

God used very advanced
mathematics in constructin the
universe.

Paul Dirac

Prefazione

In questo documento voglio raccorgliere le mie note rispetto gli appunti relativi al corso di "**Meccanica Quantistica 2**" svolto dalla professoressa M. Frau e seguito all' *Università degli studi di Torino* nell'a.a. 2023-2024 aggiungendo eventualmente i riferimenti a vari libri (più o meno utili a seconda della volontà di approfondire). Questi appunti sono una riscrittura degli appunti presi in aula, quindi la fonte principale sono le note della professoressa, ma i libri sono fondamentali per una completa comprensione degli argomenti. Durante il corso sono stati consigliati diversi libri (indicati in Bibliografia), cercherò di indicare i vari riferimenti bibliografici all'inizio di ogni capitolo.

Il corso una prima parte riguardo tutti i postulati della Meccanica Quantistica, segue la parte sui path integral, sull'approssimazione semiclassica WKB, sulla teoria dell'urto e in conclusione l'entanglement. Per brevità o pigrizia, dal momento che sto scrivendo questi appunti in un secondo momento, non ho riscritto in bella tutto il corso, ma solamente la parte sui path integral. La formulazione degli integrali di cammino ho voluto riportarla vista la sua importanza nella Teoria Quantistica dei Campi.

Chiaramente sono da intendere come degli appunti personali scritti in bella, eventuali sviste, errori o inesattezze sono dovute alla mia ignoranza, ma soprattutto ho scritto questi appunti in modo da "*spiegare*" a me stesso l'argomento, quindi alcune parti potrebbero sembrare troppo prolisse o troppo superficiali per alcuni. In ogni caso fa piacere se possono aiutare qualcun'altro. Spero in ogni caso di esser riuscito a scrivere un documento chiaro e ben strutturato.

Alcune volte posso non far riferimento ad un particolare testo o corso passato, in questi casi mi sto riferendo ai MIEI appunti.

Qualsiasi errore/refuso può essere inviato alla mia mail personale:
gabriele.cembalo02@gmail.com.

Ultimo aggiornamento: 09/05/2025

Indice

1	Integrali di cammino	1
1.1	Introduzione	1
1.2	Propagatore o kernel	3
1.2.1	Propagatore di particella libera unidimensionale	7
1.3	I Path Integral	11
1.4	L'equazione di Schrodinger	20
1.5	Teoria gaussiana e determinanti funzionali	23
1.5.1	Caso matrici diagonali	26
1.5.2	Caso matrici simmetriche	29
1.5.3	Caso di operatore differenziale	31
1.6	Casi tipici	32
1.6.1	Particella libera	32
1.6.2	Oscillatore armonico	38
1.7	Effetto Ahranov-Bohm	45
1.8	Funzione di partizione	48
A	Digressione sulla δ di Dirac	55
B	Dimostrazione valore $\zeta'(0)$	57
	Bibliografia	60

Capitolo 1

Integrali di cammino

La formulazione degli integrali di cammino (path integral) è essenziale, non solo per una completezza della Meccanica Quantistica non relativistica, ma soprattutto per lo studio della Teoria Quantistica dei Campi e altri corsi successivi di Fisica teorica. I riferimenti per questo argomento possono essere veramente infiniti, quelli più famosi, ed utilizzati sono [1, 3, 4]. In questo capitolo vedremo la formulazione usuale dei path integral con la loro definizione nello spazio delle configurazioni e delle fasi, avremo un'assaggio del fatto che rendendo gli integrali di cammino assiomatici ci è possibile ricavare i risultati già noti della Meccanica Quantistica, in particolare l'equazione di Schrodinger, vedremo quella che va sotto il nome di teoria gaussiana e il calcolo di determinanti funzionali, fondamentali per la teoria, concluderemo il capitolo con due esempi tipici di calcoli, con un effetto non locale della Meccanica Quantistica e con un discorso riguardo la funzione di partizione e il collegamento tra Meccanica Statistica e Meccanica Quantistica.

Come fonti utili per studi successivi si possono vedere, oltre le note di Mariño [4], i libri di Lancaster e Blundell [2] e di Peskin e Schroeder [5].

1.1 Introduzione

La formulazione della Meccanica Quantistica mediante gli integrali di cammino (path integral) si fonda sull'idea introdotta da Feynmann nel 1948. Feynmann ragionò sostanzialmente sull'idea che, mentre nella Fisica classica il cammino seguito da un qualsiasi corpo è quello per cui l'azione è minima, nella Meccanica Quantistica non relativistica il cammino seguito da una particella (notando che il concetto di cammino, e quindi di traiettoria, è un po' ambiguo) potrebbe essere uno qualsiasi tra gli infiniti possibili (opportunamente pesati). Per capire l'idea alla base del ragionamento del fisico statunitense possiamo analizzare meglio l'esperimento delle due fenditure. L'esperimento può essere immaginato come quello raffigurato in figura 1.1. Come sappiamo, la funzione d'onda che arriva al rivelatore non è altro che

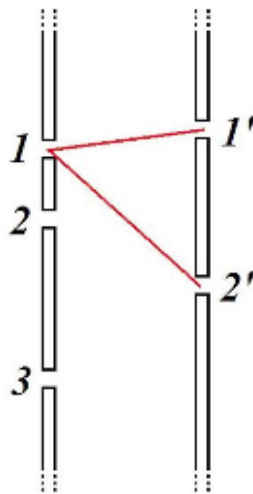


Figura 1.1: Raffigurazione esperimento delle due fenditure.

la somma delle funzioni d'onda relative al passaggio da ciascuna delle due fenditure. Immaginiamo di mettere, anziché 2, moltissime fenditure in una singola parete, in modo da formare una specie di reticolo, e al tempo stesso di mettere altrettanti schermi tra la sorgente e il rivelatore. Per arrivare al rivelatore la particella dovrà fare una specie di slalom tra le varie fenditure e, come nel caso semplice, la funzione d'onda finale sarà la somma di quelle relative a tutti i cammini possibili. Quello descritto può essere visto in figura (1.2). La presenza degli schermi e delle fenditure serve a rendere finito il numero di termini della somma, che poi potremo rendere infiniti in un secondo momento. L'idea di Feynmann, come già accennato, è stata quella di sostituire l'idea classica dell'esperimento, in cui una particella segue il cammino di minima azione, con la somma su tutti i cammini possibili, opportunamente pesati. Feynmann suppose, come potremo vedere, che il peso di ciascun cammino sia $\exp\{i\frac{S}{\hbar}\}$, dove S è proprio l'azione relativa al cammino. La formulazione dei path integral è più importante di quanto sembra, non solo perché sarà utile per la Teoria Quantistica dei Campi, ma anche perché rappresenta un altro punto di partenza per costruire la Meccanica Quantistica. Quello che noi faremo però non sarà assumere i path integral come postulato e ricostruire i risultati della Meccanica Quantistica, ma prenderemo i postulati della MQ come li abbiamo già visti e formuleremo gli integrali di cammino.

Come avremo modo di vedere nelle numerose pagine di conti, per la Meccanica Quantistica di sistemi con pochi gradi di libertà il formalismo dei path integral è poco più di un esercizio di bravura, utile per migliorare la comprensione della natura dei fenomeni e soprattutto la relazione con la fisica classica, ma piuttosto scomodo per fare i conti. Il nuovo formalismo,

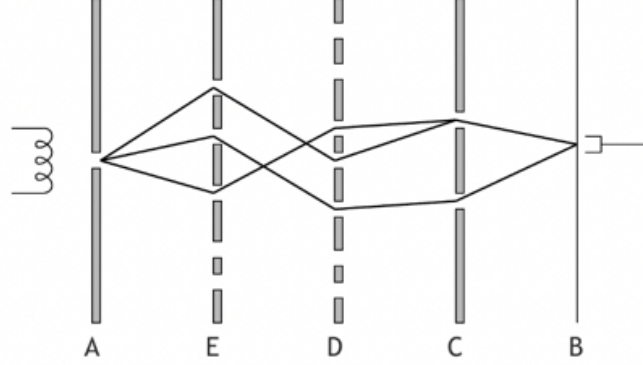


Figura 1.2: Raffigurazione esperimento con molte fenditure.

si rivelerà uno strumento essenziale per la meccanica quantistica dei sistemi a infiniti gradi di libertà, ovvero per la Teoria Quantistica dei Campi e la Meccanica Statistica.

1.2 Propagatore o kernel

In questa sezione parleremo di un oggetto a dir poco fondamentale per la teoria dei campi. Nello schema di Schrodinger, lo stato del sistema $|\Psi(t_b)\rangle$ al tempo $t_b \geq t_a$ è dato da:

$$|\psi(t_b)\rangle = \hat{U}(t_b, t_a) |\psi(t_a)\rangle \quad (1.2.1)$$

in cui l'operatore $\hat{U}(t_b, t_a)$ è l'operatore di evoluzione temporale, che ricordiamo, per un sistema descritto da un'hamiltoniana indipendente dal tempo $\hat{H} = H(\hat{q}, \hat{p})$ risulta essere:

$$\hat{U}(t_b, t_a) = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}(t_b - t_a)}. \quad (1.2.2)$$

Notiamo solo che abbiamo indicato con \hat{q} e \hat{p} gli operatori corrispondenti alle n coordinate lagrangiane e le n coordinate dei momenti coniugati di un sistema con n gradi di libertà. Inoltre, supporremo per tutto il capitolo di essere in presenza di un'hamiltoniana indipendente dal tempo, in modo da utilizzare la relazione (1.2.2).

Se prendiamo $|q\rangle$ gli autostati degli operatori posizione:

$$\hat{q} |q\rangle = q |q\rangle \quad (1.2.3)$$

che formano una base generalizzata (vedi gli appunti di MQ1) per lo spazio di Hilbert del sistema, allora, possiamo scrivere la funzione d'onda nello spazio

delle configurazioni da (1.2.1):

$$\psi(q_b, t_b) = \langle q_b | \psi(t_b) \rangle = \langle q_b | \hat{U}(t_b, t_a) | \psi(t_a) \rangle \quad (1.2.4)$$

$$= \int d^n q \langle q_b | U(t_b, t_a) | q \rangle \langle q | \psi(t_a) \rangle \quad (1.2.5)$$

$$= \int d^n q \langle q_b | U(t_b, t_a) | q \rangle \psi(q, t_a) \quad (1.2.6)$$

$$= \int d^n q K(q_b, t_b; q, t_a) \psi(q, t_a) \quad (1.2.7)$$

in cui abbiamo utilizzato la completezza dello spazio:

$$\int d^n q |q\rangle \langle q| = \mathbb{1} \quad (1.2.8)$$

e abbiamo definito l'operatore¹:

$$K(q_b, t_b, q, t_a) = \langle q_b | U(t_b, t_a) | q \rangle \theta(t_b - t_a) \quad (1.2.9)$$

che chiamiamo **propagatore** o kernel dell'equazione di Schrodinger. Nota che (1.2.9) non è altro che l'elemento di matrice nello spazio delle configurazioni dell'operatore di evoluzione temporale.

Però, che cosa significa fisicamente K ? In più, siamo sicuri che contenga tutta l'informazione rilevante sul sistema?

È immediato vedere che $K(q_b, t_b; q_a, t_a)$ rappresenta un'ampiezza di probabilità. Infatti, per un sistema che nell'istante t_a si trovi nel punto dello spazio delle configurazioni q_a , quindi descritto dalla funzione d'onda $\psi(q, t_a) = \delta^f(q - q_a)$, l'equazione (1.2.7) ci mostra che l'ampiezza di probabilità $\psi(q_b, t_b)$ di trovarsi nel punto q_b all'istante $t_b \geq t_a$ è proprio $K(q_b, t_b; q_a, t_a)$. Segue da questo che la relazione (1.2.7) può essere visto come il principio di Huygens generalizzato, e dunque, vedere il fronte d'onda al tempo t_b come generato da sorgenti puntiformi in tutti i punti del fronte d'onda al tempo t_a .

In generale, per un sistema che all'istante iniziale t_a si trovi nello stato $|\psi_a\rangle$ l'ampiezza di probabilità di trovarsi nello stato $|\psi_b\rangle$ all'istante $t_b \geq t_a$, usando due volte la relazione di completezza, è data da:

$$\langle \psi_b | \hat{U}(t_b, t_a) | \psi_a \rangle = \int d^n q_a d^n q_b \langle \psi_b | q_b \rangle K(q_b, t_b; q_a, t_a) \langle q_a | \psi_a \rangle \quad (1.2.10)$$

$$= \int d^n q_a d^n q_b \psi(q_b) K(q_b, t_b; q_a, t_a) \psi(q_a). \quad (1.2.11)$$

¹Nota che abbiamo introdotto una θ di Heavyside ($\theta(t_b - t_a) = 1$ per $t_b \geq t_a$ e $\theta(t_b - t_a) = 0$ per $t_b < t_a$) per assicurarci, in generale, che il tempo scorra in avanti. Infatti, se prepariamo il sistema al tempo t_a nello stato puro $|\psi(t_a)\rangle$, effettuando le misure nello SCOC del sistema, allora ci è possibile prevedere cosa succederà in istanti successivi, ma non abbiamo modo di sapere in quale stato si trovava il sistema in precedenza.

Possiamo notare, inoltre, che possiamo scrivere l'operatore $\hat{U}(t_b, t_a)$ in termini di autostati di \hat{H} , φ , come:

$$K(q_b, t_b; q_a, t_a) = \sum_n e^{-\frac{i}{\hbar} E_n(t_b - t_a)} \langle q_b | E_n \rangle \langle E_n | q_a \rangle \quad (1.2.12)$$

$$= \sum_n e^{-\frac{i}{\hbar} E_n(t_b - t_a)} \varphi_n(q_b) \varphi_n^*(q). \quad (1.2.13)$$

In secondo luogo possiamo verificare, abbastanza facilmente, che a parte un fattore $1/i\hbar$ il kernel è la funzione di Green dell'equazione di Schrodinger dipendente dal tempo, infatti:

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \hat{H} \right) K(q_b, t; q_a, t_a) = \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \hat{H} \right) \underbrace{\langle q_b | U(t - t_a) | q_a \rangle}_{K(q_b, t; q_a, t_a)} \theta(t_b - t_a) \quad (1.2.14)$$

$$= \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right) K \theta(t - t_a) - \hat{H} K \theta(t - t_a) \quad (1.2.15)$$

$$= i\hbar \frac{\partial K}{\partial t} \theta(t - t_a) - \hat{H} K \theta(t - t_a) + i\hbar K \delta(t - t_a) \quad (1.2.16)$$

eq. Schrodinger di K soddisfatta
perché soddisfatta per U

$$= K \delta(t - t_a) \quad (1.2.17)$$

togliamo $i\hbar$

$$= \underbrace{f(x)\delta(x)=f(0)\delta(x)}_{\mathbb{1}} \langle q_b | \underbrace{U(t_a, t_a)}_{\mathbb{1}} | q_a \rangle \delta(t - t_a) \quad (1.2.18)$$

$$= \delta(t - t_a) \langle q_b | q_a \rangle \quad (1.2.19)$$

$$= \delta(t - t_a) \delta^f(q_b - q_a). \quad (1.2.20)$$

Possiamo, dunque, vedere il propagatore come l'inverso dell'operatore di Schrodinger:

$$\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{i\hbar} \hat{H}. \quad (1.2.21)$$

Abbiamo capito il significato del propagatore (1.2.9), ma non abbiamo ancora visto, in modo esplicito, come effettivamente sia fatto. Mettiamoci per semplicità in $\dim = n = 1$ e con $t_a = 0$, $t_b = t$, $q_b = x$ e facciamo l'ipotesi (quella suggerita da Feynmann):

$$K(x, t, q_a, 0) \equiv \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S(x, t, q_a, 0) \right\} \quad (1.2.22)$$

in cui S è una funzione generica, non ancora specificata, ma che usiamo per parametrizzare K . Nota che non stiamo considerando un'eventuale costante di normalizzazione.

Abbiamo detto che, per via del fatto che \hat{U} la risolva (postulato dell'evoluzione temporale), il propagatore K risolve l'equazione di Schrodinger, ma cosa vuol dire questo per la funzione S ? Scriviamo l'equazione di Schrodinger utilizzando (1.2.22), vediamo le varie derivate singolarmente prima:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} K = \exp\left\{\frac{i}{\hbar} S(x, t, q_a, 0)\right\} \left(-\frac{\partial S}{\partial t}\right) \quad (1.2.23)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} = -\frac{\hbar^2}{2m} \exp\left\{\frac{i}{\hbar} S(x, t, q_a, 0)\right\} \cdot \left(-\frac{1}{\hbar^2} \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \frac{i}{\hbar} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\right) \quad (1.2.24)$$

dunque l'equazione è (nota che rimuoviamo il fattore K comune a tutti i termini):

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 - \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + V(x). \quad (1.2.25)$$

Nell'equazione di Schrodinger:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad (1.2.26)$$

non possiamo fare il limite classico $\hbar \rightarrow 0$ poiché perderebbe totalmente di significato, ma ora siamo in una situazione diversa e possiamo vedere che succede per \hbar piccolo, rispetto tutte le azioni in gioco², ottenendo dunque:

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = H\left(\frac{\partial S}{\partial x}, x\right) \quad (1.2.27)$$

che non è altro che l'equazione di Hamilton-Jacobi. Il termine di destra di (1.2.27) non è altro che l'hamiltoniana H calcolata lungo una curva di moto. In più (1.2.27) essendo l'equazione di Hamilton-Jacobi so che è soddisfatta per:

$$S \equiv \text{Azione classica} \quad (1.2.28)$$

il che vuol dire che ogni volta che mi calcolo (1.2.10) il peso di ogni $\psi(q_b)$ è legato all'azione classica calcolata su quello stesso cammino. Il cammino classico, avendo l'azione stazionaria, rende l'esponenziale poco variabile (ricorda il metodo della fase stazionaria di Metodi Matematici per la Fisica 2) quando cambiamo cammino, rimanendo vicino a quello classico, e i cammini si sommano in modo coerente; al contrario, quando ci allontaniamo molto dal cammino classico, l'azione S varia molto rapidamente e sostanzialmente i contributi di quei cammini si cancellano (per via del lemma di Riemann). Una rappresentazione grafica è presentata nella figura 1.3.

Vedremo nelle prossime sezioni vari casi "semplici" riguardo quello che abbiamo visto.

²Ricorda sempre che quando facciamo dei particolari limiti, in questo caso $\hbar \rightarrow 0$, lo facciamo rispetto ad alcune grandezze fisiche di riferimento. In Relatività Speciale facevamo il limite non relativistico con $c \rightarrow 0$, che sostanzialmente significava che eravamo in presenza di velocità v piccole rispetto c .

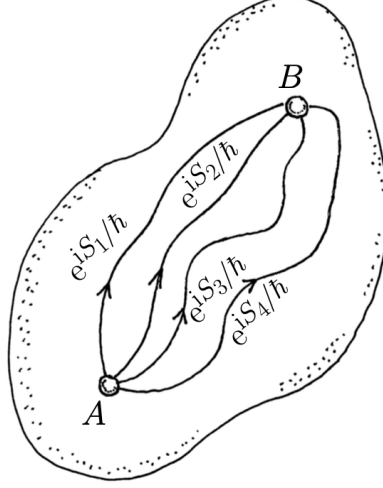


Figura 1.3: Diversi cammini pesati con diverse azioni. Credit: part VI cap. 23.1 di Lancaster Blundell [2].

