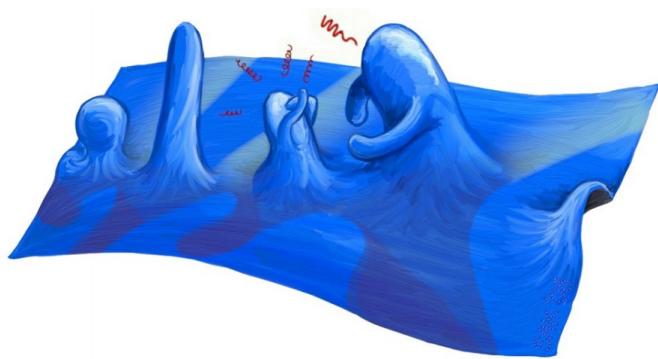


Appunti del corso di:  
**Introduzione alla Teoria Quantistica  
dei Campi**

Gabriele Cembalo

A.A. 2024-2025



Università degli Studi di Torino  
Dipartimento di Fisica  
Via Giuria, 1, Torino (TO)

## Informazioni legali

---

Questo materiale è una rielaborazione personale del corso di **Introduzione alla Teoria Quantistica dei Campi**, tenuto dalla **Prof.ssa M. Boglione** presso l'**Università degli Studi di Torino**.

Il contenuto riportato non rappresenta materiale ufficiale del docente né dell'università, e può contenere interpretazioni soggettive o errori. Tutti i diritti su slide, dispense o altri materiali forniti dal docente restano riservati ai rispettivi autori e non sono inclusi in questi appunti. Questi appunti sono condivisi a solo scopo didattico e divulgativo, senza fini di lucro, e sono destinati a supportare lo studio personale degli studenti.

È distribuito con licenza **Creative Commons Attribution - Non Commercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0)**.

Puoi copiarlo, distribuirlo e modificarlo, **a patto di attribuirne la paternità e non usarlo a fini commerciali**.

Per maggiori informazioni sulla licenza:

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/deed.it>

Physical law should have  
mathematical beauty.

Paul Adrien Maurice Dirac



# Prefazione

In questo documento voglio raccogliere le mie note rispetto gli appunti relativi al corso di "**INTRODUZIONE ALLA TEORIA DEI CAMPI**" svolto dalla professoressa M. Boglione e seguito all'*Università degli studi di Torino* nell'a.a. 2024-2025 aggiungendo eventualmente i riferimenti a vari libri (più o meno utili a seconda della volontà di approfondire). Questi appunti sono una riscrittura degli appunti presi in aula, quindi la fonte principale sono le note della professoressa, ma i libri sono fondamentali per una completa comprensione degli argomenti. Durante il corso sono stati consigliati diversi libri (indicati in Bibliografia), cercherò di indicare i vari riferimenti bibliografici all'inizio di ogni capitolo.

Personalmente per la stesura degli appunti, oltre alle note della professoressa, sono stati utilizzati maggiormente i testi di Peskin e Schroeder [7] e Srednicki [10]. Menzione a parte la merita il Lancaster e Blundell [6] che, pur non essendo un testo troppo tecnico e teorico, è stato un testo fondamentale per tutta la parte interpretativa, di concetto e per capire i motivi per cui si fanno determinate cose.

Gli appunti sono così organizzati: nel capitolo §1 analizzeremo i problemi di relativizzare la Meccanica Quantistica come la conosciamo dai corsi della triennale e introdurremo il procedimento che seguiremo durante il corso per costruire una nuova teoria; nel capitolo §2 ho scritto, oltre ad un breve ripasso della Relatività Speciale, una parte, piuttosto lunga (e spero completa), di tutti i concetti essenziali riguardanti la teoria dei gruppi (questa sezione l'ho ampliata leggermente rispetto quello fatto in aula, comunque ci sono segnate tutte le fonti); nel capitolo §3 cominciamo finalmente a fare nuova fisica (per noi) e cominciamo a definire il concetto di campo locale e come esso si trasformi; il passo successivo è il capitolo §4, in cui, utilizzando le proprietà di trasformazione dei campi locali, il teorema di minima azione e il teorema di noether determiniamo le equazioni del moto per i diversi tipi di campi; nel capitolo §5 analizziamo nel dettaglio l'equazione di Dirac, che è una delle equazioni fondamentali della teoria; nel capitolo §6 facciamo la procedura di seconda quantizzazione per i diversi tipi di campi, riuscendo ad avere un'espressione, oltre che un'interpretazione, per i campi; il capitolo

§7 è una breve panoramica delle simmetrie discrete della teoria di Dirac; nel capitolo §8 analizziamo la teoria che ci permette di studiare l’evoluzione spazio temporale dei sistemi in QFT, ossia la teoria del propagatore; il capitolo §9 è dedicato ad un primo approccio alle teorie di gauge e alla teoria elettromagnetica quantistica, mettendo già i primi mattoncini per una futura costruzione della QED; il capitolo §10 è dedicato alla teoria interagente e perturbativa, ma anche ad un primo approccio ai famosi diagrammi di Feynmann. Al fondo ho aggiunto diverse appendici, richiamate opportunamente nel testo, che completano i concetti; in particolare, l’Appendice A è un riepilogo di tutti i risultati principali ottenuti nel corso.

Il corso dev’essere visto come la prima parte di un corso riguardante la QFT, per cui ci si fermerà ad un certo punto per continuare, con il corso di *Fondamenti di Teoria dei Campi*. In particolare, nel corso che faremo successivamente riprenderemo alcuni argomenti (soprattutto il capitolo §9 e 10), ma con un approccio diverso. Infatti, in questo corso vedremo l’approccio della quantizzazione canonica, che è una ricetta per costruire la QFT piuttosto semplice, ma con il difetto che non funziona per tutte le teorie fisiche; a *fondamenti* adotteremo l’approccio con i path integral, che sarà un metodo molto più potente e generale.

Chiaramente sono da intendere come degli appunti personali scritti in bella, eventuali sviste, errori o inesattezze sono dovute alla mia ignoranza, ma soprattutto ho scritto questi appunti in modo da “spiegare” a me stesso l’argomento, quindi alcune parti potrebbero sembrare troppo prolixe o troppo superficiali per alcuni. In ogni caso fa piacere se possono aiutare qualcun’altro. Spero in ogni caso di esser riuscito a scrivere un documento chiaro e ben strutturato.

Alcune volte posso non far riferimento ad un particolare testo o corso passato, in questi casi mi sto riferendo ai MIEI appunti riguardanti quell’argomento. Una mia collezione di appunti è presente nella mia pagina personale di GitHub: [gCembalo/Theoretical-Physics-Notes](https://github.com/gCembalo/Theoretical-Physics-Notes).

Qualsiasi errore/refuso può essere inviato alla mia mail personale:  
[gabriele.cembalo02@gmail.com](mailto:gabriele.cembalo02@gmail.com).

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
1.1	Cosa vuol dire teoria relativistica? . . . . .	2
1.2	Si può relativizzare l'equazione di Schrodinger? . . . . .	4
1.3	L'idea di Dirac . . . . .	7
1.4	Il tempo è una coordinata o un parametro? . . . . .	9
1.5	Come si costruisce una teoria? . . . . .	11
1.5.1	Principio di minima azione . . . . .	11
1.5.2	Legame tra simmetrie di $S$ e le quantità conservative . .	13
<b>2</b>	<b>Gemme di teoria dei gruppi</b>	<b>17</b>
2.1	Richiami di Relatività Speciale e algebra tensoriale . . . . .	18
2.1.1	Quadrivettori e calcolo tensoriale . . . . .	21
2.1.2	Considerazioni su oggetti simmetrici, antisimmetrici .	22
2.2	Basic facts about Lie algebras . . . . .	23
2.3	Alcuni esempi di gruppi di Lie rilevanti in Fisica . . . . .	33
2.3.1	Il gruppo $SO(n)$ . . . . .	33
2.3.2	Il gruppo $SU(n)$ . . . . .	36
2.3.3	Altri esempi rilevanti . . . . .	40
2.4	Il gruppo di Lorentz . . . . .	42
2.4.1	Trasformazioni di Lorentz . . . . .	42
2.4.2	Generatori e algebra del gruppo di Lorentz . . . . .	47
2.4.3	Operatori di Casimir del gruppo di Lorentz . . . . .	50
2.4.4	L'algebra del gruppo di Lorentz fattorizza nel prodotto tensoriale di due sottoalgebre indipendenti . . . . .	51
2.4.5	Gruppo unimodulare $SL(2, \mathbb{C})$ . . . . .	52
2.4.6	Rappresentazione scalare, spinoriale e vettoriale . . . .	54
2.4.7	Teorema di Wigner e regola di superselezione . . . . .	56
2.5	Il gruppo di Poincaré . . . . .	58
2.5.1	Algebra del gruppo di Poincaré . . . . .	59
2.5.2	Casimir del gruppo di Poincaré . . . . .	61
2.5.3	Interpretazione fisica del vettore di Pauli-Lubanski .	62
2.5.4	Piccolo gruppo . . . . .	65
2.6	Schema riassuntivo gruppi . . . . .	67

---

<b>3 Campi locali</b>	<b>71</b>
3.1 Teoria locale . . . . .	72
3.2 Definizione di campo locale . . . . .	72
3.3 Comportamento dei campi locali per trasformazioni di Poincaré	74
3.3.1 Campo scalare . . . . .	75
3.3.2 Campo vettoriale . . . . .	78
3.3.3 Campo spinoriale . . . . .	80
3.3.4 Altri campi . . . . .	83
<b>4 Le equazioni di campo</b>	<b>85</b>
4.1 Principio di minima azione ed equazione del moto . . . . .	86
4.2 Teorema di Noether . . . . .	88
4.3 Equazioni di campo . . . . .	95
4.3.1 Equazione per il campo scalare . . . . .	95
4.3.2 Equazione per il campo spinoriale . . . . .	98
<b>5 L'equazione di Dirac</b>	<b>103</b>
5.1 Covarianza dell'equazione di Dirac . . . . .	103
5.2 Comportamento dell'equazione di Dirac per trasformazioni di parità . . . . .	105
5.3 Connessione equazione di Dirac e di Klein Gordon . . . . .	106
5.4 Forme bilineari di spinori di Dirac . . . . .	107
5.4.1 Trasformazione dello spinore $\bar{\psi}$ . . . . .	107
5.4.2 Proprietà di trasformazione delle forme bilineari . . . . .	109
5.5 Correnti di Noether associate all'equazione di Dirac . . . . .	112
5.6 Soluzioni dell'equazione . . . . .	113
5.6.1 Normalizzazione spinori . . . . .	120
5.6.2 Normalizzazione soluzioni . . . . .	122
5.6.3 Interpretazione soluzioni . . . . .	122
5.6.4 Proiettori su stati ad energia positiva o negativa . . . . .	123
5.7 Chiralità ed elicità . . . . .	125
5.7.1 Autostati e proiettori di chiralità . . . . .	125
5.7.2 Fermioni chiriali ed equazione di Weyl . . . . .	126
5.8 Momento angolare e spin . . . . .	131
5.8.1 Operatore di spin . . . . .	131
5.8.2 Momento angolare orbitale e spin . . . . .	133
<b>6 Seconda quantizzazione</b>	<b>135</b>
6.1 Campo classico . . . . .	136
6.2 Quantizzazione di una teoria di campo . . . . .	138
6.2.1 Quantizzazione canonica . . . . .	139
6.3 Quantizzazione canonica del campo scalare . . . . .	140
6.3.1 Hamiltoniana del campo scalare . . . . .	148
6.3.2 Teorema spin-statistica . . . . .	154

6.4	Quantizzazione canonica del campo scalare carico . . . . .	155
6.4.1	Simmetrie, teorema di Noether e cariche conservative . .	157
6.5	Quantizzazione canonica del campo spinoriale . . . . .	160
6.5.1	Teorema spin-statistica . . . . .	163
6.5.2	Simmetrie, teorema di Noether e cariche conservative . .	164
6.6	Schema riassuntivo . . . . .	165
6.7	Significato fisico dell'analisi di Fourier . . . . .	166
<b>7</b>	<b>Simmetrie discrete del campo di Dirac</b>	<b>175</b>
7.1	Parità . . . . .	176
7.2	Inversione temporale . . . . .	179
7.3	Coniugazione di carica . . . . .	182
7.4	Sommario di $C$ , $P$ e $T$ . . . . .	183
<b>8</b>	<b>Teoria del propagatore in una teoria libera</b>	<b>185</b>
8.1	Propagatore in Meccanica Quantistica . . . . .	186
8.1.1	Sommario propagatori in Meccanica Quantistica . .	190
8.2	Campo scalare neutro . . . . .	190
8.2.1	Evoluzione temporale del campo di Klein-Gordon . .	190
8.2.2	Definizione di propagatore . . . . .	193
8.2.3	Causalità per il campo scalare neutro . . . . .	195
8.2.4	Funzione di Green per Klein-Gordon . . . . .	196
8.2.5	Confronto tra funzione di Green e definizione di pro- pagatore . . . . .	199
8.2.6	Calcoli esplicativi propagatore di Feynmann . . . . .	200
8.3	Campo scalare carico . . . . .	204
8.3.1	Definizione di propagatore . . . . .	204
8.3.2	Causalità per il campo scalare carico . . . . .	206
8.4	Campo spinoriale . . . . .	207
8.4.1	Definizione di propagatore . . . . .	207
8.4.2	Calcoli esplicativi propagatore di Feynmann . . . . .	208
8.5	Sommario risultati del propagatore libero . . . . .	210
<b>9</b>	<b>QED - Elettrodinamica quantistica</b>	<b>213</b>
9.1	Le equazioni di Maxwell . . . . .	213
9.2	Teorie di Gauge . . . . .	217
9.2.1	Perché la teoria di gauge . . . . .	221
9.2.2	Teorie di gauge in Elettromagnetismo . . . . .	221
9.2.3	Gradi di libertà della teoria elettromagnetica . . . . .	224
9.3	Elettromagnetismo massivo . . . . .	226
9.4	Quantizzazione del campo elettromagnetico . . . . .	230
9.4.1	Proprietà polarizzazione fotone . . . . .	233
9.4.2	Propagatore del fotone . . . . .	235

---

<b>10 Propagatori interagenti e teorie perturbative</b>	<b>237</b>
10.1 Teoria perturbativa in Meccanica Quantistica . . . . .	238
10.2 Propagatore in Teoria Quantistica dei Campi . . . . .	240
10.2.1 Propagatore per la teoria di campo interagente . . . . .	241
10.3 La matrice $S$ . . . . .	243
10.3.1 Definizione della matrice $S$ . . . . .	244
10.3.2 Sviluppo perturbativo della matrice $S$ . . . . .	245
10.3.3 Teorema di Wick . . . . .	247
10.4 Diagrammi di Feynmann . . . . .	250
10.5 Teoria $\hat{\phi}^4$ . . . . .	252
10.5.1 Regole di Feynmann nello spazio delle configurazioni per la teoria $\hat{\phi}^4$ . . . . .	259
10.5.2 Diagrammi di Feynmann nello spazio degli impulsi per la teoria $\hat{\phi}^4$ . . . . .	260
10.5.3 Regole di Feynmann nello spazio degli impulsi per la teoria $\hat{\phi}^4$ . . . . .	262
10.5.4 Scattering di due particelle . . . . .	263
10.6 Teoria di Yukawa . . . . .	265
10.6.1 La teoria $\hat{\psi}^\dagger \hat{\psi} \hat{\phi}$ . . . . .	269
10.6.2 Regola di Feynmann per la teoria $\hat{\psi}^\dagger \hat{\psi} \hat{\phi}$ . . . . .	272
10.6.3 Scattering di due particelle per la teoria $\hat{\psi}^\dagger \hat{\psi} \hat{\phi}$ . . . . .	272
10.6.4 Gell-Mann low theorem . . . . .	275
<b>Appendici</b>	<b>281</b>
<b>A Riepilogo risultati</b>	<b>283</b>
<b>B Unità naturali</b>	<b>289</b>
<b>C Nozioni gruppi</b>	<b>291</b>
C.1 Notazioni . . . . .	291
C.2 Gruppo $\mathbb{Z}_2$ . . . . .	291
<b>D Complementi di Relatività Speciale</b>	<b>293</b>
D.1 Legame tra rapidità, massa di riposo ed energia . . . . .	293
D.2 Generatori del gruppo di Lorentz . . . . .	294
<b>E Le matrici <math>\gamma^\mu</math> di Dirac</b>	<b>297</b>
E.1 Giustificazioni fisiche . . . . .	297
E.2 Definizioni e rappresentazione di Weyl . . . . .	298
E.3 Proprietà fondamentali . . . . .	300
E.4 Rappresentazione di Dirac . . . . .	301
E.5 Generatori di Lorentz . . . . .	301
E.6 Forme bilineari degli spinori di Dirac . . . . .	302

E.6.1 Identità di Fierz . . . . .	304
<b>F Spazio di Fock</b>	<b>307</b>
F.1 Particelle distinguibili . . . . .	307
F.2 Formalismo dei numeri di occupazione . . . . .	309
F.3 Spazio di Fock . . . . .	311
F.4 Operatori di creazione e distruzione . . . . .	312
F.5 Normal Ordering . . . . .	315
F.5.1 Operatore numero di occupazione . . . . .	316
F.6 Operatore di campo quantizzato . . . . .	317
<b>G Discorsi sull'operatore di campo di Klein-Gordon</b>	<b>321</b>
G.1 Riferimenti dei libri . . . . .	321
G.2 Normalizzazione stati a tri-impulso fissato . . . . .	325
<b>H Rappresentazione di interazione</b>	<b>327</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>330</b>



# Capitolo 1

## Introduzione

In questo corso, come si capisce bene dal titolo, si vuole riuscire a studiare e descrivere la Teoria Quantistica dei Campi, ossia, la teoria che unisce la Meccanica Quantistica e la Relatività Speciale. Il punto di partenza ovvio per costruire una teoria che sia quantistica e al tempo stesso relativistica è la Meccanica Quantistica non relativistica, i cui postulati sono:

- Lo stato di un sistema è rappresentato da un vettore nello spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$ .
- Le osservabili fisiche sono rappresentate da operatori hermitiani, i cui autovettori forniscono una base ortonormale di  $\mathcal{H}$ .
- La misura di un'osservabile da come risultato uno dei suoi autovalori (con una certa probabilità).

Come già sappiamo, la Meccanica Quantistica è una teoria probabilistica e non deterministica a differenza della Fisica classica. Dire che esiste un sistema in un certo stato vuol dire che ci sono diversi sistemi identici preparati allo stesso modo.

Determinare i possibili valori di una misura si riduce nel diagonalizzare l'operatore associato. Infatti, diagonalizzando un'operatore trovo autovalori ed autovettori.

Il postulato della misura dice che quando viene fatta una misura, quindi applico l'operatore allo stato, il sistema collassa nell'autostato corrispondente all'autovalore misurato.

Come ben noto esiste anche il postulato dell'evoluzione temporale, che afferma che un sistema evolve nel tempo seguendo l'equazione di Schrodinger:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi\rangle_t = \hat{H} |\Psi\rangle_t \quad (1.0.1)$$

in cui  $\hat{H}$  è l'operatore hamiltoniano.

Nonostante la Meccanica Quantistica sia una teoria bellissima e con infinite conferme sperimentali anch'essa ha delle limitazioni. Il più grosso punto critico è che non è una teoria relativistica, il che è un problema poiché studiando sistemi microscopici (che sono quelli trattati dalla MQ) essi, più sono piccoli e più si muovono velocemente. Inoltre, la Meccanica Quantistica non relativistica non può essere utilizzata per studiare sistemi con molte particelle, o detta diversamente, sistemi con molti gradi di libertà ( $N \rightarrow \infty$ ). Ad esempio la MQ non tratta i campi elettrico **E** e magnetico **B**. Un'ulteriore limite della Meccanica Quantistica è che una volta cominciato a trattare un sistema con un certo numero di particelle, quel numero non può cambiare, infatti, Schrodinger ne descrive l'evoluzione, ma non permette di aggiungere o togliere particelle ad esempio. Noi sappiamo bene che però in natura l'energia si conserva sempre, ma non il numero di particelle.

La Meccanica Quantistica non è dunque la teoria definitiva e ha senso studiare una teoria quantistica di campo, che sia relativistica, con la quale si riescono a superare le criticità della Meccanica Quantistica.

