di *Introduzione alla Teoria Quantistica dei Campi*. Vediamo infatti:

$$\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma_\mu = 4 \eta^{\alpha\beta} \quad , \quad \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_\mu = -2 \gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\mu \quad (3.2.22)$$

per cui abbiamo:

$$\text{Tr} \left\{ \gamma_\mu \gamma^\alpha (\gamma_\nu \gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu) \gamma^\sigma \right\} = -2 \text{Tr} \left\{ \gamma_\mu \gamma^\alpha (\gamma^\rho \gamma^\mu \gamma^\beta) \gamma^\sigma \right\} \quad (3.2.23)$$

$$= -8 \eta^{\alpha\rho} \text{Tr} \left\{ \gamma^\beta \gamma^\sigma \right\} \quad (3.2.24)$$

$$= -32 \eta^{\alpha\rho} \eta^{\beta\sigma}. \quad (3.2.25)$$

Tornando ai nostri conti:

$$|\mathcal{M}_{st}| = -\frac{8e^4}{s t} (p_1 \cdot p_4) (p_2 \cdot p_3) \quad (3.2.26)$$

$$= -\frac{2e^4}{s t} u^2. \quad (3.2.27)$$

Complessivamente abbiamo:

$$|\mathcal{M}_{tot}|^2 = |\mathcal{M}_s|^2 + |\mathcal{M}_t|^2 - 2|\mathcal{M}_{st}|^2 \quad (3.2.28)$$

$$= 2 e^4 \left[\frac{t^2}{s^2} + \frac{s^2}{t^2} + u^2 \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{t} \right)^2 \right]. \quad (3.2.29)$$

Se avessimo studiato il processo:

$$e^- + e^- \longrightarrow e^- + e^-$$

avremmo avuto due diagrammi di scambio (canale t e canale u) in quanto le particelle degli stati finali sono identiche e quindi possiamo scambiarne gli impulsi.

3.3 Esempio sul segno di un loop di fermioni

Guardando la figura 3.3 scriviamo:

$$\begin{aligned} \langle 0 | T[A_\mu(x_1) A_\nu(x_2)] | 0 \rangle &= (-ie)^2 \int d^4x d^4y \langle 0 | A_\mu(x_1) A_\nu(x_2) \bar{\psi}(x) \times \\ &\quad \times \not{A}(x) \psi(x) \bar{\psi}(y) \not{A}(y) \psi(y) | 0 \rangle \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

$$= -\Delta_{\mu\rho} \Delta_{\nu\sigma} \Delta_1 \Delta_2. \quad (3.3.2)$$

In generale troviamo che un loop con n fotoni esterni che abbia solo fermioni interni ha segno negativo:

$$\begin{aligned} \langle 0 | T[A_{\mu_2}(x_1) \dots A_{\mu_n}(x_n)] | 0 \rangle &= (-ie)^2 \int d^4y_1 \dots d^4y_n \times \\ &\quad \times \langle 0 | A_{\mu_1}(x_1) \dots A_{\mu_n}(x_n) \bar{\psi}(y_1) \not{A}(y_1) \psi(y_1) \bar{\psi}(y_2) \times \\ &\quad \times \not{A}(y_2) \psi(y_2) \dots \bar{\psi}(y_n) \not{A}(y_n) \psi(y_n) | 0 \rangle \end{aligned} \quad (3.3.3)$$



Figure 3.3: Rappresentazione loop di fermioni.

3.4 Osservazione sulla teoria di Yang-Mills

Riprendiamo l'esempio del campo spinoriale ad N componenti, in aggiunta al campo vettoriale, la lagrangiana completa è:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_a^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^a + \bar{\Psi} (i \not{D} - m) \Psi \quad (3.4.1)$$

in cui ricordiamo (??), inoltre per avere invarianza locale il campo A deve trasformare come:

$$gA_\mu \longrightarrow gA'_\mu = -iU (\partial_\mu U^\dagger) + gU A_\mu U^\dagger. \quad (3.4.2)$$

Se riscriviamo esplicitando i generatori abbiamo in una trasformazione infinitesima e:

$$gA'_\mu = gA_\mu - \partial_\mu \omega^a T^a + i g \omega^a [T^a, A_\mu] \quad (3.4.3)$$

$$= gA_\mu - D_\mu (\omega^a T^a) \quad (3.4.4)$$

$$= gA_\mu + i D_\mu U \quad (3.4.5)$$

dove abbiamo utilizzato la derivata covariante in rappresentazione aggiunta (??). Esplicitando la lagrangiana notiamo che il termine di interazione dato da:

$$\mathcal{L}_{int} = -g \bar{\Psi} (\gamma_\mu A^\mu) \Psi \quad (3.4.6)$$

come in Maxwell.