1.2.1 Propagatore di particella libera unidimensionale

Proviamo a calcolare esplicitamente il propagatore di particella libera nel caso unidimensionale $n = 1$. Abbiamo:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} \quad (1.2.29)$$

dunque, gli autostati di \hat{H} corrispondono ad autostati di \hat{p} :

$$\hat{p} |p\rangle = p |p\rangle \quad , \quad \hat{H} |p\rangle = \frac{p^2}{2m} |p\rangle . \quad (1.2.30)$$

Ricordiamo, inoltre, che siamo in uno spazio completo, per cui:

$$\int dp |p\rangle \langle p| = \mathbb{1}. \quad (1.2.31)$$

Dalla definizione di propagatore (1.2.9) abbiamo:

$$K(q', t'; q, t) = \langle q' | U(t' - t) | q \rangle \quad (1.2.32)$$

$$= \langle q' | e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{\hat{p}^2}{2m} (t' - t)} | q \rangle \quad (1.2.33)$$

$$= \int dp \langle q' | p \rangle \langle p | e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{\hat{p}^2}{2m} (t' - t)} | q \rangle \quad (1.2.34)$$

$$= \int dp e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{p^2}{2m} (t' - t)} \langle q' | p \rangle \langle p | q \rangle \quad (1.2.35)$$

in cui abbiamo sfruttato il fatto che \hat{p} sia hermitiano, che quindi pinzato nel braket, a sinistra legge l'autovalore p e l'esponenziale non contiene più l'operatore, ma l'autovalore dell'impulso. Possiamo ricordarci la definizione di onda piana:

$$\langle p|q\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{i}{\hbar}pq} \quad , \quad \langle q'|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{i}{\hbar}pq} \quad (1.2.36)$$

dunque:

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi} e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{p^2}{2m}(t'-t)} e^{\frac{i}{\hbar} p(q'-q)}. \quad (1.2.37)$$

Se riuscissimo a fare l'integrale (1.2.37) allora avremmo finito i nostri conti e avremmo il nostro propagatore di particella libera. Il problema è che l'integrale non esiste, poiché stiamo integrando una cosa di modulo 1 (l'esponenziale complesso) tra $-\infty$ e $+\infty$. Dobbiamo regolarizzare l'integrale in qualche modo. Ci sono due strade percorribili: complessificare la massa con un fattore convergente, oppure fare una rotazione di Wick. Complessificare la massa vuol dire aggiungere un termine complesso convergente, invece, fare una rotazione di Wick vuol dire passare da una metrica minkowskiana ad una euclidea. Vediamo entrambi i modi.

Metodo 1 Complessifichiamo la massa aggiungendo un pezzo complesso, che poi potremo mandare a 0:

$$2m \longrightarrow 2(m + i\varepsilon) \quad (1.2.38)$$

in questo modo:

$$\frac{p^2}{2(m + i\varepsilon)} = \frac{p^2}{2m} \frac{1}{1 + \frac{i\varepsilon}{m}} \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \frac{p^2}{2m} \left(1 - \frac{i\varepsilon}{m} \right) = \frac{p^2}{2m} - \frac{ip^2\varepsilon}{2m^2} \quad (1.2.39)$$

per semplicità possiamo moltiplicare per $-i/\hbar$:

$$-\frac{i}{\hbar} \frac{p^2}{2(m + i\varepsilon)} = -\frac{ip^2}{2\hbar m} - \frac{p^2\varepsilon}{2\hbar m^2}. \quad (1.2.40)$$

Non utilizzeremo l'espansione (1.2.40) per semplicità di calcolo, lasciamo $2(m + i\varepsilon)$. Riprendendo (1.2.37) e sostituendo (1.2.38):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi} e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{p^2}{2(m+i\varepsilon)}(t'-t)} e^{\frac{i}{\hbar} p(q'-q)} \quad (1.2.41)$$

analizziamo meglio l'argomento dell'esponenziale che compare:

$$-\frac{i}{\hbar} \frac{p^2(t'-t)}{2(m+i\varepsilon)} + \frac{i}{\hbar} p(q'-q) \quad (1.2.42)$$

$$= -\frac{1}{2\hbar} \left[\frac{ip^2(t'-t)}{m+i\varepsilon} - 2ip(q'-q) \right] \quad (1.2.43)$$

$$= -\frac{1}{2\hbar} \left[\frac{p^2(t'-t)}{\varepsilon - im} - 2ip(q'-q) \right] \quad (1.2.44)$$

possiamo completare il quadrato:

$$-\frac{1}{2\hbar} \left[\left(p \sqrt{\frac{t'-t}{\varepsilon-im}} - i(q'-q) \sqrt{\frac{\varepsilon-im}{t'-t}} \right)^2 + (q'-q)^2 \frac{\varepsilon-im}{t'-t} \right] \quad (1.2.45)$$

facendo il seguente cambio di variabile:

$$w = p \sqrt{\frac{t'-t}{\varepsilon-im}} - i(q'-q) \sqrt{\frac{\varepsilon-im}{t'-t}} \quad (1.2.46)$$

$$dp = \sqrt{\frac{\varepsilon-im}{t'-t}} dw \quad (1.2.47)$$

l'argomento dell'esponenziale diventa:

$$-\frac{1}{2\hbar} w^2 - \frac{(q'-q)^2}{2\hbar} \frac{\varepsilon-im}{t'-t} \quad (1.2.48)$$

e di conseguenza l'integrale:

$$\sqrt{\frac{\varepsilon-im}{t'-t}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\hbar} \frac{\varepsilon-im}{t'-t} (q'-q)^2 \right\} \int_{-\infty}^{+\infty} dw e^{-\frac{w^2}{2\hbar}}. \quad (1.2.49)$$

Notiamo che in (1.2.49) abbiamo $w \in \mathbb{C}$ anche se $p \in \mathbb{R}$, quindi non staremmo integrando tra $-\infty$ e $+\infty$ di \mathbb{R} , ma in una direzione generica, però, l'integrando è una funzione regolare ovunque, e di conseguenza possiamo deformare il cammino ed integrare tra $-\infty$ e $+\infty$ sull'asse reale. Dunque, l'integrale in (1.2.49) è un'integrale gaussiano che fa $\sqrt{2\pi\hbar}$. Siamo arrivati a:

$$\sqrt{\frac{\varepsilon-im}{2\pi\hbar(t'-t)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\hbar} \frac{\varepsilon-im}{t'-t} (q'-q)^2 \right\} \quad (1.2.50)$$

in cui dobbiamo ancora fare il limite $\varepsilon \rightarrow 0$. Il propagatore di particella libera è quindi:

$$K(q', t'; q, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\varepsilon-im}{2\pi\hbar(t'-t)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\hbar} \frac{\varepsilon-im}{t'-t} (q'-q)^2 \right\} \quad (1.2.51)$$

$$= \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar (t'-t)}} e^{\frac{i}{\hbar} \frac{m(q'-q)^2}{2(t'-t)}} \quad (1.2.52)$$

Abbiamo quindi trovato il propagatore di una particella libera unidimensionale.

Metodo 2 Facciamo un rotazione di Wick, ovvero, ruotiamo di $\pi/2$ in senso orario l'asse dei tempi:

$$t \longrightarrow t = -it_E \quad (1.2.53)$$

in cui indichiamo t_E tempo euclideo, perché se partiamo da una metrica minkowskiana:

$$-c^2 dt^2 + d\vec{x} \cdot d\vec{x} \quad (1.2.54)$$

e facciamo la rotazione (1.2.53):

$$c^2 dt_E^2 + d\vec{x} \cdot d\vec{x} \quad (1.2.55)$$

che è una metrica euclidea. Riprendiamo l'integrale (1.2.37):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi} e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{p^2}{2m} (t' - t)} e^{\frac{i}{\hbar} p(q' - q)} \quad (1.2.56)$$

facendo la rotazione di Wick otteniamo una cosa convergente, poiché scompare la i , e scriviamo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\hbar\pi} \exp \left\{ -\frac{1}{2\hbar} \left(\frac{p^2}{m} (t'_E - t_E) - 2ip(q' - q) \right) \right\} \quad (1.2.57)$$

in modo analogo a quanto fatto con il primo metodo, completando il quadrato e facendo il cambio di variabile otteniamo:

$$K(q', t'; q, t) = \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar(t'_E - t_E)}} e^{-\frac{1}{2\hbar} \frac{m(q' - q)^2}{(t'_E - t_E)}} \quad (1.2.58)$$

in cui, se rifacciamo la rotazione (1.2.53) al contrario, riotteniamo il tempo vero e un risultato identico a quello trovato con il metodo di complessificazione della massa.

Controlliamo, però, a questo punto che il propagatore K che abbiamo trovato sia effettivamente parametrizzabile nel modo suggerito da Feynmann (1.2.22). Prendiamo il risultato (1.2.52) e notiamo che possiamo scriverlo come:

$$K(q', t'; q, t) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar (t' - t)}} e^{\frac{i}{\hbar} \frac{(q' - q)^2}{2(t' - t)}} \equiv \frac{1}{\mathcal{N}} e^{\frac{i}{\hbar} S} \quad (1.2.59)$$

in cui indichiamo:

$$\mathcal{N} = \sqrt{\frac{2\pi i \hbar (t' - t)}{m}} \quad (1.2.60)$$

$$S = \frac{(q' - q)^2}{2(t' - t)} \quad (1.2.61)$$

dove la prima riga è un fattore di normalizzazione, e la seconda è verificabile essere effettivamente l'azione della particella libera calcolata sulla curva del moto. Partiamo dalla lagrangiana libera:

$$L = \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{m}{2} \left(\frac{q' - q}{t' - t} \right)^2 \quad (1.2.62)$$

in cui abbiamo riscritto la velocità dicendo che ci stiamo spostando da q a q' nel tempo $t' - t$ e vediamo la v come rapporto incrementale. L'azione è dunque:

$$S = \int_t^{t'} d\tau \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m v^2 (t' - t) = \frac{m(q' - q)^2}{2(t' - t)} \quad (1.2.63)$$

ossia, l'argomento che compare nell'esponenziale di (1.2.52). È dunque corretto dire che il propagatore dipende in modo esponenziale dall'azione definita in modo classico.

Ovviamente, dobbiamo ricordare che S è calcolata sullo specifico cammino che seguiamo (nel caso semplificato che abbiamo visto è indifferente), quindi in generale scriviamo:

$$S = \int_t^{t'} d\tau L(q(\tau), \dot{q}(\tau)) \quad (1.2.64)$$

e a seconda del $q(t)$ che inseriamo nella lagrangiana otteniamo azioni differenti. Per questo motivo l'azione è un **funzionale del cammino**. La cosa curiosa è che in Meccanica Quantistica noi potremmo potenzialmente seguire un qualsiasi cammino di quelli possibili, però, facendo i conti troviamo che nel caso di particella libera abbiamo il propagatore K che contiene proprio l'azione calcolata sul cammino classico.

Vedremo nelle prossime sezioni che anche nel caso in cui aggiungiamo interazioni, il propagatore avrà sempre un termine di particella libera (S classica) con aggiunti i pezzi di interazione.

In questa sottosezione abbiamo visto il caso unidimensionale, ma i conti si possono generalizzare ad una dimensione generica n , la differenza sarà che compariranno n integrali gaussiani che si potranno risolvere in successione. Puoi vedere a riguardo un qualsiasi libro di riferimento, ad esempio [1], oppure le note del corso di IFIF.

1.3 I Path Integral

Vediamo in questa sezione il propagatore (1.2.9) in modo più generale, definiamo che cosa sono effettivamente i path integral sia nello spazio delle fasi che delle configurazioni.

Prendiamo in esame un'hamiltoniana del tipo:

$$\hat{H} = \hat{H}(q, p) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{q}) \quad (1.3.1)$$

però in cui non è presente solo il termine cinetico, come nella sezione §1.2.1, ma anche un potenziale dipendente solo dalle coordinate. Possiamo definire

l'operatore di evoluzione temporale:

$$\hat{U} = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t'-t)}. \quad (1.3.2)$$

Dalla definizione (1.2.9) si ha:

$$K(q', t'; q, t) = \langle q' | U(t', t) | q \rangle = \langle q' | e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t'-t)} | q \rangle \quad (1.3.3)$$

in cui possiamo fare come nel caso libero, ossia, introdurre la completezza di p , che in genere ha n componenti:

$$K(q', t'; q, t) = \int d^n p \langle q' | p \rangle \langle p | e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t'-t)} | q \rangle \quad (1.3.4)$$

in cui abbiamo l'esponenziale definito come serie di potenze:

$$e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t'-t)} \equiv \mathbb{1} - \frac{i}{\hbar}(t' - t) \left[\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(q) \right] - \frac{1}{\hbar^2}(t' - t)^2 \left[\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(q) \right]^2 + \dots \quad (1.3.5)$$

che però non è un'espressione bellissima. Nel caso libero l'esponenziale (1.3.2) non aveva dato problemi, infatti, in (1.2.34) avevamo fatto agire \hat{p} a sinistra senza troppi problemi e avevamo continuato i nostri conti. Eravamo in una situazione felice in §1.2.1 perché avevamo in \hat{U} ad esponente un'operatore hermitiano, mentre ora non è più così liscia la situazione. Mentre i primi due termini di (1.3.5) non danno problemi e possiamo farli agire a sinistra su p o a destra su q a piacere, gli infiniti termini dopo la $[\dots]^2$ sono problematici poiché non commutando \hat{p} e \hat{q} dovremmo considerare i termini misti:

$$\frac{\hat{p}^2}{2m} V(\hat{q}) \quad , \quad V(\hat{q}) \frac{\hat{p}^2}{2m} \quad (1.3.6)$$

che non sono un granché visto che abbiamo \hat{p} affacciato su $|q\rangle$ e $V(\hat{q})$ affacciato su $\langle p|$, che non essendo loro autostati non abbiamo un risultato immediato. Per avere equazioni agli autovalori dovremmo riordinare i termini in (1.3.6) sostituendo il pezzo che non ci piace con quello con i termini invertiti + il commutatore degli operatori. Questa operazione si chiamerebbe **normal ordering**, in cui abbiamo:

$$\langle p | O(p) | q \rangle \quad (1.3.7)$$

ma definiamo:

$$: O := O - \langle O \rangle \quad \text{t.c.} \quad \langle : O : \rangle = O \quad (1.3.8)$$

e quello che vorremmo fare è un'operazione di questo tipo per ogni termine dello sviluppo (1.3.5), in modo da avere tutti gli operatori \hat{q} che si affaccino su $|q\rangle$ e tutti i \hat{p} su $\langle p|$. Però, dovendolo fare per ∞ termini non è una cosa possibile.

Sembra che siamo bloccati, ma in realtà ci viene in soccorso una proprietà dell'operatore di evoluzione temporale. Sappiamo che $U(t, t_0)$ rappresenta

l'evoluzione del sistema dal tempo t_0 al tempo t . Se scegliamo un tempo intermedio $t_1 \in (t_0, t)$, allora vale:

$$U(t, t_0) |\psi_0\rangle = |\psi(t)\rangle \quad (1.3.9)$$

$$U(t_1, t_0) |\psi_0\rangle = |\psi(t_1)\rangle \quad (1.3.10)$$

$$U(t, t_1) |\psi(t_1)\rangle = |\psi(t)\rangle \quad (1.3.11)$$

e di conseguenza:

$$U(t, t_1)U(t_1, t_0) = U(t, t_0) \quad (1.3.12)$$

che ci dice semplicemente che possiamo agire in successione con diversi operatori U da un tempo iniziale ad uno finale fermandoci ogni volta in un tempo intermedio in modo equivalente a quando utilizziamo un'unico operatore U dall'inizio alla fine. Possiamo quindi vedere l'evoluzione temporale del nostro sistema da t_0 a t in modo spezzato. È facile verificarlo con un'hamiltoniana indipendente dal tempo (ricordando anche che $[H, H] = 0$):

$$e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_1)}e^{-\frac{i}{\hbar}H(t_1-t_0)} = e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}. \quad (1.3.13)$$

Possiamo quindi inserire nel braket di (1.3.4) un tempo intermedio:

$$\langle q' | e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(q,p)(t'-t_1)} e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(q,p)(t_1-t)} | q \rangle \quad (1.3.14)$$

e sarebbe bello riuscire a vedere il propagatore K come prodotto di altri propagatori intermedi, aggiungiamo per questo la completezza di $|q\rangle$:

$$\int d^n q_1 \langle q' | e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(q,p)(t'-t_1)} | q_1 \rangle \langle q_1 | e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(q,p)(t_1-t)} | q \rangle \quad (1.3.15)$$

quindi, (1.3.4) diventa:

$$K(q', t'; q, t) = \int d^n q_1 K(q', t'; q_1, t_1) K(q_1, t_1; q, t) \quad (1.3.16)$$

e quindi vediamo che K è la convoluzione di altri propagatori. La relazione (1.3.16) ci insegna una cosa molto importante, ci dice che in Meccanica Quantistica la probabilità di andare da un punto (q, t) al punto (q', t') non è semplicemente il prodotto delle probabilità di fare i tragitti intermedi, ma è l'integrale su tutte le possibili posizioni intermedie ai diversi tempi intermedi. Per andare da (q, t) a (q', t') contribuiscono tutti i possibili cammini quantisti, in cui il cammino classico da il contributo probabilistico più dominante. Preso un certo tempo t_1 è normale che noi integriamo su tutte le possibili q_1 (occupabili a t_1) visto che tutte sono possibili per la Meccanica Quantistica. Una rappresentazione grafica è data dalla figura 1.4. Infatti, se non fecessimo una misura al tempo t_1 , potremmo essere in una qualsiasi posizione (ragionando quantisticamente), ma ovviamente con diverse probabilità. È cruciale, però, in questo ragionamento che *non* facciamo la misura

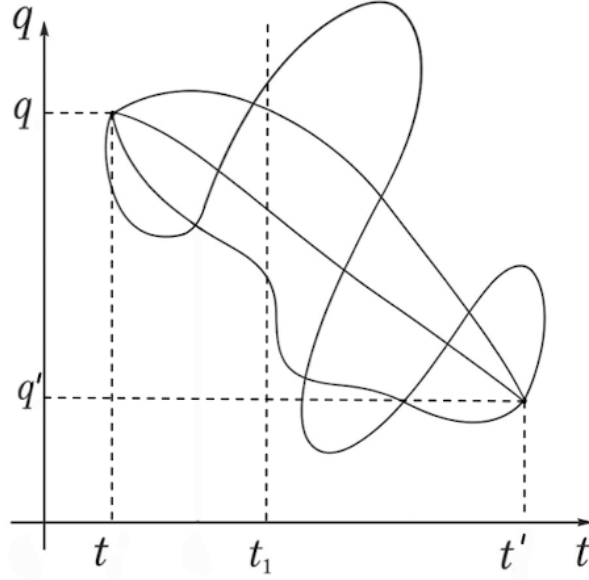


Figura 1.4: Rappresentazione grafica di tutti i cammini possibili.

e non sappiamo effettivamente a quale q_1 ci troviamo. Se facessimo la misura la funzione d'onda collasserebbe.