## 1.1 Cosa vuol dire teoria relativistica?

Cominciamo con il rispondere alla domanda:

*Cosa vuol dire che una teoria è relativistica?*

La risposta immediata è: *è una teoria che rispetta i postulati della Relatività Speciale*. Dunque una teoria relativistica è una teoria per cui un fenomeno fisico è lo stesso per ogni sistema di riferimento inerziale. Come metrica dello spazio di Minkowski prendiamo per convenienza:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.1.1)$$

Se abbiamo un SR inerziale dato dalle coordinate  $x^\mu = (ct, \mathbf{x})$  allora saranno coordinate di un SR inerziale<sup>1</sup> tutte le coordinate  $\bar{x}^\mu$  legate ad  $x^\mu$  da una trasformazione di Lorentz, ossia una trasformazione del tipo:

$$\bar{x}^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu \quad (1.1.2)$$

dove  $\Lambda^\mu_\nu$  e  $a^\mu$  sono indipendenti da  $x$  e sono rispettivamente la matrice di trasformazione di Lorentz e un vettore di traslazione.

---

<sup>1</sup>Vedi la sezione 2.1 un ripasso di come alzare o abbassare gli indici.

Quando diciamo che un fenomeno è lo stesso in ogni SR intendiamo dire che due osservatori A e B, in due SR differenti, ottengono gli stessi risultati per ogni possibile esperimento (e sono in accordo sulle predizioni dei risultati di ogni possibile esperimento). Infatti, se A vede un sistema nel punto  $x$  descritto da  $\Psi(x)$  e B dice di vedere, nel suo SR, lo stesso sistema nel punto  $\bar{x}$  e descritto da  $\bar{\Psi}(\bar{x})$ , allora deve valere:

$$\Psi(x) = \bar{\Psi}(\bar{x}) \quad (1.1.3)$$

Nota che  $x$  e  $\bar{x}$  sono diversi perché associati a SR diversi, ma anche le forme funzionali di  $\Psi$  e  $\bar{\Psi}$  lo sono. Ciò che è uguale sono le funzioni valutate nei punti.

Affinché l'uguaglianza (1.1.3) sia mantenuta su tutto lo spazio-tempo, le due funzioni d'onda devono soddisfare le stesse equazioni del moto. Dunque, le equazioni d'onda che cerchiamo nella nuova teoria quantistica relativistica devono avere la stessa forma in tutti i sistemi di riferimento inerziali, e devono essere quindi invarianti di Lorentz (vedi nella sezione 2.1 cosa implica sulla metrica  $g_{\mu\nu}$  richiedere l'invarianza della distanza spazio-temporale  $ds$ ).

Costruire una teoria di Meccanica Quantistica relativista è di particolare interesse poiché permette la trattazione di sistemi con  $\infty$  gradi di libertà e permette l'utilizzo dell'equivalenza tra massa ed energia. Il prezzo da pagare per costruire questa teoria però è relativamente alto. Questa nuova teoria comporta un aumento considerevole di complessità, il quale implica il non riuscire a trovare soluzioni esatte ad eccezione della teoria libera<sup>2</sup>. In Teoria Quantistica dei Campi si lavora sugli sviluppi perturbativi. Un altro svantaggio della nuova teoria è che si perdono i concetti di funzione d'onda, di stato identificato con un raggio nello spazio  $\mathcal{H}$  e di equazione d'onda. La perdita dell'equazione d'onda, quindi della teoria che effettivamente definisce la teoria (l'equazione di Schrödinger), è una perdita più grande di quanto sembri, poiché implica il dover ripensare a tutta la teoria.

Il modo in cui si costruirà la Teoria Quantistica dei Campi sarà diverso da come si è costruita a suo tempo la Meccanica Quantistica non relativistica<sup>3</sup>. La Meccanica Quantistica la abbiamo costruita in modo che la teoria classica fosse al suo interno e di conseguenza un suo limite. Per la Teoria Quantistica dei Campi il ragionamento è più complicato, prima si trova una teoria di

---

<sup>2</sup>Si noti che anche in Meccanica Quantistica le soluzioni esatte erano poche, però qualcuna c'era (atomo d'idrogeno, oscillatore armonico e buche di potenziale).

<sup>3</sup>Il modo in cui si costruisce la Teoria Quantistica dei Campi in aula (e in questi appunti) non è necessariamente il modo in cui la si è costruita storicamente. Il processo scientifico di scrittura di una nuova teoria non è sicuramente lineare come quello seguito nei corsi universitari. C'è un riepilogo storico nel capitolo introduttivo del Weinberg Vol. 1 [13].

campo classica e solo successivamente la si eleva al caso quantistico, ossia si fa il processo noto come seconda quantizzazione<sup>4</sup>.

Il vantaggio del procedimento che si seguirà per costruire la Teoria Quantistica dei Campi è che si basa su pochi semplici punti: le invarianze della teoria. Sarà dunque fondamentale la teoria dei gruppi.

La prima invarianza che si vuole inserire nella teoria è, la già citata, invarianza dell'intervallo spazio-temporale tra due punti dello spazio di Minkowski in tutti i sistemi di riferimento inerziali. Quest'invarianza è l'invarianza di Lorentz e introduce il gruppo di Lorentz.

La ricetta per costruire la Teoria Quantistica dei Campi sarà: stabiliremo quali sistemi vogliamo descrivere, decideremo le invarianze che vogliamo nel nostro sistema, costruiremo la lagrangiana  $L$  del sistema e utilizzando il teorema di minima azione, passando per il teorema di Noether, per determinare l'equazione del moto.

## 1.2 Si può relativizzare l'equazione di Schrodinger?

Per costruire una teoria quantistica relativistica, forse un po' ingenuamente, si potrebbe sperare di partire dai risultati già noti della Meccanica Quantistica e banalmente relativizzare il tutto. Sfortunatamente non funziona. Vediamo perché si va incontro a errori se si prova a relativizzare l'equazione di Schrodinger. Partiamo da:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{x}, t) = \hat{H}\Psi(\mathbf{x}, t) \quad (1.2.1)$$

in cui  $\hat{H}$  è l'operatore hamiltoniano del sistema e dunque l'energia totale di esso. In Relatività Speciale conosciamo l'espressione dell'energia per la particella libera (mass-shell):

$$E^2 = m^2c^4 + p^2c^2 \quad (1.2.2)$$

e in linea di principio potremmo provare a definire:

$$\hat{H} = +\sqrt{\hat{p}^2c^2 + m^2c^4} \quad (1.2.3)$$

che potremmo sviluppare in serie per  $m$  piccola, cosa vera per sistemi microscopici:

$$\hat{H} \sim mc^2 + \frac{\hat{p}^2}{2m} \quad (1.2.4)$$

---

<sup>4</sup>Nota che questo modo di costruire la teoria è oggetto di discussione. La Relatività Speciale così come la Meccanica Quantistica sono state costruite con la fisica classica come limite e sono teorie ben solide (visti i risultati sperimentali), perché la Teoria Quantistica dei Campi (che comunque ha moltissime conferme sperimentali e la domanda che ci si pone non implica una sua non correttezza dal punto di vista teorico) la si costruisce in modo diverso rendendo lei il limite del caso classico e non il viceversa?

in cui riusciamo ad individuare il termine di energia di riposo della RS e un termine cinetico. L'espressione di  $\hat{H}$  trovata ha un senso dal punto di vista relativistico. Se inseriamo l'espressione (1.2.4) nell'equazione di Schrodinger otteniamo:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{x}, t) = +\sqrt{\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m^2 c^4} \Psi(\mathbf{x}, t). \quad (1.2.5)$$

L'espressione (1.2.5) ci si rende subito conto avere alcuni problemi:

- $\hat{H}$  l'abbiamo definita facendo la radice dell'espressione (1.2.2), ma senza considerare il segno negativo che ne deriva e facendo caso solo al caso positivo. Infatti, la cosa corretta da fare sarebbe stata prendere:

$$\hat{H} = \pm \sqrt{E^2} = \pm \sqrt{\hat{p}^2 c^2 + m^2 c^4} \quad (1.2.6)$$

il cui problema però diventa che per le particelle libere non possiamo avere energie  $< 0$ , poiché corrisponderebbero a stati legati. Nota anche che l'esistenza di infinite energie negative implica la non esistenza di uno stato fondamentale e dunque l'instabilità del sistema.

- Sotto la radice abbiamo l'operatore  $\hat{p}$ , che è un problema, non sappendo bene come trattare la radice di un operatore. Si potrebbe risolvere questa cosa provando a sviluppare ancora in serie la radice, ma così facendo si otterrebbero un numero infinito di derivate spaziali di  $\Psi(\mathbf{x}, t)$ , il che implicherebbe una non località dell'equazione.
- Tempo e spazio non sono trattati allo stesso modo, infatti, abbiamo una derivata  $\partial_t$  ripetto al tempo, ma laplaciano  $\nabla^2$  per lo spazio. In più  $\mathbf{x}$  è interpretata come una coordinata, mentre  $t$  è un parametro che scorre indipendentemente dal sistema di riferimento.

Questi problemi elencati si potrebbero risolvere prendendo i quadrato dell'espressione (1.2.5):

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi(\mathbf{x}, t) = (-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m^2 c^4) \Psi(\mathbf{x}, t) \quad (1.2.7)$$

che è quella nota come **Equazione di Klein-Gordon**. Anche l'equazione (1.2.7), nonostante possa sembrare di aver trovato l'equazione del moto di una teoria relativistica definitiva, nasconde alcune complicazioni. Il problema più grande è che prendendo l'equazione di Klein-Gordon (KG) non è possibile definire una densità di probabilità indipendente dal tempo e di conseguenza si viola la conservazione della probabilità (non esistono una legge di conservazione). In più, facendo il quadrato, si è nascosto sotto il tappezzato il problema delle energie negative, ma a questo ci penserà Dirac (vedi il capitolo dedicato). Nonostante i problemi che contiene l'equazione (1.2.7) è facile verificare che verifica l'invarianza di Lorentz. Vedi nella sezione 2.1

come vengono definiti gli operatori di derivata. L'equazione di Schrodinger, utilizzando il D'Alembertiano quadri-dimensionale, diventa:

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi(\mathbf{x}, t) = (-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m^2 c^4) \Psi(\mathbf{x}, t) \quad (1.2.8)$$

$$\underbrace{\hbar^2 \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} \Psi(\mathbf{x}, t)}_{\partial^\mu \partial_\mu = \partial^2 \equiv \square} - \hbar^2 \nabla^2 \Psi(\mathbf{x}, t) + m^2 c^2 \Psi(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (1.2.9)$$

$$\square \Psi(\mathbf{x}, t) + m^2 \frac{c^2}{\hbar^2} \Psi(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (1.2.10)$$

e possiamo scrivere la forma a cui si fa solitamente riferimento per l'equazione di Klein-Gordon:

$$\left( \square + m^2 \frac{c^2}{\hbar^2} \right) \Psi(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (1.2.11)$$

Nei termini visti nella sezione 1.1, se un osservatore A l'equazione del moto è data da (1.2.11), allora un osservatore B, in un altro SR, scriverà:

$$\left( \square + m^2 \frac{c^2}{\hbar^2} \right) \bar{\Psi}(\bar{\mathbf{x}}, t) = 0. \quad (1.2.12)$$

coincidente con quella scritta da A, poiché si ha  $\partial^2 = \bar{\partial}^2$  e  $\Psi(\mathbf{x}) = \bar{\Psi}(\bar{\mathbf{x}})$ . Possiamo affermare che l'equazione (1.2.11) è perfettamente consistente con il principio di relatività, ma che, nonostante sia un'equazione funzionante da questo punto di vista, viola i principi fondativi della Meccanica Quantistica. Infatti, la norma del vettore  $|\Psi\rangle_t$  di  $\mathcal{H}$  dipende dal tempo, motivo per cui, viola la conservazione della probabilità. Si può notare, che moltiplicando l'equazione di KG per la complessa coniugata  $\Psi^*$ :

$$\Psi^* \left\{ \left[ \square + m^2 \frac{c^2}{\hbar^2} \right] \Psi = 0 \right\} , \quad \Psi \left\{ \left[ \square + m^2 \frac{c^2}{\hbar^2} \right] \Psi^* = 0 \right\} \quad (1.2.13)$$

facendo la differenza:

$$\Psi^* \left[ \square + \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \Psi - \Psi \left[ \square + \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \Psi^* = 0 \quad (1.2.14)$$

$$\partial^\mu (\Psi^* \partial_\mu \Psi - \Psi \partial_\mu \Psi^*) = 0 \quad (1.2.15)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( \Psi^* \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \Psi - \Psi \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \Psi^* \right) - \nabla (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) = 0. \quad (1.2.16)$$

Il termine tra parentesi della derivata temporale di (1.2.16) sarebbe il termine da interpretare come densità di probabilità, che però non è definito positivo, il che non lo rende possibile. Non potendo avere un'equazione di continuità non è possibile associare all'equazione di Klein-Gordon un'interpretazione probabilistica ed una definizione consistente di densità di probabilità. Questo

è dovuto al fatto che nell'equazione di KG compaia una derivata seconda rispetto al tempo, a differenza di Schrodinger in cui c'è solo una derivata prima e in cui è possibile definire una densità di probabilità (definita positiva) ed un'equazione di continuità.

### 1.3 L'idea di Dirac

Si è visto come non sia possibile relativizzare l'equazione di Schrodinger in serenità, per questo si può dire, che non esiste una teoria quantistica relativistica. Quando si parla di teorie sia quantistiche che relativistiche si parla sempre di teorie di campo. L'unico lato positivo visto è stato che si è riusciti a trovare l'equazione (1.2.11) di Klein-Gordon, che seppur non è un'equazione che soddisfa la Meccanica Quantistica, per lo meno soddisfa il postulato della Relatività Speciale. Un problema, che abbiamo completamente ignorato in tutta la sezione precedente, è quello delle energie negative. Storicamente, la prima equazione relativistica che si è riusciti a scrivere per cercare di descrivere sistemi quantitici è stata proprio l'equazione di Klein-Gordon, poco tempo dopo Paul Dirac derivò la sua equazione relativistica che voleva descrivere il moto degli elettroni (poi estesa a tutti i campi fermionici). L'inglese cercò anche di mettere nella sua equazione una sola derivata temporale, a differenza di KG, in modo da cercare di tenere viva l'interpretazione della Meccanica Quantistica. La grande soddisfazione che provava Dirac per la sua equazione derivava principalmente dalla bellezza ed eleganza dell'equazione. Al tempo stesso però, il fisico inglese si continuò, per 2 anni, a domandare come potesse effettivamente interpretare le energie negative, che non solo comparivano nell'equazione di Klein-Gordon, ma anche nella sua. Finalmente nel 1930, Dirac pubblicò la sua interpretazione di stati con energie negative. Analizziamo con calma i passi che fece Dirac.

Prima di tutto Dirac cercò di relativizzare l'equazione di Schrodinger in un modo diverso rispetto quello seguito da KG. L'inglese introdusse un indice discreto aggiuntivo alla funzione d'onda (come già detto, lui aveva in mente un elettrone, ossia una particella di spin 1/2) scrivendo:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi_a(x) = (-i\hbar c(\alpha^j)_{ab}\partial_j + mc^2(\beta)_{ab}) \Psi_b(x) \quad (1.3.1)$$

in cui  $a = 1, 2$  e  $\alpha^j, \beta$  sono matrici. Se si considera l'hamiltoniana che compare nell'equazione scritta sopra, allora si può dimostrare che anch'essa, come KG, è consistente con la teoria relativistica<sup>5</sup>. Rimangono comunque un paio di problemi, le matrici  $\alpha^j$  e  $\beta$  sarebbe bello se fossero le matrici di Pauli, dal momento che per particelle fermioniche con spin 1/2 sappiamo bene come

---

<sup>5</sup>Si veda il capitolo 1 di Srednicki [10].

trattarle, però, per via degli anticommutatori che si devono avere nella teoria, non è così ed  $\alpha^j$  e  $\beta$  sono in realtà matrici più grandi delle  $\sigma_i$  di Pauli, infatti, sono matrici 4x4. Se fossero state matrici 2x2 le si sarebbe potute interpretare come matrici di spin, ma avendo due dimensioni in più occorre darne un'interpretazione differente. Si vedrà in seguito del corso che le interpretazioni delle componenti aggiuntive dello spin e degli stati ad energia negativa sono in qualche modo legate. Le componenti aggiuntive di  $\alpha^j$  e  $\beta$  fanno sì che quando si vanno a calcolare gli autovalori dell'hamiltoniana<sup>6</sup> se ne trovino 4:

$$+E(\mathbf{p}) \quad , \quad +E(\mathbf{p}) \quad , \quad -E(\mathbf{p}) \quad , \quad +E(\mathbf{p}) \quad (1.3.2)$$

in cui:

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}. \quad (1.3.3)$$

Dunque, nonostante Dirac sia riuscito a risolvere alcuni problemi di KG scrivendo un'equazione con una sola derivata temporale e relativistica, è dovuto salire di dimensioni per riuscirci e comunque non è riuscito a rimuovere il problema delle energie negative.

Parliamo finalmente degli stati ad energia negativa<sup>7</sup>. In Fisica classica non c'è motivo per considerare stati con energie negative, infatti, nessun processo continuo può permettere il passaggio da livelli di energia positiva ( $E \geq mc^2$ ) a quelli di energia negativa ( $E \leq -mc^2$ ) essendo due bande separate da una discontinuità di  $2mc^2$ . Anche in relatività non è possibile, tramite un cambio di sistema di riferimento, passare da un'energia positiva ad una negativa, poiché la trasformazione di Lorentz (boost lungo  $x$  con velocità  $v$ ) è:

$$E' = \gamma(E - vp_x) \quad (1.3.4)$$

in cui  $v < c$ ,  $p_x < p$  che implicano  $vp_x < cp \leq E$  e per cui se  $E > 0$  in un certo SR, allora anche  $E' > 0$ .

Nella Fisica quantistica però sappiamo bene che salti discontinui sono possibili e non si possono più ignorare le energie negative. Dirac riuscì ad interpretare tali stati. È un fatto sperimentale che particelle fermioniche obbediscano al principio di esclusione di Pauli, per cui non possiamo averne (ad esempio elettroni) più di una in uno specifico stato quantistico. Dirac si chiese: *e se questi stati ad energia negativa effettivamente esistessero, ma fossero sempre stati occupati?*, se la risposta fosse affermativa, allora un elettrone con energia positiva non potrebbe occupare stati ad  $E < 0$  per via del principio di Pauli.

Però sorge subito un dubbio, ossia: *perché non ci si accorge di questo mare di cariche ad energia negativa?* Dirac disse: *ci siamo abituati*. Detto

---

<sup>6</sup>Si faccia riferimento anche in questo caso al capitolo 1 di Srednicki [10].

<sup>7</sup>Parte del ragionamento preso dal Barone [1].

un po' meglio: una distribuzione di carica uniforme produce effetti fisici in base alle condizioni al contorno che imponiamo ad  $\infty$  nelle equazioni di Maxwell e c'è una scelta di ciò che rende una densità di carica uniforme invisibile.

Dirac notò anche un'altra cosa. Se si riuscisse a liberare (eccitare) questi elettroni ad energia negativa e a portarli ad una positiva, allora, questi lascerebbero dietro di sè un buco nel mare di elettroni ad energia negativa. Tale buco apparirebbe come una carica positiva, ad energia positiva e per via della simmetrica dell'equazione di Dirac, anche con la stessa massa dell'elettrone che abbiamo eccitato. Dirac con la sua interpretazione del mare di energie negative propose per la prima volta il concetto di **antiparticella**, in questo caso positroni. La conferma sperimentale della predizione di Dirac arrivò pochi anni dopo, nel 1932, quando nei raggi cosmici fu identificato per la prima volta l' $e^+$ . Una visione più moderna del concetto di antiparticella viene dato da Feynmann negli anni successivi.

## 1.4 Il tempo è una coordinata o un parametro?

Se ricordiamo l'elenco delle criticità viste durante il processo per arrivare all'equazione di Klein-Gordon nella sezione §1.2 possiamo vedere che solo due su tre non sono presenti anche nell'equazione di Dirac. Infatti, Dirac riesce a spiegare le energie negative<sup>8</sup> e riesce, aumentando le dimensioni in gioco, a fare la radice di un operatore, però, non ha ancora sistemato il concetto di tempo. Soprattutto però ci siamo dimenticati uno dei motivi principali per cui vogliamo scrivere questa nuova teoria, ovvero, trattare sistemi con  $\infty$  gradi di libertà. Sarà proprio il ragionamento che faremo riguardo il tempo che ci porterà alla strada che ci permetterà di trattare sistemi con moltissime particelle.

Avevamo notato che spazio e tempo fossero trattati diversamente nell'equazione (1.2.11) di Klein-Gordon e anche che fosse presente  $\partial_{tt}$ , il che rendeva inconciliabili la teoria quantistica con il principio di relatività, soddisfatto da KG. C'è però un motivo più profondo per cui la trattazione quantistica di un sistema va in conflitto con il principio di relatività, il concetto stesso di tempo!

