Note IFIF

Gabriele Cembalo

July 16, 2024

Indice

1 Riferimenti ai testi

Divido il documento seguendo (circa il programma del corso) e indico affianco ad ogni riferimento la sua utilità. Legenda:

$\otimes$ = importante

$\odot$ = utile dare un'occhiata

$\bigcirc$ = abbastanza saltabile

1.1 Introduzione, particelle indistinguibili e antiparticelle

Teoria quantistica dei campi

Riferimenti al [1]:

$\bigcirc$ Vedi **§2.3** in cui comincia ad introdurre l'utilità di utilizzare il formalismo dei numeri di occupazione per rappresentare uno stato fisico formato da ∞ oscillatori armonici disaccoppiati.

$\odot$ Vedi **§3.1, 3.2** in cui inizialmente introduce che cos'è la rappresentazione dei numeri di occupazione (è uguale a quella che abbiamo visto noi), ma in particolare fa vedere che questo cambio di notazione non è restrittivo e non cambia nulla, poiché mostra che se ad esempio abbiamo abbiamo N oscillatori disaccoppiati tra loro, ciascuno ad una energia (quindi con un certo numero di quanti di energia n_k) allora l'energia del sistema complessivo sarà

$$H\,|n_1,\ldots,n_N\rangle = \sum_{k=1}^{N} n_k\hbar\omega_k\left(n_k+\frac{1}{2}\right)|n_1,\ldots,n_N\rangle \tag{1}$$

introducendo i numeri di occupazione e quindi indicando ora con n_k il numero di particelle in uno specifico autostato dell'hamiltoniana, con autovalore E_k, avremo le seguenti equazioni agli autovalori

$$H\left|n_i\right\rangle = n_i E_i \left|n_i\right\rangle \qquad\qquad H\left|n_1,\dots,n_N\right\rangle = \sum_{k=1}^{N} n_k E_k \left|n_1,\dots,n_N\right\rangle \tag{2}$$

per cui mostra che le due notazioni hanno la stessa struttura energetica.

$\bigotimes$ Vedi **§3.3, 3.4** in cui utilizza gli operatori $\hat{a}$, $\hat{a}^\dagger$ come operatori per creare e distruggere particelle. Parla di bosoni e fermioni, ma in modo leggermente differente da come ne abbiamo parlato negli appunti e lo trovo molto lineare.

$\bigcirc$ Vedi **§4.1, 4.2** Fa una rapida introduzione di cosa sono gli operatori $\hat{\Psi}(\vec{x})$, $\hat{\Psi}^\dagger(\vec{x})$ uguale a quella sugli appunti. Nella seconda sezione ti fa vedere com'è fatto un operatore nello spazio di Fock: $\hat{\mathcal{A}} = \sum_{\alpha,\beta} \mathcal{A}_{\alpha\beta} \hat{a}^\dagger_\alpha \hat{a}_\beta$.

$\bigotimes$ Vedi **§6** in cui trova l'equazione di Klein-Gordon

$$(\partial^2 + m^2)\phi(x) = 0 \qquad , \qquad \partial^2 = \partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \tag{3}$$

ti fa vedere anche che non rispetta l'equazione di continuità

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \nabla \cdot J = 0 \quad \Longrightarrow \quad \partial_\mu j^\mu = 0 \tag{4}$$

avendo una densità di probabilità che può assumere valori negativi. Successivamente parla dell'interpretazione di Feynmann delle particelle ad energia negativa. Possiamo vedere particelle ad energia negativa come delle particelle ad energia positiva uscenti dal nostro sistema (onde uscenti) e con carica e tri-impulso cambiati di segno, questo lo capisci bene se ad esempio ti scrivi il termine oscillante di una generica soluzione dell'equazione (3) e fai un inversione temporale $t \to -t$, oppure, che forse è più intuitivo, puoi fare il grafico che fa nel libro in cui vedi il sistema come un insieme in cui ci butti dentro o tiri fuori particelle. Questa interpretazione è necessaria per non ignorare completamente le soluzioni ad energia negativa, ma considerando che solo le energie positive sono fisicamente realizzabili.