Il concetto di propagatore inteso come convoluzione di propagatori intermedi ha un'importanza non solo concettuale, ma anche pratica. Infatti, possiamo introdurre $N - 1$ tempi intermedi, dividendo quindi l'intervallo in N fette, usare $N - 1$ relazioni di completezza per ottenere $N - 1$ integrali:

$$K(q', t'; q, t) = \int d^n q_1 \cdots \int d^n q_{N-1} \prod_{i=0}^{N-1} \langle q_{i+1} | U(t_{i+1}, t_i) | q_i \rangle \quad (1.3.17)$$

$$q_0 = q \quad , \quad q_N = q'. \quad (1.3.18)$$

Notiamo che, se infittissimo tanto (N grande) e rendessimo gli intervalli temporali $t_{i+1} - t_i$ piccoli, in ciascun termine avremmo:

$$U(t_{i+1}, t_i) = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}(q, p)(t_{i+1} - t_i)} \quad (1.3.19)$$

$$= \mathbb{1} - \frac{i}{\hbar} (t_{i+1} - t_i) \left[\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{q}) \right] + \dots \quad (1.3.20)$$

ma se $t_{i+1} - t_i$ è piccolo, allora lo sviluppo è ben approssimato al primo ordine, termine che come abbiamo visto in precedenza, non dà problemi quando pinzato tra $|p\rangle$ (o $|q\rangle$) qualunque sia la forma di \hat{H} . Otteniamo

quindi:

$$\langle q_{i+1} | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}(q,p)(t_{i+1}-t_i)} | q_i \rangle = \langle q_{i+1} | \mathbb{1} - \frac{i}{\hbar} \hat{H}(q,p)(t_{i+1}-t_i) | q_i \rangle \quad (1.3.21)$$

$$= \int \frac{d^n p_i}{(2\pi\hbar)^n} \langle q_{i+1} | p_i \rangle \langle p_i | \mathbb{1} - \frac{i}{\hbar} \hat{H}(q,p)(t_{i+1}-t_i) | q_i \rangle \quad (1.3.22)$$

che è un oggetto non problematico e in cui possiamo far agire, senza problemi di ordinamento, i termini \hat{p} che compaiono in \hat{H} a sinistra, e quelli \hat{q} a destra. Possiamo far agire \hat{H} ed ottenere:

$$\int \frac{d^n p_i}{(2\pi\hbar)^n} \left(\mathbb{1} - \frac{i}{\hbar} H(q,p)(t_{i+1}-t_i) \right) \langle q_{i+1} | p_i \rangle \langle p_i | q_i \rangle \quad (1.3.23)$$

$$\int \frac{d^n p_i}{(2\pi\hbar)^n} \left(\mathbb{1} - \frac{i}{\hbar} H(q,p)(t_{i+1}-t_i) \right) e^{\frac{i}{\hbar} p_i(q_{i+1}-q_i)} \quad (1.3.24)$$

in cui abbiamo ricordato la definizione (1.2.36). Notiamo anche che nel risultato ottenuto $H(q,p)$ è una funzione e non un operatore. Utilizzando questo risultato, ottenuto infittendo tanto, l'espressione del propagatore (1.3.17) diventa (riscriviamo per comodità di scrittura $\mathbb{1} - \frac{i}{\hbar} H(t_{i+1}-t_i)$ come esponenziale):

$$\begin{aligned} K(q', t'; q, t) &= \int d^n q_1 \cdots \int d^n q_{N-1} \prod_{i=0}^{N-1} \langle q_{i+1} | U(t_{i+1}, t_i) | q_i \rangle \quad (1.3.25) \\ &= \int \prod_{i=1}^{N-1} d^n q_i \prod_{j=0}^{N-1} \frac{d^n p_i}{(2\pi\hbar)^n} \prod_{k=0}^{N-1} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} [p_i(q_{i+1} - q_i) - H(q_i, p_i)(t_{i+1} - t_i)] \right\} \quad (1.3.26) \end{aligned}$$

possiamo chiamare $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ e riscrivere:

$$= \int \prod_{i=1}^{N-1} d^n q_i \prod_{j=0}^{N-1} \frac{d^n p_i}{(2\pi\hbar)^n} \prod_{k=0}^{N-1} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \Delta t_i \left[\frac{p_i(q_{i+1} - q_i)}{\Delta t_i} - H(q, p) \right] \right\} \quad (1.3.27)$$

questa è una scrittura per noi più carina perché possiamo supporre che i vari q_i e p_i siano i valori $q(t)$ e $p(t)$ al tempo t_i , ossia che valga:

$$\begin{cases} q(t) \\ p(t) \end{cases} \implies \begin{cases} q(t_i) = q_i \\ p(t_i) = p_i \end{cases} \quad (1.3.28)$$

Se vale (1.3.28) e se Δt_i è piccolo, allora, $\frac{q_{i+1}-q_i}{\Delta t_i}$ è una versione discreta della

derivata \dot{q}_i ³. Riscrivendo abbiamo:

$$K(q', t'; q, t) = \int \prod_{i=1}^{N-1} d^n q_i \prod_{j=0}^{N-1} \frac{d^n p_j}{(2\pi\hbar)^n} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{i=0}^{N-1} \Delta t_i (p\dot{q} - H(q, p)) \Big|_{t=t_i} \right\}. \quad (1.3.29)$$

Importante notare che nella parentesi tonda valutata a $t = t_i$ compare proprio la lagrangiana del sistema, definita appunto come:

$$L = p\dot{q} - H. \quad (1.3.30)$$

La versione di (1.3.29) che ci interessa è con $N \rightarrow \infty$, ovvero il caso in cui infittiamo l'intervallo tantissimo. Nel limite in cui N è enorme la somma nell'esponentiale è l'integrale di Riemann per definizione⁴:

$$\sum_{i=0}^{N-1} \Delta t_i (p\dot{q} - H) \Big|_{t=t_i} \longrightarrow \int_t^{t'} dt (p\dot{q} - H) \quad (1.3.31)$$

al tempo stesso, però, abbiamo $N - 1$ integrali n -dimensionali su q , N integrali n -dimensionali su p , ma tutti su \mathbb{R} . Gli integrali sono dunque:

$$6N + 6(N - 1) \quad \text{integrali} \quad \int_{-\infty}^{+\infty}$$

che, se N è finito, in qualche modo si riescono a fare. Il problema, però è che gli integrali diventano infattibili se $N \rightarrow \infty$. Graficamente è una cosa visualizzabile come in figura 1.5, in cui nota che è disegnato solo 1 degli ∞ cammini possibili.

Facendo il limite al continuo, ovvero mandare $N \rightarrow \infty$ e infittire la griglia, otteniamo una cosa raffigurabile come in figura 1.6. Il grafico in figura 1.6 ci mostra come q varia in t . Classicamente sappiamo che per andare dal punto q a q' abbiamo solo un cammino possibile, ovvero una sola curva del moto, ma come già detto, quantisticamente non possiamo escluderne nessuna e le consideriamo tutte, ma ricordando di pesarle opportunamente.

Quando mandiamo $N \rightarrow \infty$ l'integrale (1.3.29) diventa il cosiddetto **integrale di cammino**, che scritto in modo sintetico è:

$$K(q', t'; q, t) = \int \mathcal{D}_q \mathcal{D}_p e^{\frac{i}{\hbar} S[q(\tau), p(\tau)]} \quad (1.3.32)$$

³Vedere $\frac{q_{i+1} - q_i}{\Delta t_i}$ come versione discreta della derivata \dot{q}_i è una definizione formale e non molto lecita sotto certi aspetti. Per prima cosa non è detto che Δt_i sia piccolo, ma anche nel caso in cui lo fosse, le q_{i+1} e q_i sono variabili di integrazione indipendenti, il che è un problema perché anche diminuendo Δt_i non è detto che si rimpicciolisca la differenza $q_{i+1} - q_i$, cosa che invece siamo sicuri succeda quando abbiamo una funzione continua e rimpiccioliamo Δt_i , poiché in questo caso si rimpicciolisce anche la differenza di due valori della funzione a tempi diversi.

⁴Questo è un classico passaggio da una somma di Riemann a un integrale, che è proprio alla base della formulazione degli integrali di cammino.

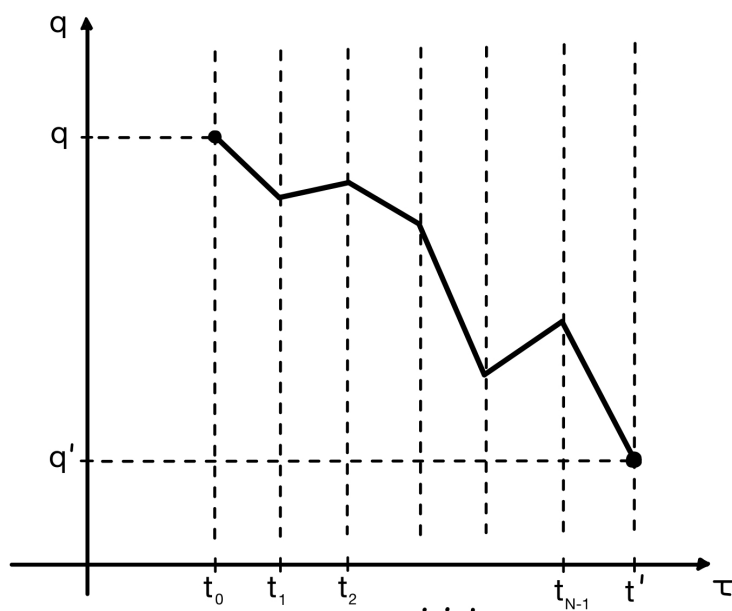


Figura 1.5: Rappresentazione cammino spezzato a tempi intermedi.

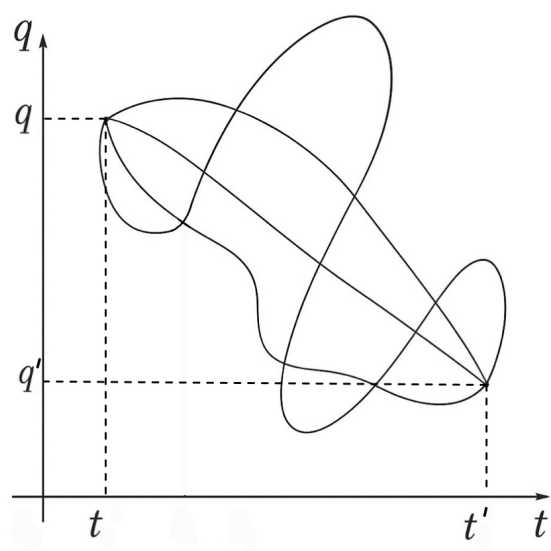


Figura 1.6: Rappresentazione cammino spezzato a tempi intermedi ma con $n \rightarrow \infty$.

in cui S è proprio l'azione definita nel modo classico, poiché in (1.3.29), dopo

aver fatto il limite $N \rightarrow \infty$, avevamo:

$$\int_t^{t'} d\tau (p\dot{q} - H) = \int_t^{t'} d\tau L(q, p) \equiv S[q(\tau), p(\tau)]. \quad (1.3.33)$$

Come già detto, S è un funzionale del cammino $q(\tau)$.

Quello scritto (1.3.32) è il **path integral nello spazio delle fasi**. Il path integral è un'oggetto un po' strano, basti pensare a cos'abbiamo fatto per arrivarci, e ogni tanto non ben definito. È comunque un oggetto di notevole importanza nella Fisica. In Meccanica Quantistica per fare i conti si utilizza la versione con N finito (1.3.29) e i $6N + (6N - 1)$ integrali, facendo soltanto alla fine il limite $N \rightarrow \infty$ del risultato. Il principale vantaggio di utilizzare i path integral sta nel fatto che, in generale, gli operatori quantistici vengono sostituiti dalle rispettive funzioni (vedi quando prima siamo passati da $\hat{H}(q, p)$ a $H(q, p)$) che sono decisamente più semplici da trattare. Sarà vantaggioso sia in Meccanica Quantistica che in Teoria Quantistica dei Campi.

Nota la forma del path integral nello spazio delle fasi potrebbe essere comodo ricavarci anche l'espressione nello spazio delle configurazioni. Se abbiamo un'hamiltoniana standard (cosa che succede nella maggior parte dei casi) siamo in presenza di una cosa del tipo:

$$\hat{H}(q, p) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{q}) \quad (1.3.34)$$

in cui in \hat{p} abbiamo tutti i momenti sommati. Nel caso di (??) possiamo utilizzare tutti i trucchetti visti nel caso della particella libera, quindi, possiamo completare il quadrato nell'argomento dell'esponenziale:

$$p_i \dot{q}_i - H(q, p) = -\frac{p_i^2}{2m} + p_i \dot{q}_i - V(q) \quad (1.3.35)$$

$$= -\frac{1}{2m} (p_i - \dot{q}_i m)^2 + \frac{m}{2} \dot{q}_i^2 - V(q) \quad (1.3.36)$$

che se messo nell'integrale vediamo che il pezzo in dp si fattorizza. Implementiamo i conti dimenticandoci del pezzo $\frac{m}{2} \dot{q}_i^2 - V(q)$ che tanto non dipende da p e lo reinseriamo in un secondo momento:

$$\int \prod_{k=0}^{N-1} \frac{d^n p_k}{(2\pi\hbar)^n} \exp \left\{ -\frac{i\Delta t_i}{2m\hbar} \sum_{j=0}^{N-1} (p_j - \dot{q}_j m)^2 \right\} \quad (1.3.37)$$

non è restrittivo prendere $\Delta t_i \equiv \Delta t \quad \forall i$, poiché stiamo solo prendendo la griglia con separazione sempre uguale, però è comodo perché nella produttoria abbiamo N oggetti tutti uguali:

$$\left[\int \frac{d^n p_j}{(2\pi\hbar)^n} \exp \left\{ -\frac{i\Delta t_i}{2m\hbar} (p_j - \dot{q}_j m)^2 \right\} \right]^N \quad (1.3.38)$$

però avendo ancora i singoli integrali tutti uguali, possiamo scrivere:

$$\left[\int \frac{dp}{(2\pi\hbar)^n} \exp \left\{ -\frac{i\Delta t_i}{2m\hbar} (p - \dot{q}m)^2 \right\} \right]^{nN} \quad (1.3.39)$$

che è una cosa identica a quello che ci usciva nei conti di particella libera e di cui sappiamo il risultato (facendo gli stessi conti e con il cambio di variabile $p - m\dot{q}$) portandoci quindi a:

$$\left(\frac{1}{\mathcal{N}} \right)^{nN} = \left(\sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\Delta t}} \right)^{nN}. \quad (1.3.40)$$

Rimettendo tutto quello visto nell'espressione del propagatore (1.3.29) otteniamo:

$$K(q', t'; q, t) = \frac{1}{\mathcal{N}^n} \int \prod_{k=1}^{N-1} \frac{d^n q_k}{\mathcal{N}^n} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{i=1}^{N-1} \Delta t \left(\frac{1}{2} m \dot{q}_i^2 - V(q) \right) \right\}. \quad (1.3.41)$$

Ricapitolando, nel caso di un'hamiltoniana standard (1.3.34), allora riusciamo ad ottenere un'espressione per il propagatore con la lagrangiana e solo integrali in dq . Ci siamo riusciti a spostare nello spazio delle configurazioni e possiamo dire che con il completamento del quadrato abbiamo fatto una trasformata di Legendre in cui siamo passati da H ad L . L'espressione (1.3.41) non è l'espressione del path integral nello spazio delle configurazioni definitivo che possiamo ottenere, infatti, possiamo ancora fare un passaggio, ovvero ricordare la definizione di lagrangiana e scrivere:

$$K(q', t'; q, t) = \frac{1}{\mathcal{N}^n} \int \prod_{k=1}^{N-1} \frac{d^n q_k}{\mathcal{N}^n} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{i=1}^{N-1} L(q, \dot{q}) \Big|_{q=q_i} \Delta t \right\}. \quad (1.3.42)$$

Facendo di nuovo il limite per $N \rightarrow \infty$ otteniamo il **path integral nello spazio delle configurazioni**:

$$K(q', t'; q, t) = \int \mathcal{D}_q e^{\frac{i}{\hbar} \int_t^{t'} L(q, \dot{q}) d\tau} = \int \mathcal{D}_q e^{\frac{i}{\hbar} S[q(\tau)]}. \quad (1.3.43)$$

Facciamo un paio di osservazioni riguardo (1.3.43). Notiamo che abbiamo scritto l'azione calcolata sul cammino $q(\tau)$ tra t e t' . Dentro \mathcal{D}_q abbiamo inserito la misura $\frac{d^n q_k}{\mathcal{N}^n}$ nello spazio delle q , ma l' $1/\mathcal{N}^n$ che non è "accoppiato" con nessun dq_k e avanza dove va? Ricordiamo che per definizione abbiamo:

$$\psi(q', t') = \int d^n q' K(q', t'; q, t) \psi(q, t) \quad (1.3.44)$$

in cui, se utilizziamo l'espressione di $K(q', t'; q, t)$ (1.3.42) all'interno, il termine $1/\mathcal{N}^n$, che pensavamo avanzasse, serve a rendere la misura del $d^n q$ presente in $\psi(q', t')$ sullo stesso piano degli altri.

1.4 L'equazione di Schrodinger

Abbiamo già detto che la formulazione dei path integral poiché non solo è importante nella costruzione della Teoria Quantistica dei Campi o nella Meccanica Statistica, ma permette, assumendoli come assiomi della teoria, anche di ricavare tutti i risultati già trovati della Meccanica Quantistica che già conosciamo⁵. Infatti, sappiamo che possiamo scrivere la funzione d'onda ad un certo tempo t in una certa posizione x in termini del propagatore $K(x, t; x_0, 0)$ e alla funzione d'onda al tempo precedente $t = 0$ e nella posizione iniziale x_0 :

$$\psi(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_0 K(x, t; x_0, 0) \psi(x_0, 0). \quad (1.4.1)$$

Abbiamo visto che se $\psi(x, t)$ soddisfa l'equazione di Schrodinger, allora anche K la risolve e ne sappiamo dare una rappresentazione sia nello spazio delle fasi che delle configurazioni. Però, la relazione (1.4.1) l'abbiamo scritta a suo tempo nella sezione §1.2 partendo dall'operatore di evoluzione temporale e dal postulato dell'evoluzione temporale della Meccanica Quantistica. Ora, proviamo a partire dalla scrittura di K come path integral, passare dalla scrittura (1.4.1), ovvero ad una scrittura della funzione d'onda come convoluzione del propagatore con la funzione d'onda in un punto iniziale e vedere che equazione differenziale specifica soddisfa ψ . Vedremo che l'equazione soddisfatta da ψ risulterà essere l'equazione di Schrodinger.

Schematicamente possiamo scrivere:

$$\text{Eq. Schrodinger} \quad \Longleftrightarrow \quad K = \int \mathcal{D}_x e^{\frac{i}{\hbar} S}$$

il cammino da sinistra a destra lo abbiamo già visto e nel resto della sezione vedremo come andare da destra a sinistra.

L'equazione di Schrodinger è un'equazione differenziale che coinvolge tempo e spazio, per cui ci servirà fare spostamenti sia nello spazio che nel tempo, anche piccoli, per avere delle derivate. Studiamo quindi $\psi(x, t)$ con $t = \varepsilon$ piccolo, che implica anche avere spostamenti spaziali piccoli, dal momento che bisogna sempre avere velocità finite. Il motivo di prendere $t = \varepsilon$ piccolo è che se il tempo è piccolo, allora non abbiamo bisogno di spazzettare l'integrale e abbiamo il propagatore K che è dato da un solo termine.