Dagli assiomi della Meccanica Quantistica sappiamo bene che tutte le osservabili fisiche sono rappresentate da operatori hermitiani, ma sappiamo anche che in MQ il tempo non è né un operatore e benché meno l'autovalore di un qualche operatore. Il tempo in MQ, così come nella Fisica classica è

---

<sup>8</sup>Nota che in ogni caso, il concetto di mare e particelle ad energie negative, non è applicabile all'equazione di Klein-Gordon, poiché nella sua descrizione Dirac basa tutto sul principio di esclusione di Pauli, che come ben sappiamo riguarda solo particelle fermioniche e non particelle generiche come quelle trattate da KG. Dovremo pensare in modo differente.

semplicemente un parametro che scorre indipendentemente dall'osservatore (SR). Notiamo però che in Meccanica Quantistica il tempo compare sia nello stato  $|\Psi\rangle_t$ , in cui lo dobbiamo distinguere dalla posizione  $x$  che è autovalore dell'operatore posizione  $\mathbf{x}$ , e compare nell'equazione di Schrödinger, in cui viene detto come  $|\Psi\rangle_t$  evolve nel tempo. Proprio l'asimmetria di significato tra tempo e spazio rende la Meccanica Quantistica incopabile con la Relatività Speciale. Si potrebbe risolvere il problema in 2 modi:

1. Promuovere il tempo allo stesso livello della posizione e quindi al ruolo di operatore.
2. Declassare la posizione allo stesso ruolo del tempo, ossia, al ruolo di parametro.

La strada 1 è più complicata da percorrere. Si potrebbe utilizzare come autovalore (parametro) il tempo proprio della particella (misurato con un orologio che si muove con essa) e la coordinata temporale  $t$  (misurata con un orologio stazionario in un SR inerziale) come operatore. Quello che si fa è definire  $\hat{x}^\mu$  in cui  $\hat{x}^0 = ct$ . Aggiungendo un altro parametro  $\sigma$  all'operatore  $\hat{x}^\mu$  potremmo ottenere molte world-lines (linee di mondo)  $\hat{x}^\mu(\tau, \sigma)$ , ovvero, una famiglia continua di world-line, che costituiscono quello che viene chiamato world-sheet (foglio di mondo). In questo modo  $\hat{x}^\mu(\tau, \sigma)$  viene interpretato come una **stringa** che si propaga.

La strada 2 è quella che in questo corso ci permette di arrivare al nostro risultato. Se  $x$  diventa un parametro, allora lo si può associare ad un operatore, che possiamo chiamare:

$$\hat{\phi}(x) \tag{1.4.1}$$

chiamato **operatore di campo quantistico** e che nella rappresentazione di Heisenberg dipende anche dal tempo:

$$\hat{\phi}(x, t) = e^{\frac{i}{\hbar} Ht} \hat{\phi}(x, 0) e^{-\frac{i}{\hbar} Ht}. \tag{1.4.2}$$

A questo punto, finalmente, abbiamo trovato un oggetto quantisticamente ben definito, in cui  $x$  e  $t$  sono parametri e sullo stesso piano, trattati democraticamente. Sono entrambi parametri continui. L'elemento (1.4.1) è l'elemento base della teoria quantistica dei campi. L'approccio 2 è comodo da seguire perché permette di vedere come la trattazione quantistica di un sistema con un numero non fissato di particelle si riduca ad una trattazione analoga ad una fatta in una teoria di campo.

Una piccola nota: si potrebbe pensare che gli approcci 1 e 2 portino a risultati diversi, invece, si vede che la Fisica quantistica relativistica può essere trattata in entrambe le teorie equivalentemente. Si può scegliere di volta in volta il procedimento più conveniente. La Teoria Quantistica dei Campi è tendenzialmente più comoda.

## 1.5 Come si costruisce una teoria?

Abbiamo già detto che costruiremo questa nuova teoria partendo dalle invarianze del sistema e sviluppando tutto a partire da quello. Per fare questo il punto di partenza è un funzionale<sup>9</sup> che conosciamo bene: l'**azione**. L'azione  $S$  è il punto di partenza di diverse cose:

- Se la *minimizziamo* possiamo ottenere le equazioni del moto (classiche o elettromagnetiche come abbiamo visto).
- Se il nostro sistema possiede delle *invarianze*, allora grazie al teorema di Noether sappiamo avere delle quantità conservative.
- Permette la transizione dalla meccanica classica alla Meccanica Quantistica attraverso i *path integral*.

Il progetto, dunque, per costruire una nuova teoria è:

1. Costruire un'azione che abbia le caratteristiche volute e le proprietà di invarianza richieste (trattando ancora campi classici).
2. Ricaviamo a partire da questa azione le equazioni del moto e le proprietà delle loro soluzioni.
3. Estendiamo la trattazione al caso quantistico (facendo la seconda quantizzazione).

Ripassiamo brevemente come funziona l'azione per la Fisica classica.

### 1.5.1 Principio di minima azione

Prendiamo un sistema classico discreto, ad esempio una particella puntiforme individuata da un vettore posizione  $x_i(t)$ ,  $i = 1, 2, 3$  che si muove in un certo potenziale  $V = V(x_i)$  indipendente dal tempo  $t$ . Per definizione abbiamo:

$$S([x_i]; t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ \frac{1}{2} m \left( \frac{dx_i}{dt} \right)^2 - V(x_i) \right] \quad (1.5.1)$$

in cui notiamo bene il fatto che  $S$  sia un funzionale, ossia, che ad ogni cammino sia associata un'azione (un numero reale in questo caso). A questo punto consideriamo delle deformazioni del cammino:

$$x_i(t) \rightarrow x_i(t) + \delta x_i(t) \quad (1.5.2)$$

in cui le deformazioni  $\delta x_i(t)$  sono tali per cui il punto iniziale e finale non cambiano, ossia, tali per cui:

$$\delta x_i(t_1) = \delta x_i(t_2) = 0. \quad (1.5.3)$$

---

<sup>9</sup>Ricorda che un funzionale manda una funzione in un numero, generalmente in  $\mathbb{C}$ .

In questo modo l'azione diventa:

$$S[x_i + \delta x_i] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ \frac{1}{2} m \left( \frac{d(x_i + \delta x_i)}{dt} \right)^2 - V(x_i + \delta x_i) \right] \quad (1.5.4)$$

in cui possiamo vedere il termine al quadrato:

$$\left( \frac{d(x_i + \delta x_i)}{dt} \right)^2 = \left[ \frac{dx_i}{dt} + \frac{d(\delta x_i)}{dt} \right]^2 \quad (1.5.5)$$

$$= \left( \frac{dx_i}{dt} + \frac{d(\delta x_i)}{dt} \right) \left( \frac{dx_i}{dt} + \frac{d(\delta x_i)}{dt} \right) \quad (1.5.6)$$

$$\sim \left( \frac{dx_i}{dt} \right)^2 + 2 \frac{dx_i}{dt} \frac{d(\delta x_i)}{dt} + \left( \frac{d(\delta x_i)}{dt} \right)^2 \quad (1.5.7)$$

in cui abbiamo trascurato i termini  $\mathcal{O}(\delta x_i^2)$  e visto che non ci piace troppo la derivata di  $\delta x_i$  aggiungiamo e togliamo:

$$2 \frac{d^2 x_i}{dt^2} \delta x_i \quad (1.5.8)$$

poiché in questo modo:

$$\left( \frac{d(x_i + \delta x_i)}{dt} \right)^2 = \left( \frac{dx_i}{dt} \right)^2 + 2 \frac{d}{dt} \left( \frac{dx_i}{dt} \delta x_i \right) - 2 \frac{d^2 x_i}{dt^2} \delta x_i + \mathcal{O}(\delta x_i^2). \quad (1.5.9)$$

Nell'espressione (1.5.4) c'è anche  $V(x_i + \delta x_i)$  che possiamo espandere con Taylor:

$$V(x_i + \delta x_i) \sim V(x_i) + \partial_i V \delta x_i + \mathcal{O}(\delta x_i^2). \quad (1.5.10)$$

Inserendo gli sviluppi (1.5.9) e (1.5.10) nell'espressione (1.5.4) dell'azione otteniamo:

$$\begin{aligned} S[x_i + \delta x_i] &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ \frac{1}{2} m \left( \frac{dx_i}{dt} \right)^2 - V(x_i) \right] - \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ m \frac{d^2 x_i}{dt^2} + \partial_i V \right] \delta x_i + \\ &\quad + m \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} \left( \frac{dx_i}{dt} \delta x_i \right) \end{aligned} \quad (1.5.11)$$

$$S[x_i + \delta x_i] = S[x_i] - \int_{t_1}^{t_2} dt \left( m \frac{d^2 x_i}{dt^2} + \partial_i V \right) \delta x_i + m \left[ \frac{dx_i}{dt} \delta x_i \right]_{t_1}^{t_2} \quad (1.5.12)$$

in cui notiamo che l'ultimo termine, quello di superficie (o di bordo), è nullo, poiché per tutti i cammini abbiamo la condizione (1.5.3). Dunque l'espressione dell'azione risulta essere:

$$S[x_i + \delta x_i] - S[x_i] = - \int_{t_1}^{t_2} dt \left( m \frac{d^2 x_i}{dt^2} + \partial_i V \right) \delta x_i \quad (1.5.13)$$

in cui il termine tra parentesi può essere visto come:

$$\frac{\delta S}{\delta x_i}. \quad (1.5.14)$$

Otteniamo che  $S$  è invariante per la trasformazione infinitesima che manda  $x_i \rightarrow x_i + \delta x_i$  se e solo se:

$$S[x_i + \delta x_i] - S[x_i] = 0 \quad (1.5.15)$$

o equivalentemente se:

$$\frac{\delta S}{\delta x_i} = 0 \quad (1.5.16)$$

che è verificata se:

$$m \frac{d^2 x_i}{dt^2} + \partial_i V = 0 \quad (1.5.17)$$

che possiamo vedere non essere altro che l'equazione del moto classica, ossia  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ . Notiamo, inoltre, che l'estremizzazione di  $S$  ( $\delta S = 0$ ) individua un'intera classe di cammini. Quale tra gli infiniti cammini verrà effettivamente percorso dal sistema dipende dalle condizioni al contorno, ovvero, dai valori iniziali di  $x_i$  e  $\frac{dx_i}{dt}$ .

### 1.5.2 Legame tra simmetrie di $S$ e le quantità conservative

Un'importante osservazione che si deve fare riguarda il termine di bordo dell'equazione (1.5.12). Sarebbe molto prepotente da parte di un fisico considerare solo trasformazioni di  $x_i$  tali per cui il termine di bordo sia nullo, infatti, esistono diverse trasformazioni rilevanti in Fisica (ad esempio le rotazioni) per cui il termine di bordo non si annulla in automatico. Emmy Noether viene in soccorso e ci da un teorema fondamentale per trovare leggi di conservazione in situazioni come questa, o in situazioni qualsiasi. Sostanzialmente, se la trasformazione considerata non annulla il termine di superficie, noi per far valere ancora le equazioni del moto forzatamente mettiamo a 0 l'altro termine integrale. L'integrale è una derivata totale rispetto a  $t$ , per cui, porla a 0 equivale a chiedere che la cosa all'interno di  $d_t$  sia una corrente, che rispetta un'equazione di continuità<sup>10</sup>, alla quale corrisponde sempre (per via del teorema di Noether) una quantità conservata. Vediamo un esempio semplice di riguardo quello di cui stiamo parlando.

Supponiamo di avere  $V = V(x_i)$  solo funzione del modulo di  $x_i$ , ovvero, di  $r = \sqrt{x^i x_i}$ . In questo caso,  $S[x_i]$  è invariante per rotazioni, poiché dipende solo da  $r$  e non dalle coordinate angolari. Per cui, per una rotazione infinitesima<sup>11</sup>:

$$\delta x_i = \varepsilon_{ij} x^j \quad (1.5.18)$$

---

<sup>10</sup>In generale quando abbiamo una  $\frac{d}{dt}$  questa corrisponde ad un'equazione di continuità.

<sup>11</sup>In cui  $\varepsilon_{ij} = -\varepsilon_{ji}$  è il tensore di Levi-Civita.

si avrà:

$$\delta S = 0. \quad (1.5.19)$$

Questo, però, è uno dei casi in cui non ci si disfa del termine di bordo di  $S[x_i + \delta x_i]$  semplicemente imponendo la condizione sulla deformazione agli estremi:

$$\delta x_i(t_1) = \delta x_i(t_2) = 0 \quad (1.5.20)$$

ma si trova che esso dipende dagli estremi.<sup>12</sup> Dobbiamo chiedere che (1.5.19) sia verificata se valgono le equazioni del moto:

$$m \frac{d^2 x_i}{dt^2} + \partial_i V = 0 \quad (1.5.21)$$

che sono tali, solo se il termine di superficie (integrale) si annulla, ossia, solo se:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} \left( m \frac{dx}{dt} \varepsilon_{ij} x^j \right) = 0 \implies \varepsilon_{ij} x^j m x^i \frac{dx}{dt} \Big|_{t_1}^{t_2} = 0 \quad (1.5.22)$$

che, ricordando che avere indici ripetuti vuol dire avere indici sommati e che  $\varepsilon_{ij} = -\varepsilon_{ji}$ , allora:

$$m \left( x^j \frac{dx^i}{dt} - x_i \frac{dx^j}{dt} \right) \Big|_{t_1}^{t_2} = 0 \quad (1.5.23)$$

in cui individuiamo, nel termine tra parentesi, proprio il momento angolare  $L_{ij}$ . Abbiamo quindi:

$$L_{ij}(t_1) = L_{ij}(t_2) \quad (1.5.24)$$

che vuol dire che il momento angolare si conserva.

Si è potuto vedere con questo semplice esempio una cosa molto importante. L'invarianza dell'azione per rotazioni corrisponde ad una legge di conservazione ed implica l'esistenza di una costante del moto, in questo caso il momento angolare. L'enunciato del teorema di Noether è:

**Teorema 1.** *Ad un'invarianza dell'azione corrisponde una quantità conservata e quindi una legge di conservazione. Ad un'invarianza dell'azione corrisponde una simmetria del sistema.*

Da questa breve sezione concludiamo che:

---

<sup>12</sup>**DA VERIFICARE.** Bisogna distinguere i concetti di simmetria dell'azione e deformazione del cammino. Se noi prendiamo un'azione, un cammino e lo deformiamo, allora otteniamo una variazione dell'azione  $\delta S$ . Però, l'azione è invariante per rotazioni (è simmetrica), per cui se noi prendiamo  $\delta S$  e ruotiamo il sistema di riferimento,  $\delta S$  non deve cambiare, ma si modifica la forma del cammino e di conseguenza gli estremi. Per questo non possiamo imporre che la variazione degli estremi sia nulla.

- Le equazioni del moto classiche si ottengono con il principio di minima azione.
- Le condizioni al contorno sono date dall'esterno, a seconda del tipo di sistema.
- Le invarianze di  $S$  corrispondono a quantità conservative e rispecchiano di conseguenza le simmetrie del sistema.
- Il teorema di Noether è importantissimo perché permette di determinare le costanti del moto di un certo sistema, basandosi solamente sulle invarianze che inseriamo in  $S$ .

Quello che faremo per arrivare alla Teoria Quantistica dei Campi sarà esattamente questo, ossia, richiedere l'invarianza sotto trasformazioni generate dal gruppo di Lorentz (rotazioni e boosts) e dal gruppo di Poincaré (rotazioni, boosts e traslazioni), costruire l'azione della teoria, determinare le equazioni del moto e le quantità conservative.

Rivedremo più in dettagli questi argomenti quando nel capitolo §4 costruiremo le equazioni di campo e vedremo le varie correnti di Noether per i diversi tipi di campi.



## Capitolo 2

# Gemme di teoria dei gruppi

Questo capitolo potrebbe risultare leggermente differente rispetto le lezioni svolte in aula. Ho ritenuto opportuno riorganizzare gli argomenti e aggiungerne di nuovi per completezza. I riferimenti per questo capitolo sono [2, 4, 7, 8, 9, 10].

Altre fonti riguardo le parti della teoria dei gruppi utile alla Fisica teorica sono:

- S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, Vol. 1, cap. II, Cambridge University Press (1995), per una ampia illustrazione del gruppo di Poincaré in Meccanica Quantistica Relativistica.
- M. Srednicki, *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press (2007).
- B. C. Hall, *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations*, Springer (2015).
- W. Tung, *Group Theory in Physics*, World Scientific Pub Co Inc. (1985).
- L. Fonda, *Symmetry Principles in Quantum Physics*, M.Dekker (1970).
- D. Tong, *Quantum Field Theory, Lecture notes*.

Può anche essere utile rivedere il capitolo riguardante le simmetrie e le quantità conservative del corso di Meccanica Quantistica 1, presente nei miei appunti.

Ma perché è importante la teoria dei gruppi?

Come abbiamo già visto nel capitolo §1.5, a delle leggi di invarianza corrispondono delle quantità conservative. Le leggi di invarianza appartengono a dei gruppi (formano un gruppo) e per ciò hanno una serie di proprietà che

ci tornano utili e che ci semplificano le cose. Si utilizza la teoria dei gruppi per trattare le invarianze di una specifica teoria.

Sarà fondamentale ricordare, o studiare da capo, come sono fatti gli operatori (le matrici) legati a specifiche trasformazioni (ad esempio trasformazioni di Lorentz o Poincaré). In Meccanica Quantistica avevamo visto, ad esempio, che il generatore delle traslazioni nello spazio era l'impulso, nel tempo era l'hamiltoniana, invece, il generatore delle rotazioni erano rappresentate dagli operatori di momento angolare  $J_i$ . Vedremo che in Relatività Speciale le trasformazioni di Lorentz sono rotazioni (spaziali) e boost rappresentate rispettivamente da  $\Lambda^\mu_\nu$  e dalle matrici  $K$  (con algebra simile a quella dei momenti angolari).

Vedi l'appendice C per alcune notazioni riguardo la teoria dei gruppi.

## 2.1 Richiami di Relatività Speciale e algebra tensoriale

Ricordiamo in questa sezione alcuni pezzi della relatività speciale. Potremo inglobare in questo ripasso anche l'Appendice D.1.

I postulati della Relatività Speciale sono:

1. La velocità della luce  $c$  è la stessa in tutti i sistemi di riferimento inerziali.
2. Le leggi della Fisica sono invarianti in tutti i sistemi di riferimento inerziali.

Alcuni preferiscono inglobare i due postulati in uno unico:

1. Le leggi della fisica sono invarianti per trasformazioni di Poincaré in tutti i sistemi di riferimento inerziali.

Nota che i postulati qui descritti hanno come diretta conseguenza<sup>1</sup> che la distanza spazio-temporale tra due eventi (punti nello spazio di Minkowski), indicata con  $s^2$ , è un invariante di Lorentz, ovvero, non cambia tra sistemi di riferimento inerziali collegabili da trasformazioni di Poincaré. Ricordiamo che una generica trasformazione di Poincaré è una trasformazione di Lorentz (rappresentata dalla matrice  $\Lambda^\mu_\nu$ ) e una traslazione spazio-temporale:

$$\bar{x}^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu \quad (2.1.1)$$

---

<sup>1</sup>Questa in realtà sarebbe una quantità invariante per via del fatto che la distanza tra due punti di una qualsiasi varietà è un invariante sempre.

sono il set di trasformazioni lineari che legano  $(x_i, t)$  a  $(x'_i, t')$  e formano un gruppo, chiamato gruppo di Poincaré. Anche le trasformazioni rappresentate da  $\Lambda^\mu_\nu$  formano un gruppo, quello di Lorentz.

D'ora in avanti utilizzeremo il sistema di unità naturali, ovvero, porremo  $\hbar = c = 1$ . Vedi l'Appendice B per dettagli.

Come abbiamo già detto, definiamo  $x^\mu$  come un quadrivettore che contiene il tempo  $t$  nella componente 0 e le tre componenti spaziali sono associate ad  $i = 1, 2, 3$ :

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, \mathbf{x}). \quad (2.1.2)$$

Come metrica dello spazio di Minkowski prendiamo per convenienza:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.1.3)$$

e conseguente metrica inversa:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.1.4)$$

Verificabile controllando che  $g^{\mu\rho} g_{\rho\nu} = \delta_\nu^\mu$ . Ricorda che il tensore metrico (o metrica) descrive la geometria di una varietà e da esso è possibile definire il concetto di distanza. In questa notazione definiamo la distanza spazio-temporale come:

$$s^2 = x_\mu x^\mu = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = x_0 x^0 - x_i x^i \quad (2.1.5)$$

e avremo l'invarianza della Relatività Speciale scritta come:

$$s^2 = x_\mu x^\mu = x'_\mu x'^\mu \quad (2.1.6)$$

in cui abbiamo assunto che: in un sistema di riferimento un segnale di luce è percepito in  $x_i$  al tempo  $t$  e in un altro sistema di riferimento, lo stesso segnale di luce, è percepito in  $x'_i$  al tempo  $t'$ .