$\bigodot$ Vedi **§11** in cui ti mostra i passaggi che fa per fare la quantizzazione canonica. Per prima cosa si scrive la lagrangiana e l'hamiltoniana in termini di un campo classico (conti come sugli appunti), poi quantizza il campo (e i suoi momenti coniugati) nel modo in cui lo facciamo negli appunti, anche se giustifica un po' di più i fattori di normalizzazione. Per finire riscrive la lagrangiana e l'hamiltoniana in termini del campo quantizzato cosi da arrivare ad un'espressione per l'energia. Giustifica i due termini che compaiono nell'espressione del campo nello stesso modo in cui li abbiamo visti noi (contributo di particella ed antiparticella).

Relatività speciale

Riferimenti al [2]:

$\bigotimes$ Vedi **§2.8** in cui ti fa vedere che effettivamente la velocità c è la velocità limite (superiore) che non può essere superata poiché altrimenti romperesti la causalità. Lo mostra prendendo due sistemi di riferimento collegati causalmente e vede che se ad un certo istante il primo emette un segnale luminoso allora il secondo lo vedrà ad un certo tempo successivo. Se però fa un boost lungo la direzione del moto si vede che la condizione che deve valere affinché la causalità sia rispettata, ossia che prima viene mandato il segnale e poi viene visto, è che la velocità con cui si muove è $\leq c$.

$\bigotimes$ Vedi **§2.9** in cui prima fa tutto il discorso sui tipi di intervalli che ci possono essere tra due sistemi di riferimento, ma poi ti mostra che se in meccanica quantistica due sistemi di riferimento (rappresentabili due particelle interagenti) si scambiano un segnale luminoso (particella a) secondo un certo sistema di riferimento tale per cui vale la causalità, allora per il capitolo 2.8 potrebbe esistere un altro sistema di riferimento in cui la causalità è rotta (il tutto se i due sistemi di riferimento sono collegati da un intervallo di tipo spazio, ossia se $|\Delta x| > |\Delta t|$). Per risolvere questa cosa si introducono le antiparticelle che fanno vedere lo stesso processo del primo sistema di riferimento, ma con le coordinate temporali invertite.

$\bigotimes$ Vedi **§4.8** in cui sostanzialmente ti fa vedere che in realtà il mass-shell darebbe come soluzioni $E = \pm\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$, ma che noi scartiamo le energie negative perché per sistemi classici non esistono processi continui che ci portano dalle energie $E \geq mc^2$ ad energie $E \leq -mc^2$ poiché non sono possibili appunto salti energetici discontinui. Caso diverso è la meccanica quantistica in cui so che i salti di livelli energetici sono discreti, per cui le energie negative sono possibili. Dirac spiega che però noi non vediamo le transizioni da livelli positivi a livelli negativi perché pensa a tutti i livelli energetici del mare (negativi) come già occupati, per cui noi vediamo solo quando tiriamo via una particella e lasciamo una lacuna, di carica opposta alla particella che strappiamo, che interpretiamo come antiparticella. Il concetto di mare di Dirac poi viene superato dalla QFT completa.

$\bigotimes$ Vedi **§4.10** ti fa vedere che la traformazione di Lorentz (boost lungo x di velocità V) dell'energia è

$$E' = \gamma(E - Vp_x) \tag{5}$$

per cui avendo $V < c$, $p_x < p$ allora $Vp_x < cp \leq E$ e quindi la trasformazione implica che se in un certo sistema di riferimento $E > 0$ allora anche $E' > 0$. Per cui una trasformazione di lorentz non può far transire uno stato ad energia positiva ad uno ad energia negativa.

$\bigotimes$ Vedi **§4.14.4** in cui ti fa vedere bene il diagramma per cui se mischi relatività e meccanica quantistica allora interpreti le antiparticelle come le stessa particelle, ma che vanno indietro nel tempo.