⁵Infatti, sul libro *Quantum Mechanics: A Mathematical Introduction*, di Andrew J. Larkoski, Cambridge University Press (2022) c'è un intero capitolo dedicato ai path integral e in cui partendo dall'esistenza di un'operatore di evoluzione temporale (e di propagatore) ricava non solo l'equazione di Schrodinger, come facciamo noi, ma anche tutti gli altri risultati della Meccanica Quantistica.

Consideriamo (1.2.59) e implementiamo i conti con $t = \varepsilon$:

$$K(x, t; x_0, 0) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \varepsilon}} \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \int_0^\varepsilon d\tau \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x)\right)\right\} \quad (1.4.2)$$

$$= \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \varepsilon}} \exp\left\{\frac{i\varepsilon}{\hbar} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x)\right)\right\} \quad (1.4.3)$$

$$= \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \varepsilon}} \exp\left\{\frac{i\varepsilon}{\hbar} \left(\frac{1}{2} m \left(\frac{x - x_0}{\varepsilon}\right)^2 - V(x)\right)\right\} \quad (1.4.4)$$

in cui abbiamo utilizzato il fatto che se ε è piccolo, allora abbiamo anche incrementi della posizione piccoli e quindi possiamo scrivere la derivata come un rapporto incrementale. Abbiamo quindi:

$$K(x, t; x_0, 0) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \varepsilon}} e^{-\frac{i}{\hbar} \varepsilon V(x)} e^{\frac{i}{2} \frac{m}{\hbar} \frac{(x-x_0)^2}{\varepsilon}} \quad (1.4.5)$$

che se inserita nell'espressione per $\psi(x, t)$ (1.4.1) si ha:

$$\psi(x, t) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \varepsilon}} e^{-\frac{i}{\hbar} \varepsilon V(x)} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_0 e^{\frac{i}{2} \frac{m}{\hbar} \frac{(x-x_0)^2}{\varepsilon}} \psi(x_0, 0) \quad (1.4.6)$$

al cui interno riconosciamo una cosa parente alla δ di Dirac. Si veda l'Appendice A per dettagli. Infatti, facendo opportuni cambi di variabile riusciamo ad ottenere nell'integrale di $\psi(x, t)$ una cosa collegabile con lo sviluppo (A.0.9). Per prima cosa facciamo una rotazione di Wick:

$$i\varepsilon = \alpha \quad (1.4.7)$$

e un cambio di variabili:

$$\sqrt{\frac{m}{\hbar}} (x - x_0) = y_0 \quad (1.4.8)$$

così scriviamo:

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}} e^{-\frac{\alpha}{\hbar} V(x)} \int_{-\infty}^{+\infty} dy_0 e^{-\frac{y_0^2}{2\alpha}} \psi\left(x - \sqrt{\frac{\hbar}{m}} y_0, 0\right). \quad (1.4.9)$$

Così siamo felici perché possiamo utilizzare la relazione trovata in Appendice A:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}} e^{-\frac{x^2}{2\alpha}} = \delta(x) + \frac{\alpha}{2} \delta''(x) + \mathcal{O}(\alpha^2). \quad (1.4.10)$$

e scrivere:

$$\psi(x, t) = e^{-\frac{\alpha}{\hbar} V(x)} \int_{-\infty}^{+\infty} dy_0 \left(\delta(y_0) + \frac{\alpha}{2} \delta''(y_0)\right) \psi\left(x - \sqrt{\frac{\hbar}{m}} y_0, 0\right) \quad (1.4.11)$$

in cui l'integrale con $\delta(y_0)$ è immediato e quello con $\delta''(y_0)$, invece, si fa per parti. Otteniamo:

$$\psi(x, t) = e^{-\frac{\alpha}{\hbar} V(x)} \left(\psi(x, 0) + \frac{\alpha}{2} \frac{d^2 \psi(x - \sqrt{\hbar/m} y_0)}{dy_0^2} \Big|_{y=0} \right) \quad (1.4.12)$$

notiamo che il nostro cambio di variabile implica:

$$\sqrt{\frac{m}{\hbar}} (x - x_0) = y_0 \implies dy_0 = \sqrt{\frac{m}{\hbar}} dx \implies \frac{d^2}{dy_0^2} = \frac{\hbar}{m} \frac{d^2}{dx^2} \quad (1.4.13)$$

e quindi:

$$\psi(x, t) = e^{-\frac{\alpha}{\hbar} V(x)} \left(\psi(x, 0) + \frac{\alpha \hbar}{2m} \frac{d^2 \psi(x, 0)}{dx^2} \right) \quad (1.4.14)$$

$$= e^{-\frac{i\varepsilon}{\hbar} V(x)} \left(\psi(x, 0) + \frac{i\varepsilon \hbar}{2m} \psi''(x, 0) \right) \quad (1.4.15)$$

in cui abbiamo utilizzato $\alpha = i\varepsilon$. Ricapitoliamo un attimo: siamo partiti dalla relazione (1.4.1), abbiamo utilizzato la definizione di propagatore come path integral, ci siamo messi in una situazione con $t = \varepsilon$ piccolo e siamo riusciti, grazie alle proprietà della δ di Dirac a scrivere lo sviluppo in ε al primo ordine del termine di destra della relazione di (1.4.1). Quindi, dobbiamo ancora sviluppare al primo ordine il pezzo di sinistra e l'esponenziale di destra di (1.4.1). Implementiamo i conti partendo da (1.4.15) (in cui ricordiamo di mettere $t = \varepsilon$):

$$\psi(x, 0) + \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} \varepsilon = \left(1 - \frac{i\varepsilon}{\hbar} V \right) \left(\psi(x, 0) + \frac{i\varepsilon \hbar}{2m} \psi''(x, 0) \right) \quad (1.4.16)$$

$$= \psi(x, 0) - \frac{i\varepsilon}{\hbar} V(x) \psi(x, 0) + \frac{i\varepsilon \hbar}{2m} \psi''(x, 0) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (1.4.17)$$

in cui, cancellando i termini comuni, otteniamo:

$$\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} \varepsilon = \frac{i\varepsilon \hbar}{2m} \psi''(x, 0) - \frac{i\varepsilon}{\hbar} V(x) \psi(x, 0) \quad (1.4.18)$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = -\frac{\hbar^2}{2m} \psi''(x, 0) + V(x) \psi(x, 0). \quad (1.4.19)$$

L'equazione (1.4.19) non è altro che l'equazione di Schrodinger come la conosciamo calcolata per $t = 0$, ma vista l'arbitrarietà con cui abbiamo fissato $t = 0$, quello che abbiamo trovato vale $\forall t$.

1.5 Teoria gaussiana e determinanti funzionali

Per questa sezione è fondamentale ricordare diversi concetti visti a Metodi Matematici per la Fisica 2, per cui rimando agli appunti del corso per le parti di analisi complessa.

Nella sezione §1.2.1 siamo riusciti a fare i conti, e in generale in n dimensioni riusciamo a farli, perché tutti gli integrali che compaiono sono gaussiani. Quella che va sotto il nome di teoria gaussiana permette di riscrivere l'espressione di $K(q', t'; q, t)$ in modo da fattorizzare un termine contenente l'azione classica e un termine in cui bisogna svolgere un integrale gaussiano. Per giungere ad un'espressione di questo tipo Mariño [4] esplicita l'espressione di una lagrangiana quadratica nelle velocità e svolge i conti all'interno dell'espressione di K . Noi proviamo a seguire un ragionamento diverso, ma nei fatti facendo circa le stesse cose; proviamo a verificare che, come logico, l'espressione:

$$K(q', t'; q, t) = \int \mathcal{D}_q e^{\frac{i}{\hbar} S[q(\tau)]} \quad (1.5.1)$$

che considera sia il cammino classico, sia gli altri ∞ cammini quantistici possibili, contenga solo la S classica nel momento in cui consideriamo un sistema macroscopico.

Attenzione solo al fatto che con in termine *contenere* intendiamo dire che il contributo dominante all'integrale del propagatore viene da un intorno (salsicciotto) piccolo quanto si vuole dell'azione classica. Il che vuol dire, sapendo che $\hbar \sim 1 \cdot 10^{-34}$ Js e che nell'esponenziale compare:

$$\frac{i}{\hbar} S[q(\tau)] \quad (1.5.2)$$

che in un sistema macroscopico stiamo dividendo un'azione S macroscopica per un numero molto piccolo.

Prendiamo il cammino $q(t)$ e un generico cammino:

$$q'(t) = q(t) + \delta q(t) \quad (1.5.3)$$

tra un'istante iniziale t_a e finale t_b , con la condizione che:

$$\delta q(t_a) = \delta q(t_b) = 0. \quad (1.5.4)$$

È ragionevole prendere δq piccolo, poiché inteso come una deformazione del cammino $q(t)$, che si traduce in:

$$\frac{\delta q}{q} \ll 1. \quad (1.5.5)$$

Però, per un sistema macroscopico anche un δq piccolo è tale per cui:

$$\frac{\delta q}{\hbar} \sim \infty \quad (1.5.6)$$

quindi, quando facciamo la variazione del cammino per un sistema classico anche cammini molto vicini hanno azioni molto diverse, e quindi fasi dell'esponenziale molto diverse (oscillazioni grandi). I contributi nel path integral si cancellano tutti, per via delle forti oscillazioni per piccole deformazioni e quindi per via del lemma di Riemann, e rimane solo il contributo del cammino classico, che rende minima l'azione e per cui il termine al primo ordine dello sviluppo per piccole variazioni di cammino di S_{cl} è nullo. Più il sistema è macroscopico più il tubetto, che dà contributo al propagatore, attorno l'azione classica si restringe.

I cammini che non danno contributo nullo a K sono quelli per cui l'azione varia di una quantità paragonabile ad \hbar , in modo che la fase dell'esponenziale non sia paragonabile a ∞ e non si applichi il lemma di Riemann.

Abbiamo intuito che dobbiamo fare uno sviluppo di K utilizzando il metodo della fase stazionaria. Scriviamo:

$$K_N(b; a) = \frac{1}{\mathcal{N}} \int \prod_{k=1}^{N-1} \frac{dq_k}{\mathcal{N}} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{i=0}^{N-1} L(q, \dot{q})_{t=t_i} \Delta t \right\} \quad (1.5.7)$$

in cui abbiamo scritto:

$$S = \sum_{i=0}^{N-1} L(q, \dot{q})_{t=t_i} \Delta t \quad (1.5.8)$$

con all'interno:

$$L(q, \dot{q})_{t=t_i} = L(q_i, \dot{q}_i) \equiv L(q_i, q_{i+1}) = \frac{1}{2} m (q_{i+1} - q_i)^2 \frac{1}{\Delta t^2} - V(q_i) \quad (1.5.9)$$

in cui abbiamo utilizzato il fatto che nel caso discreto la derivata la possiamo scrivere come rapporto incrementale.

Dal metodo della fase stazionaria sappiamo bene che per via del lemma di Riemann tutti gli integrali dell'esponenziale si cancellano ad eccezione di quello per cui la fase, quindi nel nostro caso l'azione, è stazionaria. Dobbiamo cercare quindi chi soddisfa:

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = 0 \quad \forall i \quad (1.5.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial q_i} L(q_i, q_{i+1}) + \frac{\partial}{\partial q_i} L(q_{i-1}, q_i) = 0 \quad (1.5.11)$$

scriviamo la forma discreta della derivata:

$$-\frac{m(q_{i+1} - q_i)}{\Delta t^2} - \frac{\partial V(q_i)}{\partial q_i} + \frac{m(q_i - q_{i-1})}{\Delta t^2} = 0 \quad (1.5.12)$$

$$\frac{m}{\Delta t} \{\dot{q}_{i-1} - \dot{q}_i\} - \frac{\partial V(q_i)}{\partial q_i} = 0 \quad (1.5.13)$$

$$m\ddot{q}_i = -\frac{\partial V(q_i)}{\partial q_i} \quad (1.5.14)$$

che è un'espressione che ci piace poiché non è altro che l'equazione di Newton e che ci conferma il fatto che i punti q_i che rendono stazionario S sono quelli classici.

Chiamiamo q_{i0} le soluzioni dell'equazione (1.5.14). Possiamo sempre scrivere, in modo generico, un cammino discostato dal cammino classico di una quantità ω_i come:

$$q_i = q_{i0} + \omega_i \quad (1.5.15)$$

e preso questo cammino generico, possiamo scrivere l'azione $S(q_i)$ e sviluppare in potenze di ω_i :

$$S(q_i) = S(q_{i0} + \omega_i) \quad (1.5.16)$$

$$= S(q_{i0}) + \underbrace{\frac{\partial S}{\partial q_i} \Big|_{q_i=q_{i0}}}_{=0} \omega_i + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial q_j} \Big|_{q_i=q_{i0}}}_{\equiv X_{ij}} \omega_i \omega_j + \mathcal{O}(\omega^3) \quad (1.5.17)$$

in cui abbiamo definito l'operatore X_{ij} . Possiamo scrivere lo sviluppo come:

$$S(q_i) = S_{cl} + S_2 + S_{\geq 3} \quad (1.5.18)$$

in cui i vari termini sono:

$$S_{cl} = \text{azione classica} \quad (1.5.19)$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial q_j} \Big|_{q_i=q_{i0}} \omega_i \omega_j = X_{ij} \omega_i \omega_j \quad (1.5.20)$$

$$S_{\geq 3} = \text{termini con 3 o più } \omega. \quad (1.5.21)$$

Dunque, scrivendo il generico cammino (1.5.15) abbiamo suggerito un cambio di variabile da fare nell'integrale di K , ovvero una traslazione di una costante (il cammino classico), e per cui:

$$dq_i = d\omega_i \quad (1.5.22)$$

il propagatore (1.5.7) diventa quindi:

$$K_N(b; a) = \frac{1}{\mathcal{N}} \int \prod_{k=1}^{N-1} \frac{d\omega_k}{\mathcal{N}} e^{\frac{i}{\hbar} S_{cl}} e^{\frac{i}{\hbar} \omega_i X_{ij} \omega_j} \left(1 + \frac{i}{\hbar} S_{\geq 3} + \dots \right) \quad (1.5.23)$$

in cui abbiamo già fatto il primo passaggio del metodo della fare stazionaria, ovvero scrivere:

$$e^{\frac{i}{\hbar}S_{\geq 3}} \sim \left(1 + \frac{i}{\hbar}S_{\geq 3} + \dots\right). \quad (1.5.24)$$

Il termine dominante dello sviluppo (1.5.23) ci darà l'**approssimazione semiclassica**, mentre prendendo i termini successivi, che sono i termini che distinguono i vari cammini, saremo in grado di fare uno **sviluppo perturbativo**.

Possiamo però notare che abbiamo, indici sommati i e j nel termine:

$$S_2(\omega) = \sum_{ij} \omega_i X_{ij} \omega_j \quad (1.5.25)$$

che non è altro che una generica forma quadratica in ω . L'espressione (1.5.25) può anche essere scritta come prodotto di vettori e matrici di dimensione N e $N \times N$:

$$S_2 = \omega^T X \omega. \quad (1.5.26)$$

Guarderemo nelle due sottosezioni seguenti come trattare due casi specifici.

1.5.1 Caso matrici diagonali

Consideriamo il caso semplificato in cui abbiamo solo matrici diagonali, in questo modo anche S_2 e i pezzi di $S_{\geq 3}$ lo sono, e abbiamo:

$$S_2(\omega) = \sum_k \omega_k X_{kk} \omega_k = \sum_k X_{kk} \omega_k^2 \quad (1.5.27)$$

$$S_{\geq 3}(\omega) = \sum_k Y_k \omega_k^3 + Z_k \omega_k^4 + \dots \quad (1.5.28)$$

e l'integrale di cammino lo possiamo scrivere in modo compatto come:

$$K = \prod_{k=0}^{N-1} \frac{1}{\mathcal{N}^2} e^{\frac{i}{\hbar}S_{cl}} A_k \quad (1.5.29)$$

dove, indicando con x_k gli elementi di matrice di X_{kk} :

$$A_k = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega_k e^{\frac{i}{\hbar}x_k \omega_k^2} \left[1 + \frac{i}{\hbar}(Y_k \omega_k^3 + Z_k \omega_k^4 + \dots) - \frac{1}{2\hbar^2}(Y_k \omega_k^3 + Z_k \omega_k^4 + \dots)^2 + \dots \right]. \quad (1.5.30)$$

Quindi, non abbiamo più da fare un'integrale multiplo per calcolarci K , bensì una moltiplicazione di tanti integrali.

Continuiamo a seguire il metodo della fase stazionaria. Supponiamo $x_k > 0$ e scriviamo il cambio:

$$\omega_k = e^{i\frac{\pi}{4}\rho_k} \quad (1.5.31)$$

così da modificare il cammino per passare sul punto stazionario con un'inclinazione di $\pi/4$. Ricordiamo che stiamo sviluppando per $\hbar \rightarrow 0$. In questo modo abbiamo:

$$A_k = e^{i\frac{\pi}{4}\rho_k} \int_{-\infty}^{+\infty} d\rho_k e^{-\frac{x_k}{\hbar}\rho_k^2} \left(1 - \frac{i}{\hbar} Z \rho^4 + \frac{i}{2\hbar^2} Y \rho^6 + \dots \right) \quad (1.5.32)$$

in cui abbiamo scritto le correzioni in \hbar solo diverse da zero, ovvero, quelle pari, poiché le correzioni con potenze dispari di ρ andranno a zero una volta integrate; per vedere ciò basta ricordare i risultati:

$$I_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-\alpha x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad (1.5.33)$$

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-\alpha x^2} x^4 = \frac{3}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \frac{1}{\alpha^2} \quad (1.5.34)$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-\alpha x^2} x^6 = -\frac{15}{8} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \frac{1}{\alpha^3}. \quad (1.5.35)$$

Facendo i conti, tenendo solo le prime correzioni in ρ , di (1.5.32) arriviamo a:

$$A_k = e^{i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{\pi\hbar}{x_k}} \left(1 - \frac{i}{\hbar} Z \frac{3}{4} \frac{\hbar^2}{x_k^2} - \frac{i}{2\hbar^2} Y \frac{15}{8} \frac{\hbar^3}{x_k^3} \right) \quad (1.5.36)$$

$$= e^{i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{\pi\hbar}{x_k}} \left[1 - i\hbar \left(Z \frac{3}{4} \frac{1}{x_k^2} + Y \frac{15}{16} \frac{1}{x_k^3} \right) \right] \quad (1.5.37)$$

notiamo che abbiamo ottenuto una cosa del tipo $[1 + \alpha(\dots)]$ in cui i termini tra parentesi tonde sono i pezzi dello sviluppo perturbativo in potenze di \hbar , che derivano dallo sviluppo dei pezzi di S non quadratici.

Come possiamo vedere graficamente questa cosa? Abbiamo detto che fare il limite $\hbar \rightarrow 0$ vuol dire porsi in traiettorie prossime (in un salsicciotto sempre più piccolo) a quella classica, poiché, come già detto, se $S(\omega) \gg \hbar$ allora si hanno oscillazioni frenetiche dell'esponenziale che annullano il contributo dell'integrale. Graficamente è visibile nella figura 1.7, in cui possiamo notare che nelle regioni prima e dopo il picco centrale i contributi di $S(\omega)$ vanno a 0. L'unico pezzo non mediato a 0 è dove $S(\omega)$ è stazionario, ossia costante, che abbiamo visto e sappiamo essere per $\omega = 0$. Infatti, $\omega = 0$ è proprio il punto per cui si ha $e^{i\frac{\pi}{4}S}$ con fase costante e non si media a 0. Per motivazioni riguardo quello appena detto rimando agli appunti di Metodi Matematici per la Fisica 2.