Possiamo dire che il gruppo di Lorentz (o quello di Poincaré, visto che quando calcoliamo intervalli essi sono trasparenti a traslazioni spazio-temporali), è quello che ci permette di dire che la nostra teoria è relativistica, poiché è un gruppo formato da tutte le matrici  $\Lambda^\mu_\nu$  tali da trasformare i quadrijettori  $x^\mu$  in modo tale da preservare le distanze, vedremo nella sezione §2.4.1 come classificarle. Più precisamente, le trasformazioni di Lorentz (TL) sono isometrie, cioè trasformazioni che lasciano invariata  $s^2$  (come richiesto dalla Relatività Speciale).

**Gli indici** Un piccolo appunto sugli indici. Ricordiamo che un indice alto è un indice di controvarianza, mentre un indice basso è uno di covarianza. Possiamo abbassare o alzare indici facendo agire la metrica su un tensore covariante o controvariante. Infatti vale:

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu \quad , \quad x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu \quad \implies \quad x^0 = x_0 = ct \quad , \quad x^i = -x_i. \quad (2.1.7)$$

Inoltre, gli indici sommati saranno sempre uno alto ed uno basso; una volta contratti gli indici sono solo più dei numeri e possono essere spostati a piacimento. Per le matrici, ad esempio  $\Lambda^\mu_\nu$ , un indice a sinistra è un'indice di riga e un indice a destra è un'indice di colonna. Scambiando gli indici a destra e sinistra scambiamo righe e colonne:

$$\Lambda^\mu_\nu = (\Lambda^T)_\nu^\mu \quad (2.1.8)$$

Spesso nella scrittura con gli indici esplicativi si omette la  $T$ , dal momento che l'informazione è già contenuta nell'ordine e nella posizione degli indici.

**Operatori di derivata** Definiamo:

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right) \quad , \quad \partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right) \quad (2.1.9)$$

e tali per cui:

$$\partial^\mu x^\nu = g^{\mu\nu}. \quad (2.1.10)$$

È anche possibile vedere che la derivata varia come le coordinate  $x^\mu$  sotto trasformazioni di Lorentz, ovvero:

$$\bar{\partial}^\mu = \Lambda^\mu_\nu \partial^\nu \quad (2.1.11)$$

infatti si vede che:

$$\bar{\partial}^\rho \bar{x}^\sigma = (\Lambda^\rho_\mu \partial^\mu) (\Lambda^\sigma_\nu x^\nu + a^\sigma) = \Lambda^\rho_\mu \Lambda^\sigma_\nu \underbrace{\partial^\mu x^\nu}_{g^{\mu\nu}} = \Lambda^\rho_\mu \Lambda^\sigma_\nu g^{\mu\nu} = g^{\rho\sigma} \quad (2.1.12)$$

e analogamente per le derivate seconde:

$$\partial^2 = \partial^\mu \partial_\mu = g_{\mu\nu} \partial^\mu \partial^\nu \quad (2.1.13)$$

$$\bar{\partial}^2 = \bar{\partial}^\mu \bar{\partial}_\mu = g_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\rho \partial^\rho \Lambda^\nu_\sigma \partial^\sigma = \underbrace{g_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma}_{g_{\rho\sigma}} \partial^\rho \partial^\sigma = \partial^\rho g_{\rho\sigma} \partial^\sigma = \partial^2 \quad (2.1.14)$$

### 2.1.1 Quadrivettori e calcolo tensoriale

Definiamo in questa sezione i quadrivettori covarianti e controvarianti e richiamiamo un paio di cose utili riguardanti il calcolo tensoriale.

Formalmente definiamo quadrivettore controvariante (indice alto) gli oggetti che trasformano come il differenziale delle coordinate<sup>2</sup>, ovvero:

$$a'^\mu = \Lambda^\mu_\nu a^\nu \quad (2.1.16)$$

da cui possiamo vedere come trasforma un quadrivettore con indici bassi, che chiameremo quadrivettore covariante:

$$a'_\mu = g_{\mu\nu} a'^\nu = g_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\rho a^\rho = \underbrace{g_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\rho}_{M_\mu^\sigma} g^{\rho\sigma} a_\sigma = M_\mu^\sigma a_\sigma. \quad (2.1.17)$$

Si può vedere che la matrice  $M = g\Lambda g$  è l'inversa di  $\Lambda$ . Infatti, moltiplicando la relazione (2.4.11) per la metrica si ottiene:

$$\Lambda^T g \Lambda g = gg \implies \Lambda^T M = \mathbb{1} \implies M = \underbrace{(\Lambda^T)^{-1}}_{\Lambda_\mu^\sigma} = (\Lambda^{-1})^T. \quad (2.1.18)$$

Dunque è possibile scrivere:

$$a'_\mu = \Lambda_\mu^\sigma a_\sigma. \quad (2.1.19)$$

Definiamo un tensore di rango  $n = p + q$ :

$$T^{\mu_1, \dots, \mu_p}_{\nu_1, \dots, \nu_q} \quad (2.1.20)$$

come quell'oggetto le cui  $4^n$  componenti si trasformano per trasformazioni di Lorentz secondo:

$$T'^{\mu_1, \dots, \mu_p}_{\nu_1, \dots, \nu_q} = \Lambda^{\mu_1}_{\alpha_1} \dots \Lambda^{\mu_p}_{\alpha_p} \Lambda^{\beta_1}_{\nu_1} \dots \Lambda^{\beta_q}_{\nu_q} T^{\alpha_1, \dots, \alpha_p}_{\beta_1, \dots, \beta_q}. \quad (2.1.21)$$

Ad esempio, un tensore di rango 0 è uno scalare, un tensore di rango 1 è un quadrivettore (controvariante o covariante a seconda della posizione dell'indice) e un esempio di un tensore di rango 2 è il tensore metrico  $g_{\mu\nu}$  (che tra l'altro è invariante sotto TL).

Attenzione però che  $\Lambda^\mu_\nu$  non è un tensore.

---

<sup>2</sup>Il differenziale delle coordinate, presa (2.1.1), si trasforma come:

$$dx'^\mu = \Lambda^\mu_\nu dx^\nu. \quad (2.1.15)$$

Definiamo gli pseudo-tensori come quegli oggetti che cambiano segno per parità. Un esempio di pseudo-tensore completamente antisimmetrico è il simbolo di Levi-Civita (in 4 dimensioni)  $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ , definito con  $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = +1$ , con il cambio di segno per ogni permutazione degli indici e con  $\varepsilon = 0$  se due indici sono uguali. Nota che il simbolo  $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$  ha segni opposti. Il simbolo di Levi-Civita si utilizza per definire il determinante di una matrice. Presa  $M$  matrice 4x4, allora vale per definizione:

$$\det\{M\} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} M^0_\mu M^1_\nu M^2_\rho M^3_\sigma. \quad (2.1.22)$$

Esiste anche il tensore completamente antisimmetrico tridimensionale  $\varepsilon^{\mu\nu\rho}$  definito allo stesso modo di quello 4-dimensionale.

### 2.1.2 Considerazioni su oggetti simmetrici, antisimmetrici e sui loro prodotti

Facciamo in questa sottosezione alcune considerazioni sugli oggetti simmetrici e antisimmetrici.

Preso un oggetto generico con 2 indici  $T^{\mu\nu}$ , un'identità che vale sempre è:

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (T^{\mu\nu} + T^{\nu\mu}) + \frac{1}{2} (T^{\mu\nu} - T^{\nu\mu}) \quad (2.1.23)$$

in cui vediamo che la prima parentesi è un pezzo simmetrico per lo scambio  $\mu \longleftrightarrow \nu$ , mentre la seconda parentesi è antisimmetrica per scambio. Se  $T^{\mu\nu}$  è un oggetto antisimmetrico, dunque tale per cui  $T^{\mu\nu} = -T^{\nu\mu}$ , allora si scrive:

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (T^{\mu\nu} - T^{\nu\mu}) \quad (2.1.24)$$

ma se  $T^{\mu\nu}$  è un oggetto simmetrico, dunque  $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$ , allora si scrive:

$$\frac{1}{2} (T^{\mu\nu} + T^{\nu\mu}). \quad (2.1.25)$$

Possiamo vedere che il prodotto di una quantità simmetrica con una antisimmetrica (e viceversa) è sempre nullo. Infatti, vale:

$$A^{\mu\nu} S_{\mu\nu} = -A^{\nu\mu} S_{\nu\mu} \quad (2.1.26)$$

d'altra parte gli indici sommati sono muti e posso rinominarli a piacere, dunque scrivere:

$$-A^{\nu\mu} S_{\nu\mu} = -A^{\mu\nu} S_{\mu\nu} \quad (2.1.27)$$

che richiede però che:

$$A^{\mu\nu} S_{\mu\nu} = -A^{\mu\nu} S_{\mu\nu} \quad (2.1.28)$$

che è una condizione verificata solo se:

$$A^{\mu\nu} S_{\mu\nu} = 0. \quad (2.1.29)$$

## 2.2 Basic facts about Lie algebras

Il titolo si rifà al capitolo §15.4 di Peskin, Schroeder [7]. In Fisica sono di particolare interesse le proprietà dei gruppi continui. Definiamo subito che cos'è un gruppo.

**Definizione 1.** Un **gruppo** è un insieme di elementi  $G = \{g\}$  che soddisfano certe regole algebriche:

1.  $\exists$  una legge di composizione  $\circ$  tale che se  $g_1, g_2 \in G$  allora

$$g_1 g_2 = g_3 \in G. \quad (2.2.1)$$

2.  $\exists I$  elemento identità:

$$\forall g \in G : Ig = gI = g. \quad (2.2.2)$$

3.  $\exists g^{-1}$  elemento inverso

$$\forall g \in G : gg^{-1} = g^{-1}g = I. \quad (2.2.3)$$

4. *Associatività*:

$$(g_1 g_2) g_3 = g_1 (g_2 g_3). \quad (2.2.4)$$

Un gruppo di indica come  $(G, \circ)$ .

C'è un particolare tipo di gruppi che potrebbe essere utile.

**Definizione 2.** Un gruppo  $(G, \circ)$  si dice **abeliano** se:

$$\forall a, b \in G : a \circ b = b \circ a. \quad (2.2.5)$$

Possiamo dare ancora una definizione prima di continuare il nostro discorso.

**Definizione 3.** L'**ordine** di un gruppo è il numero di elementi che compongono il gruppo.

L'ordine può essere finito o infinito. Ad esempio, il gruppo delle permutazioni di 3 oggetti  $S_3$  è finito e ha  $3! = 6$  elementi. Il gruppo delle matrici  $3 \times 3$  che rappresentano le rotazioni proprie in  $\mathbb{R}^3$ , ovvero  $SO(3)$ , è infinito.

Ovviamente, se a noi fisici interessano i gruppi continui, forse conviene effettivamente definirli.

**Definizione 4.** Un gruppo  $(G, \circ)$  si dice **continuo** se il numero di elementi è infinito non numerabile.

In realtà, però, per noi è fondamentale che un gruppo sia connesso.

**Definizione 5.** Un gruppo si dice **connesso** se i suoi elementi si possono connettere con continuità all'identità.

Un gruppo continuo connesso è molto importante per noi, poiché è un gruppo i cui elementi sono infinitesimalmente vicini all'identità, che è fondamentale perché vuol dire che un generico elemento del gruppo si può scrivere come l'azione ripetuta (infinte volte) di questi elementi infinitesimi. Un elemento  $g$  del gruppo, infinitesimalmente vicino l'identità può essere scritto come:

$$g(\alpha) = 1 + i\alpha_a T^a + \mathcal{O}(\alpha^2) \quad (2.2.6)$$

in cui  $\alpha^a$  sono i parametri infinitesimi del gruppo e sono parametri continui (reali o complessi), invece, i  $T^a$  sono operatori hermitiani<sup>3</sup> e vengono chiamati i **generatori** del gruppo di simmetria.

Diamo un'ulteriore definizione.

**Definizione 6.** Un **gruppo di Lie** è un gruppo di trasformazioni, continuo e i cui elementi sono funzioni analitiche (continue ed infinitamente derivabili) di un certo numero finito di parametri  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ .

Sono proprio tali gruppi quelli per cui è possibile definire e studiare le trasformazioni infinitesime, ossia, le trasformazioni arbitrariamente vicine all'identità. Ogni elemento  $g$  del gruppo di Lie si può scrivere, in modo economico utilizzando i generatori del gruppo e l'esponenziazione, come:

$$g(\alpha) = e^{i\alpha_a T^a} \quad (2.2.8)$$

in cui  $\alpha_a$  e  $T^a$  li abbiamo già visti, ma sappiamo bene che quando compare un esponenziale, in una qualche definizione, quello che abbiamo è una definizione data dal suo sviluppo in serie. L'indice  $a$  assume valori che vanno da  $1, \dots, \dim G$ . Definiamo che cos'è la dimensione di un gruppo.

**Definizione 7.** La **dimensione** di un gruppo è il numero di parametri (generatori) necessari a descrivere completamente un gruppo.

Nota che in (2.2.8) il coefficiente  $\alpha_a = 0$  definisce l'identità.

Il problema è che sappiamo che alle invariantanze del sistema possiamo associare dei gruppi e che ogni gruppo possiede degli elementi che possono essere scritti come l'esponenziale di certi coefficienti e dei generatori del gruppo stesso. Però per classificare o comunque studiare e capire come agisce un gruppo è fondamentale come sono fatti i suoi elementi e dunque i suoi generatori. Diamo una definizione.

---

<sup>3</sup>Sono hermitiani solo se il gruppo di Lie è unitario e a parametri reali, infatti:

$$U^\dagger = (\exp\{i\alpha_a T^a\})^\dagger = \exp\{-i\alpha_a T^{a\dagger}\} \equiv U^{-1} = \exp\{-i\alpha_a T\}. \quad (2.2.7)$$

**Definizione 8.** Dare una **rappresentazione** di un gruppo  $G$  vuol dire: reaalizzare delle relazioni moltiplicative del gruppo  $G$  tramite un corrispondente gruppo di matrici quadrate. Queste matrici sono pensate come operatori che agiscono su uno spazio vettoriale  $V$  la cui dimensione è detta dimensione della rappresentazione.

Una rappresentazione è una mappa che manda l'elemento  $g$  del gruppo in una matrice  $n \times n$ :

$$g \rightarrow M(g).$$

tale che:

$$M(g_1)M(g_2) = M(g_1 \circ g_2) \quad (2.2.9)$$

$$M(I) = \mathbb{1} \quad (2.2.10)$$

da cui segue che:

$$M(g^{-1})M(g) = M(I) = \mathbb{1} \implies M(g^{-1}) = [M(g)]^{-1}. \quad (2.2.11)$$

L'associatività è automatica poiché il prodotto tra matrici è associativo. Per questo, tutte le proprietà del gruppo sono realizzate esplicitamente dalle matrici di una rappresentazione. La rappresentazione più semplice e naturale usata per definire un gruppo è detta **rappresentazione definente** o **fondamentale**. Ovviamente di un gruppo possiamo dare molte definizioni diverse, che possono avere dimensioni diverse (finite o infinite), vedi ad esempio p.20-23 in cui Salmé [9] oltre alla rappresentazione matriciale  $3 \times 3$  di  $SO(3)$  da una rappresentazione infinito dimensionale che descrive una rotazione in uno spazio funzionale. La rappresentazione fondamentale è la rappresentazione fedele con dimensione più bassa e fornisce la dimensione del gruppo. Ad esempio,  $SU(2)$ , il gruppo di spin, ha dimensione 2 poiché ha rappresentazione fondamentale data da matrici  $2 \times 2$ .

Esiste però una rappresentazioni più importante.

**Definizione 9.** La **rappresentazione irriducibile** è una rappresentazione per cui non c'è modo di ridurre la sua dimensione.

Se la rappresentazione è riducibile tutte le matrici possono essere ridotte in forma diagonale a blocchi (attraverso trasformazioni di similitudine<sup>4</sup>).

---

<sup>4</sup>In generale, si definiscono *equivalenti* rappresentazioni collegate da trasformazioni di similitudine:  $M(g)$  e  $\bar{M}(g)$  sono rappresentazioni equivalenti se:

$$\bar{M}(g) = AM(g)A^{-1}, \quad \forall g \in G \quad (2.2.12)$$

con  $A$  matrice indipendente da  $g$ . Questa relazione di equivalenza permette di considerare rappresentazioni equivalenti come essenzialmente la stessa rappresentazione. Infatti la trasformazione di similitudine rappresenta semplicemente un cambio di base nello spazio vettoriale  $V$ .

Una rappresentazione riducibile ( $D$ ) si può descrivere completamente attraverso le rappresentazioni irriducibili ( $A, B, C$ ) che ne formano i blocchi. In particolare, si dice che è la somma diretta di tali rappresentazioni irriducibili:

$$D = A \oplus B \oplus C \quad (2.2.13)$$

Dunque, determinati i generatori di un gruppo in modo astratto, come già detto, ci interessa capire come gli elementi di un gruppo agiscono sugli stati fisici. Trovati i generatori li possiamo rappresentare con una rappresentazione matriciale, la cui dimensione è la dimensione del gruppo, e ne si può vedere facilmente l'azione sugli stati. I generatori, come già visto quando li abbiamo introdotti, sono (in MQ) operatori hermitiani sullo spazio di Hilbert.

Però, come troviamo i generatori nella pratica? Abbiamo detto che ogni elemento di un gruppo di Lie può essere scritto come (2.2.8). Abbiamo anche già detto che  $T^a$  sono i generatori del gruppo e sono rappresentabili da matrici  $n \times n$ . La struttura di  $G$ , gruppo di Lie, sarà determinata da piccole perturbazioni nell'intorno dell'identità, ovvero, da perturbazioni infinitesime. La rappresentazione di ogni generatore di  $G$  la si trova facendo la derivata rispetto al suo corrispondente parametro. Spiego meglio. Quando  $\alpha_a \ll 1$  si ha una trasformazione infinitesima:

$$g = 1 + i\alpha_a T^a. \quad (2.2.14)$$

Notiamo che dall'espressione (2.2.14) se si esplicita la somma sull'indice  $a$  e si aggiungono tutti i termini  $\mathcal{O}(\alpha^2)$ , allora si ricostruisce la definizione (2.2.8). Vediamo, inoltre, che l'espressione (2.2.14) è lineare nei parametri  $\alpha_a$ , con  $a = 0, \dots, n$ , per cui possiamo determinare i generatori come:

$$T^a = -i \frac{\partial g}{\partial \alpha_a} \Big|_{\alpha=0}. \quad (2.2.15)$$

Nota che l'unità immaginaria introdotta in (2.2.15) è pura convenzione, ma permette di presentare il generatore come matrice hermitiana (i cui autovalori sono reali). Vedi la sottosezione §2.3 per un esempio di calcolo. È inoltre possibile raggiungere qualsiasi elemento di  $G$  connesso con l'identità tramite l'applicazione successiva di trasformazioni infinitesime:

$$g = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \mathbb{1} + i \frac{\alpha_a T^a}{k} \right)^k = e^{i\alpha_a T^a}. \quad (2.2.16)$$

È fondamentale per noi in Fisica, avere un gruppo connesso e la relazione (2.2.16). Considerato un certo numero di trasformazioni infinitesime siamo in grado di ricostruire una trasformazione finita utilizzando (2.2.16) e possiamo spostarci tra due punti qualsiasi dello spazio con continuità. Però per

noi è importante connetterci con l'identità, poiché così possiamo rappresentare il nostro gruppo tramite trasformazioni infinitesime. Dunque, possiamo partire dall'identità e la possiamo modificare per infinitesimi, e infinitesimo per infinitesimo ricostruiamo una trasformazione continua. Infinitesimo per infinitesimo vuol dire esponenziale. Gli operatori che rappresentano la nostra trasformazione possono essere espressi tramite una trasformazione infinitesima in successione in successione ad altre. L'operatore finito che riusciamo ad ottenere lo possiamo sempre scrivere come l'esponenziale dei parametri e generatori del gruppo, ovvero utilizzando la relazione (2.2.8).

Vedi il capitolo §9 degli appunti di Meccanica Quantistica 1, in cui abbiamo visto che il generatore delle traslazioni è l'operatore impulso, ma che queste trasformazioni agiscono sugli stati del sistema tramite l'operatore  $\exp\{-i\mathbf{a} \cdot \mathbf{p}\}$ .

Grazie all'esponenziale, per ottenere le rappresentazioni dei gruppi di Lie connessi basta concentrarsi sulle rappresentazioni dei generatori.