1.2 Integrali di cammino

Teoria quantistica dei campi

Riferimenti al [1]:

$\odot$ Vedi **§23.1** in cui introduce il concetto di path integral. Ti spiega che il ragionamento sta nel seguire tutti i possibili cammini discretizzando l'intervallo temporale. Ogni cammino ti dice che è pesato per la sua azione (definizione usuale) e che possiamo sfruttare l'unitarietà dell'operatore di evoluzione temporale per poter spezzare $U(t_N, t_0)$ in tanti pezzi. Giustifica anche il perché mettiamo l'azione come peso e ci da un idea di quali sono i pezzi dominanti.

$\bigcirc$ Vedi **§25.1** in cui fa un rapido cenno alla rotazione di Wick, ma non aggiunge nulla di sostanziale oltre quello che c'è sugli appunti.

1.3 Diagrammi di Feynmann: vertici e propagatori

Teoria quantistica dei campi

Riferimenti al [1]:

$\odot$ Vedi **§16** in cui ti dice che cos'è una funzione di Green. Soprattutto che cosa sono i propagatori e perché molte volte sono più convenienti da usare rispetto l'equazione di Schrodinger e le funzioni d'onda. I concetti base li conosci già dagli appunti, ma ricorda le *definizioni*

$$\hat{L}x(t) = f(x) \tag{6}$$
$$\hat{L}G(t,u) = \delta(t-u) \tag{7}$$
$$x(t) = \int_0^\infty \mathrm{d}u\, G(t,u)f(u) \qquad \hat{L}x(t) = \int_0^\infty \mathrm{d}u\, \hat{L}G(t,u)f(u) = f(t) \tag{8}$$

per cui è lecito dichiarare già in anticipo che presa la funzione di Green dell'operatore di Schrodinger si ha

$$\Psi(x,t_x) = \int \mathrm{d}y\, G^+(x,t_x,y,t_y)\Psi(y,t_y) \tag{9}$$

Nel corso del capitolo dimostra anche come scrivere G^+ in termini di autostati dell'hamiltoniana e che è effettivamente la funzione di green dell'operatore di Schrodinger. Poi fa vedere le altre forme del propagatore (uguali agli appunti) e dimostra la serie di Dyson.

$\odot$ Vedi **§17** in cui inizialmente ti spiega perché la teoria del propagatore è fondamentale in qft e le differenze che ci sono tra la teoria libera (puoi utilizzare la quantizzazione canonica, quindi agire con gli operatori $\hat{a}_p$ e $\hat{a}_p^\dagger$ sullo stato di vuoto $|0\rangle$ ti crea una particella di definito impulso) e la teoria interagente (in cui la quantizzazione canonica non funzione e quindi agire con $\hat{a}_p^\dagger$ sullo stato fondamentale della teoria interagente $|\Omega\rangle$ non crea una particella di definito impulso, ma una sovrapposizione di particelle il cui impulso si somma a p). Da la stessa definizione degli appunti del propagatore in qft e del propagatore di

Feynmann in cui mette l'ordinamento temporale

$$G^{+}(x,y) = \langle\Omega|\, T\hat{\phi}(x)\hat{\phi}^{\dagger}(y)\, |\Omega\rangle \tag{10}$$

costruisce in seguito il propagatore di Feynmann libero (come negli appunti) e mi fa anche vedere come renderlo covariante inserendo la rappresentazione integrale della θ fino ad ottenere

$$\Delta(x,y) = \langle 0|\, T\hat{\phi}(x)\hat{\phi}^{\dagger}(y)\, |0\rangle = \int \frac{\mathrm{d}^4 p}{(2\pi)^4}\, e^{-ip\cdot(x-y)} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \tag{11}$$

da cui possiamo estrarre la componente di Fourier che stiamo trasformando, ossia, il propagatore di Feynmann che corrisponde ad una particella con momento p:

$$\widetilde{\Delta}(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \tag{12}$$

Il capitolo continua con la teoria di Yukawa e mi spiega qual'è la sua ipotesi e che cosa c'entra il propagatore di Feynmann. Mi dice anche che per non dover considerare un processo in cui lo scambio energetico è solo in una direzione dobbiamo considerare anche quello opposto, che come ci insegna Feynmann sono i due pezzi che compaiono nella (10). L'ultima sezione mi dice che possiamo anche costruire propagatori per interazioni tra più di due particelle (la maggior parte delle considerazioni sono molto avanzate e le lascerei perdere).