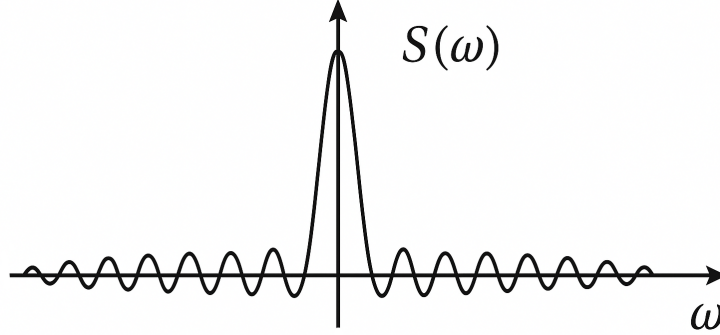


Figura 1.7: Rappresentazione grafica dei contributi dei vari cammini.

Continuiamo ad implementare i conti che avevamo iniziato e consideriamo solo il termine dominante di (1.5.37):

$$A_k = e^{i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{\pi\hbar}{x_k}} = \sqrt{\frac{i\pi\hbar}{x_k}} \quad (1.5.38)$$

che rimettendolo nell'integrale (1.5.29) porta a:

$$K(t_b, x_b; t_a, x_a) = \frac{1}{\mathcal{N}} e^{i\frac{\hbar}{\hbar} S_{cl}} \int \prod_{k=1}^{N-1} \frac{d\omega_k}{\mathcal{N}} e^{i\frac{\hbar}{\hbar} S_2(\omega_k)} \left(1 + \dots\right) \quad (1.5.39)$$

$$= \frac{e^{i\frac{\hbar}{\hbar} S_{cl}} (i\pi\hbar)^{\frac{N-1}{2}}}{\mathcal{N} \mathcal{N}^{N-1}} \frac{1}{(x_1 x_2 \dots x_{N-1})^{1/2}} \quad (1.5.40)$$

Notiamo a questo punto che l'ultimo denominatore di (1.5.40) non è altro che il determinante della matrice X_{kk} , che ricordiamo avere elementi x_k , nel caso di S_2 diagonale. Ovviamente è un caso particolare e valido in generale.

Eslicitando la costante di normalizzazione:

$$\mathcal{N} = \sqrt{\frac{2\pi i\hbar\Delta t}{m}} \quad (1.5.41)$$

viene:

$$K(t_b, x_b; t_a, x_a) = \left(\frac{m}{2\pi i\hbar\Delta t}\right)^{1/2} \left(\frac{m}{2\Delta t}\right)^{\frac{N-1}{2}} e^{i\frac{\hbar}{\hbar} S_{cl}} (\det X)^{-1/2}. \quad (1.5.42)$$

Quindi, siamo riusciti a vedere che il propagatore ha un pezzo classico e pezzi perturbativi. Il termine $\det X$ lo chiamiamo **determinante funzionale** e risulterà fondamentale saperlo calcolare in varie situazioni.

Infatti, calcolare un path integral implica calcolare il limite per $N \rightarrow \infty$ del determinante di una matrice $N \times N$, che abbiamo chiamato X . Ci

viene naturale interpretare il limite come il determinante dell'operatore X . Possiamo giustificare il risultato vedendo l'integrale:

$$\int \mathcal{D}\omega e^{\frac{im}{2\hbar}\omega X \omega} \quad (1.5.43)$$

che è il pezzo, sviluppando l'azione, in cui compare l'operatore X , come una versione infinito dimensionale di un'integrale gaussiana e che ci possiamo aspettare essere proporzionale a:

$$\frac{1}{\sqrt{\det X}}. \quad (1.5.44)$$

Il determinante possiamo pensare di calcolarlo, anche se non proprio ben definito, come prodotto infinito degli autovalori λ_n dell'operatore X :

$$\det X = \prod_{n=1}^{\infty} \lambda_n. \quad (1.5.45)$$

La realtà è che riusciremo nella maggior parte dei casi a risolvere lo spettro di X , quindi a trovare autofunzioni ed autovalori, ma allo stesso tempo ci troveremo quasi sempre in situazioni in cui il prodotto (1.5.45) è chiaramente divergente. Vedremo due esempi, nella sezione §1.6, in cui riusciremo a regolarizzare e a calcolare il determinante.

1.5.2 Caso matrici simmetriche

Noi abbiamo fatto una notevole semplificazione quando abbiamo scelto X diagonale, rendendo il risultato un caso particolare, ma possiamo generalizzarlo facilmente al caso in cui X è diagonalizzabile. Infatti, se X è simmetrica, allora si può diagonalizzare con una matrice D diagonale che contiene gli autovalori di X , una matrice M ortogonale formata dagli autovettori di X e possiamo sempre scrivere:

$$X = M D M^T \quad (1.5.46)$$

in cui, essendo X simmetrica, si ha $M^T = M^{-1}$. Nello sviluppo di $S(\omega)$ si ha:

$$\omega^T X \omega \quad (1.5.47)$$

il cambio di variabili che faremo sarà:

$$x = M^T \omega \quad (1.5.48)$$

che porta a:

$$\omega^T X \omega = \omega^T M D M^T \omega = x^T D x. \quad (1.5.49)$$

Il cambio (1.5.49) nell'integrale (1.5.29), a meno di fattori di normalizzazione, comporta:

$$\int \prod_{k=1}^{N-1} d\omega_k e^{\frac{i}{\hbar} \omega^T X \omega} = \int \prod_{k=1}^{N-1} dx_k J e^{\frac{i}{\hbar} x^T D x} \quad (1.5.50)$$

in cui abbiamo inserito J jacobiano, che non è altro che il determinante (in valore assoluto) del cambio di variabile. Se vale che $M^T = M^{-1}$, ossia M è ortogonale, allora si ha:

$$M^T M = M^{-1} M = \mathbb{1} \implies \det\{M^T M\} = \det\{\mathbb{1}\} \quad (1.5.51)$$

$$\implies (\det\{M\})^2 = 1 \implies \det\{M\} = \pm 1 \quad (1.5.52)$$

dunque si ha $J = 1$ con questo cambio di coordinate. In questo modo abbiamo l'integrale:

$$\prod_{k=1}^{N-1} \int dx_k e^{\frac{i}{\hbar} \lambda_k x_k^2} \quad (1.5.53)$$

dove indichiamo con λ_k gli elementi della matrice D :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & & \lambda_{N-1} \end{pmatrix}. \quad (1.5.54)$$

Come abbiamo già potuto notare nella prima parte della sezione otteniamo:

$$\prod_{k=1}^{N-1} \int dx_k e^{\frac{i}{\hbar} \lambda_k x_k^2} = \prod_{k=1}^{N-1} \sqrt{\frac{\pi \hbar i}{\lambda_k}} = \left(\sqrt{i \hbar \pi} \right)^{N-1} (\det X)^{-1/2} \quad (1.5.55)$$

in cui abbiamo scritto il determinante funzionale di X , quando in realtà sarebbe $\det D$, poiché:

$$\det X = \det\{M^T D M\} = \det\{M^T\} \det\{D\} \det\{M\} = \det D. \quad (1.5.56)$$

Però, fin'ora abbiamo solo fatto il caso discreto e ci siamo dimenticati dei fattori di normalizzazione di (1.5.29). Vediamo le cose fatte bene:

$$K_D(t_b, x_b; t_a, x_a) = \frac{1}{\mathcal{N}} e^{\frac{i}{\hbar} S_{cl}} \int \prod_{k=1}^{N-1} \frac{d\omega_k}{\mathcal{N}} e^{\frac{i}{\hbar} S_2(\omega_k)} (1 + \dots) \quad (1.5.57)$$

che nel limite continuo $N \rightarrow \infty$:

$$K_D(t_b, x_b; t_a, x_a) = e^{\frac{i}{\hbar} S_{cl}} \int \mathcal{D}\omega e^{\frac{i}{\hbar} S_2[\omega]} (1 + \dots). \quad (1.5.58)$$

Dalla relazione (1.5.58) si vede che tutta la dipendenza da x_a e x_b sta nell'esponenziale con l'azione classica S_{cl} , mentre l'integrale funzionale contiene solo quella da t_a e t_b visto che ω ha condizioni periodiche (ricordiamoci che $\omega(t)$ rappresenta la fluttuazione di ciascun cammino rispetto quello classico, dunque è tale per cui $\omega(t_a) = \omega(t_b) = 0$). La relazione (1.5.58) ovviamente è identico a quello trovato con le matrici diagonali e porta allo stesso risultato (1.5.42).

1.5.3 Caso di operatore differenziale

Prima di concludere la sezione notiamo che saremmo potuti arrivare allo stesso risultato (1.5.42) semplicemente utilizzando la definizione di propagatore. Abbiamo:

$$K(x_b, t_b; x_a, t_a) = \int \mathcal{D}_q e^{\frac{i}{\hbar} S[q]} \quad , \quad S = \int_{t_a}^{t_b} dt L(q, \dot{q}) \quad (1.5.59)$$

e ci chiediamo cos'è l'azione $S[q]$ quando deformiamo il cammino come $q = q_0 + \omega$:

$$S[q] = S[q_0] + S_1[\omega] + S_2[\omega] + S_3[\omega] + \dots \quad (1.5.60)$$

in cui abbiamo: $S[q_0]$ che è l'azione calcolata sul cammino classico; $S_1[\omega] = 0$ poiché sviluppare l'azione al primo ordine equivale a sviluppare la lagrangiana $L(q, \dot{q})$ al primo ordine, e dunque ottenere l'equazione di Eulero-Lagrange; i termini S_2, S_3 eccetera sono fluttuazioni. Analizziamo meglio chi è il secondo termine dello sviluppo, ovvero, il primo non nullo dopo l'azione sul cammino classico:

$$S_2[\omega] = \frac{1}{2} \int_{t_a}^{t_b} dt \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2} \Big|_{q=q_0} \dot{\omega}^2 + \frac{\partial^2 L}{\partial q \partial \dot{q}} \Big|_{q=q_0} \omega \dot{\omega} + \frac{\partial^2 L}{\partial q^2} \Big|_{q=q_0} \omega^2 \right) \quad (1.5.61)$$

$$\frac{1}{2} \int_{t_a}^{t_b} dt (\dot{\omega} A \dot{\omega} + \omega B \dot{\omega} + \omega C \omega) \quad (1.5.62)$$

in cui abbiamo scritto:

$$A = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2} \Big|_{q=q_0} \quad , \quad B = \frac{\partial^2 L}{\partial q \partial \dot{q}} \Big|_{q=q_0} \quad , \quad C = \frac{\partial^2 L}{\partial q^2} \Big|_{q=q_0} \quad (1.5.63)$$

e nella forma (1.5.62) il propagatore è scritto quasi come forma quadratica in ω , in cui dovremmo avere una cosa tipo $\omega(\dots)\omega$. Proviamo a fare un'integrazione per parti, del termine in cui compare A , per provare ad arrivare ad una forma quadratica:

$$\int \dot{\omega} A \dot{\omega} = \int \frac{d\omega}{dt} dt = \underbrace{\omega(A \dot{\omega})}_{=0} \Big|_{t_a}^{t_b} - \int_{t_a}^{t_b} dt \omega (\dot{A} \dot{\omega} + A \ddot{\omega}) \quad (1.5.64)$$

e si ha dunque:

$$S_2[\omega] = \frac{1}{2} \int_{t_a}^{t_b} dt \omega \left[-\dot{A} \frac{d}{dt} - A \frac{d^2}{dt^2} + B \frac{d}{dt} + C \right] \omega \quad (1.5.65)$$

in cui il termine tra le parentesi quadre è l'operatore che prima abbiamo chiamato X , che in questo caso non è una matrice (diagonale o simmetrica) bensì un'operatore differenziale.

Dallo sviluppo di $S[q]$ possiamo scrivere:

$$K(b, a) = e^{\frac{i}{\hbar} S_{cl}} \int \mathcal{D}\omega e^{\frac{i}{\hbar} S_2[\omega]} \quad (1.5.66)$$

e per via di quello detto per l'equazione (1.5.65) possiamo sempre dire che:

$$K(b, a) = e^{\frac{i}{\hbar} S_{cl}} (\det X)^{1/2} \quad (1.5.67)$$

a meno di fattori di normalizzazione e in cui $\det X$ è il determinante funzionale.

Quindi, in ipotetici esercizi o conti l'unica cosa importante è individuare l'operatore X con cui si ha a che fare e calcolarne il determinante in qualche modo. Notiamo due cose: la prima è che l'integrazione per parti che ci ha permesso di arrivare a (1.5.65) non è una cosa specifica per questa parte di teoria, ma un "truccetto" che si usa in molti casi; la seconda è che calcolare il determinante non vuol dire altro che moltiplicare tutti gli autovalori di X . Vedremo in seguito alcuni casi notevoli.

1.6 Casi tipici

Vediamo in questa sezione alcuni esempi, unidimensionali, su come effettivamente si utilizzino gli integrali di cammino. Una volta che capiremo il formalismo al discreto potremo elevare tutto al continuo molto facilmente. Applicheremo:

$$K_D(t_b, x_b; t_a, x_a) = \int \mathcal{D}q e^{\frac{i}{\hbar} S[q]} = e^{\frac{i}{\hbar} S_{cl}} \int \mathcal{D}\omega e^{\frac{i}{\hbar} S_2[\omega]} (1 + \dots) \quad (1.6.1)$$

ovvero, la teoria gaussiana e il calcolo degli integrali funzionali, a due esempi specifici.

1.6.1 Particella libera

Riprendiamo lo stesso esempio visto nella sezione §1.2.1, ma stavolta utilizzeremo gli strumenti sviluppati nella sezione §1.5 e di cui potremo confrontare i risultati con quelli già trovati.

Abbiamo già visto che l'azione classica di particella libera è:

$$S_{cl} = \frac{1}{2}m \frac{(x_b - x_a)^2}{t_b - t_a} \quad (1.6.2)$$

quindi dovremmo capire chi è S_2 da inserire in (1.5.58). Partiamo come al solito dalla definizione:

$$S = \int dt \frac{m}{2} \dot{q}^2 \quad (1.6.3)$$

facciamo il cambio di variabili:

$$q = q_0 + \omega \quad \longrightarrow \quad \dot{q} = \dot{\omega} \quad (1.6.4)$$

e otteniamo:

$$S_2 = \frac{m}{2} \int_{t_a}^{t_b} dt \dot{\omega}^2 \quad (1.6.5)$$

ma ricordandoci che gli estremi sono fissi:

$$\omega(t_a) = \omega(t_b) = 0. \quad (1.6.6)$$

Inserendo le cose appena viste nell'espressione del propagatore (1.5.58) al primo ordine abbiamo:

$$K(x_b, t_b; x_a, t_a) = e^{\frac{im}{2\hbar} \frac{(x_b - x_a)^2}{t_b - t_a}} \int \mathcal{D}\omega e^{\frac{im}{2\hbar} \int_{t_a}^{t_b} dt \dot{\omega}^2} \quad (1.6.7)$$

in cui vediamo che la dipendenza dalle coordinate (x) compare solo nell'azione classica. Confrontando l'espressione (1.6.7) con il risultato del propagatore che già abbiamo trovato (1.2.52) possiamo vedere che:

$$\int \mathcal{D}\omega e^{\frac{im}{2\hbar} \int_{t_a}^{t_b} dt \dot{\omega}^2} \equiv \frac{1}{\mathcal{N}} = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar (t_b - t_a)}} \quad (1.6.8)$$

e, come intuito qualche pagina fa nella sezione §1.5, vediamo che la dipendenza temporale è contenuta nell'integrale funzionale e che possiamo scrivere:

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}(t_b - t_a). \quad (1.6.9)$$

Quest'ultimissima affermazione ovviamente è verificabile. Il punto di partenza è:

$$K(x_b, t_b; x_a, t_a) = \int dx_c K(x_b, t_b; x_c, t_c) K(x_c, t_c; x_a, t_a) \quad (1.6.10)$$

in cui prendiamo:

$$t_b - t_a = (t_b - t_c) + (t_c - t_a) \quad (1.6.11)$$

cosa valida $\forall x$, il che ci permette di fissare arbitrariamente:

$$x_a = x_b = 0 \quad (1.6.12)$$

che ci fa vedere:

$$K(0, t_b; 0, t_a) = \int dx_c K(0, t_b; x_c, t_c) K(x_c, t_c; 0, t_a). \quad (1.6.13)$$

Utilizzando i risultati della sezione §1.2.1 possiamo dire:

$$K(0, t_b; x_c, t_c) = \frac{1}{\mathcal{N}(t_b - t_c)} e^{\frac{im}{2\hbar} \frac{x_c^2}{t_b - t_c}} \quad (1.6.14)$$

$$K(x_c, t_c; 0, t_a) = \frac{1}{\mathcal{N}(t_c - t_a)} e^{\frac{im}{2\hbar} \frac{x_c^2}{t_c - t_a}} \quad (1.6.15)$$

che ci forniscono il risultato complessivo:

$$K(0, t_b; 0, t_a) = \frac{1}{\mathcal{N}(t_b - t_c)\mathcal{N}(t_c - t_a)} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_c e^{i\alpha x_c^2} \quad (1.6.16)$$

dove scriviamo:

$$\alpha = \frac{m}{2\hbar} \left(\frac{1}{t_b - t_c} + \frac{1}{t_c - t_a} \right) = \frac{m}{2\hbar} \frac{t_b - t_a}{(t_b - t_c)(t_c - t_a)}. \quad (1.6.17)$$

L'integrale in (1.6.16) è un'integrale gaussiano che, dopo aver fatto una rotazione di Wick analoga a quella fatta in §1.2.1, sappiamo risolvere facilmente e che ci fornisce:

$$K(0, t_b; 0, t_a) = \frac{1}{\mathcal{N}(t_b - t_c)\mathcal{N}(t_c - t_a)} \sqrt{\frac{\pi i}{\alpha}} \quad (1.6.18)$$

e per confronto mi aspetto:

$$K(0, t_b; 0, t_a) = \frac{1}{\mathcal{N}(t_b - t_c)\mathcal{N}(t_c - t_a)} \sqrt{\frac{\pi i}{\alpha}} = \frac{1}{\mathcal{N}(t_b - t_a)}. \quad (1.6.19)$$

Chiamiamo:

$$T_1 = t_b - t_c \quad , \quad T_2 = t_c - t_a \quad , \quad T = T_1 + T_2 \quad (1.6.20)$$

e abbiamo:

$$\frac{1}{\mathcal{N}(T_1)\mathcal{N}(T_2)} \sqrt{\frac{\pi i}{\alpha}} = \frac{1}{\mathcal{N}(T)} \quad (1.6.21)$$

$$\frac{\mathcal{N}(T)}{\mathcal{N}(T_1)\mathcal{N}(T_2)} = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi i}} \quad (1.6.22)$$

$$\frac{\mathcal{N}(T)}{\mathcal{N}(T_1)\mathcal{N}(T_2)} = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar}} \sqrt{\frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2}} \quad (1.6.23)$$

duqnue possiamo scrivere:

$$\mathcal{N}(T) = \sqrt{\frac{2\pi i \hbar T}{m}}. \quad (1.6.24)$$

Questo esempio è importante perché ci permette di notare una cosa che si ripresenterà anche nel futuro, ossia, che oltre al dover calcolare gli integrali funzionali (che vedremo dopo), la cosa difficile è anche il dover fissare una normalizzazione, che solitamente si fa in modo opportuno a seconda del problema. Per certi sistemi la normalizzazione si fissa tenendo conto di quella che si ha nel caso libero, il che vuol dire che, scritto il propagatore, spegniamo l'interazione, vediamo il caso libero, fissiamo la normalizzazione e poi torniamo al nostro problema.