Se invece consideriamo un campo scalare complesso:

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi) (\partial^\mu \phi)^\dagger + m^2 \phi \phi^\dagger \quad (3.4.7)$$

quando richiediamo l'invarianza di fase locale tramite la derivata covariante:

$$D_\mu = \partial_\mu + iA_\mu \quad (3.4.8)$$

otteniamo:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - (\partial_\mu \phi + iA_\mu \phi) (\partial^\mu \phi + iA^\mu \phi^\dagger) + m^2 \phi \phi^\dagger. \quad (3.4.9)$$

Dunque, abbiamo dei termini di interazioni di tipo derivativo, in cui un campo (A) interagisce con la derivata di un altro campo (ϕ).

Le interazioni derivate non sono rare, ma si trattano meglio usando i path integrals (vedi il capitolo §??).

Chapter 4

Integrali funzionali

4.1 Legame tra path integral e prodotto T-ordinato nel vuoto

L'ampiezza di transizione generica è data da:

$$\langle \psi | \phi \rangle = \int dq_0 dq_f \langle \psi | q_f \rangle \langle q_f | q_0 \rangle \langle q_0 | \phi \rangle \quad (4.1.1)$$

$$= \int dq_0 dq_f \psi^*(q_f) \phi(q_0) \langle q_f | q_0 \rangle \quad (4.1.2)$$

ma a noi interessa studiare il ground state:

$$\langle 0 | 0 \rangle_{f,g} = \lim_{\substack{t_0 \rightarrow -\infty \\ t_f \rightarrow +\infty}} \int dq_0 dq_f \psi^*(q_f) \phi(q_0) \langle q_f t_f | q_0 t_0 \rangle. \quad (4.1.3)$$

Sapendo che $\psi_n(q) = \langle q | n \rangle$ e supponendo $E_0 = 0$, allora il ground state dello stato finale ed iniziale sono:

$$|q_0 t_0\rangle = e^{+\frac{i}{\hbar} H t_0} |q_0\rangle \quad (4.1.4)$$

$$= e^{+\frac{i}{\hbar} H t_0} \sum_{n \geq 0} |n\rangle \langle n | q_0 \rangle \quad (4.1.5)$$

$$= \sum_{n \geq 0} e^{+\frac{i}{\hbar} E_n t_0} \psi_n^*(q_0) |n\rangle \xrightarrow{t \rightarrow -\infty(1-i\epsilon)} \psi_0^*(q_0) |0\rangle \quad (4.1.6)$$

$$\langle q_f t_f | = \langle q_f | e^{-\frac{i}{\hbar} H t_f} \quad (4.1.7)$$

$$= e^{-\frac{i}{\hbar} H t_f} \sum_{n \geq 0} \langle q_f | n \rangle \langle n | \quad (4.1.8)$$

$$= \sum_{n \geq 0} \langle n | e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t_f} \phi_n(q_f) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty(1-i\epsilon)} \langle 0 | \phi_0(q_f) \quad (4.1.9)$$

possiamo moltiplicare per una funzione d'onda arbitraria $\chi(q_0)$, per cui richiediamo $\langle \chi|0 \rangle \neq 0$, ed integriamo:

$$\int dq_0 \chi(q_0) |q_0 t_0 \rangle \xrightarrow[t \rightarrow -\infty(1-i\epsilon)]{} \int dq_0 \chi(q_0) \psi_0^*(q_0) |0 \rangle = \langle \chi|0 \rangle \langle 0| \quad (4.1.10)$$

se facciamo la stessa cosa per gli stati finali con una funzione d'onda $\xi(q_f)$, allora possiamo scrivere il ground state come (riassorbendo $\chi(q_0)$ e $\xi(q_f)$ nella costante di normalizzazione):

$$\begin{aligned} \langle 0|0 \rangle &= \lim_{\substack{t_0 \rightarrow -\infty \\ t_f \rightarrow +\infty}} \frac{\text{cost}}{\langle \xi|0 \rangle \langle 0|\chi \rangle} \int dq_0 \dots dq_{N+1} \int dp_0 \dots dp_N \times \\ &\quad \times \chi(q_0) \xi^*(q_f) \exp \left\{ i \int_{t_0}^{t_f} dt (p\dot{q} - H(q, p)) \right\} \end{aligned} \quad (4.1.11)$$

$$= \frac{1}{\mathcal{N}} \int \mathcal{D}_q \int \mathcal{D}_p \exp \left\{ i \int_{-\infty}^{+\infty} dt (p\dot{q} - H(q, p)) \right\} \quad (4.1.12)$$

pertanto, aggiungendo i termini di sorgente, abbiamo:

$$\langle 0|0 \rangle_{f,g} = \frac{1}{\mathcal{N}} \int \mathcal{D}_q \mathcal{D}_p \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int dt (p\dot{q} - H(q, p) + fq + gp) \right\}. \quad (4.1.13)$$