È opportuno dare ancora qualche definizione generale sui gruppi e sui gruppi di Lie.

**Definizione 10.** *Un gruppo si dice **compatto** se i parametri variano in un intervallo chiuso e limitato.*

Ad esempio, le rotazioni formano un gruppo compatto, poiché gli angoli variano nell'intervallo  $[0, 2\pi]$ .

**Definizione 11.** *Se un'insieme è **compatto** esiste sempre una successione di elementi che converge ad un qualsiasi elemento dell'insieme:*

$$\forall a \in G, \exists a_n \in G \quad / \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

**Definizione 12.** *Se  $H \subset G$ ,  $H$  si dice **sottogruppo** di  $G$  se l'insieme dei suoi elementi è gruppo con la stessa operazione di  $G$ .*

*Il sottogruppo si dice **invariante** (o normale) se:*

$$\forall g \in G, \forall h \in H, g \circ h \circ g^{-1} \in H \quad (2.2.17)$$

Un esempio di ciò è il gruppo delle rotazioni attorno l'asse  $z$ , che è sottogruppo di  $SO(3)$ .

**Definizione 13.** *Una **sottoalgebra** di un'algebra  $A$ , è un sottoinsieme  $B \subseteq A$  che è chiuso rispetto alle operazioni dell'algebra e che contiene gli elementi necessari per essere anch'essa un'algebra. Questo vuol dire:*

- $B$  è un sottospazio vettoriale di  $A$  (quindi chiuso per somma e moltiplicazione scalare).

- $B$  è chiuso rispetto alla moltiplicazione definita in  $A$  (cioè se  $x, y \in B$  allora anche  $x \circ y \in B$ ).

Un esempio semplice è: preso  $M_2(\mathbb{R})$ , cioè l'insieme delle matrici 2x2 a coefficienti reali, una sua sottoalgebra è l'insieme delle matrici diagonali, poiché è un sottospazio vettoriale (possiamo sommare matrici diagonali e avere ancora matrici diagonali) ed il prodotto di due matrici diagonali è ancora una matrice diagonale.

**Definizione 14.** Un gruppo  $G$  si dice **semplice** se non ha sottogruppi invarianti. Invece, un gruppo è detto **semi-semplice** se non ha sottogruppi invarianti abeliani.

Un esempio è  $SO(3)$ , che ha come sottogruppo le rotazioni tridimensionali attorno ad un'asse, ma che non è un sottogruppo invariante, dunque,  $SO(3)$  è semplice.

In Fisica i gruppi semi-semplici sono particolarmente importanti. Per i gruppi di Lie semi-semplici, gli operatori di Casimir permettono di catalogare le rappresentazioni irriducibili del gruppo. Il *teorema di Racah* nella teoria dei gruppi afferma che, per un gruppo di Lie semisemplice, il numero di operatori di Casimir indipendenti è uguale al rango del gruppo stesso. Questi operatori svolgono un ruolo cruciale nella classificazione delle rappresentazioni irriducibili dei gruppi di Lie, poiché i loro autovalori possono essere utilizzati per etichettare tali rappresentazioni.

Riprendiamo alcune definizioni sulle rappresentazioni.

**Definizione 15.** Se esiste una relazione univoca tra gli elementi del gruppo e le matrici che li rappresentano (cosa che non sempre succede visto che si possono avere rappresentazioni matriciali che rappresentano gli stessi elementi), allora la rappresentazione si dice **fedele**.

La rappresentazione fondamentale di un gruppo è la rappresentazione fedele con le dimensioni più piccole possibili.

Se il gruppo è abeliano la rappresentazione fondamentale è quella delle matrici 1x1, ossia, i numeri. Per i gruppi non abeliani (quelli non commutativi, ad esempio  $SU(2)$ ) la dimensionalità della rappresentazione fondamentale dev'essere maggiore di 1, ovvero, bisogna avere delle matrici per soddisfare l'algebra e avere una rappresentazione fedele.

**Definizione 16.** Una rappresentazione unitaria è una rappresentazione in cui le sue matrici sono unitarie, e dunque tali che  $UU^\dagger = \mathbb{1}$ .

Sono rappresentazioni particolarmente importanti poiché, se esistono, conservano il prodotto scalare tra i vettori di uno spazio vettoriale complesso (lo spazio di Hilbert).

**Definizione 17.** Se  $D(g)$  è una rappresentazione dell'elemento  $g \in G$ , allora  $D^*(g)$  è la **rappresentazione complessa coniugata** del gruppo. Se chiamiamo  $T_i$  i generatori di  $G$ , allora:

$$D(g) = \exp\{i\alpha_i T^i\} \quad (2.2.18)$$

$$D^*(g) = \exp\{-i\alpha_i T^{*i}\} \quad (2.2.19)$$

per cui  $(-iT^{*i})$  sono i generatori della rappresentazione complessa coniugata.

Si può notare, ad esempio in  $SU(3)$ , che le due rappresentazioni dei generatori  $T^i$  e  $T^{*i}$  non sono equivalenti<sup>5</sup>, motivo per cui si hanno vettori di base, ovvero autovettori, diversi nelle due rappresentazioni. Invece, per  $SU(2)$  le rappresentazioni dei generatori coincidono.

**Definizione 18.** Date due rappresentazioni  $D(g)$  e  $D'(g)$  del gruppo  $G$ , il prodotto diretto delle due rappresentazioni è la rappresentazione di  $g$  che agisce sullo spazio vettoriale ottenuto dal prodotto tensoriale tra i vettori base di  $D(g)$  e  $D'(g)$ :

$$[D(g) v_i] \otimes [D'(g) v'_k] = [D(g) \otimes D'(g)] (v_i \otimes v'_k) \quad (2.2.20)$$

Esempi rilevanti in Fisica sono: l'unificazione delle interazioni deboli (governate da  $SU(2)$ ) ed elettromagnetiche ( $U(1)$ )

$$SU(2) \otimes U(1)$$

e l'unificazione della forza nucleare forte ( $SU(3)$ ), nucleare debole ed elettromagnetica

$$SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1).$$

Ritorniamo un attimo sui gruppi di Lie. I generatori  $T^a$  generano lo spazio di un gruppo infinitesimo di trasformazioni, per cui, il commutatore di due generatori dev'essere una combinazione lineare di generatori. Le regole di commutazione le possiamo quindi scrivere come:

$$[T^a, T^b] = if^{ab}_c T^c \quad (2.2.21)$$

in cui  $f^{ab}_c$  la chiamiamo **costanti di struttura** di  $G$ , poiché codifica la struttura non abeliana del gruppo.

**Definizione 19.** L'**algebra di Lie** di un gruppo è l'insieme delle relazioni di commutazione dei suoi generatori, che ne definisce le costanti di struttura e quindi caratterizza le trasformazioni del gruppo (caratterizzando la sua legge di composizione).

---

<sup>5</sup>Questo vuol dire che  $ST_iS^{-1} \neq -T_i^*$ .

Per un gruppo di Lie vale anche<sup>6</sup> l'identità:

$$[[T^a, T^b], T^c] + [[T^b, T^c], T^a] + [[T^c, T^a], T^b] = 0 \quad (2.2.24)$$

che si traduce in:

$$f^{ab}{}_d f^{dc}{}_e + f^{bc}{}_d f^{da}{}_e + f^{ca}{}_d f^{db}{}_e = 0 \quad (2.2.25)$$

chiamata **identità di Jacobi**.

In generale si indica l'algebra di Lie con i caratteri in stile fraktur. Ad esempio, per il gruppo  $SO(3, 1)$  l'algebra la indichiamo con  $\mathfrak{so}(3, 1)$ .

Ancora riguardo le algebre. In generale, un'algebra è uno spazio vettoriale lineare dotato di una legge di composizione, l'aglebra di Lie è lo spazio vettoriale astratto i cui elementi sono i generatori, la legge di composizione sono le regole di commutazione (anticommutazione o miste) e si deve verificare l'identità di Jacobi.

Una subalgebra dell'algebra di Lie,  $A$ , è chiamata **ideale**,  $I$ , se  $\forall i \in I, \forall a \in A$  si ha  $[i, a] \in I$ . Diciamo che un'algebra di Lie è **semplice** se ha solo ideali triviali (ad esempio, l'algebra stessa). Un'algebra è **semi-semplice** se non ha ideali abeliani. Un'algebra semplice è anche semi-semplice, ma non vale il viceversa.

Lo studio delle algebre di Lie semi-semplici è molto rilevante in Fisica, poiché le algebre di Lie semi-semplici sono esprimibili come somma diretta di algebre semplici. A livello di gruppi, un gruppo semi-semplice si potrà esprimere come prodotto diretto di gruppi semplici (vedi la sezione §2.4.4).

Diamo altre due definizioni importanti.

**Definizione 20.** Il **rango** dell'algebra di Lie è definito come il numero massimo di generatori commutanti tra loro. Dunque, da il numero di generatori che possono essere rappresentati da matrici diagonalizzabili simultaneamente.

**Definizione 21.** La **rappresentazione aggiunta** è quella in cui i generatori sono le costanti di struttura.

Il vantaggio è che il numero di generatori è uguale alla dimensionalità della rappresentazione aggiunta. Ad esempio, per  $SU(2)$  la dimensionalità

---

<sup>6</sup>In realtà ci sono anche altre due proprietà che non utilizzeremo molto:

1. Nella rappresentazione fondamentale vale:

$$\text{Tr}\{T^a T^b\} = \frac{1}{2} \gamma^{ab} \quad (2.2.22)$$

in cui  $\gamma^{ab}$  è la metrica di Killing.

2. Vale inoltre:

$$f^{abc} = f^{ab}{}_d \gamma^{dc} \equiv \text{tensore completamente antisimmetrico.} \quad (2.2.23)$$

della rappresentazione aggiunta è 3, i generatori sono  $\sigma_i$  con  $i = 1, 2, 3$ .

Aggiungiamo un'altra proprietà che potrebbe risultare utile, la **formula di Baker-Campbell-Hausdorff**, per il prodotto degli esponenziali di due operatori lineari  $A$  e  $B$ :

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\frac{1}{12}[A,[A,B]]-\frac{1}{12}[B,[A,B]]+\dots} \quad (2.2.26)$$

in cui i puntini indicano i termini successivi, che comunque sono sempre esprimibili tramite commutatori. Questa formula mostra che la conoscenza dell'algebra di Lie è sufficiente per ricostruire il prodotto, in genere non commutativo, del corrispondente gruppo di Lie.

Vediamo le ultime nozioni necessarie per proseguire:

- È sempre vero che le rappresentazioni di un gruppo  $G$  sono rappresentazioni della sua algebra, ma non è sempre vero il contrario, ossia che tutte le rappresentazioni dell'algebra di  $G$  sono rappresentazioni del gruppo  $G$ . Vedi nella prossima sottosezione §2.3 l'esempio del gruppo  $SU(2)$ .
- Trovata l'algebra di un gruppo è possibile trovare un'operatore che commuti con tutti i generatori  $T_i$  del gruppo:

$$\exists C / [C, T_i] = 0 \quad \forall i \quad (2.2.27)$$

e l'operatore  $C$  è chiamato **operatore di Casimir**. In generale,  $C$  non è un'operatore lineare nei generatori. In ogni rappresentazione irriducibile  $C$  è un multiplo dell'operatore identità  $C = k\mathbb{1}$ . Le rappresentazioni irriducibili di un gruppo di Lie possono pertanto essere classificate in base agli autovalori degli operatori di Casimir, dove il numero minimo di operatori di Casimir necessari a specificare completamente tutte le rappresentazioni irriducibili è pari al rango dell'algebra.

Un'esempio è l'operatore  $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$  di  $SO(3)$ , che in Meccanica Quantistica abbiamo utilizzato per completare lo SCOC e rimuovere la degenerazione.

- Possiamo enunciare, senza dimostrare, un teorema:

**Teorema 2.** *Le rappresentazioni unitarie dei gruppi compatti sono finito dimensionali.*

Questo teorema si applica a gruppi compatti, quali sono  $SO(n)$  ed  $SU(n)$ . Vedi la sezione §2.3. Il gruppo di Lorentz  $SO(3, 1)$  e quello di Poincaré  $ISO(3, 1)$  non sono compatti, per cui il teorema non vale e le loro rappresentazioni unitarie sono infinito-dimensionali. Per

la Teoria Quantistica dei Campi sono d'interesse: le rappresentazioni finito-dimensionali non unitarie del gruppo di Lorentz, utilizzate per descrivere i campi quantistici e in generale le osservabili, e le rappresentazioni infinito-dimensionali unitarie del gruppo di Poincaré, che sono realizzate tramite operatori unitari che garantiscono la conservazione della probabilità (dunque realizzate tramite operatori unitari). Ci interessano le trasformazioni unitarie poiché gli stati di un sistema fisico si trasformano secondo esse.

- Vediamo un concetto molto importante in Teoria Quantistica dei Campi, che ci viene in soccorso soprattutto quando siamo in presenza di gruppi non semplicemente connessi. Un **ricoprimento** (o rivestimento) di un gruppo è un altro gruppo topologico (cioè dotato di una struttura continua) che "copre" il primo in modo localmente identico, ma globalmente diverso. In parole povere il ricoprimento di un gruppo è a sua volta un gruppo, ma globalmente più ricco. Formalmente diciamo:

**Definizione 22.** *Un gruppo di ricoprimento  $\tilde{G}$  di un gruppo  $G$  è un gruppo topologico insieme ad una mappa continua suriettiva (cioè che copre tutto  $G$ ):*

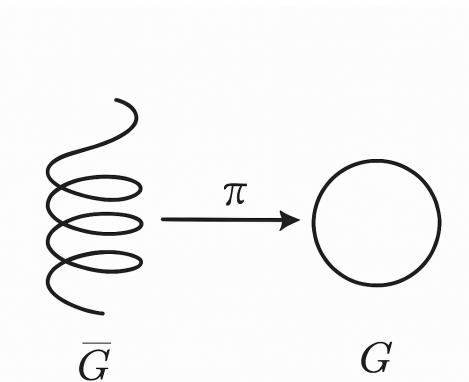
$$\pi : \tilde{G} \longrightarrow G \quad (2.2.28)$$

*con la proprietà che localmente  $\pi$  è un'isomorfismo tra gruppi (cioè, localmente possiamo confondere  $\tilde{G}$  con  $G$ ).*

Un **ricoprimento universale** di un gruppo  $G$  è il gruppo semplicemente connesso  $\tilde{G}$  che copre  $G$  in modo continuo. Utilizzeremo questa cosa per costruire rappresentazioni che non si possono definire su  $G$ , ad esempio quando vorremo utilizzare gli spinori, non definiti su  $SO(3)$ . Due esempi fondamentali, che analizzeremo meglio, sono:

- Il gruppo  $SU(2)$  è ricoprimento delle rotazioni ordinarie  $SO(3)$ . Si dice che l'omeomorfismo tra  $SU(2)$  ed  $SO(3)$  è di tipo  $2 \rightarrow 1$ , o che  $SU(2)$  è un ricoprimento doppio di  $SO(3)$ , poiché ad ogni rotazione di  $SO(3)$  corrispondono due rotazioni di  $SU(2)$ . Lo vedremo meglio nelle sezioni dedicate ai due gruppi.
- Il gruppo  $SL(2, \mathbb{C})$  delle matrici  $2 \times 2$  complesse con  $\det = 1$  è un ricoprimento universale del gruppo delle trasformazioni di Lorentz proprie ortocrone  $SO(3, 1)$ . Ogni trasformazione di Lorentz viene da due matrici di  $SL(2, \mathbb{C})$ .

Un esempio grafico del concetto è raffigurato in figura 2.1.



**Figura 2.1:** Illustrazione grafica di  $\tilde{G}$  ricoprimento di  $G$ .

## 2.3 Alcuni esempi di gruppi di Lie rilevanti in Fisica

Vediamo in questa sezione alcuni esempi rilevanti in Fisica di gruppi di Lie.

In particolare, ci renderemo conto che è molto più comodo per noi utilizzare i generatori per studiare un gruppo, anziché gli elementi dello stesso. Ad esempio, il gruppo delle rotazioni è un gruppo continuo, poiché  $SO(3)$  è un gruppo con un numero infinito non numerabile di elementi. Per la Meccanica Quantistica, è subito chiaro, che  $SO(3)$  non è un gruppo molto bello, perché so che lo spazio di Hilbert è uno spazio separabile, che ha  $\infty$  elementi, ma numerabile. Però, se al posto di utilizzare gli  $\infty$  elementi di  $SO(3)$ , utilizzo i suoi generatori la situazione migliora. I generatori del gruppo delle rotazioni sono solamente 3:  $L_x$ ,  $L_y$  ed  $L_z$ .

### 2.3.1 Il gruppo $SO(n)$

È il gruppo definito come:

$$SO(n) = \{\text{matrici ortogonali } nxn \text{ ad elementi reali e con } \det = 1\}.$$

Possiamo analizzare, ad esempio, il gruppo  $SO(3)$ , ossia, il gruppo delle matrici  $R$  reali ortogonali  $3 \times 3$  con determinante uguale ad 1. È il gruppo che rappresenta le rotazioni nello spazio tridimensionale<sup>7</sup>.  $SO(3)$  è un gruppo di Lie compatto, connesso e non abeliano. La matrice  $R$  genera le trasformazioni di un vettore tridimensionale:

$$\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' = R\mathbf{x} \quad (2.3.1)$$

---

<sup>7</sup>Nota che ci sono due modi di vedere una rotazione. Quando teniamo fisso il sistema di riferimento, ma ruotiamo il vettore posizione si parla di **trasformazione attiva**, quando teniamo fisso il vettore, ma ruotiamo il sistema di riferimento parliamo di **trasformazione passiva**.

o in notazione tridimensionale<sup>8</sup>:

$$x^i \rightarrow x'^i = R^i_j x^j \quad , \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (2.3.2)$$

Conosciamo bene, ad esempio, una rotazione attorno l'asse  $z$  (è analogo per rotazioni attorno  $x$  o  $y$ ):

$$R_z(\theta_z) = \begin{pmatrix} \cos \theta_z & \sin \theta_z & 0 \\ -\sin \theta_z & \cos \theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.3.3)$$

se consideriamo  $\theta_z \ll 1$ , la matrice  $R_z$  diventa:

$$R_z(\theta_z \ll 1) \sim \mathbb{1} + \theta_z \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \dots \quad (2.3.4)$$

in cui possiamo individuare per definizione il generatore. la matrice che compare dietro  $\theta_z$  è appunto  $iT^3$ , e di conseguenza:

$$T^3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.3.5)$$

Possiamo fare lo stesso procedimento anche per rotazioni attorno l'asse  $x$  ed  $y$  (le matrici di rotazione attorno ad un'asse si costruiscono ponendo 1 nella riga-colonna dell'asse di rotazione e la matrice 2x2 di sin e cos, così com'è in  $R_z$ , nell'altro blocco) e determinare  $T^1$  e  $T^2$  (vedi p.15 di Salmé [9] o p. 13 di Bastianelli [2]), in questo modo, avendo espressioni esplicite dei generatori si può determinare facilmente l'algebra di Lie del gruppo, che risulta essere:

$$[T^i, T^j] = i\varepsilon^{ijk}T^k. \quad (2.3.6)$$

Da (2.3.6) si vede che  $SO(3)$  non è abeliano<sup>9</sup>. L'algebra trovata è stata ricavata considerando la rappresentazione definente, ma è anche possibile considerare tale algebra come l'algebra astratta di  $SO(3)$  per poter studiare le diverse rappresentazioni irriducibili.

Abbiamo anche già detto che le rappresentazioni irriducibili dell'algebra di Lie corrispondono alle rappresentazioni infinitesime del gruppo e che esponenziandole possiamo ottenere le trasformazioni finite, che forniscono una rappresentazione del gruppo.

---

<sup>8</sup>Nota che in questo caso mettere indici alti o bassi è irrilevante, poiché la metrica in  $\mathbb{R}^3$  è  $\delta_{ij}$ .

<sup>9</sup>Nota però che  $SO(2)$  è un gruppo abeliano, vedi p. 12 di Bastianelli [2].

Il gruppo  $SO(3)$  è rilevante in Fisica perché se rinominiamo  $T^i = J^i$  (e ci mettiamo in unità naturali,  $\hbar = 1$ ) allora riconosciamo:

$$[J^i, J^j] = i\epsilon^{ijk}J^k. \quad (2.3.7)$$

che è l'algebra quantistica del momento angolare, il cui studio delle rappresentazioni unitarie irriducibili può essere risolto esplicitamente con i metodi visti in Meccanica Quantistica. La rappresentazione fondamentale di  $SO(3)$  è infatti data dalle matrici che operano sugli stati  $|l, m\rangle$ , autostati del momento angolare, e li mesolano tra loro. Le rappresentazioni irriducibili di  $SO(3)$  sono date dalle armoniche sferiche  $Y_l^m$ . Ad  $|l, m\rangle$  corrispondono le armoniche sferiche  $Y_l^m$ , che formano una base della rappresentazione di spin  $l$ , che è  $2l+1$  dimensionale (infatti i valori possibili di  $m$  sono  $2l+1$ ), quindi, la rappresentazione fondamentale (e irriducibile) di  $SO(3)$  è data da matrici  $(2l+1)(2l+1)$ -dimensionali.