Analizzato meglio il discorso riguardo la normalizzazione e del dove si trovano le varie dipendenze spaziali e temporali, possiamo provare a calcolare il path integral sfruttando la teoria gaussiana vista nella sezione §1.5, e dunque calcolando il determinante funzionale di un operatore ancora da identificare.

Abbiamo come lagrangiana del sistema libero unidimensionale:

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \quad (1.6.25)$$

possiamo fare una deformazione del cammino:

$$x = x_0 + \omega \quad (1.6.26)$$

in cui x_0 rappresenta il cammino classico e ω sono le solite fluttuazioni per cui vale la condizione:

$$\omega(t_a) = \omega(t_b) = 0. \quad (1.6.27)$$

Conosciamo l'azione classica:

$$S_{cl} = \frac{m}{2} \frac{(x_b - x_a)^2}{t_b - t_a} \quad (1.6.28)$$

e vediamo facilmente che la deformazione del cammino porta al cambio di variabili tali per cui:

$$\dot{x} = \dot{\omega}. \quad (1.6.29)$$

L'espressione, del propagatore che vogliamo calcolare, è:

$$K(x_b, t_b; x_a, t_a) = \exp \left\{ \frac{im}{2\hbar} \frac{(x_b - x_a)^2}{t_b - t_a} \right\} \int \mathcal{D}_\omega e^{\frac{im}{2\hbar} \int_{t_a}^{t_b} dt \dot{\omega}^2} \quad (1.6.30)$$

di cui, abbiamo visto nella sezione §1.5, che l'integrale funzionale risulta essere:

$$\int \mathcal{D}_\omega e^{\frac{im}{2\hbar} \int_{t_a}^{t_b} dt \dot{\omega}^2} = C (\det X)^{-1/2} \quad (1.6.31)$$

dove C è un'opportuna normalizzazione. Nel resto della sezione ci dimenticheremo della normalizzazione del propagatore libero e ci concentreremo solamente sull'integrale funzionale. Cerchiamo di individuare l'operatore di cui calcolare il determinante. Prendiamo l'integrale che compare nell'esponentiale dell'integrale funzionale:

$$\int_{t_a}^{t_b} dt \dot{\omega}^2 \quad (1.6.32)$$

e facciamo con esso, il trucchetto già intravisto in §1.5, dell'integrazione per parti, in modo da riuscire a ricondursi ad una forma bilineare in ω :

$$\int_{t_a}^{t_b} dt \dot{\omega}^2 = \omega \dot{\omega} \Big|_{t_a}^{t_b} - \int_{t_a}^{t_b} dt \omega \ddot{\omega} = \int_{t_a}^{t_b} dt \omega \left(-\frac{d^2}{dt^2} \right) \omega \quad (1.6.33)$$

individuiamo l'operatore:

$$X = -\frac{d^2}{dt^2} \quad (1.6.34)$$

e per calcolarne il determinante possiamo calcolare il prodotto (infinito) degli autovalori (faremo la stessa cosa anche per l'oscillatore armonico). Supponiamo che le fluttuazioni attorno al cammino classico ω siano periodiche in modo da continuare a far valere la condizione che siano nulle agli estremi. Facendo questa ipotesi possiamo sviluppare la funzione $\omega(t)$ tramite Fourier:

$$\omega(t) = \sum_{n \geq 1} a_n \sin \left(\frac{\pi n t}{T} \right) = \sum_{n \geq 1} a_n \phi_n \quad (1.6.35)$$

con $T = t_b - t_a$. Proviamo ad agire con l'operatore X su $\omega(t)$ sviluppata con Fourier e vedere se otteniamo qualcosa di bello:

$$X\omega(t) = \sum_{n \geq 1} a_n X\phi_n = \sum_{n \geq 1} a_n \left(-\frac{d^2}{dt^2} \right) \sin \left(\frac{\pi n t}{T} \right) \quad (1.6.36)$$

$$= \sum_{n \geq 1} a_n \left(\frac{\pi^2}{T^2} n^2 \right) \phi_n = \left(\frac{\pi^2}{T^2} n^2 \right) \omega(t) \quad (1.6.37)$$

dunque, vediamo che $\omega(t)$, o meglio ϕ_n , sono le autofunzioni di X e $\pi^2 n^2 / T^2$ sono gli autovalori. Quindi possiamo dire:

$$\det X = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^2}{T^2} n^2 \quad (1.6.38)$$

che è l'obiettivo di questa sottosezione, ma ha il problemino di essere una cosa divergente. Un modo di procedere e arrivare al risultato è quello di fare ciò che va sotto il nome di **Zeta function regularization**. Definiamo:

$$\zeta_x(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\lambda_n^s} \quad (1.6.39)$$

dove individuiamo con λ_n gli autovalori del nostro operatore. La definizione di $\zeta_x(s)$ è utile perché se $s \in \mathbb{R}$ e sufficientemente grande, prima o poi allora convergerà e possiamo cercarne continuazioni analitiche. Notiamo che in generale la somma (1.6.39) converge se $\operatorname{Re}\{s\} > 1/2$, ma che possiamo immaginare di continuarla analiticamente in un dominio più grande, contenente $s = 0$, dov'è regolare. Ricordiamo che possiamo sempre scrivere:

$$\lambda_n^{-s} = e^{-s \log \lambda_n}. \quad (1.6.40)$$

Vediamo la derivata di $\zeta_x(s)$:

$$\left. \frac{d\zeta_x}{ds} \right|_{s=0} = \left. \frac{d}{ds} \sum_{n \geq 1} e^{-s \log \lambda_n} \right|_{s=0} \quad (1.6.41)$$

$$= \sum_{n \geq 1} \left. \frac{1}{\lambda_n^s} (-\log \lambda_n) \right|_{s=0} = - \sum_{n \geq 1} \log \lambda_n. \quad (1.6.42)$$

Notare (1.6.42) ci è utile perché permette di scrivere:

$$\det X = \prod_{n \geq 1} \frac{\pi^2}{T^2} n^2 = e^{\sum \log \lambda_n} = e^{-\zeta'_x(0)}. \quad (1.6.43)$$

Quindi, se troviamo dove $\zeta_x(s)$ converge, possiamo valutarne la derivata in $s = 0$ e riuscire a trovare il determinante di X . In questo caso abbiamo:

$$\zeta_x(s) = \left(\frac{T}{\pi}\right)^{2s} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{2s}} \equiv \left(\frac{T}{\pi}\right)^{2s} \zeta(2s) \quad (1.6.44)$$

dunque, con l'operatore X , vediamo la funzione Zeta di Riemann⁶ come continuazione analitica di (1.6.39), che può essere estesa fino $s = 0$ e che ci permette di calcolare:

$$\zeta'_x(s) = \left(\frac{T}{\pi}\right)^{2s} \left[2 \log \left(\frac{T}{\pi}\right) \zeta(2s) + 2\zeta'(2s) \right] \quad (1.6.46)$$

$$\implies \zeta'_x(0) = 2 \log \left(\frac{T}{\pi}\right) \zeta(0) + 2\zeta'(0) \quad (1.6.47)$$

in cui sappiamo che valgono⁷:

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}, \quad \zeta'(0) = \log(2\pi)\zeta(0) = -\frac{1}{2} \log(2\pi) \quad (1.6.48)$$

⁶Ricorda che la Zeta di Riemann è definita come:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (1.6.45)$$

e nel corso di Metodi 2 abbiamo visto come estendere il suo dominio a tutto il piano complesso e come il suo unico polo, semplice, sia $s = 1$.

⁷La prima delle due relazioni di (1.6.48) l'abbiamo vista nel corso di Metodi 2, quindi rimando agli appunti di quel corso, mentre la seconda relazione in 1.6.48 è dimostrata nell'Appendice B.

che quindi portano a:

$$\zeta'_x(0) = -\log\left(\frac{T}{\pi}\right) - \log(2\pi) = -\log(2T) \quad (1.6.49)$$

per cui:

$$\det X = e^{\log(2T)} = 2T = 2(t_b - t_a) \quad (1.6.50)$$

e di conseguenza:

$$(\det X)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{2(t_b - t_a)}} \quad (1.6.51)$$

che, a meno di una normalizzazione numerica che abbiamo brutalmente ignorato, è la dipendenza temporale che mi aspettavo comparisse nel propagatore.

Notiamo solo che per far tornare le normalizzazioni dovremmo considerare la misura di \mathcal{D}_ω .

Questo esempio è istruttivo poiché mostra che nonostante ci imbattiamo, a volte, in cose divergenti possiamo comunque calcolarle. Discorsi di questo tipo saranno utili in Teoria Quantistica dei Campi.

1.6.2 Oscillatore armonico

La cosa importante da ricordare ancora prima di affrontare questo esempio è che, come abbiamo già visto nel capitolo dedicato nel corso di Meccanica Quantistica I, nel caso di potenziali quadratici (come anche la particella libera) l'espressione che troviamo del propagatore K è un risultato esatto e tutti i termini perturbativi $S_{\geq 3}$ sono nulli.

Svilupperemo i conti calcolando il determinante funzionale, così come fece Feynmann nel suo lavoro originale, ma ricordiamo che potremmo farli in più modi, ad esempio, potremmo discretizzare il cammino e poi calcolare gli integrali.

Sappiamo scrivere la lagrangiana del sistema:

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \quad (1.6.52)$$

possiamo scegliere liberamente:

$$t_a = 0 \quad , \quad t_b = T. \quad (1.6.53)$$

parametrizziamo il cammino come:

$$x = x_0 + z \quad (1.6.54)$$

dove x_0 è il solito cammino classico e z le fluttuazioni attorno esso. L'espressione del propagatore è:

$$K(x_b, T; x_a, 0) = e^{\frac{i}{\hbar}S_{cl}} \int \mathcal{D}_z e^{\frac{i}{\hbar}S_2[z]}. \quad (1.6.55)$$

Quindi dobbiamo calcolare: l'azione classica S_{cl} dell'oscillatore armonico e il determinante funzionale di un operatore che dobbiamo ancora individuare. Cominciamo a preoccuparci dell'azione classica:

$$S_{cl} = \frac{m}{2} \int_0^T dt (\dot{x}_0^2(t) - \omega^2 x_0^2(t)) \quad (1.6.56)$$

in cui abbiamo $x_0(t)$ equazione del moto, che essendoci già nota, rende molto più rapido il problema rispetto altri casi in cui x_0 sarebbe da calcolare. In modo generico possiamo scrivere:

$$x_0(t) = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t} \quad (1.6.57)$$

$$\implies \dot{x}_0(t) = i\omega (Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}) \quad (1.6.58)$$

dove A e B sono costanti fissabili con le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} x_0(0) = A + B \equiv x_a \\ x_0(T) = Ae^{i\omega T} + Be^{-i\omega T} \equiv x_b \end{cases} \quad (1.6.59)$$

che portano a:

$$A = \frac{x_b - x_a e^{-i\omega T}}{e^{i\omega T} - e^{-i\omega T}} \quad (1.6.60)$$

$$B = \frac{x_a e^{i\omega T} - x_b}{e^{i\omega T} - e^{-i\omega T}}. \quad (1.6.61)$$

La lagrangiana è dunque:

$$L(x_0, \dot{x}_0) = \frac{m}{2} (\dot{x}_0^2 - \omega^2 x_0^2(t)) = \frac{m}{2} [-2\omega^2 (A^2 e^{2i\omega t} + B^2 e^{-2i\omega t})] \quad (1.6.62)$$

che ci permette di calcolare l'azione:

$$S_{cl} = \frac{m}{2} \int_0^T (-2\omega^2) (A^2 e^{2i\omega t} + B^2 e^{-2i\omega t}) dt \quad (1.6.63)$$

$$= -m\omega^2 \left(A^2 \frac{e^{2i\omega t}}{2i\omega} \Big|_0^T - B^2 \frac{e^{-2i\omega t}}{2i\omega} \Big|_0^T \right) \quad (1.6.64)$$

$$= -\frac{m\omega}{2i} (A^2 (e^{2i\omega T} - 1) - B^2 (e^{-2i\omega T} - 1)) \quad (1.6.65)$$

utilizziamo le espressioni di A (1.6.60) e B (1.6.61):

$$S_{cl} = \frac{m\omega i}{2} \frac{1}{(e^{i\omega T} - e^{-i\omega T})^2} \left[(x_b - x_a e^{-i\omega T})^2 (e^{2i\omega T} - 1) - (x_a e^{i\omega T} - x_b)^2 (e^{-2i\omega T} - 1) \right] \quad (1.6.66)$$

$$S_{cl} = \frac{m\omega i}{2} \frac{1}{(e^{i\omega T} - e^{-i\omega T})^2} \left[x_b^2 (e^{2i\omega T} - 1 - e^{-2i\omega T} + 1) - \right. \\ \left. - 2x_a x_b (e^{i\omega T} - e^{-i\omega T} + e^{i\omega T} - e^{-i\omega T}) + x_a^2 (1 - e^{-2i\omega T} - 1 + e^{2i\omega T}) \right] \quad (1.6.67)$$

$$S_{cl} = \frac{m\omega i}{2(e^{i\omega T} - e^{-i\omega T})^2} \left[(x_a^2 + x_b^2)(e^{2i\omega T} - e^{-2i\omega T}) - \right. \\ \left. - 4x_a x_b (e^{i\omega T} - e^{-i\omega T}) \right] \quad (1.6.68)$$

$$S_{cl} = \frac{m\omega i}{2(e^{i\omega T} - e^{-i\omega T})^2} \left[(x_a^2 + x_b^2)(e^{i\omega T} + e^{-i\omega T})(e^{i\omega T} - e^{-i\omega T}) - \right. \\ \left. - 4x_a x_b (e^{i\omega T} - e^{-i\omega T}) \right] \quad (1.6.69)$$

$$S_{cl} = \frac{m\omega i}{2(e^{i\omega T} - e^{-i\omega T})^2} (e^{i\omega T} - e^{-i\omega T}) \left[(x_a^2 + x_b^2)(e^{i\omega T} + e^{-i\omega T}) - \right. \\ \left. - 4x_a x_b \right] \quad (1.6.70)$$

$$S_{cl} = \frac{m\omega i}{2 \cdot 2i \sin(\omega T)} \left[(x_a^2 + x_b^2) 2 \cos(\omega T) - 4x_a x_b \right] \quad (1.6.71)$$

$$S_{cl} = \frac{m\omega}{\sin(\omega T)} \left[(x_a^2 + x_b^2) \cos(\omega T) - 2x_a x_b \right] \quad (1.6.72)$$

che è l'espressione dell'azione classica che utilizzeremo. Possiamo ancora moltiplicare per i/\hbar in modo da avere un'espressione già pronta per il propagatore:

$$\frac{i}{\hbar} S_{cl} = \frac{i}{\hbar} \frac{m\omega}{\sin(\omega T)} \left[(x_a^2 + x_b^2) \cos(\omega T) - 2x_a x_b \right]. \quad (1.6.73)$$

Ora ci manca da capire come calcolare il determinante funzionale. Possiamo scrivere il pezzo dell'integrale funzionale e analizzarlo meglio:

$$\int \mathcal{D}_z e^{\frac{i}{\hbar} S_2[z]} = \int \mathcal{D}_z e^{\frac{i}{\hbar} \frac{m}{2} \int_0^T dt (\dot{z}^2 - \omega^2 z^2)} \quad (1.6.74)$$

dobbiamo riuscire a trovare una forma quadrata in z così da poter individuare l'operatore (differenziale) di cui calcolare il determinante. Utilizziamo il solito truccetto dell'integrazione per parti. Il primo pezzo risulta:

$$\int_0^T dt \dot{z}^2 = z \dot{z} \Big|_0^T - \int_0^T dt z \frac{d^2}{dt^2} z = - \int_0^T dt z \frac{d^2}{dt^2} z \quad (1.6.75)$$

l'integrale nella fase dell'esponenziale è:

$$\int_0^T dt (\dot{z}^2 - \omega^2 z^2) = \int_0^T dt (-z) \left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2 \right) z \quad (1.6.76)$$

e possiamo individuare l'operatore, che nella sezione §1.5 abbiamo chiamato X :

$$X = \left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2 \right) \quad (1.6.77)$$

per calcolarne il determinante utilizzeremo la strategia di Feynmann. Supponiamo che le fluttuazioni attorno al cammino classico siano periodiche in modo da continuare a far valere la condizione che siano nulle agli estremi. Essendo periodiche possiamo sviluppare le z tramite Fourier:

$$z(t) = \sum_{n \geq 1} a_n \sin \left(\frac{\pi}{T} nt \right) \quad (1.6.78)$$

una rappresentazione di ciò che stiamo parlando è in figura 1.8.

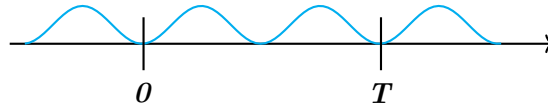


Figura 1.8: Deformazioni del cammino classico z .