Possiamo supporre:

$$H = H_0 + H_{int} \quad (4.1.14)$$

e per cui:

$$\langle 0|0 \rangle_{f,g} = \int \mathcal{D}_q \mathcal{D}_p \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int dt (p\dot{q} - H_0 - H_{int} + fq + gp) \right\} \quad (4.1.15)$$

sviluppando il termine di interazione in serie di potenze:

$$\exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int dt H_{int} \right\} = \sum c_{nm} q^n p^m \quad (4.1.16)$$

dunque abbiamo:

$$\langle 0|0 \rangle_{f,h} = \sum c_{nm} (-i\hbar)^{n+m} \frac{\delta^n}{\delta f^n} \frac{\delta^m}{\delta g^m}. \quad (4.1.17)$$

$$\cdot \int \mathcal{D}_q \mathcal{D}_p \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int dt (p\dot{q} - H_0 + fq + gp) \right\} \quad (4.1.18)$$

$$\begin{aligned} &= \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int dt H_{int} \left(\frac{i\delta}{\hbar \delta f}, \frac{i\delta}{\hbar \delta g} \right) \right\} \times \\ &\quad \times \int \mathcal{D}_q \mathcal{D}_p \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int dt (p\dot{q} - H_0 + fq + gp) \right\} \end{aligned} \quad (4.1.19)$$

se ponessimo $H_{int} \rightarrow \lambda H_{int}$ con λ piccolo, allora potremmo sviluppare perturbativamente il primo termine.

4.2 Spazio delle coordinate

Questo conto lo possiamo fare anche nello spazio delle coordinate, integriamo il primo termine della lagrangiana per parti:

$$\mathcal{L}_J = \mathcal{L}_0 + J\phi = -\frac{1}{2}\phi (\square + m^2) \phi + J\phi \quad (4.2.1)$$

e poi completiamo il quadrato:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_J = -\frac{1}{2} \left[\phi - J (\square + m^2)^{-1} \right] (\square + m^2) \left[\phi - J (\square + m^2)^{-1} \right] + \\ + \frac{1}{2} J (\square + m^2)^{-1} J \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

però possiamo ricordarci che l'inverso di un operatore è la sua funzione di Green:

$$(\square + m^2) \Delta(x-y) = -i\delta^4(x-y) \quad (4.2.3)$$

che abbiamo già calcolato ed è uguale al propagatore (??) e quindi:

$$Z[J] = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}\phi \exp\{i\langle \mathcal{L}_0 + J\phi \rangle\} \quad (4.2.4)$$

$$= \exp\left\{-\frac{1}{2} \langle J_x \Delta(x-y) J_y \rangle_{x,y}\right\}. \quad (4.2.5)$$

4.3 Rotazione di Wick

Facendo la *rotazione di Wick*:

$$x_0 = -i\bar{x}_0 \quad (4.3.1)$$

ovviamente tutte le quantità si modificano, ma si può vedere l'Appendice ?? per le relazioni. Notiamo che abbiamo una trasformazione analoga anche per l'impulso:

$$k_0 = -i k_0^E \quad (4.3.2)$$

che implica:

$$k^2 = -k_E^2 \quad (4.3.3)$$

e che:

$$x^\mu p_\mu = Et - \vec{k} \cdot \vec{x} \quad (4.3.4)$$

$$= (-iE_E) (-i\tau) - \vec{k} \cdot \vec{x} \quad (4.3.5)$$

$$= -x_\mu^E p_\mu^E \quad (4.3.6)$$

in cui possiamo mettere entrambi gli indici bassi poiché nello spazio euclideo non cambia nulla la posizione degli indici.

Continuiamo i nostri conti:

$$I = iS + i\langle\phi J\rangle \quad (4.3.7)$$

$$= -S_E + \langle\phi J\rangle_E \quad (4.3.8)$$

$$= \frac{1}{2} \int d^4x_E \left[-\partial_\mu\phi\partial_\mu\phi - m^2\phi^2 + 2J\phi \right] \quad (4.3.9)$$

$$= \frac{1}{2} \int d^4x_E \int \frac{d^4p_E}{(2\pi)^4} \frac{d^4p'_E}{(2\pi)^4} \left[(p_\mu p'_\mu - m^2) \tilde{\phi}(p) \phi(p') + \right. \\ \left. + \tilde{\phi}(p) \tilde{J}(p') + \tilde{\phi}(p') \tilde{J}(p) \right] e^{-ix(p+p')} \quad (4.3.10)$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d^4p_E}{(2\pi)^4} \left[- (p_\mu p_\mu + m^2) \tilde{\phi}(p) \phi(-p) + \tilde{\phi}(p) \tilde{J}(-p) + \tilde{\phi}(-p) \tilde{J}(p) \right] \quad (4.3.11)$$

possiamo porre per brevità $\phi(\pm p) = \phi_\pm$, ma anche:

$$K = - (p^2 + m^2) \quad (4.3.12)$$

e cambiamo variabile:

$$\tilde{\phi}(p) \longrightarrow \tilde{\phi}(p) - K^{-1} \tilde{J}(p) \quad (4.3.13)$$

continuando i conti:

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d^4p_E}{(2\pi)^4} \left\{ K \left[\tilde{\phi}_+ - K^{-1} \tilde{J}_+ \right] \left[\tilde{\phi}_- - K^{-1} \tilde{J}_- \right] + \right. \\ \left. + \left[\tilde{\phi}_+ - K^{-1} \tilde{J}_+ \right] \tilde{J}_- + \left[\tilde{\phi}_- - K^{-1} \tilde{J}_- \right] \tilde{J}_+ \right\} \quad (4.3.14)$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d^4p_E}{(2\pi)^4} \left[K \tilde{\phi}(p) \tilde{\phi}(-p) - K^{-1} \tilde{J}(p) \tilde{J}(-p) \right] \quad (4.3.15)$$

$$= -S_E - \frac{1}{2} \int d^4x_E d^4y_E \int \frac{d^4p_E}{(2\pi)^4} \left[J(x) J(y) \frac{e^{ip(x-y)}}{-(p^2 + m^2)} \right] \quad (4.3.16)$$

$$= -S_E + \frac{1}{2} \int d^4x_E d^4y_E J(x) J(y) \int \frac{d^4p_E}{(2\pi)^4} \frac{e^{ip(x-y)}}{p^2 + m^2} \quad (4.3.17)$$

da cui concludiamo:

$$Z_0^E[J] = e^{-W_0[J]} = \exp \left\{ \frac{1}{2} \langle J(x) J(y) \Delta(x-y) \rangle_{x,y} \right\}. \quad (4.3.18)$$

Se torniamo nello spazio di Minkowski, richiedendo $m^2 \rightarrow m^2 - i\epsilon$ per la convergenza, otteniamo:

$$I = iS + \frac{1}{2} \int d^4x d^4y \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left[J(x) J(y) \frac{i e^{-ip(x-y)}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \right]. \quad (4.3.19)$$

Nota di E. Chiarotto (tra l'altro il 9 febbraio 2023): Non mi torna il segno, dovrebbe essere $-1/2$, ma il passaggio prima è uguale a quello che ha scritto il professore.

4.4 Esempio $\lambda\phi^4$

Dopo la rinormalizzazione, l'energia libera W ha solo diagrammi in cui tutte le particelle interagiscono tra di loro e collegate alle n gambe esterne:

$$W[J] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \langle J_1 \dots J_n G_c^{(n)} \rangle_{x_1 \dots x_n} \quad (4.4.1)$$

invertendo troviamo:

$$G_c^{(n)} = (-1)^n \frac{\delta^n}{\delta J_1 \dots \delta J_n} W[J] \Big|_{J=0}. \quad (4.4.2)$$

Puoi vedere i vari termini delle funzioni di Green nella figura 4.1.

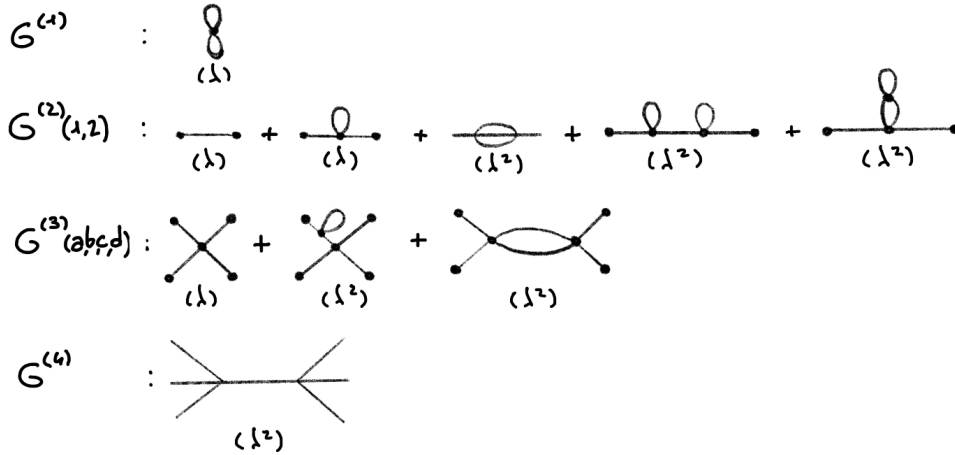


Figure 4.1

Ciascuno è un esempio di tanti processi equivalenti. Ad esempio quelli in figura 4.2.

Quindi ogni vertice è associato a $-\lambda$ (siamo nell'eulideo), inoltre per ogni vertice (che non abbia solo gambe esterne) dobbiamo fare degli integrali perché le derivate:

$$\frac{\delta J_1}{\delta J_2} = \delta(x_1 - x_2) \quad (4.4.3)$$

ci permettono di semplificare soltanto gli integrali delle gambe esterne.