○ (⊙ solo teorema di Wick) Vedi **§18** in cui ti dice (capitolo uguale agli appunti) come vengono trattati problemi interagenti (come nei nostri appunti). Ti fa vedere che nascondiamo tutta l'informazione dell'interazione all'interno della matrice $\hat{S}$ e consideriamo stati liberi. Mostra la rappresentazione di interazione. Fa anche vedere lo sviluppo di Dyson per la matrice $\hat{S}$ (come negli appunti). L'ultima sezione è dedicata al teorema di Wick, che forse è più chiara che gli appunti (però fa stesse dimostrazioni e argomentazioni).

⊗ Vedi **§19** in cui comincia a parlare dei diagrammi di Feynmann seriamente. Fa una rapida introduzione che puoi saltare perché concetti già appresi, poi facendo l'esempio della teoria $\phi^4(x)$ costruisce passo passo i diagrammi per il primo e secondo ordine perturbativo. Da successivamente un rapido vocabolario per trattare i diagrammi (vertici, linee esterne, interne, ...). C'è un capitolo in cui giustifica anche la divisione per la molteplicità di un singolo diagramma nel calcolo del termine della matrice $\hat{S}$, ma è una sezione che si può saltare. Fa anche il calcolo nello spazio degli impulsi che è identico a come lo abbiamo fatto noi, ma conviene guradare il libro perché nell'esempio **19.7** fa il conto di altri diagrammi che possono essere istruttivi. L'ultima parte è dedicata all'introduzione dello scattering, infatti fa le stesse cose che ci sono sugli appunti nel capitolo **14.12**, ma potrebbe essere utile dare un'occhiata.

⊗ Vedi **§20** che è sicuramente fatto meglio degli appunti che sono molto striminziti su questa parte. Spiega molto bene la teoria di Yukawa $\Psi^{\dagger}\Psi\phi$. L'ultima parte del capitolo parla delle sezioni d'urto, ma cosi come negli appunti è una parte non molto interessante.

1.4 Introduzione alla QED

Quantum electrodynamics

Riferimenti al [1]:

⊙ Vedi **§14.1** in cui ti spiega che cos'è una teoria di gauge e ti dice come rendere invariante per trasformazioni locali una teoria.

⊙ Vedi **§36, 36.1, 36.2** in cui parte dall'equazione (3) e si costruisce l'equazione di Dirac

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0 \tag{13}$$

introducendo le matrici γ^μ. Successivamente fa vedere l'equazione di Weyl cosi come negli appunti e mostra gli operatori di chiralità ed elicità. Parla anche del fatto che scritta l'equazione d'onda come uno spinore a quattro componenti, che possiamo dividere in

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \tag{14}$$

allora, nel caso mass-less abbiamo che la parte left e la parte right sono disaccoppiate e che se definiamo l'operatore di elicità