Nell'integrale funzionale stiamo integrando su tutti i possibili z con misura \mathcal{D}_z , ma una volta sviluppato $z(t)$ tramite Fourier un modo naturale di integrare è quello di farlo rispetto tutti i possibili coefficienti di Fourier a_n . Scritta una certa funzione in una certa base, allora fare il path integral vuol dire integrare su tutti i coefficienti. Quello che stiamo dicendo è che scriviamo il cambio:

$$\mathcal{D}_z = \prod_{n \geq 1} da_n \quad (1.6.79)$$

e vale il *teorema di conservazione del casino*, nel senso che se prima l'integrale in dz era un pasticcio e difficile, allora lo sarà anche l'integrale in da_n poi. Le relazioni (1.6.78) e (1.6.79) ci sono molto utili poichè le funzioni trigonometriche sono autofunzioni, a meno di numeri, dell'operatore (1.6.77). Riprendiamo l'integrale (1.6.76) e sostituiamo lo sviluppo (1.6.78):

$$\int_0^T dt \sum_{n \geq 1} a_n \sin \left(\frac{\pi nt}{T} \right) \left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2 \right) \sum_{m \geq 1} a_m \sin \left(\frac{\pi mt}{T} \right) \quad (1.6.80)$$

facciamo agire l'operatore sulla sommatoria di destra:

$$\sum_{n,m \geq 1} \int_0^T dt a_n a_m \underbrace{\left(-\frac{\pi^2 m^2}{T^2} - \omega^2 \right)}_{\text{autovalori}} \sin \left(\frac{\pi nt}{T} \right) \sin \left(\frac{\pi mt}{T} \right) \quad (1.6.81)$$

l'integrale in dt lo sappiamo fare, visto che sono solamente due funzioni ortogonali, e il risultato è $T/2 \delta_{nm}$, per cui:

$$\frac{T}{2} \sum_{n \geq 1} a_n^2 \left(\omega^2 - \frac{\pi^2 n^2}{T^2} \right). \quad (1.6.82)$$

La relazione (1.6.82) è proprio l'azione S_2 nelle variabili a_n che dovremo mettere nel path integral. Facendo la sostituzione otteniamo:

$$\int \mathcal{D}_z e^{\frac{i}{\hbar} S_2[z]} = M \int da_n \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \frac{mT}{2} \sum_{n \geq 1} a_n^2 \left(\omega^2 - \frac{\pi^2 n^2}{T^2} \right) \right\} \quad (1.6.83)$$

$$= M \prod_{n \geq 1} \int da_n \exp \left\{ -\frac{imT}{4\hbar} a_n^2 \left(\omega^2 - \frac{\pi^2 n^2}{T^2} \right) \right\} \quad (1.6.84)$$

$$\equiv M \prod_{n \geq 1} I_n \quad (1.6.85)$$

in cui scriviamo l'integrale:

$$I_n = \int da_n \exp \left\{ \frac{imT}{4\hbar} a_n^2 \left(\frac{\pi^2 n^2}{T^2} - \omega^2 \right) \right\}. \quad (1.6.86)$$

Nel path integral (1.6.84) abbiamo, oltre un fattore di normalizzazione inserito per sicurezza, una produttoria di integrali non solo fattibili, ma che abbiamo anche già calcolato più volte.⁸ Calcoliamo l'integral (1.6.86) utilizzando il metodo della fase stazionaria; mettiamo:

$$a_n = e^{i\frac{\pi}{4}} x_n \quad (1.6.87)$$

in questo modo:

$$I_n = e^{i\frac{\pi}{4}} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} dx_n \exp \left\{ \frac{imT}{4\hbar} i x_n^2 \left[\frac{\pi^2 n^2}{T^2} - \omega^2 \right] \right\} \quad (1.6.88)$$

$$= e^{i\frac{\pi}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_n \exp \left\{ -\frac{mT}{4\hbar} \cdot \frac{\pi^2 n^2}{T^2} \left(1 - \frac{\omega^2 T^2}{\pi^2 n^2} \right) x_n^2 \right\} \quad (1.6.89)$$

$$= e^{i\frac{\pi}{4}} N_n \left(1 - \frac{\omega^2 T^2}{\pi^2 n^2} \right)^{-1/2} \quad (1.6.90)$$

in cui abbiamo scritto:

$$N_n = \sqrt{\pi} \sqrt{\frac{4\hbar T}{m\pi^2 n^2}} \quad (1.6.91)$$

⁸Nota che la i non è un problema perché possiamo fare una rotazione di Wick.

in cui non abbiamo inglobato anche la parentesi $(\dots)^{-1/2}$ di (1.6.90) per evidenziare dove si trova la dipendenza da ω . Dunque ora abbiamo:

$$\int \mathcal{D}_z e^{\frac{i}{\hbar} S_2[z]} = M \prod_{n \geq 1} e^{i \frac{\pi}{4}} N_n \left(1 - \frac{\omega^2 T^2}{\pi^2 n^2}\right)^{-1/2} \equiv \hat{M} \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{\omega^2 T^2}{\pi^2 n^2}\right)^{-1/2} \quad (1.6.92)$$

in cui:

$$\hat{M} = M \prod_{n=1}^{\infty} N_n e^{i \frac{\pi}{4}}. \quad (1.6.93)$$

Scrivendo le funzioni che maneggiamo in termini degli autovettori dell'operatore con cui abbiamo a che fare, non stiamo facendo altro che diagonalizzare l'operatore, il cui determinante, come sappiamo, è il prodotto degli autovalori, che si troveranno sulla diagonale. L'unico intoppo è che il prodotto che dobbiamo fare è infinito e bisogna capire bene che cos'è, oltre che regolarizzarlo in seguito. Quello che solitamente si fa è scrivere al posto del prodotto un'opportuna funzione e in seguito dire che la produttoria non è altro che quella specifica funzione valutata in un certo punto. In questo caso possiamo regolarizzare il prodotto infinito come:

$$\prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{\omega^2 T^2}{\pi^2 n^2}\right)^{-1/2} = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n \geq 1}^N \left(1 - \frac{\omega^2 T^2}{\pi^2 n^2}\right)^{-1/2} \quad (1.6.94)$$

che possiamo facilmente vedere di che cosa si tratta. Sappiamo che una funzione analitica è ben determinata una volta trovati poli e zeri. Potremmo dunque vedere quali sono le regioni in cui abbiamo poli e zeri del nostro prodotto e cercare una qualche funzione che si comporti allo stesso modo e costruire una continuazione analitica. Ragioniamo su ciò che abbiamo imparato dall'analisi delle funzioni speciali in analisi complessa. Sappiamo che:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \quad (1.6.95)$$

$$\frac{\sin(\pi z)}{\pi z} = \frac{1}{z\Gamma(z)\Gamma(1-z)} = \frac{1}{\Gamma(1+z)\Gamma(1-z)} \quad (1.6.96)$$

e ricordiamo la definizione della funzione Digamma e la rappresentazione come prodotto delle funzioni Γ :

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{z\gamma} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n} \quad (1.6.97)$$

$$\implies \frac{1}{z\Gamma(z)} = \frac{1}{\Gamma(1+z)} = e^{z\gamma} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n} \quad (1.6.98)$$

facendo il cambio $z \rightarrow -z$ abbiamo anche:

$$\frac{1}{\Gamma(1-z)} = e^{-z\gamma} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{z/n} \quad (1.6.99)$$

e facendo il prodotto tra le relazioni (1.6.98) e (1.6.99) vediamo che:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) = \frac{1}{\Gamma(1+z)\Gamma(1-z)} = \frac{\sin(\pi z)}{\pi z}. \quad (1.6.100)$$

Chiamando:

$$z = \frac{\omega T}{\pi} \quad (1.6.101)$$

possiamo vedere che (1.6.94) è:

$$\prod_{n \geq 1}^{\infty} \left(1 - \frac{\omega^2 T^2}{\pi^2 n^2}\right)^{-1/2} = \left(\frac{\sin(\omega T)}{\omega T}\right)^{-1/2}. \quad (1.6.102)$$

Troviamo quindi:

$$\int \mathcal{D}_z e^{\frac{i}{\hbar} S_2[z]} = \hat{M} \sqrt{\frac{\omega T}{\sin(\omega T)}} \equiv I(\omega). \quad (1.6.103)$$

Possiamo fissare facilmente la costante di normalizzazione di (1.6.103), poiché sappiamo che se spegniamo il potenziale armonico, ovvero facciamo $\omega \rightarrow 0$, dobbiamo ottenere il risultato di particella libera. Dunque:

$$I(0) = \hat{M} \cdot 1 = \left(\frac{n}{2\pi i \hbar T}\right)^{1/2}. \quad (1.6.104)$$

Complessivamente abbiamo quindi trovato:

$$I(\omega) = \int \mathcal{D}_z e^{\frac{i}{\hbar} S_2[z]} = \sqrt{\frac{m\omega T}{2\pi i \hbar \sin(\omega T)}} \quad (1.6.105)$$

in cui individuiamo il pezzo $\omega / \sin(\omega T)$ che avanza rispetto al caso libero per via del fatto che stiamo trattando un oscillatore armonico e non una particella libera. Come visto nella sezione §1.5 nell'equazione (1.5.67) l'integrale $I(\omega)$ non è altro che $(\det X)^{-1/2}$.

In conclusione, quindi, il propagatore nel caso dell'oscillatore armonico risulta essere:

$$K(x_b, T; x_a, 0) = e^{\frac{i}{\hbar} S_{cl}} \int \mathcal{D}_z e^{\frac{i}{\hbar} S_2[z]} \quad (1.6.106)$$

$$= \sqrt{\frac{m\omega T}{2\pi i \hbar \sin(\omega T)}} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \frac{m\omega}{\sin(\omega T)} \left[(x_a^2 + x_b^2) \cos(\omega T) - 2x_a x_b \right] \right\}. \quad (1.6.107)$$

1.7 Effetto Ahranov-Bohm

Vediamo in questa sezione un effetto della Meccanica Quantistica non relativistica utilizzando il formalismo degli integrali di cammino. Fin'ora abbiamo supposto che esista solamente un cammino classico, il che però equivale a dire di conoscere la $q(t)$, ovvero la traiettoria, il che è incompatibile con il principio di indeterminazione che ben conosciamo.

Supponiamo che esistano 2 cammini classici per andare a un punto A , ad un punto B . Vediamo la figura 1.9. Questa supposizione, dal punto di vista classico, non è un problema poiché data una posizione iniziale a t_a , possiamo conoscere anche l'impulso a quel tempo e sappiamo che date le condizioni iniziali (posizione e velocità) possiamo conoscere dove andrà la particella. Anche assumendo l'esistenza di due cammini, dunque, tutto è ragionevole poiché preso un certo impulso iniziale la particella passerà solo da uno dei due. Da punto di vista quantistico sappiamo, ricordando l'esperimento delle due fenditure, che questo è impossibile. Il principio di indeterminazione ci dice che se noi conosciamo esattamente la posizione iniziale della particella, ad esempio il punto A , non ci è possibile conoscere l'impulso che avrà lì, e dunque, non ci è possibile sapere da dove passa.

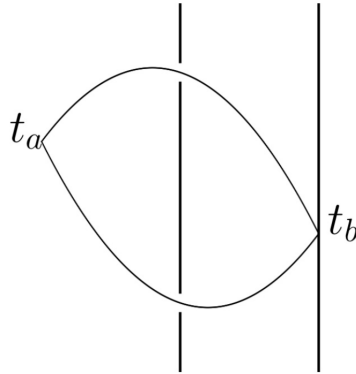


Figura 1.9: Raffigurazione di due cammini classici tra i punti A e B .

Per capire di che cosa si tratta l'effetto Ahranov-Bohm, prendiamo le solite due fenditure, una particella carica e mettiamo un campo magnetico B costante in una regione in cui siamo sicuri non passi la particella. Possiamo dire che in una certa regione non passa la particella perché mettendo le due fenditure sufficientemente distanti, nella regione che le separa vediamo che la funzione d'onda è pressoché nulla. La situazione è raffigurata nella figura 1.10.

Supponiamo che all'inizio la particella sia esattamente localizzata in \mathbf{x}_a , che vuol dire:

$$\psi(\mathbf{x}_a, t_a) = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_a) \quad (1.7.1)$$

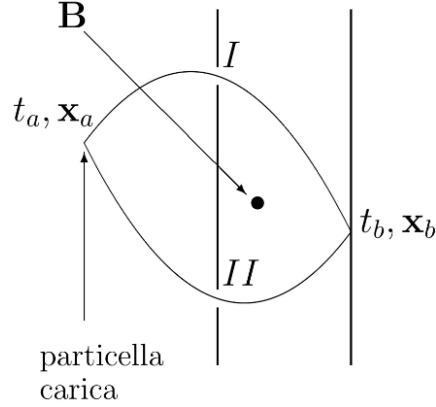


Figura 1.10: Rappresentazione del fenomeno di Aharonov-Bohm.

quindi sappiamo dire che:

$$\psi(\mathbf{x}_b, t_b) = \int d^3x K(\mathbf{x}_b, t_b; \mathbf{x}, t_a) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_a) \quad (1.7.2)$$

$$= K(\mathbf{x}_b, t_b; \mathbf{x}_a, t_a) \quad (1.7.3)$$

$$= \mathcal{N} \int \mathcal{D}_x^3 e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} dt L(\mathbf{x}, \mathbf{A}, \varphi)} \quad (1.7.4)$$

in cui abbiamo inserito la lagrangiana L che è funzione della posizione \mathbf{x} , del potenziale vettore \mathbf{A} e del potenziale scalare φ per via della presenza del campo magnetico B . La lagrangiana di una particella in un campo elettromagnetico è:

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{q}{c} \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A} - q\varphi \quad (1.7.5)$$

ma se vogliamo metterci in una situazione in cui sia presente solo il campo magnetico \mathbf{B} costante e il campo elettrico \mathbf{E} sia nullo, allora ci possiamo mettere in un particolare gauge in cui $\varphi = 0$, abbiamo solamente $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ e per cui:

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{q}{c} \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A}. \quad (1.7.6)$$

In generale, in elettromagnetismo sappiamo che vale:

$$\mathbf{B} = \vec{\nabla} \times \mathbf{A} \quad (1.7.7)$$

che ci è utile poiché possiamo calcolare l'azione:

$$S = \int_{t_a}^{t_b} dt L = S_0 + \frac{q}{c} \int_{t_a}^{t_b} dt \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A} \quad (1.7.8)$$

$$= S_0 + \frac{q}{c} \int_{\gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \quad (1.7.9)$$

in cui indichiamo con γ la traiettoria seguita dalla particella. Però, a questo punto dobbiamo ricordarci che abbiamo due possibili cammini da cui può passare la particella, infatti, la carica può passare dal cammino I, oppure II, motivo per cui il propagatore totale sarà la somma di due pezzi, che non si parlano, di cui uno guarda il cammino I e l'altro il cammino II:

$$K(\mathbf{x}_b, t_b; \mathbf{x}_a, t_a) = K_I(\mathbf{x}_b, t_b; \mathbf{x}_a, t_a) + K_{II}(\mathbf{x}_b, t_b; \mathbf{x}_a, t_a). \quad (1.7.10)$$

Nota che quello scritto in (1.7.10) è la stessa cosa che succedeva con le funzioni d'onda nello stesso esperimento delle due fenditure. Come visto nella sezione §1.5 ciascuno dei propagatori lo possiamo scrivere come:

$$K_k(\mathbf{x}_b, t_b; \mathbf{x}_a, t_a) = e^{\frac{i}{\hbar} S_{cl}^k} \int \mathcal{D}\omega e^{\frac{i}{\hbar} S_2^k} \quad (1.7.11)$$

e possiamo calcolarli:

$$K_I = \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \int_{\gamma_I} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}\right\} K_{0I}(\mathbf{x}_b, t_b; \mathbf{x}_a, t_a) \quad (1.7.12)$$

$$= \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \int_{\gamma_I} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}\right\} \psi_{0I}(\mathbf{x}_b, t_b) \quad (1.7.13)$$

$$\equiv \psi_I \quad (1.7.14)$$

$$K_{II} = \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \int_{\gamma_{II}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}\right\} \psi_{0II}(\mathbf{x}_b, t_b) \equiv \psi_{0II} \quad (1.7.15)$$

in cui indichiamo il propagatore libero con K_{0I} . Notiamo subito che rispetto al caso di propagatore libero (1.7.3), per cui avevamo $K_0 = \psi_0$, ora abbiamo guadagnato una fase per colpa della presenza di \mathbf{B} . Abbiamo già detto che, in analogia a quanto fatto in Meccanica Quantistica con le funzioni d'onda nell'esperimento delle due fenditure, possiamo calcolare il propagatore totale come somma di K_I e K_{II} . Abbiamo quindi:

$$\psi = \psi_I + \psi_{II} \quad (1.7.16)$$

in cui ψ_k hanno una fase aggiuntiva, dovuta a \mathbf{B} , rispetto le funzioni d'onda ψ_{0k} del caso libero.

Se ragioniamo un attimo ci rendiamo facilmente conto che quella fase aggiuntiva che troviamo non ha motivo di avere un particolare significato fisico sul risultato finale. Infatti, in Meccanica Quantistica abbiamo detto fin dall'inizio che l'informazione fisica della teoria fosse contenuta nel modulo quadro della funzione d'onda e che l'aggiunta di una fase arbitraria davanti al nostro stato non avrebbe cambiato in alcun modo l'informazione del sistema. Inoltre, la fase in più che ci ritroviamo è dovuta al campo magnetico \mathbf{B} , ma che è presente in una regione in cui la funzione d'onda non è presente. In più, sappiamo bene che il potenziale vettore \mathbf{A} , che compare nella fase aggiuntiva,

non è un'osservabile fisica (ciò che osserviamo in elettromagnetismo sono i campi \mathbf{E} e \mathbf{B}).

Ovviamente, in Meccanica Quantistica nulla è come sembra a primo impatto e quella fase ha un'interpretazione e modifica il risultato finale rispetto al caso libero. Infatti, sappiamo bene che ciò che conta è la funzione d'onda complessiva:

$$\psi = \psi_I + \psi_{II} \quad (1.7.17)$$

$$= \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \int_{\gamma_I} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}\right\} \psi_{0I} + \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \int_{\gamma_{II}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}\right\} \psi_{0II} \quad (1.7.18)$$

$$= \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \int_{\gamma_I} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}\right\} \left[\psi_{0I} + \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \left(\int_{\gamma_{II}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} - \int_{\gamma_I} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \right)\right\} \psi_{0II} \right] \quad (1.7.19)$$

$$= \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \int_{\gamma_I} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}\right\} \left[\psi_{0I} + \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \oint_{\gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}\right\} \psi_{0II} \right]. \quad (1.7.20)$$

La fase relativa di ψ_{0II} che troviamo nella parentesi quadra di (1.7.20) sappiamo bene che è un'effetto osservabile dal momento che quando facciamo il modulo quadro di ψ da [...] usciranno 3 termini di cui uno la contiene e non è irrilevante. Ciò che si vede sperimentalmente è che variando il campo \mathbf{B} variano le frange di interferenza. Però, prima avevamo osservato che il potenziale vettore non è un'osservabile fisica, ora però diciamo che la fase di (1.7.20), in cui c'è \mathbf{A} , è rilevante fisicamente. Ci stiamo contraddicendo? Assolutamente no, è ancora vero che \mathbf{A} non è una quantità osservabile, e guardando bene l'integrale della fase in (1.7.20) ci accorgiamo che non è esattamente il potenziale vettore a darci informazioni:

$$\oint_{\gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\Sigma / \partial\Sigma=\gamma} \vec{\nabla} \times \mathbf{A} d\Sigma = \int_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot d\hat{\Sigma}. \quad (1.7.21)$$

Abbiamo, grazie l'effetto di Aharonov-Bohm, un'altra conferma che la Meccanica Quantistica vede cose non intuibili classicamente e mostra l'esistenza di fenomeni non locali.

L'effetto di Aharonov-Bohm è stato anche il primo esperimento in cui si è visto che il campo \mathbf{A} non è solo un'artificio matematico, ma proprio un grado di libertà del sistema.

1.8 Funzione di partizione

In questa sezione proviamo a paragonare la versione euclidea dei path integral con la funzione di partizione di un sistema statistico, così come la abbiamo studiata nella Meccanica Statistica classica.

Abbiamo già visto che cos'è, come si fa una rotazione di Wick, e il fatto che permette di andare da uno spazio minkowskiano ad uno euclideo. Abbiamo studiato, nella sezione §1.5, anche come una rotazione permetta di rendere tutti gli integrali gaussiani. Una rotazione di Wick è una trasformazione del tipo:

$$t \longrightarrow -it_E \equiv -i\tau \quad (1.8.1)$$

che, per come l'abbiamo vista e come l'abbiamo fatta sembrare, sembra essere solamente un trucchetto matematico, ma nella realtà una rotazione del tipo (1.8.1) è il collegamento tra la Meccanica Quantistica e la Meccanica Statistica. In realtà una rotazione di Wick permette anche di collegare la Teoria Quantistica dei Campi con la Teoria dei Campi Statistica, come vedremo nei corsi successivi.