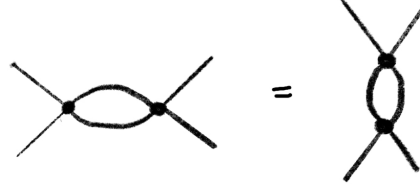


Figure 4.2

Consideriamo il termine di ordine λ in $G^{(2)}$ e lo chiamiamo (A), mentre quello in ordine λ^2 lo chiamiamo (B):

$$(A) = -\frac{\lambda}{2} \int d^4x \Delta(x_1 - x) \Delta(x - x_2) \Delta(x - x) \quad (4.4.4)$$

$$(B) = -\frac{\lambda^2}{3} \int d^4x d^4y \Delta(x_1 - x) \Delta^3(x - y) \Delta(y - x_2). \quad (4.4.5)$$

In δ_2 avevamo un termine:

$$\frac{1}{12} \langle J_x \Delta_{ax} \Delta_{xy}^3 \Delta_{yb} J_y \rangle_{xy} \quad (4.4.6)$$

che se derivato diventa:

$$\lambda^2 \frac{2}{12} \langle \Delta_{ax} \Delta_{xy}^3 \Delta_{yb} \rangle_{xy}. \quad (4.4.7)$$

Ovviamente possiamo rifare il conto nello spazio degli impulsi:

$$(A) = -\frac{\lambda}{2} \int d^4x \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i e^{ip_1(x_1-x)}}{p_1^2 + m^2} \frac{i e^{ip_2(x-x_2)}}{p_2^2 + m^2} \frac{i}{k^2 + m^2} \quad (4.4.8)$$

integriamo in x e usiamo le δ

$$\begin{aligned} &= \frac{\lambda}{2} \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} e^{ip_1 x_1} \int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} e^{-ip_2 x_2} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_2) \times \\ &\quad \times \frac{i}{p_1^2 + m^2} \frac{i}{p_2^2 + m^2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 + m^2} \end{aligned} \quad (4.4.9)$$

vedendo così:

$$\tilde{G}(p_1, p_2) = -\frac{\lambda}{2} \delta^4(p_1 - p_2) \frac{i}{p_1^2 + m^2} \frac{i}{p_2^2 + m^2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 + m^2}. \quad (4.4.10)$$

Chapter 5

Modello standard

5.1 Rottura spontanea di simmetria (Wigner e Nambu-Goto)

In Meccanica Quantistica una simmetria è una mappa:

$$|\alpha\rangle \longrightarrow |\alpha'\rangle = U |\alpha\rangle \quad (5.1.1)$$

tale per cui:

$$\langle\alpha|\beta\rangle = \langle\alpha'|\beta'\rangle \quad (5.1.2)$$

quindi U dev'essere un operatore unitario. Inoltre ricordiamo che per il teorema di Noether ogni simmetria corrisponde una corrente conservata:

$$\delta S \sim \int d^4x (\partial_\mu j^\mu) = 0 \quad (5.1.3)$$

da cui ricaviamo la carica conservata:

$$Q^a = \int d^4x j^{0a} \quad (5.1.4)$$

inoltre abbiamo che:

$$[H, Q^a, =]0 \quad (5.1.5)$$

e per questo possiamo esprimere:

$$U = e^{i a^a Q^a}. \quad (5.1.6)$$

Una simmetria può agire su una teoria in due modi diversi in base a come agisce sul vuoto: *realizzazione alla Wigner* o *realizzazione di Nambu-Goto*. Per Wigner abbiamo:

$$U |0\rangle = |0\rangle \quad , \quad Q_0 |0\rangle = 0 \quad (5.1.7)$$

pertanto tutto lo spettro è caratterizzato da multipletti del gruppo di simmetria ovvero di Q_a , quindi per esempio se abbiamo due stati degeneri allora:

$$|\alpha\rangle = Q_a |\alpha\rangle. \quad (5.1.8)$$

Per Nambu-Goto invece abbiamo:

$$U |0\rangle \neq |0\rangle \quad (5.1.9)$$

cioè il vuoto non è invariante, e con un abuso di notazione si dice che la *simmetria è spontaneamente rotta* (U continua a commutare con H).

5.2 Rottura della simmetria e spettro di massa

Consideriamo un campo reale scalare ϕ^a con $a = \{1, 2\}$ e:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi^a \partial^\mu \phi^a - V(\phi^a) \quad (5.2.1)$$

dunque per cui abbiamo:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} (\dot{\phi}^a)^2 + \frac{1}{2} (\nabla_i \phi^a)^2 + V(\phi^a) \quad (5.2.2)$$

tuttavia la teoria dev'essere invariante di Poincarè (Lorentz e traslazioni nello spazio-tempo), quindi il vuoto della teoria è dato dalla condizione che estremizza del potenziale, cioè dobbiamo avere:

$$\frac{\partial V}{\partial \phi^a} = 0. \quad (5.2.3)$$

Studiamo le conseguenze di queste due realizzazioni per lo spettro di massa della teoria. Nella lagrangiana non abbiamo scritto un termine di massa esplicito ma lo ritroviamo quando espandiamo in un intorno del vuoto:

$$V(\phi^a) = V(\langle \phi^a \rangle) + \frac{\partial V}{\partial \phi^a} (\phi^a - \langle \phi^a \rangle) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^a \partial \phi^b} \bigg|_{\langle \phi \rangle} (\phi^a - \langle \phi^a \rangle) (\phi^b - \langle \phi^b \rangle) \quad (5.2.4)$$

la derivata prima è nulla nel vuoto, il termine costante è l'energia di punto zero che può essere ignorata e dunque rimane solamente:

$$M_{ab}^2 = \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^a \partial \phi^b} \bigg|_{\phi^a = \langle \phi^a \rangle}. \quad (5.2.5)$$