$$\hat{h} = \frac{\sigma \cdot \hat{p}}{|p^0|} \tag{15}$$

vediamo che che $\psi_{L,R}$ sono suoi autostati e che le equazioni di Weyl sono equazioni agli autovalori. Queste equazioni però ci dicono che se ci troviamo completamente in una delle due componenti (L oppure R) allora non possiamo cambiare la nostra ψ. Fa anche vedere però che se siamo nel caso con $m \neq 0$, allora le equazioni di Weyl accoppiano i termini $\psi_{L,R}$ per cui non abbiamo più la situazione in cui se ci troviamo in ψ_L (o ψ_R) rimaniamo in quello spinore, ma possiamo pensare alle soluzioni dell'equazione di Dirac come ψ che oscillano tra parte left e parte right. Fa anche un rapido discorso sul fatto che nel profondo chiralità ed elicità sono differenti, ma che coincidono solo nel caso di $m = 0$. Fa infine anche notare che l'equazione di Dirac non risolve il problema delle energie negative che tanto disturbavano in (3), ma ci dice che li interpretiamo alla Feynmann come antiparticelle ad energia positiva. Il concetto di antiparticella comporta pensare però a $E = -|p^0| < 0$ che si traduce nelle equazioni di Weyl (mass-less):

$$\begin{cases} \frac{\sigma \cdot \hat{p}}{|p^0|}\psi_R = -\psi_R \\ \frac{\sigma \cdot \hat{p}}{|p^0|}\psi_L = \psi_L \end{cases} \tag{16}$$

che mi dice che se per le particelle avevo autovalore dell'eleicità $+1$ per le ψ_R e autovalore -1 per ψ_L, in questo caso quando guardo le antiparticelle si invertono gli autovalori.

◯ Vedi **§36.3, 36.4, 36.5** in cui fa discorsi (forse troppo dettagliati per questo esame) sulle soluzioni dell'equazione (13) $u(p)$ e $v(p)$. Fa anche il limite non relativistico dell'equazione di Dirac.

$\bigcirc$ Vedi **§37** in cui fa le trasformazioni di Lorentz degli spinori della teoria di Dirac.

$\odot$ Vedi **§38** in cui fa i conti dettagliati per il calcolo del campo fermionico quantizzato e trova anche il propagatore per fermioni liberi utilizzando i path integral (cos che noi non abbiamo visto). Può essere interessante vedere l'ultima parte della sezione **38.2** in cui mostra cosa c'è dentro il propagatore libero e vedi un filo meglio cosa vuol dire che le ψ di Dirac oscillano tra parte right e left. Nella sezione **38.3** cosi come negli appunti non fa molti discorsi e butta giù le regole di Feynmann per i fermioni. nota solo che non dice esplicitamente di utilizzare la regola che ti dice di seguire la linea fermionica. Nell'ultima sezione parla della teoria di gauge della QED.

$\odot$ Vedi **§39** Parla del fotone, del suo propagatore e delle regole di Feynmann per l'interazione elettromagnetica. Non fa cose troppo più dettagliate degli appunti. L'ultima sezione riguarda l'invarianza di gauge in QED, ma sono concetti che non abbiamo visto e tira in ballo leggi che non conosciamo.

$\bigcirc$ Vedi **§40** in cui parla delle sezioni d'urto degli scattering Rutherford, Mott e Compton.

1.5 Cromodinamica quantistica e interazioni deboli

QCD e teoria elettrodebole

Il capitolo **6** degli appunti è più discorsivo, per cui per discorsi più dettagliati di quelli fatti in aula conviene guardare i seguenti capitolo del [4]:

Cap. 1.7, 1.8 Heightfold way and quark model

$\bigcirc$ **Cap. 2.3** Introduction to QED and QCD

$\odot$ **Cap. 9.1, 9.5** QCD

$\bigcirc$ **Cap. 7** Ripasso EM e teoria di gauge

$\odot$ **Cap. 2.4, 2.5** Weak interaction (uguale agli appunti)

$\odot$ **Cap. 10** Weak interaction

Cap. 11 Leggere l'introduzione riguardante il bosone di Higgs

Riferimenti bibliografici

[1] T. Lancaster, S. J. Blundell; *Quantum field theory for the gifted amateur*

[2] V. Barone; *Relatività, princìpi e applicazioni*

[3] La Boglione consigllia i capitoli: *6,16,17,18,19,20,36,37,38,39,40* del [1]

[4] D. Griffiths; *Introduction to elementary particle*