Prendiamo un'hamiltoniana indipendente dal tempo, tipo quella una che descrive un sistema all'equilibrio termodinamico, e scriviamo l'operatore di evoluzione temporale:

$$U(t, 0) = \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} H(q, p) t \right\} \quad (1.8.2)$$

facciamo la rotazione (1.8.1):

$$U(\tau, 0) = \exp \left\{ -\frac{1}{\hbar} H(q, p) \tau \right\} \quad (1.8.3)$$

e ci chiediamo che succederebbe se dovessimo calcolare la traccia di (1.8.3) nello spazio delle configurazioni:

$$\text{Tr}(U(t, 0)) = \int d^n q \langle q | U(t, 0) | q \rangle = \int d^n q K(q, -i\tau; 0, 0) \quad (1.8.4)$$

che non è altro che l'ampiezza di probabilità che lo stato $|q\rangle$, dopo un certo tempo immaginario $-i\tau$, si ritrovi nello stesso stato $|q\rangle$ (ovvero il propagatore K), integrata $\forall q$. Esplicitando (1.8.3) abbiamo l'uguaglianza:

$$\text{Tr} \left(e^{-\frac{1}{\hbar} H(q, p) \tau} \right) = \int d^n q K(q, -i\tau; 0, 0). \quad (1.8.5)$$

Ricordiamo un paio di cose prima di procedere. La funzione di partizione definita in modo classico era:

$$Z = \frac{1}{N! h^{3N}} \int \prod_i d^3 q_i d^3 p_i e^{-\beta H(q_i, p_i)} \quad (1.8.6)$$

notiamo che somiglia all'espressione di un path integral come lo abbiamo definito all'inizio del capitolo. La forma discreta della stessa funzione di partizione, nella sua forma canonica è:

$$Z = \sum_j e^{-\beta E_j}. \quad (1.8.7)$$

Ricordiamo che l'espressione, classica, della costante β è:

$$\beta = \frac{1}{k_B T}. \quad (1.8.8)$$

Ora, proviamo a trovare un'espressione quantistica della stessa funzione Z .

Il termine di sinistra di (1.8.5) lo possiamo individuare come una funzione di partizione, che scriviamo come:

$$Z = \text{Tr} \left(e^{-\beta H} \right) \quad (1.8.9)$$

in cui sta volta la costante β è definita come:

$$\beta = \frac{\tau}{\hbar} \quad (1.8.10)$$

che ci permette di vedere che il tempo, immaginario, ha il ruolo dell'inverso della temperatura del sistema statistico. La funzione di partizione è l'ampiezza di probabilità nel vuoto, ovvero $\langle q | U | q \rangle$.

Proviamo ora a verificare che fare il limite classico di un sistema quantistico, quindi fare $\hbar \rightarrow 0$, e di un sistema statistico, in cui facciamo $T \rightarrow \infty$, è la stessa cosa. Verificare ciò non sarebbe così assurdo, poichè fare il limite classico vuol dire chiedere che valga:

$$\frac{\hbar \omega}{k_B T} \ll 1 \quad (1.8.11)$$

che si verifica sia se \hbar è piccolo, sia se T è grande. Se prendiamo la relazione (1.8.5):

$$Z = \int d^n q \langle q | e^{-\beta H} | q \rangle = \int d^n q d^n p \langle q | p \rangle \langle p | e^{-\beta H} | q \rangle \quad (1.8.12)$$

nel limite classico $\hbar \rightarrow 0$ possiamo non preoccuparci troppo dell'ordinamento dell'hamiltoniana, far filtrare fuori l'esponenziale dal braket, ed esplicitare le definizioni di onde piane (1.2.36):

$$Z = \int d^n q d^n p \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{i}{\hbar} p q} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{i}{\hbar} p q} e^{-\beta H} = \frac{1}{2\pi} \int d^n q d^n p e^{-\beta H} \quad (1.8.13)$$

che non è altro che la definizione classica (1.8.6) che avevamo visto.

Verifichiamo, a questo punto, che le espressioni di Z coincidano sia da una descrizione classica che con la definizione quantistica. Vediamo il caso di un'oscillatore armonico, quindi per cui sappiamo già:

$$iS_{cl} = \frac{m\omega}{2} \frac{i}{\sin(\omega T)} \left((q_a^2 + q_b^2) \cos(\omega T) - 2q_a q_b \right). \quad (1.8.14)$$

Conosciamo bene l'espressione del propagatore che compare in Z (1.8.5), ovvero (1.3.43):

$$K = \int \mathcal{D}_q e^{\frac{i}{\hbar} S[q(\tau)]} \quad (1.8.15)$$

e in cui possiamo vedere cosa diventa l'azione quando facciamo la rotazione di Wick:

$$\frac{i}{\hbar} S = \frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' \left(\frac{1}{2} m \left(\frac{dq}{dt'} \right)^2 - V(q) \right) \quad (1.8.16)$$

$$\stackrel{1.8.1}{=} \frac{i}{\hbar} \int_0^{-i\beta\hbar} dt' \left(\frac{m}{2} \left(\frac{dq}{dt'} \right)^2 - V(q) \right) \quad (1.8.17)$$

$$\stackrel{\text{chiamiamo } t'=-i\tau}{=} \frac{i}{\hbar} \int_0^{\beta\hbar} (-i d\tau) \left(-\frac{m}{2} \left(\frac{dq}{d\tau} \right)^2 - V(q) \right) \quad (1.8.18)$$

$$= -\frac{1}{\hbar} \int_0^{\beta\hbar} d\tau \left(\frac{m}{2} \left(\frac{dq}{d\tau} \right)^2 + V(q) \right) \quad (1.8.19)$$

$$= -\frac{1}{\hbar} S_E \quad (1.8.20)$$

in cui chiamiamo S_E l'azione euclidea. Abbiamo dunque la funzione di partizione:

$$Z = \int dq \int \mathcal{D}_q \exp \left\{ -\frac{1}{\hbar} \int_0^{\beta\hbar} d\tau \left(\frac{m}{2} \dot{q}^2 + V(q) \right) \right\} \quad (1.8.21)$$

in cui dobbiamo ancora inserire il caso specifico dell'oscillatore armonico. Prendiamo l'oscillazione rispetto al cammino classico:

$$q = q_{cl} + x(\tau) \quad (1.8.22)$$

con la solita condizione:

$$x(0) = x(\beta\hbar) = 0. \quad (1.8.23)$$

Dalla teoria gaussiana analizzata in §1.5 sappiamo che potremmo scrivere:

$$Z = \int dq \left\{ e^{-\frac{1}{\hbar} S_{E,cl}} \int \mathcal{D}_x e^{-\frac{1}{\hbar} S_{E,2}} \right\} \quad (1.8.24)$$

ci resta da capire che cosa mettere per $S_{E,cl}$ e $S_{E,2}$ nel caso dell'oscillatore armonico. Riprendiamo l'azione classica (1.8.14), mettiamo $q_a = q_b = q$:

$$iS_{cl} = im\omega q^2 \frac{-2 \sin^2 \left(\frac{\omega T}{2} \right)}{2 \sin \left(\frac{\omega T}{2} \right) \cos \left(\frac{\omega T}{2} \right)} \quad (1.8.25)$$

$$= im\omega q^2 \tan \left(\frac{\omega T}{2} \right) \quad (1.8.26)$$

faccio la rotazione $T = -i\beta\hbar$:

$$iS_{cl} = -m\omega q^2 \frac{e^{\frac{\beta\hbar}{2}\omega} - e^{-\frac{\beta\hbar}{2}\omega}}{e^{\frac{\beta\hbar}{2}\omega} + e^{-\frac{\beta\hbar}{2}\omega}} \quad (1.8.27)$$

$$= -m\omega q^2 \tanh\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right) \quad (1.8.28)$$

$$\equiv -S_{E,cl} \quad (1.8.29)$$

quindi, abbiamo ottenuto:

$$S_{E,cl} = m\omega q^2 \tanh\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right). \quad (1.8.30)$$

Possiamo vedere che cos'è l'azione nell'integrale funzionale:

$$S_{E,2} = \frac{m}{2} \int_0^{\beta\hbar} d\tau \left(\left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 + \omega^2 x^2 \right) \quad (1.8.31)$$

$$= \frac{m}{2} \int_0^{\beta\hbar} d\tau x X x \quad (1.8.32)$$

in cui vediamo il solito operatore:

$$X = -\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega^2 \quad (1.8.33)$$

e di cui avevamo trovato:

$$\det X = \frac{\sin(\omega T)}{\omega T} \quad (1.8.34)$$

che facendo la rotazione di Wick $T = -i\beta\hbar$ diventa:

$$\det X = \frac{\sinh(\omega\beta\hbar)}{\omega\beta\hbar}. \quad (1.8.35)$$

Come già detto, le normalizzazioni le fissiamo dal caso di particella libera, non rifaccio tutti i conti, ma inserisco direttamente il risultato della sezione §1.6.2:

$$Z = \int dq e^{-\frac{m\omega}{\hbar} q^2 \tanh\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right)} \int \mathcal{D}_x e^{-\frac{1}{\hbar} S_{E,2}} \quad (1.8.36)$$

$$= \int dq e^{-\frac{m\omega}{\hbar} q^2 \tanh\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right)} \mathcal{C}(\det X)^{-1/2} \quad (1.8.37)$$

$$= \int dq e^{-\frac{m\omega}{\hbar} q^2 \tanh\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right)} \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi\hbar \sinh(\beta\hbar\omega)}} \quad (1.8.38)$$

in cui compare un'integrale gaussiano, che sappiamo fare, e che ci permette di arrivare al risultato:

$$Z = \sqrt{\pi \frac{\hbar}{m\omega \tanh\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right)}} \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi\hbar \sinh(\beta\hbar\omega)}} = \sqrt{\frac{\cosh\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right)}{2 \sinh\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right) \sinh(\beta\hbar\omega)}} \quad (1.8.39)$$

possiamo utilizzare la relazione:

$$\sinh z = 2 \sinh\left(\frac{z}{2}\right) \cosh\left(\frac{z}{2}\right) \quad (1.8.40)$$

per trovare:

$$Z = \frac{1}{2 \sinh\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right)} \quad (1.8.41)$$

che è la funzione di partizione di un oscillatore armonico, cosa che volevamo trovare.

Riassumendo: partiamo da $U(t, 0)$, facciamo una rotazione di Wick, otteniamo un'operatore di evoluzione temporale euclideo e dopodiché facciamo la traccia dell'operatore, il che non vuol dire altro che calcolare il valore di aspettazione tra gli stati $|q\rangle$, $|q\rangle$ ed integrando in dq , ovvero, integrare il propagatore $K(q, -i\tau; q, 0)$, tutto ciò prendendo condizioni al contorno periodiche.

Notiamo un secondo che avremmo potuto anche fare la somma su tutti i livelli energetici possibili, ovvero, avremmo potuto fare:

$$Z = \text{Tr} \left(e^{-\beta H} \right) = \sum_n e^{-\beta(n+\frac{1}{2})\hbar\omega}. \quad (1.8.42)$$

Appendice A

Digressione sulla δ di Dirac

Facciamo in quest'appendice una breve digressione/ripasso sulla δ di Dirac utile per la sezione §1.4.

Sappiamo che:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}} e^{-\frac{x^2}{2\alpha}} = \delta(x) \quad (\text{A.0.1})$$

in cui α è la larghezza gaussiana. L'espressione (A.0.1) ci dice che se sviluppiamo il termine $e^{-\frac{x^2}{2\alpha}}/\sqrt{2\pi\alpha}$ in potenze di α , allora il termine di ordine 0 è la $\delta(x)$. Proviamo a fare lo sviluppo di $e^{-\frac{x^2}{2\alpha}}/\sqrt{2\pi\alpha}$ e vedere cosa esce al primo termine:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}} e^{-\frac{x^2}{2\alpha}} = \delta(x) + \alpha \frac{d}{d\alpha} \left\{ \frac{e^{-\frac{x^2}{2\alpha}}}{\sqrt{2\pi\alpha}} \right\}_{\alpha=0} \quad (\text{A.0.2})$$

$$= \delta(x) + \alpha \left[\frac{e^{-\frac{x^2}{2\alpha}}}{\sqrt{2\pi\alpha}} \left\{ \frac{x^2}{2\alpha^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{\alpha} \right\} \right]_{\alpha=0} \quad (\text{A.0.3})$$

$$= \delta(x) + \alpha \left[\frac{e^{-\frac{x^2}{2\alpha}}}{2\sqrt{2\pi\alpha}} \left\{ \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha} \right\} \right]_{\alpha=0} \quad (\text{A.0.4})$$

valutiamo la derivata prima a $\alpha = 0$:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}} e^{-\frac{x^2}{2\alpha}} = \delta(x) + \frac{\alpha}{2} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{x^2}{2\alpha}}}{\sqrt{2\pi\alpha}} \left\{ \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha} \right\}. \quad (\text{A.0.5})$$

Dobbiamo a questo punto notare che:

$$\frac{d}{dx} \frac{e^{-\frac{x^2}{2\alpha}}}{\sqrt{2\pi\alpha}} = \frac{e^{-\frac{x^2}{2\alpha}}}{\sqrt{2\pi\alpha}} \left(-\frac{x}{\alpha} \right) \quad (\text{A.0.6})$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \frac{e^{-\frac{x^2}{2\alpha}}}{\sqrt{2\pi\alpha}} = \frac{e^{-\frac{x^2}{2\alpha}}}{\sqrt{2\pi\alpha}} \left(\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha} \right) \quad (\text{A.0.7})$$

La relazione (A.0.7) ci permette di riscrivere lo sviluppo (A.0.4) con dentro una derivata seconda in x , il che è utile perché così possiamo scambiare limite e derivata, essendo tutte distribuzioni che permettono di spostare i pezzi a piacimento, e ottenere:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}} e^{-\frac{x^2}{2\alpha}} = \delta(x) + \frac{\alpha}{2} \frac{d^2}{dx^2} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{x^2}{2\alpha}}}{\sqrt{2\pi\alpha}} \quad (\text{A.0.8})$$

in cui si palesa la definizione (A.0.1). Lo sviluppo è dunque:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}} e^{-\frac{x^2}{2\alpha}} = \delta(x) + \frac{\alpha}{2} \delta''(x) + \mathcal{O}(\alpha^2). \quad (\text{A.0.9})$$

Appendice B

Dimostrazione valore $\zeta'(0)$

Dimostriamo in questa sezione la relazione:

$$\zeta'(0) = \zeta(0) \log(2\pi) \quad (\text{B.0.1})$$

Utilizzando diverse cose apprese in corsi precedenti e dove non specificato si faccia riferimento agli appunti di Metodi 2. Partiamo da:

$$\frac{\zeta(s)}{\Gamma(1-s)} = \frac{e^{i\pi s}}{2\pi i} \int_{C_H} dz \frac{z^{s-1}}{e^z - 1} \quad (\text{B.0.2})$$

in cui C_H è il cammino di Hankel, ed è una relazione che abbiamo visto e dimostrato al corso di Metodi 2. Facciamo la derivata e valutiamola per $s = 1$:

$$\left. \frac{d}{ds} \left(\frac{\zeta(s)}{\Gamma(1-s)} \right) \right|_{s=1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_H} \frac{dz}{z} \frac{(e^{-i\pi} z)^s}{e^z - 1} (\log z - i\pi) \Big|_{s=1} \quad (\text{B.0.3})$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \int_{C_H} \frac{dz}{e^z - 1} (\log z - i\pi) \quad (\text{B.0.4})$$

possiamo stare nella regione in cui ζ converge, in cui $C_H \rightarrow (0, +\infty)$, ma in essa, con $s = 1$, potremmo avere problemi. Spezziamo il cammino C_H in 3 pezzi:

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} \text{sotto} + \int_{\varepsilon}^{\infty} \text{sopra} + \oint_{C_{\varepsilon}} \quad (\text{B.0.5})$$

in cui avremo:

sopra: $z \in \mathbb{R}$

sotto: $ze^{2i\pi}$

e ricordando come fare gli integrali di Metodi 2:

$$\left. \frac{d}{ds} \left(\frac{\zeta(s)}{\Gamma(1-s)} \right) \right|_{s=1} = \int_{\varepsilon}^{\infty} dz (\text{sopra} - \text{sotto}) + \oint_{C_{\varepsilon}} dz \quad (\text{B.0.6})$$

il primo dei due termini viene:

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} dz \text{ (sopra - sotto)} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{dz}{e^z - 1} (\log z - i\pi - \log z e^{2i\pi} + i\pi) \quad (\text{B.0.7})$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{dz}{e^z - 1} (\log z - \log z - 2\pi i) \quad (\text{B.0.8})$$

$$= \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{dz}{e^z - 1} \quad (\text{B.0.9})$$

$$= \int_{\varepsilon}^{\infty} dz \frac{e^{-z}}{1 - e^{-z}} \quad (\text{B.0.10})$$

$$= \log(1 - e^{-z}) \quad (\text{B.0.11})$$

$$\sim \log(\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2)) \quad (\text{B.0.12})$$

$$\sim \log \varepsilon \quad (\text{B.0.13})$$

il secondo termine, parametrizzando:

$$z = \rho e^{i\varphi + i\pi} \quad (\text{B.0.14})$$

viene:

$$-\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{\varepsilon}} \frac{dz}{e^z - 1} (\log z - i\pi) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{\varepsilon}} \frac{dz}{e^z - 1} (\log \varepsilon + i\varphi + i\pi - i\pi) \quad (\text{B.0.15})$$

$$= -\frac{\log \varepsilon}{2\pi i} \oint_{C_{\varepsilon}} \frac{dz}{e^z - 1} - \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{\varepsilon}} \frac{dz}{e^z - 1} i\varphi}_{\rightarrow 0 \text{ se } \varepsilon \rightarrow 0} \quad (\text{B.0.16})$$

$$\sim -\log \varepsilon. \quad (\text{B.0.17})$$

Dunque otteniamo:

$$\left. \frac{d}{ds} \left(\frac{\zeta(s)}{\Gamma(1-s)} \right) \right|_{s=1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\zeta(s)}{\Gamma(1-s)} = \text{cost} \quad \text{in } s = 1. \quad (\text{B.0.18})$$

Possiamo ricordare la relazione funzionale della $\zeta(s)$:

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s) \zeta(1-s) \quad (\text{B.0.19})$$

che ci permette di dire:

$$\frac{d}{ds} \left[2(2\pi)^{s-1} \zeta(1-s) \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \right]_{s=1} = 0 \quad (\text{B.0.20})$$

implementando i conti:

$$\left[\log(2\pi) - \frac{\zeta'(1-s)}{\zeta(1-s)} + \frac{\pi \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)} \right]_{s=1} = 0 \quad (\text{B.0.21})$$

$$\log(2\pi) = \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} \quad (\text{B.0.22})$$

e possiamo concludere che:

$$\zeta'(0) = \zeta(0) \log(2\pi) \quad (\text{B.0.23})$$

come volevamo.

Bibliografia

- [1] R.P. Feynman, A.R. Hibbs e D.F. Styer. *Quantum Mechanics and Path Integrals*. Dover Books on Physics. Dover Publications, 2010. ISBN: 9780486477220.
- [2] Tom Lancaster e Stephen J. Blundell. *Quantum Field Theory for the Gifted Amateur*. Oxford University Press, 2014. ISBN: 978-0-19-969933-9.
- [3] M. Mariño. *Advanced Topics in Quantum Mechanics*. Cambridge University Press, 2021. ISBN: 9781108852852.
- [4] M. Mariño. *Path integral lecture notes*. <https://www.marcosmarino.net/lecture-notes.html>. Accessed April 2025. 2020.
- [5] Michael E. Peskin e Daniel V. Schroeder. *An Introduction to quantum field theory*. Reading, USA: Addison-Wesley, 1995. ISBN: 978-0-201-50397-5. DOI: [10.1201/9780429503559](https://doi.org/10.1201/9780429503559).