Consideriamo una trasformazione:

$$\delta \phi^a = R_b^a \phi^b \quad (5.2.6)$$

di $SO(2)$, per la quale il potenziale trasforma con:

$$\delta V = \frac{\partial V}{\partial \phi^a} \delta \phi^a = \frac{\partial V}{\partial \phi^a} R_b^a \phi^b. \quad (5.2.7)$$

Tuttavia se ipotizziamo che \mathcal{L} sia invariante di $SO(2)$, abbiamo che:

$$\delta V = \left(\frac{\partial V}{\partial \phi^a} R_b^a \phi_b \right)_{\langle \phi^b \rangle} = 0 \quad (5.2.8)$$

quindi:

$$\frac{\partial}{\partial \phi^c} \left(\frac{\partial V}{\partial \phi^a} R_b^a \phi^b \right)_{\langle \phi^b \rangle} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^a \partial \phi^c} R_b^a \langle \phi^b \rangle + \frac{\partial V}{\partial \phi^a} R_b^a \delta_c^b \right)_{\langle \phi^b \rangle} \quad (5.2.9)$$

$$= M_{ac}^2 R_b^a \langle \phi_b \rangle \quad (5.2.10)$$

$$= 0. \quad (5.2.11)$$

Dunque, ricordando che la variazione del vuoto è:

$$\delta \langle \phi^a \rangle = \alpha R_b^a \langle \phi^b \rangle \quad (5.2.12)$$

possiamo avere:

- La realizzazione alla Wigner se:

$$\delta \langle \phi^a \rangle R_a^b \langle \phi_b \rangle = 0 \quad (5.2.13)$$

che implica la *preservazione del vuoto*:

$$U |0\rangle = |0\rangle \quad (5.2.14)$$

che non dà informazioni aggiuntive sulle particelle.

- La realizzazione alla Nambu-Goto se:

$$\delta \langle \phi^a \rangle R_a^b \langle \phi_b \rangle \neq 0 \quad (5.2.15)$$

che implica la *"rottura" del vuoto*:

$$U |0\rangle = |0\rangle \quad (5.2.16)$$

in questo caso la matrice di massa M_{ab}^2 ha un autovalore nullo, dunque esiste sempre una particella a massa nulla, che prende il nome di **bosone di Goldstone**.

5.3 Esempio di rottura della simmetria

I riferimenti sono p. 348 del Peskin [4].

Studiamo la lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{b=1,2} \left(\partial_\mu \phi^b \right) \left(\partial^\mu \phi^b \right) - V(\phi^b) \quad (5.3.1)$$

in cui scegliamo:

$$V(\phi^a) = \frac{\lambda}{4!} \left(\sum_{b=1,2} \frac{1}{2} \phi^b \phi^b - a^2 \right)^2. \quad (5.3.2)$$

Passiamo ad un campo complesso:

$$\phi = \frac{\phi^1 + i \phi^2}{\sqrt{2}} \quad (5.3.3)$$

ed otteniamo:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^\dagger - \frac{\lambda}{4!} \left(\phi \phi^\dagger - a^2 \right)^2 \quad (5.3.4)$$

e possiamo osservare che abbiamo un'invarianza di fase globale. Se vogliamo calcolare il vuoto della teoria dobbiamo studiare:

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = 0 \quad , \quad \frac{\partial V}{\partial \phi^\dagger} = 0 \quad (5.3.5)$$

da cui otteniamo:

$$\langle \phi \rangle = \langle \phi^\dagger \rangle = a \quad (5.3.6)$$

oppure:

$$\langle \phi \rangle = \langle \phi^\dagger \rangle = 0. \quad (5.3.7)$$

Se abbiamo $a^2 \leq 0$ abbiamo un'unica soluzione:

$$\langle \phi \rangle = 0 \quad (5.3.8)$$

dunque:

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & -a^2 \\ -a^2 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \det M^2 \neq 0. \quad (5.3.9)$$

Se $a^2 > 0$ abbiamo un massimo in $\langle \phi \rangle = 0$ ed un minimo in $\langle \phi \rangle = a$, infatti se andiamo a studiare la matrice di massa abbiamo:

$$\partial_\phi^2 V = \bar{\phi}^2 \longrightarrow a^2 \quad (5.3.10)$$

$$\partial_{\bar{\phi}}^2 V = \phi^2 \longrightarrow a^2 \quad (5.3.11)$$

$$\partial_{\phi, \bar{\phi}}^2 V = 2 \phi \bar{\phi} = 2 \phi \bar{\phi} - a^2 \longrightarrow a^2 \quad (5.3.12)$$

dunque abbiamo:

$$M^2 = \begin{pmatrix} a^2 & a^2 \\ a^2 & a^2 \end{pmatrix} \quad , \quad \det M^2 = 0 \quad (5.3.13)$$

quindi uno degli autovalori è nullo, dunque il vuoto rompe spontaneamente la simmetria, infatti in questo caso il vuoto realizza la simmetria alla Nambu-Goto.