Come visto, le rotazioni in  $\mathbb{R}^3$  dipendono in modo continuo da 3 parametri, che sono i tre angoli di Eulero, motivo per cui sono un gruppo continuo, ma anche compatto dal momento che essi variano nell'intervallo  $[0, 2\pi]$ . Notiamo che abbiamo un gruppo connesso, poiché possiamo passare con continuità dalla matrice identità  $(\delta_{ij})$  ad una qualsiasi rotazione, visto che la dipendenza dagli angoli è data dalle funzioni analitiche seno e coseno. Chiamiamo gruppo delle rotazioni **proprie** il gruppo delle matrici  $3 \times 3$  (rotazioni in  $\mathbb{R}^3$ ) poiché sono connesse con continuità all'identità. Le rotazioni in  $\mathbb{R}^3$  sono rappresentate da matrici  $3 \times 3$ , ma appena cominciano ad agire su spazi funzionali la loro rappresentazione può dimensionalità o assumere una forma differenziale (in questo caso si parla di dimensionalità infinita della rappresentazione).

Il gruppo delle rotazioni proprie si indica con  $SO(3)$ , come ben sappiamo. L'aggettivo ortogonale ci indica un'importante proprietà delle rotazioni, ossia che il prodotto scalare tra due vettori non cambia se applichiamo la stessa rotazione ai due vettori (vedi p.13 di Salmé [9]). Come ultima osservazione, che tornerà utile nella sezione §2.4.1, è utile sottolineare la differenza di  $SO(3)$  con il gruppo  $O(3)$ , di cui  $SO(3)$  è sottogruppo: il gruppo  $O(3)$  contiene anche l'inversione spaziale  $I_s$  (per cui si ha  $\det\{I_s\} = -1$ ), che non può essere connessa con continuità con l'identità, differentemente dalle rotazioni proprie<sup>10</sup>.

Si noti un'ultima cosa. L'algebra 2.3.6 non è valida per  $SO(n)$ , ma solo per  $n = 3$ . Per generalizzare si può indicare  $T^1 = T^{23}$  (poiché  $T^1$  genera una rotazione nel piano 2-3) e così via  $T^2 = T^{31}$ ,  $T^3 = T^{12}$ . Gli elementi di matrice, è dimostrabile, possono essere scritti come:

$$(T^1)^i{}_j = (T^{23})^i{}_j = -i(\delta^{2i}\delta^3{}_j - \delta^{3i}\delta^2{}_j) \quad (2.3.8)$$

---

<sup>10</sup>Sarà proprio questo il motivo per cui ci interesserà solo  $SO(3)$  quando studieremo il gruppo di Lorentz.

e analoghe per  $T^{31}$  e  $T^{12}$ . Si ottiene quindi:

$$(T^{kl})^i_j = -i(\delta^{ki}\delta^l_j - \delta^{li}\delta^k_j) \quad (2.3.9)$$

che può essere utilizzata per calcolare l'algebra di Lie di  $SO(3)$ . Si trova:

$$[T^{kl}, T^{ij}] = -i\delta^{li}T^{kj} + i\delta^{ki}T^{lj} + i\delta^{lj}T^{ki} - i\delta^{kj}T^{li}. \quad (2.3.10)$$

Nella forma (2.3.10) è valida per il generico gruppo  $SO(n)$  e non solo nel caso  $n = 3$ . Naturalmente, gli indici assumono valori da 1 ad  $n$ . Inoltre, sostituendo la metrica euclidea  $\delta_{ij}$  con la metrica di Minkowski  $g_{ij}$ , appropriata per uno spazio-tempo con  $n$  spazi ed  $m$ , la relazione (2.3.10) è l'algebra di Lie di  $SO(n, m)$ .

### 2.3.2 Il gruppo $SU(n)$

È il gruppo definito come:

$$SU(n) = \{\text{matrici complesse unitarie } nxn \text{ con } \det = 1\}.$$

Uno dei gruppi più importanti in Fisica è  $SU(2)$ , vediamolo nel dettaglio.

Possiamo scrivere matrici che differiscono infinitesimalmente dalla matrice unità come segue:

$$g \in SU(2) \quad , \quad g = \mathbb{1} + iT \quad T^i_j \ll 1. \quad (2.3.11)$$

Possiamo vedere che la richiesta che  $g^\dagger = 1 - iT^\dagger$  coincida con  $g^{-1} = 1 - iT$  (ossia che  $g$  siano matrici unitarie), implica che le matrici  $T$  siano hermitiane:

$$T = T^\dagger. \quad (2.3.12)$$

Inoltre, la richiesta di  $\det\{g\} = 1$  ci fa vedere che:

$$\det\{g\} = 1 + i \operatorname{Tr}\{T\} \implies \operatorname{Tr}\{T\} = 0. \quad (2.3.13)$$

Una base di matrici 2x2 hermitiane a traccia nulla sono date dalle matrici di Pauli:

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.3.14)$$

La rappresentazione fondamentale di  $SU(2)$  si indica con  $D^{1/2}$ . L'algebra ha dimensione 3 e rango 1 (cioè i generatori commutano solo con se stessi, vedi la regola di coomutazione (2.3.17), quindi, avremo al massimo un solo generatore che ha una rappresentazione diagonale). Possiamo quindi esprimere un'arbitraria matrice  $T$  come una combinazione lineare delle  $\sigma^a$ :

$$T = \theta_a \frac{\sigma^a}{2} \quad , \quad a = 1, 2, 3 \quad (2.3.15)$$

in cui la normalizzazione  $(1/2)$  è stato scelto per pura comodità. La forma generica di un elemento del gruppo  $SU(2)$  è:

$$g = \exp\left\{i\theta_a \frac{\sigma^a}{2}\right\} = \exp\{iT\}. \quad (2.3.16)$$

Definiti i generatori infinitesimi è possibile trovare l'algebra di Lie di  $SU(2)$ :

$$[T^a, T^b] = i\varepsilon^{abc} T^c \quad (2.3.17)$$

che possiamo notare coincidere con l'algebra di Lie (2.3.6) di  $SO(3)$  (hanno le stesse costanti di struttura). Questo non è casuale, anzi ci dimostra che localmente sono lo stesso gruppo, anche se globalmente ci sono, ovviamente, differenze. In termini di geometria differenziale si dice che  $SU(2)$  è un ricoperto del gruppo  $SO(3)$ . La differenza tra  $SO(3)$  ed  $SU(2)$  la si può vedere banalmente nelle rappresentazioni fondamentali. Un'ulteriore differenza, vista anche nel corso di Meccanica Quantistica 1 (vedi il capitolo §9), può essere vista facendo una rotazione di  $2\pi$  con rappresentazioni di  $SO(3)$  o  $SU(2)$ . Sappiamo che una trasformazione finita è ottenuta esponenziando trasformazioni infinitesime, in modo da renderle finite. Una rotazione finita  $g_3$ , in  $SU(2)$ , attorno l'asse  $z$  è ottenuta scegliendo  $\theta_3 = \theta$  e  $\theta_1 = \theta_2 = 0$  in (2.3.15) ed esponenziando:

$$g_3(\theta) = e^{i\theta \frac{\sigma^3}{2}} \quad (2.3.18)$$

$$= 1 + i\theta \frac{\sigma^3}{2} + \frac{1}{2!} \left(i\theta \frac{\sigma^3}{2}\right)^2 + \frac{1}{3!} \left(i\theta \frac{\sigma^3}{2}\right)^3 + \dots \quad (2.3.19)$$

$$= 1 + i\left(\frac{\theta}{2}\right)\sigma^3 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 - i\frac{1}{3!}\left(\frac{\theta}{2}\right)^3\sigma^3 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\theta}{2}\right)^4 + \dots \quad (2.3.20)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\theta}{2}\right)^4 + \dots\right) + i\sigma^3 \left(\frac{\theta}{2} - \frac{1}{3}\left(\frac{\theta}{2}\right)^3 + \dots\right) \quad (2.3.21)$$

$$= \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i\sigma^3 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (2.3.22)$$

se prendiamo  $\theta = 2\pi$ , allora:

$$g_3(2\pi) = -1 \quad (2.3.23)$$

che non coincide con l'identità di  $SU(2)$ . Facendo la stessa cosa in  $SO(3)$  invece si ottiene  $g_3(2\pi) = 1$ . La trasformazione identità in  $SU(2)$  la si ottiene solo per  $\theta = 4\pi$ . Questa appena vista è la nota proprietà di rotazione di uno spinore. Possiamo vedere l'esistenza di un'isomorfismo tra  $SU(2)$  ed  $SO(3)$ . Definiamo la matrice  $X = \vec{\sigma} \cdot \vec{x}$ , che sarà una matrice in  $GL(2, \mathbb{C})$ , con

$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$  e  $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  vettore con componenti le matrici di Pauli. Possiamo calcolare facilmente com'è fatta  $X$ :

$$X = x_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.3.24)$$

$$= \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & -x_3 \end{pmatrix} \quad (2.3.25)$$

possiamo verificare che il modulo quadro del tri-vettore posizione sia dato dal determinante di  $X$ :

$$\det X = \det \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & -x_3 \end{pmatrix} = -x_3^2 - (x_1^2 + x_2^2) = -|\vec{x}|^2 \quad (2.3.26)$$

ma anche che  $X$  è una matrice hermitiana, ovvero tale per cui  $X = X^\dagger$ , e a traccia nulla  $\text{Tr}X = 0$ . A questo punto, se prendessimo una generica matrice unitaria  $A \in SU(2)$ , quindi per cui  $AA^\dagger = \mathbb{1}$ , e che realizzzi la trasformazione:

$$X \longrightarrow X' = AXA^{-1} \quad (2.3.27)$$

allora, troviamo che  $X'$  è ancora una matrice hermitiana, a traccia nulla e tale per cui  $\det X' = \det X$ . Quindi la trasformazione in questione preserva la norma del vettore  $\vec{x}$  e realizza una rotazione nello spazio tridimensionale e si tratta di una rappresentazione di  $SO(3)$ . Però, siccome  $A$  è una matrice bidimensionale complessa di  $SU(2)$ , la rappresentazione che abbiamo trovato è bidimensionale. Abbiamo in sostanza visto come un elemento di  $SU(2)$  generi una rotazione tridimensionale. È facile rendersi conto che se al posto di  $A$ , avessimo utilizzato  $-A$ , il risultato non sarebbe cambiato e per questo possiamo dire che la corrispondenza è  $2 : 1$  e si realizza l'isomorfismo:

$$SO(3) = \frac{SU(2)}{\mathbb{Z}_2}. \quad (2.3.28)$$

L'algebra di  $SU(2)$  è la stessa di  $SO(3)$ , come abbiamo già notato, e i generatori sono dati dalle matrici di Pauli diviso 2 (2.3.16), poiché  $A \in SU(2)$  può essere scritta come  $e^{iH}$  con  $H$  hermitiana a traccia nulla ( $\det A = \det e^{iH} = e^{i\text{Tr}H}$ ), dunque  $H$  è una combinazione lineare delle matrici di Pauli. Infatti, in piena generalità possiamo scrivere (2.3.16).

Quello visto durante i conti può essere riscritto tramite una proprietà delle matrici  $\sigma$ . Una rotazione attorno un'asse generico  $\hat{n}$  può essere scritta come:

$$A(\hat{n}\theta = \theta) = e^{i\hat{\theta} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}} = \mathbb{1} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i\vec{\sigma} \cdot \hat{n} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right). \quad (2.3.29)$$

In generale, dato un gruppo di Lie si individua una sola algebra, ma non è vero il viceversa. Data un'algebra possiamo individuare gruppi diversi, in

relazione tra loro. Ad esempio, il gruppo  $SU(2)$  è omeomorfo<sup>11</sup> al gruppo  $SO(3)$ .  $SU(2)$  descrive le rotazioni degli stati corrispondenti a momenti angolari semi-interi ed interi, mentre  $SO(3)$  solo interi. L'omeomorfismo  $SU(2) \rightarrow SO(3)$  è del tipo  $2 \rightarrow 1$ , ma le loro algebre sono isomorfe<sup>12</sup>.

Oltre al commutatore dei generatori di  $SU(2)$ , si può calcolare l'anticommutatore tra due operatori. Possiamo vedere che:

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij} \quad (2.3.30)$$

che evidenzia l'asimmetria dei fermioni. Combinando le regole di commutazione (2.3.17) e di anticommutazione (2.3.30) si può scrivere l'utile relazione, valida per  $i \neq j$ :

$$\sigma_i \sigma_j = i \sigma_k. \quad (2.3.31)$$

Possiamo vedere che l'operatore di Casimir di  $SU(2)$  è:

$$T^2 = T_x^2 + T_y^2 + T_z^2 \quad , \quad T_i = \frac{\sigma_i}{2}. \quad (2.3.32)$$

Delle volte però, occorre lavorare con matrici di dimensione più elevata. Quando abbiamo 1 particella di spin 1/2 mi basta una matrice 2x2, ma quando abbiamo 2 particelle di spin 1/2, allora andiamo in uno spazio a 4 dimensioni, e stiamo facendo:

$$D^{1/2} \otimes D^{1/2}. \quad (2.3.33)$$

Siamo in uno spazio a 4 dimensioni perché abbiamo 4 vettori di base:

$$\left| \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2} \right\rangle_1 \otimes \left| \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2} \right\rangle_2 = \begin{cases} \Psi^{11} = \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \\ \Psi^{12} = \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \\ \Psi^{21} = \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \\ \Psi^{22} = \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \end{cases} \quad (2.3.34)$$

ovvero un tensore a due indici:

$$\Psi^{ij} = \chi^i \chi^j \quad , \quad i, j = 1, 2. \quad (2.3.35)$$

Sullo spazi quadridimensionale operano gli elementi del gruppo prodotto diretto:

$$\exp\{iT_1\} \otimes \exp\{iT_2\} = \exp\{iT\} \quad (2.3.36)$$

---

<sup>11</sup>Ovvero, esiste una funzione che associa ad un elemento di un gruppo uno o più elementi di un altro gruppo, preservando la legge di composizione del gruppo.

<sup>12</sup>Quando l'omeomorfismo è biunivoco, quindi esiste una relazione uno a uno tra gli elementi dei gruppi, allora si chiama isomorfismo. Due gruppi isomorfi sono matematicamente indistinguibili.

grazie alla forma esponenziale e al fatto che  $T_1$  e  $T_2$  commutino.  $T$  è dato da  $T = T_1 + T_2$ . Componendo due spazi di dimensione 2 otteniamo uno spazio quadridimensionale, ma insieme ad una rappresentazione che non è irriducibile (infatti è 4x4). Però, sappiamo che vale (vedi p.32 di Salmé in cui fa le considerazioni sugli stati  $\Psi^{ij}$ ):

$$2 \otimes 2 = 1 \oplus 3 \quad (2.3.37)$$

che vuol dire che la rappresentazione riducibile 4x4 si decomponne in due rappresentazioni irriducibili 1x1 e 3x3, i cui vettori di base sono i ben noti vettori di singoletto e triploetto.

Ci sono (p.32-36) in Salmé [9] ulteriori discorsi riguardo il modo per ottenere una rappresentazione irriducibile tramite un metodo grafico e la trattazione (rapida) di un sistema di due o tre fermioni. Salmé tratta anche il caso dei coefficienti di Clebsch-Gordan, che non sono altro che un'applicazione della teoria dei gruppi, infatti, quando si costruiscono i vari coefficienti il procedimento che si fa è studiare la decomposizione del prodotto diretto di due rappresentazioni irriducibili di due gruppi in somma diretta di rappresentazioni irriducibili. Anche nelle pagine 6-10 di Bastianelli [2] vengono fatti un po' di discorsi sulle rappresentazioni irriducibili di  $SO(n)$  ed  $SU(n)$  e sulle decomposizioni in termini di somme dirette.

In Salmé [9] è anche presente (p. 37-47) l'esempio del gruppo  $SU(3)$ <sup>13</sup>, che gode di alcune proprietà in più rispetto  $SU(2)$  (rango 2, 2 operatori di Casimir e 2 generatori diagonalizzabili contemporaneamente) ed è fondamentale per l'applicazione alla fisica adronica. Nel modello standard  $SU(3)$  darà la simmetria di colore alla teoria.

### 2.3.3 Altri esempi rilevanti

**Gruppo delle fasi  $U(1)$**  È un gruppo definito da:

$$U(1) = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\} = \{e^{i\alpha} / \alpha \in \mathbb{R}\}$$

si vede quindi, che tale gruppo è definito tramite la sua rappresentazione fondamentale. Per trasformazioni infinitesime si ha:

$$e^{i\alpha} = 1 + i\alpha + \dots \quad (2.3.38)$$

ed il generatore infinitesimo è dato da  $T = 1$ , pensabile come una matrice 1x1, il quale produce l'algebra di Lie abeliana del gruppo  $U(1)$  data dal commutatore:

$$[T, T] = 0. \quad (2.3.39)$$

---

<sup>13</sup>Che nella rappresentazione fondamentale i generatori assumono la forma delle 8 matrici 3x3 di Gell-Mann  $\lambda^a$ , che generalizzano le matrici di Pauli per  $SU(2)$ .

In base alle considerazioni fatte nella sezione §2.2 possiamo pensare all'algebra di Lie (2.3.39) come all'algebra di Lie astratta corrispondente al gruppo  $U(1)$ , che viene poi rappresentata da matrici diverse nelle diverse rappresentazioni. Siccome le rappresentazioni irriducibili del gruppo  $U(1)$  sono tutte unidimensionali (complesse), allora tutte queste matrici sono  $1 \times 1$  e dunque numeri, positivi o negativi, detti *carica*.

Nella rappresentazione di carica  $q$ , dove l'elemento  $e^{i\alpha}$  è rappresentato da  $e^{iq\alpha}$ , si vede che il generatore infinitesimo è rappresentato da  $T = q$  e soddisfa la stessa algebra (2.3.39).

La rappresentazione definente rappresenta un elemento di  $U(1)$  con  $e^{i\alpha}$  che "ruota" naturalmente un vettore complesso unidimensionale. Infatti, definendo il numero complesso  $z = x + iy$  e considerando una generica trasformazione si  $SO(2)$ , ovvero,  $e^{i\theta T} = \cos \theta + iT \sin \theta$  si ottiene:

$$z' = x' + iy' = (x \cos \theta + y \sin \theta) + i(-x \sin \theta + y \cos \theta) = e^{-i\theta} z \quad (2.3.40)$$

e si può dire che i gruppi  $SO(2)$  ed  $U(1)$  sono equivalenti e descrivono lo stesso gruppo abeliano.

Il gruppo  $U(1)$  è rilevante in Fisica poiché le equazioni di Maxwell sono invarianti per trasformazioni di fase, rappresentate appunto da  $U(1)$ . In più, il gruppo di simmetria  $U(1)$  è usato in Fisica quando ci sono numeri quantici additivi quantizzati. Quanto analizzato sinora permette anche di interpretare le possibili cariche (generalizzate, ad esempio elettrica, di colore, etc.) delle particelle come associate ad una rappresentazione del gruppo di simmetria. Ad esempio, nel modello standard compare nel gruppo di simmetria della teoria  $U(1)$ , che è proprio il gruppo di iper-carica.

**Gruppo  $U(n)$**  È il gruppo:

$$U(n) = \{\text{matrici unitarie } nxn\}.$$

Ricorda che unitarie vuol dire tali per cui  $UU^\dagger = U^\dagger U = \mathbb{1}$  e sono necessariamente matrici  $\mathbb{C}$ .

**Gruppo  $O(n)$**  È il gruppo:

$$O(n) = \{\text{matrici ortogonali } nxn \text{ ad elementi reali}\}.$$

Ricorda che ortogonali vuol dire tali per cui  $U^T = U^{-1}$  e che  $U^T U = U U^T = \mathbb{1}$ .

**Gruppo  $SO(n, m)$**  È il gruppo:

$$SO(n, m) = \{\text{sottogruppo del gruppo di Lorentz con } \det\{g\} = 1 \text{ e geometria Minkowskiana } n, m\}.$$

**Gruppo**  $SL(n, \mathbb{R})$  , ma anche  $SL(n, \mathbb{C})$ . È il gruppo:

$$SL(n, \mathbb{R}) = \{\text{gruppo unimodulare (lascia invariato } x^2 = x^\mu x_\mu \text{) in } n \text{ dimensioni ad elementi reali}\}.$$

Nota che  $SL(n, \mathbb{R})$  da una rappresentazione 2-dimensionale di  $L_+^\uparrow$ .