5.3.1 Sostituzione 1

Prendendo (5.3.4) studiamo:

$$\phi = \rho e^{i\theta} \quad (5.3.14)$$

per cui abbiamo:

$$\partial_\mu \phi = (\partial_\mu \rho + i\rho \partial_\mu \theta) e^{i\theta} \quad (5.3.15)$$

$$\partial_\mu \phi^\dagger = (\partial_\mu \rho - i\rho \partial_\mu \theta) e^{-i\theta} \quad (5.3.16)$$

da cui:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \rho \partial^\mu \rho + \rho^2 \partial_\mu \theta \partial^\mu \theta - \frac{\lambda}{4!} (\rho^2 - a^2)^2 \quad (5.3.17)$$

il potenziale non dipende più da θ (che può essere il bosone di Goldstone) e per cui:

$$\frac{\partial V}{\partial \rho} = \frac{\lambda}{6} (\rho^2 - a^2) \rho = 0 \quad (5.3.18)$$

che implica:

$$\langle \rho \rangle = 0 \quad (\text{massimo}) \quad (5.3.19)$$

$$\langle \rho \rangle = \rho_0 = \pm a \quad (\text{minimo}). \quad (5.3.20)$$

Espandendo il potenziale intorno al vuoto, ignorando l'energia di punto zero, abbiamo:

$$V(\rho) \approx \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} (\rho - \rho_0)^2 \quad (5.3.21)$$

$$= \frac{\lambda}{6} a^2 (\rho - \rho_0)^2. \quad (5.3.22)$$

Se poniamo $\xi = \rho - \rho_0$ otteniamo:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \xi \partial^\mu \xi + (\xi + \rho_0)^2 \partial_\mu \theta \partial^\mu \theta - \frac{\lambda}{6} a^2 \xi^2 + \dots \quad (5.3.23)$$

se trascuriamo anche i termini di accoppiamento (infatti per determinare lo spettro di massa ci bastano i termini quadratici) abbiamo che:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \xi \partial^\mu \xi + \rho_0^2 \partial_\mu \theta \partial^\mu \theta - \frac{\lambda}{6} a^2 \xi^2 + \dots \quad (5.3.24)$$

quindi θ è il bosone di Goldstone, mentre ξ è un campo massivo. Infine, dobbiamo rinormalizzare i due campi:

$$\xi \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \xi \quad , \quad \rho_0 \theta \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \theta \quad (5.3.25)$$

in questo modo otteniamo:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \xi \partial^\mu \xi + \frac{1}{2} \partial_\mu \theta \partial^\mu \theta - \frac{\lambda}{12} a^2 \xi^2 + \dots \quad (5.3.26)$$

5.3.2 Sostituzione 2

Ripartendo da (5.3.4), ma trasliamo rispetto al vuoto:

$$\phi = \frac{\xi + i\theta}{\sqrt{2}} + \langle \phi \rangle \quad , \quad \langle \phi \rangle = a \quad (5.3.27)$$

in questo modo otteniamo:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \xi \partial^\mu \xi + \frac{1}{2} \partial_\mu \theta \partial^\mu \theta - \frac{\lambda}{4 \cdot 4!} \left(\xi^2 + \theta^2 + 2\sqrt{2} a \xi \right)^2 \quad (5.3.28)$$

$$= \frac{1}{2} \partial_\mu \xi \partial^\mu \xi + \frac{1}{2} \partial_\mu \theta \partial^\mu \theta - \frac{\lambda}{4 \cdot 4!} \left(\xi^4 + \theta^4 + 8a^2 \xi^2 + 2\xi^2 \theta^2 + 4\sqrt{2} a \xi^3 + 4\sqrt{2} a \xi \theta^2 \right)^2 \quad (5.3.29)$$

dunque ξ ha massa:

$$m_\xi^2 = \frac{\lambda}{6} a^2 \quad (5.3.30)$$

mentre θ resta massless e rappresenta il bosone di Goldstone.

Osservazione Dopo aver fatto una traslazione rispetto al vuoto, se volessimo fare una traslazione di fase infinitesima per mantenere la lagrangiana invariante dovremmo studiare una trasformazione non lineare. **forse a lezione (21) si fa un esempio.**

5.4 Fotone massivo tramite Goldstone

Consideriamo la simmetria $U(1)$ (di fase) locale:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) - V(\phi \phi^\dagger) \quad (5.4.1)$$

in cui abbiamo:

$$D_\mu \phi = (\partial_\mu + ie A_\mu) \phi \quad (5.4.2)$$

e studiamo:

$$V(\phi \phi^\dagger) = \frac{\lambda}{4!} \left(\phi \phi^\dagger - a^2 \right)^2 \quad (5.4.3)$$

con $\langle \phi \rangle = \langle \phi^\dagger \rangle = a$ e $a^2 > 0$. Osserviamo che i gradi di libertà totali sono 4 (due dallo scalare complesso ϕ e due dal fotone A).