## 2.4 Il gruppo di Lorentz

Passiamo ora a trattare uno dei gruppi fondamentali per la Fisica, il gruppo di Lorentz. Analizzeremo prima di tutto le trasformazioni di Lorentz ripassando quello visto nella Relatività Speciale, successivamente cercheremo i generatori e l'algebra del gruppo, guarderemo chi sono gli operatori di Casimir, studieremo le rappresentazioni scalare, spinoriale e vettoriale del gruppo e vedremo l'importante fatto che il gruppo di Lorentz fattorizzi nel prodotto di 2 sottoalgebre indipendenti.

### 2.4.1 Trasformazioni di Lorentz

Cerchiamo di analizzare meglio in questa sezione le trasformazioni di Lorentz, ovvero, i costituenti del gruppo di Lorentz, analizzato meglio in seguito.

Abbiamo già detto che una generica trasformazione di Poincaré è del tipo (2.1.1) e accennato al fatto che le trasformazioni di Lorentz siano rappresentate dalle matrici  $\Lambda^\mu_\nu$ , ossia, che operano come:

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu = \Lambda^\mu_0 x^0 + \Lambda^\mu_i x^i. \quad (2.4.1)$$

L'insieme delle matrici  $\Lambda$  che lasciano invariata la distanza spazio-temporale formano il gruppo di Lorentz omogeneo. Dall'invarianza spazio temporale tra due eventi dello spazio  $\mathbb{M}^4$  si ricava un'importante proprietà del tensore

metrico  $g_{\mu\nu}$ . Deve valere<sup>14</sup>:

$$g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu = g_{\mu\nu}x'^\mu x'^\nu = g_{\mu\nu}\Lambda_\rho^\mu x^\rho \Lambda_\sigma^\nu x^\sigma \quad (2.4.7)$$

$$= g_{\mu\nu}\Lambda_\rho^\mu \Lambda_\sigma^\nu x^\rho x^\sigma \quad (2.4.8)$$

le relazioni (2.4.7) e (2.4.8) dovendo essere vere  $\forall x^\rho, x^\sigma$  allora portano a:

$$g_{\rho\sigma} = g_{\mu\nu}\Lambda_\rho^\mu \Lambda_\sigma^\nu \quad (2.4.9)$$

che può essere anche scritta con indici alti:

$$g^{\rho\sigma} = g^{\mu\nu}\Lambda_\mu^\rho \Lambda_\nu^\sigma. \quad (2.4.10)$$

In forma matriciale la relazione (2.4.9) è:

$$\Lambda^T g \Lambda = g \quad (2.4.11)$$

Le relazioni (2.4.9) e (2.4.10) sono rappresentative dell'invarianza, della Relatività Speciale, rispetto ad una trasformazione di Lorentz. Nota anche che queste relazioni ci dicono che per le trasformazioni di Lorentz la metrica  $g$  descrive la trasformazione di similitudine che collega sue rappresentazioni.

A questo punto non sarebbe male capire come siano effettivamente fatte le matrici  $\Lambda$ . Sono sicuramente matrici 4x4 vivendo nello spazio di Minkowski, dunque hanno 16 componenti, ma non tutte indipendenti. La relazione della Relatività Speciale (2.4.9) permette di imporre 10 vincoli, essendo simmetrica nello scambio di  $\rho$  e  $\sigma$ , per cui i  $3 + 2 + 1$  elementi sotto la diagonale devono essere uguali ai  $3 + 2 + 1$  elementi sopra. Quindi le matrici  $\Lambda$  sono determinate da  $16 - 10 = 6$  parametri reali indipendenti. Gli elementi indipendenti sono 3 angoli di Eulero (per le rotazioni) e 3 componenti di velocità (per i boosts).

---

<sup>14</sup>Nota che questa cosa potrebbe essere calcolata anche con un procedimento leggermente più esplicito. Chiedendo che l'intervallo tra due punti dello spazio-tempo  $x^\mu$  e  $x'^\mu$  in un SR e  $\bar{x}^\mu$  ed  $\bar{x}'^\mu$  in un altro SR sia sempre la stessa (quindi invariante) porta a:

$$(x - x')^2 = (x - x')^\mu (x - x')_\mu = (x^0 - x'^0)^2 - (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2 \quad (2.4.2)$$

$$(\bar{x} - \bar{x}')^2 = (\bar{x} - \bar{x}')^\mu (\bar{x} - \bar{x}')_\mu = \Lambda_\nu^\mu (x - x')^\nu g_{\mu\sigma} (\bar{x} - \bar{x}')^\sigma \quad (2.4.3)$$

$$= g_{\mu\sigma} \Lambda_\nu^\mu (x - x')^\nu \Lambda_\rho^\sigma (x - x')^\rho = \underbrace{g_{\mu\sigma} \Lambda_\nu^\mu \Lambda_\rho^\sigma}_{g_{\nu\rho}} (x - x')^\nu (x - x')^\rho \quad (2.4.4)$$

$$= g_{\nu\rho} (x - x')^\nu (x - x')^\rho = (x - x')^\nu (x - x')_\nu. \quad (2.4.5)$$

Nota che il pezzo di  $a^\mu$  si cancella perché stiamo valutando intervalli, cioè distanze nello spazio-tempo tra due punti, insensibili a traslazioni. Per cui, affinché l'intervallo spazio-temporale (la distanza  $ds^2$ ) sia un invariante di Lorentz devono valere (scritture equivalenti):

$$g_{\mu\nu} \Lambda_\rho^\mu \Lambda_\sigma^\nu = g_{\rho\sigma}, \quad g^{\mu\nu} \Lambda_\mu^\rho \Lambda_\nu^\sigma = g^{\rho\sigma}. \quad (2.4.6)$$

La relazione (2.4.9) ci è venuta in soccorso e ha rimosso alcune componenti tra tutte le possibili di  $\Lambda$ , ma ha ancora qualcosa da farci vedere. Infatti segue che:

$$\det\{\Lambda^T g \Lambda\} = \det\{g\} \implies \det\{\Lambda^T\} \det\{g\} \det\{\Lambda\} = \det\{g\} \quad (2.4.12)$$

$$(\det\{\Lambda\})^2 = 1 \implies \det\{\Lambda\} = \pm 1. \quad (2.4.13)$$

Chiamiamo:

- Trasformazione di Lorentz **propria** se  $\det\{\Lambda\} = +1$ .
- Trasformazione di Lorentz **impropria** se  $\det\{\Lambda\} = -1$ .

La relazione (2.4.9) è piena di informazioni, infatti, se prendiamo l'elemento  $\rho = \sigma = 0$  possiamo vedere:

$$g_{\mu\nu} \Lambda_0^\mu \Lambda_0^\nu = g_{00} \implies (\Lambda_0^0)^2 - (\Lambda_0^i)^2 = 1 \quad (2.4.14)$$

$$\implies (\Lambda_0^0)^2 \geq 1 \implies |\Lambda_0^0|^2 \geq 1. \quad (2.4.15)$$

Chiamiamo:

- Trasformazione di Lorentz **ortocrona** (sono trasformazioni che non invertono l'asse temporale e formano il sottogruppo  $O(1, 3)$ ) se  $\Lambda_0^0 \geq +1$ .
- Trasformazione di Lorentz **anticrona** se  $\Lambda_0^0 \leq -1$ .

Possiamo fare uno schema delle 4 classi di trasformazioni di Lorentz che abbiamo visto:

- $L_+^\uparrow$  :  $\det\{\Lambda\} = +1, \Lambda_0^0 \geq +1$  : TL proprie ortocrone (rotazioni).
- $L_-^\uparrow$  :  $\det\{\Lambda\} = -1, \Lambda_0^0 \geq +1$  : TL improprie ortocrone (inversione spaziale  $x^i \rightarrow -x^i$ ).
- $L_+^\downarrow$  :  $\det\{\Lambda\} = +1, \Lambda_0^0 \leq -1$  : TL proprie anticrone (inversione completa  $x^\mu \rightarrow -x^\mu$ ).
- $L_-^\downarrow$  :  $\det\{\Lambda\} = -1, \Lambda_0^0 \leq -1$  : TL improprie anticrone (inversione temporale  $x^0 \rightarrow -x^0$ ).

Le trasformazioni che ci interesseranno sono quelle  $L_+^\uparrow$  (con  $\det = +1$  e  $\Lambda_0^0 \geq 1$ ), ovvero quelle proprie ed ortocrone. Queste trasformazioni sono connesse con continuità all'identità e formano il sottogruppo  $SO(3, 1)$  detto **gruppo proprio ortocrono di Lorentz** o **gruppo di Lorentz ristretto**. La parentesi  $(3, 1)$  indica che la metrica è diagonale con 3 segni  $-$  ed 1  $+$ . A volte  $SO(3, 1)$  si chiama anche gruppo di Lorentz proprio. Notiamo anche

che il gruppo  $SO(3, 1)$  non è compatto, poiché 3 dei 6 suoi parametri possono variare nell'intervallo  $(-\infty, +\infty)$ . Si noti che  $L_-$  non forma un gruppo, poiché il prodotto di due trasformazioni improvvise è un TL propria. Anche le trasformazioni antirrone non formano un sottogruppo, mentre quelle ortorrone formano il sottogruppo  $L_+^\uparrow$ . L'unico sottogruppo connesso è  $L_+^\uparrow$ .

Una nota importante da fare è che ogni trasformazione di Lorentz si può scrivere come prodotto di una trasformazione ristretta e di una trasformazione del tipo  $L_+^\downarrow$ ,  $L_-^\uparrow$ ,  $L_-^\downarrow$ . In particolare, ogni trasformazione di Lorentz propria e ortorrone si può scomporre in un prodotto di un boost ed una rotazione. Noi per la nostra teoria ci concentreremo su queste.  $L_+^\uparrow$  è un gruppo semisemplice (ha solo sottogruppi invarianti non-abeliani) e non compatto (comprendendo i boost). Il gruppo delle rotazioni è sottogruppi di  $L_+^\uparrow$ , mentre i boost sappiamo bene non formare sottogruppo.

Vediamo ora, come effettivamente potrebbero essere fatte le matrici  $\Lambda_\nu^\mu$  analizzando le varie trasformazioni che fanno parte del gruppo di Lorentz.

**Rotazioni** Sono le trasformazioni ortorrone, non coinvolgono la componente temporale, e possono essere proprie o improvvise. Le possiamo scrivere come:

$$x'^0 = x^0 \quad (2.4.16)$$

$$x'^i = R^{ij} x_j \quad (2.4.17)$$

in cui  $R^{ij}$  è una matrice ortogonale. Possiamo dare una rappresentazione a blocchi della matrice  $\Lambda$ :

$$\Lambda_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}. \quad (2.4.18)$$

In cui vediamo che  $\det\{\Lambda\} = \det\{R\}$ , dunque, se  $\det\{R\} = +1$ , allora abbiamo una trasformazione  $L_+^\uparrow$ , e se  $\det\{R\} = -1$  abbiamo  $L_-^\uparrow$ .

Le matrici  $R$  appartengono al gruppo delle rotazioni  $O(3)$ , dove la  $O$  sta per ortogonali  $R^T R = \mathbb{1}$ . Matrici ortogonali possono avere determinante solo uguale a  $\pm 1$ , se  $\det\{R\} = 1$ , allora le matrici  $R$  formano un sottogruppo di  $O(3)$ , chiamato gruppo speciale ortogonale  $SO(3)$ . Quando  $R \in SO(3)$ , le matrici  $\Lambda_R$  appartiene al gruppo che indichiamo con  $SO(3, 1)$ .

Analizzeremo meglio nel corso del capitolo le caratteristiche di tale gruppo.

**Boosts** Sono le trasformazioni di velocità lungo una certa direzione (asse). I boost sono trasformazioni di Lorentz proprie e ortorrone, dunque in  $L_+^\uparrow$ .

Un boost lungo l'asse  $x$  è rappresentato dalla matrice:

$$\Lambda_{B_x} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.4.19)$$

in cui si hanno i soliti parametri:

$$\beta = \frac{v}{c} \quad ; \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (2.4.20)$$

ma come sappiamo, i boost possono anche essere espressi in termini della rapidità  $\eta$ :

$$\eta = \tanh^{-1} \beta = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \quad (2.4.21)$$

da cui seguono:

$$\beta = \tanh \eta = \frac{\sinh \eta}{\cosh \eta} \quad ; \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \cosh \eta \quad (2.4.22)$$

in cui vediamo che siccome  $\beta \in [0, 1]$ , allora  $\eta \geq 0$ . La matrice di boost in termini di  $\eta$  diventa:

$$\Lambda_{B_x} = \begin{pmatrix} \cosh \eta & -\sinh \eta & 0 & 0 \\ -\sinh \eta & \cosh \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.4.23)$$

Come vedremo meglio, i boost non formano un gruppo, a differenza delle rotazioni spaziali, poiché l'algebra dei commutatori non è chiusa, ossia, il commutatore di due boost non è ancora un boost.

**Inversione spaziale** È la trasformazione di parità. È una trasformazione del tipo:

$$x'^0 = x^0 \quad , \quad x'^i = -x^i \quad (2.4.24)$$

il che rende la matrice rappresentativa della trasformazione:

$$\Lambda_P = g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.4.25)$$

**Inversione temporale** È una trasformazione del tipo:

$$x'^0 = -x^0 \quad , \quad x'^i = x^i \quad (2.4.26)$$

il che rende la matrice rappresentativa della trasformazione tale per cui:

$$\Lambda^0_0 = -1 \quad , \quad \det\{\Lambda\} = -1 \quad (2.4.27)$$

dunque, una trasformazione di Lorentz impropria e anticrona, ossia in  $L_-^\downarrow$ .

**Inversione completa** Invertiamo tutti gli assi, dunque, è una trasformazione del tipo:

$$x'^0 = -x^0 \quad , \quad x'^i = -x^i \quad (2.4.28)$$

il che rende la matrice rappresentativa della trasformazione tale per cui:

$$\Lambda_0^0 = -1 \quad , \quad \det\{\Lambda\} = 1 \quad (2.4.29)$$

dunque, una trasformazione di Lorentz propria e anticrona, ossia in  $L_+^\downarrow$ .

### 2.4.2 Generatori e algebra del gruppo di Lorentz

Cominciamo considerando una trasformazione di Lorentz (TL) infinitesima:

$$\Lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu \quad (2.4.30)$$

con  $|\omega^\mu_\nu| \ll 1 \ \forall \mu, \nu$ . Chiamiamo  $\omega^\mu_\nu$  i parametri della trasformazione. Dalla condizione (2.4.9) della metrica otteniamo che<sup>15</sup>:

$$g_{\mu\nu} (\delta^\mu_\rho + \omega^\mu_\rho) (\delta^\nu_\sigma + \omega^\nu_\sigma) = g_{\rho\sigma} \quad (2.4.31)$$

$$\underbrace{g_{\mu\nu} \delta^\mu_\rho \delta^\nu_\sigma}_{g_{\rho\sigma}} + \underbrace{\omega^\nu_\rho \delta^\nu_\sigma}_{\omega^\sigma_\rho} + \underbrace{\omega^\mu_\sigma \delta^\mu_\rho}_{\omega^\rho_\sigma} = g_{\rho\sigma} \quad (2.4.32)$$

$$g_{\rho\sigma} + \omega_{\sigma\rho} + \omega_{\rho\sigma} = g_{\rho\sigma} \quad (2.4.33)$$

$$\implies \omega_{\sigma\rho} = -\omega_{\rho\sigma} \quad (2.4.34)$$

dunque, i parametri della TL devono essere antisimmetrici. Per cui, esistono solo 6 parametri indipendenti, che sono 3 angoli di Eulero e 3 parametri dei boost. È possibile riscrivere la TL infinitesima in modo da separare i parametri infinitesimi dai generatori delle TL infinitesimi, ma per farlo occorre ricordare quello visto per oggetti simmetrici e antisimmetrici nella sezione §2.1.2. Abbiamo visto che  $\omega_{\rho\sigma}$  sono antisimmetrici per scambio  $\rho \longleftrightarrow \sigma$  da (2.4.34), quindi, sappiamo che il loro prodotto con una quantità generica è non nullo solo sulla contrazione con la parte antisimmetrica di questa seconda quantità. Nello specifico vediamo<sup>16</sup>:

$$\omega_{\rho\sigma} g^{\mu\rho} g^\sigma_\nu = \omega_{\rho\sigma} \cdot \frac{1}{2} (g^{\mu\rho} g^\sigma_\nu - g^{\mu\sigma} g^\rho_\nu) \quad (2.4.35)$$

in cui la parte tra parentesi è la parte antisimmetrica di  $g^{\mu\rho} g^\sigma_\nu$ , antisimmetrizzata negli indici  $\rho$  e  $\sigma$ , che possiamo identificare con  $i (M^{\rho\sigma})^\mu_\nu$ . Infatti, se proviamo a riprendere il discorso di provare a separare i parametri  $\omega_{\rho\sigma}$  dai generatori infinitesimi troviamo:

$$\Lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + g^{\mu\rho} g^\sigma_\nu \omega_{\rho\sigma} = \delta^\mu_\nu + \frac{1}{2} \omega_{\rho\sigma} (g^{\mu\rho} g^\sigma_\nu - g^{\mu\sigma} g^\rho_\nu) \quad (2.4.36)$$

$$= \delta^\mu_\nu + \frac{1}{2} \omega_{\rho\sigma} i (M^{\rho\sigma})^\mu_\nu. \quad (2.4.37)$$

---

<sup>15</sup>Trascurando  $\mathcal{O}(\omega^2)$ .

<sup>16</sup>Nota che vale:  $g^\mu_\nu = g^{\mu\lambda} g_{\lambda\nu} = \delta^\mu_\nu$ .

Dunque, vediamo che i generatori del gruppo di Lorentz sono 6 matrici antisimmetriche, tensori di rango 2, definite da:

$$(M^{\rho\sigma})^\mu_\nu = -i(g^{\mu\rho}g^\sigma_\nu - g^{\mu\sigma}g^\rho_\nu). \quad (2.4.38)$$

Trovati i generatori del gruppo, quindi, sappiamo scrivere un generico elemento del gruppo, ovvero, una generica trasformazione di Lorentz (in forma esponenziale):

$$\Lambda = e^{\frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma} M^{\rho\sigma}} \quad (2.4.39)$$

e sappiamo anche determinare l'algebra del gruppo:

$$[M^{\lambda\tau}, M^{\rho\sigma}] = -i(g^{\lambda\sigma}M^{\tau\rho} + g^{\tau\rho}M^{\lambda\sigma} - g^{\lambda\rho}M^{\tau\sigma} - g^{\tau\sigma}M^{\lambda\rho}) \quad (2.4.40)$$

in cui possiamo notare che  $g^{\lambda\rho}$  è la costante di struttura. Nota, inoltre, che l'algebra (2.4.40) è identica all'algebra di  $SO(n, m)$  (2.3.10), ma attenzione che gli  $M^{\lambda\tau}$  non sono i generatori delle rotazioni  $J^{\lambda\tau}$ , o per lo meno non lo sono tutti.

L'algebra trovata (2.4.40) è l'algebra del gruppo  $SO(1, 3)$ , cioè il gruppo delle trasformazioni proprie di Lorentz. Noi saremo interessati solo a tale gruppo ( $SO(1, 3)$ ), poiché le trasformazioni improvvise (quelle con  $\det\{\Lambda\} = -1$ ) non possono essere connesse con l'identità.

È possibile determinare l'algebra di Lorentz (2.4.40) per una rappresentazione generica e non per una quadri-dimensionale come la nostra, vedi p.19 di Gambino [4].

Se continuiamo ad indagare la natura e le proprietà delle matrici  $M$  è possibile trovare una diretta corrispondenza con i momenti angolari  $J^\mu$  e con i generatori dei boost  $K^i$ . Possiamo riscrivere i tensori  $M^{\mu\nu}$  come<sup>17</sup>:

$$J_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}M^{jk} \quad , \quad K^i = M^{0i} = -M^{i0} \quad (2.4.41)$$

in cui, sapendo che  $M^{\mu\nu}$  sono antisimmetrici, si ha  $K^{\mu\mu} = 0$ . Stiamo sostanzialmente associando le parti spaziali di  $M^{\rho\sigma}$  alle  $J_i$  e ai  $K^i$  le componenti di  $M^{\rho\sigma}$  quando abbiamo  $\rho = 0$  o  $\sigma = 0$ . Abbiamo, quindi, i vettori:

$$\vec{J} = \frac{1}{2}(M^{23}, M^{31}, M^{12}) \quad , \quad \vec{K} = (M^{01}, M^{02}, M^{03}). \quad (2.4.42)$$

Possiamo anche esprimere i parametri  $\omega_{\mu\nu}$  in termini di angoli di rotazione e rapidità:

$$\vec{\theta} = (\omega^{23}, \omega^{31}, \omega^{12}) \quad , \quad \vec{\eta} = (\omega^{01}, \omega^{02}, \omega^{03}). \quad (2.4.43)$$

---

<sup>17</sup>In cui  $\varepsilon_{ijk}$  è il tensore di Levi-Civita completamente antisimmetrico.