5.4.1 Sostituzione

Consideriamo $\phi = \rho e^{i\theta}$, per cui:

$$D_\mu \phi = \left(\partial_\mu \rho + i\rho \partial_\mu \theta + ie A_\mu \rho \right) e^{i\theta} \quad (5.4.4)$$

$$= \left(\partial_\mu \rho + i\rho (\partial_\mu \theta + e A_\mu) \right) e^{i\theta} \quad (5.4.5)$$

e conseguentemente:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \partial_\mu \rho \partial^\mu \rho + \rho^2 (\partial_\mu \theta + e A_\mu)^2 - \frac{\lambda}{4!} (\rho^2 - a^2)^2 \quad (5.4.6)$$

$$= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \partial_\mu \rho \partial^\mu \rho + \rho^2 e^2 A_\mu A^\mu - \frac{\lambda}{4!} (\rho^2 - a^2)^2 \quad (5.4.7)$$

in cui nell'ultimo passaggio abbiamo fatto la trasformazione di gauge:

$$A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \theta \quad (5.4.8)$$

in questo modo il bosone di Goldstone è stato riassorbito nel fotone che ha acquistato massa:

$$m_A^2 = 2 a^2 e^2. \quad (5.4.9)$$

Espandendo intorno al vuoto ponendo:

$$\xi = \rho - \rho_0 \quad (5.4.10)$$

in cui:

$$\langle \rho \rangle = \rho_0 = \pm a \quad (5.4.11)$$

otteniamo:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \partial_\mu \xi \partial^\mu \xi + (\xi + \rho_0)^2 e^2 A_\mu A^\mu - \frac{\lambda}{4!} \left((\xi + \rho_0)^2 - \rho_0^2 \right)^2 \quad (5.4.12)$$

$$= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \partial_\mu \xi \partial^\mu \xi + (\xi^2 + 2\rho_0 \xi + \rho_0^2) e^2 A_\mu A^\mu - \frac{\lambda}{4!} \left[\xi^2 + 2\rho_0 \xi \right]^2 \quad (5.4.13)$$

$$= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \partial_\mu \xi \partial^\mu \xi + \rho_0^2 e^2 A_\mu A^\mu - \frac{\lambda}{6} \rho_0^2 \xi^2 + \mathcal{L}_{int} \quad (5.4.14)$$

in cui poniamo:

$$\mathcal{L}_{int} = \left(\xi^2 + 2\rho_0 \xi \right) e^2 A_\mu A^\mu - \frac{\lambda}{4!} \left[\xi^4 + 4\rho_0 \xi^3 \right]. \quad (5.4.15)$$

Infine, dobbiamo rinormalizzare:

$$\xi \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \xi \quad (5.4.16)$$

e sostituiamo $\rho_0^2 = a^2$, così otteniamo:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial_\mu \xi \partial^\mu \xi + a^2 e^2 A_\mu A^\mu - \frac{\lambda}{12} a^2 \xi^2 + \mathcal{L}_{int} \quad (5.4.17)$$

dunque, che sta descrivendo un campo ξ reale con la stessa massa vista in precedenza:

$$m_\xi^2 = \frac{\lambda}{6} a^2 \quad (5.4.18)$$

ed un campo vettoriale massivo con:

$$M_A^2 = 2 a^2 e^2. \quad (5.4.19)$$

Osservazione. Il risultato assomiglia alla lagrangiana di Proca (i termini quadratici sono uguali, ma i termini di interazione sono diversi) ma sta volta è rinormalizzabile; la rottura spontanea della simmetria preserva i gradi di libertà e li riorganizza: un grado di libertà appartiene a ξ (particella di Higgs) e 3 appartengono al bosone massivo A , in più la trasformazione di gauge equivale a inglobare il bosone di Goldstone dentro A e in particolare la polarizzazione longitudinale di A coincide con il bosone di Goldstone.

Nota. Non si può fare un discorso analogo con il campo spinoriale perché dovremmo fissare l'invarianza per rotazione e quindi l'invarianza di Lorentz/Poincaré!

Bibliography

- [1] John Iliopoulos and Theodore N. Tomaras. *Elementary Particle Physics*. Oxford University Press, 2021.
- [2] Tom Lancaster and Stephen J. Blundell. *Quantum Field Theory for the Gifted Amateur*. Oxford University Press, 2014.
- [3] Horatiu Nastase. *Introduction to Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, 1970.
- [4] Michael E. Peskin and Daniel V. Schroeder. *An Introduction to quantum field theory*. Reading, USA: Addison-Wesley, 1995.
- [5] Pierre Ramond. *Field theory: a modern primer*. 1981.
- [6] Matthew D. Schwartz. *Quantum Field Theory and the Standard Model*. Cambridge University Press, 2014.
- [7] M. Srednicki. *Quantum field theory*. Cambridge University Press, 2007.