Da queste definizioni possiamo vedere che:

$$\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\omega_{0i}M^{0i} + \omega_{i0}M^{i0} + \omega_{ij}M^{ij}) = -\vec{\eta} \cdot \vec{K} + \vec{\theta} \cdot \vec{J} \quad (2.4.44)$$

e che una generica TL (2.4.39) si riscrive come:

$$\Lambda = e^{i(\vec{\theta} \cdot \vec{J} - \vec{\eta} \cdot \vec{K})}. \quad (2.4.45)$$

È possibile verificare, vedi l'Appendice D, che i generatori (2.4.41) sono effettivamente i momenti angolari e i boost visti nella sezione §2.4.1. Presi i generatori, utilizzando l'unica rappresentazione che conosciamo del gruppo  $SO(3, 1)$ , è possibile vedere l'algebra<sup>18</sup>:

$$[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk}J_k, \quad [K_i, K_j] = -i\varepsilon_{ijk}J_k, \quad [J_i, K_j] = i\varepsilon_{ijk}K_k. \quad (2.4.46)$$

Dalla prima delle (2.4.46) abbiamo la conferma definitiva che possiamo vedere i  $J_i$  come i generatori del gruppo di  $SO(3)$ . Come già sappiamo, le rotazioni di  $SO(3)$  formano un gruppo compatto avendo i parametri (angoli di Eulero) che variano in un intervallo chiuso e limitato. Possiamo anche dire che componendo rotazioni successive possiamo sempre tornare al punto di partenza, ciò evidenzia la proprietà dei gruppi compatti di avere volume finito.

Notiamo anche che i generatori dei boost non generano un'algebra chiusa, dal momento che il commutatore di due  $K_i$  non manda in un altro  $K_j$ , bensì in un  $J_j$ , altro operatore che non è generatore dei boost. Per questo motivo diciamo che le trasformazioni di velocità non formano un gruppo, e di conseguenza, non sono un sottogruppo del gruppo di Lorentz, a differenza delle rotazioni spaziali di  $SO(3)$ . Si può anche notare che se si fa un boost lungo una certa direzione, non si può ritornare al punto di partenza continuando a comporre boost lungo la stessa direzione e per questo si dice che i boost hanno volume infinito. Possiamo anche notare che i boost non formano un'insieme compatto, infatti, i parametri non variano su un intervallo limitato di valori. È vero che in Relatività Speciale le velocità sono limitate in  $[-c, +c]$ , ma nei due casi limite ( $v = \pm c$ ) il parametro  $\gamma \rightarrow \infty$  (e  $\beta = 1$ ), quindi, il boost non è definito.

Importante però notare che, se consideriamo tutti i generatori  $K^i$  e  $J^i$ , allora otteniamo un'algebra chiusa e di conseguenza un gruppo. Il gruppo che otteniamo è proprio il gruppo di Lorentz  $SO(3, 1)$  (o  $L_+^\uparrow$ ) delle trasformazioni di Lorentz proprie ed ortocrone, ovvero, con  $\det = +1$  e  $\Lambda_0^0 = +1$ .

---

<sup>18</sup>Nota che si può anche utilizzare la relazione (2.4.40). Possiamo fare riferimento alla sezione 4.1 delle note di Gambino [4] per la dimostrazione dell'algebra del gruppo di Lorentz.

L'ultima cosa che potremmo dire è che una generica rappresentazione di  $M_{\mu\nu}$  può essere data da:

$$M_{\mu\nu} = i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) + S_{\mu\nu} \quad (2.4.47)$$

in cui individuiamo l'operatore  $L_{\mu\nu} = i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu)$  e un'altro operatore  $S_{\mu\nu}$  hermitiano, con la stessa algebra di  $L_{\mu\nu}$  e che commuta con esso, ma che non dipende né da  $x^\mu$  né dalle sue derivate. La rappresentazione (2.4.47) è una rappresentazione differenziale.

### 2.4.3 Operatori di Casimir del gruppo di Lorentz

Cerchiamo ora di trovare gli operatori di Casimir del gruppo di Lorentz. Prima, però, capiamo perché è importante farlo. Partiamo da un esempio che conosciamo bene.

Prendiamo il gruppo delle rotazioni nello spazio tridimensionale  $SO(3)$ . Sappiamo bene che i generatori sono gli operatori di momento angolare  $L^i$  e, in realtà, sappiamo anche chi è l'operatore di Casimir (ossia colui che commuta con tutti i generatori  $L^i$ ), cioè:

$$L^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2. \quad (2.4.48)$$

In Meccanica Quantistica abbiamo visto che gli operatori di momento angolare non commutano e non possono essere diagonalizzati contemporaneamente. Però viene in soccorso  $L^2$ , poiché quello che abbiamo fatto a suo tempo è stato diagonalizzare  $L^2$  ed  $L_z$  ed etichettare gli stati fisici del sistema con gli autovalori di  $L^2$  ed  $L_z$  (ovvero  $\hbar l(l+1)$ ,  $\hbar m$ ). In altre parole, quindi, le rappresentazioni di  $SO(3)$  corrisponderanno alle etichette date dagli autovalori di  $L^2$  ed  $L_z$ , cioè da uno dei generatori e dall'operatore di Casimir.

In generale, quello per cui utilizzeremo gli operatori di Casimir sarà proprio questo, completare quello che in Meccanica Quantistica era lo SCOC ed etichettare gli stati fisici.

Torniamo al caso del gruppo di Lorentz. Gli operatori di Casimir, sicuramente, commutando con i generatori del gruppo, saranno invarianti per trasformazioni di Lorentz, cioè saranno degli scalari. Siccome abbiamo  $M^{\mu\nu}$  tensori di rango 2 antisimmetrici, ci sono due scelte ovvie:

$$\frac{1}{2} M^{\mu\nu} M_{\mu\nu} = J^2 - K^2 \quad (2.4.49)$$

$$-\frac{1}{4} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} M_{\mu\nu} M_{\rho\sigma} = \vec{J} \cdot \vec{K}. \quad (2.4.50)$$

Nel caso di (2.4.49) è un'oggetto completamente simmetrico, mentre per (2.4.50) essendoci il tensore di Levi-Civita, è un oggetto completamente antisimmetrico.

Quindi, in analogia a quello detto per la Meccanica Quantistica, nel caso di  $SO(3, 1)$  gli stati potranno essere identificati (etichettati) tramite gli autovalori relativi ad un generatore del gruppo e ai due operatori (2.4.49) e (2.4.50).

È facile verificare che gli operatori (2.4.49) e (2.4.50) commutano con tutti i generatori. Ad esempio:

$$[J^2 - K^2, J_i] = [J^2, J_i] - [K^2, J_i] = -K_l[K_l, J_i] - [K_l, J_i]K_l \quad (2.4.51)$$

$$= i\varepsilon_{ijk}\{K_l, K_k\} = 0. \quad (2.4.52)$$

#### 2.4.4 L'algebra del gruppo di Lorentz fattorizza nel prodotto tensoriale di due sottoalgebre indipendenti

Quello che vedremo in questa sezione è, che a differenza della Meccanica Quantistica non relativistica in cui lo spin viene inglobato nella teoria a posteriori, l'algebra<sup>19</sup> di  $SO(3, 1)$  è isomorfa all'algebra del prodotto:

$$SU(2) \otimes SU(2) \quad (2.4.53)$$

ciò è molto importante, poiché nel momento in cui costruiremo una teoria invariante per Lorentz, allora avremo già lo spin inglobato in essa. Un'osservazione importante è che l'algebra  $SU(2)$  è rappresentata da matrici complesse 2x2, ma noi abbiamo visto che avremo bisogno di matrici 4x4, per cui, è necessario considerare 2 gruppi  $SU(2)$ , ovvero, il prodotto (2.4.53).

Torniamo al gruppo di Lorentz. L'algebra trovata (2.4.46) si può semplificare molto se, complessifichiamo  $\vec{J}$  e  $\vec{K}$  e definiamo i generatori:

$$\vec{N} = \frac{1}{2} (\vec{J} + i\vec{K}) \quad , \quad \vec{N}^\dagger \frac{1}{2} (\vec{J} - i\vec{K}) \quad (2.4.54)$$

che sono rappresentazioni finito-dimensionale del gruppo di Lorentz, ma non sono unitarie, poiché sono l'una il complesso coniugato dell'altra. L'algebra di  $SO(3, 1)$  a questo punto diventa:

$$[N_i, N_i^\dagger] = 0 \quad , \quad [N_i, N_j] = i\varepsilon_{ijk}N^k \quad , \quad [N_i^\dagger, N_j^\dagger] = i\varepsilon_{ijk}N^{k\dagger} \quad (2.4.55)$$

è quindi evidente che  $N_i$  ed  $N_i^\dagger$  soddisfano indipendentemente l'algebra di  $SU(2)$ , con il vantaggio che le due sotto-algebre sono indipendenti.

Gli operatori di Casimir (2.4.49) e (2.4.50) sono dati da:

$$N_i N^i \quad , \quad N_i^\dagger N^{i\dagger} \quad (2.4.56)$$

---

<sup>19</sup>Attenzione, l'algebra, non il gruppo.

con rispettivamente autovalori  $n(n+1)$  ed  $m(m+1)$ .

Dunque, l'algebra del gruppo  $L_+^\uparrow$  è localmente isomorfa all'algebra del prodotto 2.4.53. Possiamo classificare tutte le rappresentazioni di  $L_+^\uparrow$  partendo dalle rappresentazioni irriducibili di  $SU(2)$ , che conosciamo bene dalla Meccanica Quantistica non relativistica, e componendole (ossia un procedimento analogo a quando abbiamo composto momenti angolari). Le rappresentazioni di  $SU(2)$  sono etichettate dall'autovalore di  $J^2$ , cioè  $j(j+1)$ , e hanno dimensionalità  $2j+1$ . Nel caso di  $L_+^\uparrow$  utilizzeremo le etichette date dagli autovalori di  $N^2$  ed  $N^{\dagger 2}$ ,  $n(n+1)$  e  $m(m+1)$  rispettivamente, con  $n, m = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$

Le rappresentazioni di  $L_+^\uparrow$  sono quindi etichettate dalla coppia  $(n, m)$ , mentre gli stati di una certa rappresentazione sono etichettati anche dagli autovalori di  $N_3$  ed  $N_3^\dagger$ .

**Nota** Le due sottoalgebre di  $N$  ed  $N^\dagger$  sono indipendenti, ma non lo sono le due rappresentazioni. Infatti, si può pensare ad una trasformazione di parità (che manda  $J_i \rightarrow -J_i$  e  $K_i \rightarrow -K_i$ ), oppure di hermitiana coniugazione (che cambia il segno di  $i$  e quindi scambia  $N \leftrightarrow N^\dagger$ ). Vediamo quindi che le rappresentazioni del gruppo di Lorentz non sono invarianti per trasformazioni di parità o di hermitiana coniugazione.

Nella nota 19 abbiamo accennato al fatto che l'isomorfismo vale al livello delle algebre di  $SO(3, 1)$  ed il prodotto (2.4.53), ma non dei gruppi. Infatti, l'isomorfismo non vale a livello di gruppo, ma solo di algebra, sotto la condizione che l'algebra di  $SU(2) \otimes SU(2)$  sia complessificata (come abbiamo fatto con  $N$  ed  $N^\dagger$ ). Infatti,  $SU(2) \otimes SU(2)$  non è il gruppo di ricoprimento universale di  $SO(3, 1)$ , bensì lo è  $SL(2, \mathbb{C})$ , che studieremo nella sezione §2.4.5. Il gruppo  $SO(3, 1)$  è isomorfo (localmente) a (gruppo quoziante):

$$\frac{SL(2, \mathbb{C})}{\mathbb{Z}_2} \quad (2.4.57)$$

in cui  $\mathbb{Z}_2 = \{-1, +1\}$ . Il gruppo  $SL(2, \mathbb{C})$  è un doppio ricoprimento di  $SO(3, 1)$ . Nota che si ha bisogno che anche  $SL(2, \mathbb{C})$  sia definito sui complessi.

## 2.4.5 Gruppo unimodulare $SL(2, \mathbb{C})$

Prima di studiare il gruppo  $SL(2, \mathbb{C})$  ricordiamo cos'abbiamo imparato da  $SO(3)$  ed  $SU(2)$ .

Abbiamo visto che è possibile dare una rappresentazione di  $SO(3)$  (gruppo delle rotazioni) nel gruppo  $SU(2)$  (gruppo delle matrici complesse unitarie 2x2 con  $\det = 1$ ).

$SO(3)$  è localmente isomordo ad  $SU(2)$  avendo la stessa algebra. Il gruppo di ricoprimento universale dell'algebra del momento angolare,  $SO(3)$ , è proprio  $SU(2)$ , che appunto, contiene  $SO(3)$  come sottogruppo. È vantaggioso utilizzare, in Meccanica Quantistica,  $SU(2)$  al posto di  $SO(3)$ , poiché quest'ultimo permette di vedere, tramite le sue rappresentazioni, solo gli spin interi, mentre  $SU(2)$  descrive rotazioni di spin sia intero che semi-intero. Alla rotazione  $R$  corrisponde la matrice complessa  $U$  di  $SU(2)$ :

$$R = e^{\varphi \hat{n} \cdot \vec{A}} \quad \longleftrightarrow \quad U = e^{-\frac{i}{2}\varphi \hat{n} \cdot \vec{\sigma}}. \quad (2.4.58)$$

Possiamo dire che  $SO(3)$  è localmente isomorfo al gruppo quoziante:

$$\frac{SU(2)}{\mathbb{Z}_2}. \quad (2.4.59)$$

C'è il gruppo  $\mathbb{Z}_2$  (Vedi l'Appendice C) poiché sappiamo bene che ad una rotazione in  $SO(3)$  corrispondono due rotazioni in  $SU(2)$ .

Possiamo fare discorsi analoghi anche per il gruppo di Lorentz  $SO(3, 1)$ . Come con  $SO(3)$  e  $SU(2)$  possiamo costruire un gruppo di ricoprimento universale per  $SO(3, 1)$ . Infatti, è possibile rappresentare il gruppo di Lorentz mediante matrici complesse  $2 \times 2$  con  $\det = 1$ , che costituiscono il gruppo  $SL(2, \mathbb{C})$ . Le matrici di  $SL(2, \mathbb{C})$  sono quelle che mantengono invariato  $x^\mu x_\mu$ , ovvero matrici, in analogia a quanto fatto nella sezione §2.3.2:

$$X = x^\mu \sigma_\mu = x^0 \mathbb{1}_{2 \times 2} + \vec{x} \cdot \vec{\sigma} \quad , \quad \det\{X\} = x_0^2 - \vec{x}^2 = x^\mu x_\mu \quad (2.4.60)$$

in cui abbiamo definito  $\sigma^\mu = (\mathbb{1}, \vec{\sigma})$  e possiamo vedere che  $X = X^\dagger$ . Se prendiamo una generica matrice  $A \in SL(2, \mathbb{C})$  e guardiamo la trasformazione:

$$X' = AXA^\dagger \quad (2.4.61)$$

possiamo notare che  $X' = X'^\dagger$  e che  $\det X = \det X'$ , per cui  $X'$  lascia invariato il modulo quadro del quadrirettore  $x^\mu$ . Pertanto, alla matrice  $A$  corrisponde una trasformazione di Lorentz  $\Lambda$ . In questo senso possiamo dire che il gruppo  $SL(2, \mathbb{C})$  fornisce una rappresentazione spinoriale, in quanto agisce su vettori di  $\mathbb{C}^2$  detti **spinori**, di  $SO(3, 1)$ , così come succedeva per  $SO(3)$  ed  $SU(2)$ . Esattamente come  $SO(3) \rightarrow SU(2)$  permette di descrivere le rappresentazioni spinoriali come rappresentazioni ad un solo valore, ora,  $SO(3, 1) \rightarrow SL(2, \mathbb{C})$  include l'estensione relativistica delle proprietà spinoriali. Notiamo, sempre in analogia con quanto fatto §2.3.2, che le matrici  $A$  e  $-A$  corrispondono alla stessa  $\Lambda$ , per cui il gruppo  $SO(3, 1)$  è localmente isomorfo ad:

$$\frac{SL(2, \mathbb{C})}{\mathbb{Z}_2}. \quad (2.4.62)$$

Il gruppo  $SU(2)$  è sottogruppo di  $SL(2, \mathbb{C})$ . Ogni matrice complessa di  $SL(2, \mathbb{C})$  fattorizza nel prodotto di una matrice di  $SU(2)$  per una matrice hemitiana positiva con  $\det = 1$ .

Ogni matrice di  $SL(2, \mathbb{C})$  può essere scritta come  $e^{iB}$ , con  $B$  matrice  $2 \times 2$  a traccia nulla<sup>20</sup>. Poiché le matrici  $B$  devono essere combinazioni complesse delle matrici di Pauli si ha:

$$A = e^{i\vec{\theta} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2} + i\vec{\eta} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}} \quad (2.4.64)$$

con  $\vec{\theta}$  e  $\vec{\eta}$  trivettori reali. Sappiamo bene che  $e^{i\vec{\theta} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}}$  corrisponde ad una rotazione di un angolo  $\theta$  nella direzione  $\hat{\theta}$ . Il vettore  $\vec{\eta}$  può essere identificato con la rapidità poiché:

$$\vec{K} = \pm i \frac{\vec{\sigma}}{2} \quad (2.4.65)$$

soddisfa l'algebra dei generatori dei boost. Quindi, nella rappresentazione bidimensionale, una TL con parametri  $\vec{\theta}$  e  $\vec{\eta}$  viene rappresentata con una matrice data da (2.4.64). Possiamo quindi scegliere, confrontando (2.4.45) e (2.4.64), i generatori di rotazioni e boost:

$$\vec{J} = \frac{\vec{\sigma}}{2} \quad , \quad \vec{K} = \pm i \frac{\vec{\sigma}}{2} \quad (2.4.66)$$

che portano ai generatori:

$$N = 0 \quad , \quad N^\dagger = \sigma \quad (2.4.67)$$

(o viceversa, a seconda del segno  $\pm$  che si prende). La scelta (2.4.67) è quella che genera la struttura spinoriale  $(0, \frac{1}{2})$  o  $(\frac{1}{2}, 0)$  (vedi la sezione §2.4.6).

## 2.4.6 Rappresentazione scalare, spinoriale e vettoriale

Come già accennato nella sezione §2.4.5 il gruppo  $SL(2, \mathbb{C})$  fornisce una rappresentazione spinoriale di  $SO(3, 1)$ , così come succedeva per  $SO(3)$  ed  $SU(2)$  e che definendo gli operatori  $\vec{N}$  e  $\vec{N}^\dagger$  possiamo etichettare i sistemi con le coppie di valori  $(n, m)$ , autovalori degli operatori. Abbiamo anche detto che:

$$n, m = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots \quad (2.4.68)$$

Vediamo i diversi casi che si possono avere:

- $(0, 0)$  quindi abbiamo  $n = 0$  ed  $m = 0$ , che vuol dire:

$$\vec{N} = 0 \quad , \quad \vec{N}^\dagger = 0 \quad , \quad \vec{J} = 0 \quad , \quad \vec{K} = 0. \quad (2.4.69)$$

Questa è la rappresentazione **scalare**  $\phi$ , che è in uno spazio di dimensione 1 e ha parità definita, cioè è scalare o pseudo-scalare.

---

<sup>20</sup>Poiché vale:

$$\det \left\{ e^{iB} \right\} = e^{i\text{Tr}B} \quad (2.4.63)$$

e sappiamo che il determinante delle matrici di  $SL(2, \mathbb{C})$  è 1.

- $(\frac{1}{2}, 0)$  quindi abbiamo  $n = \frac{1}{2}$  ed  $m = 0$ , che vuol dire:

$$\vec{N} = \frac{\vec{\sigma}}{2} \quad , \quad \vec{N}^\dagger = 0 \quad , \quad \vec{J} = \frac{\vec{\sigma}}{2} \quad , \quad \vec{K} = -i \frac{\vec{\sigma}}{2}. \quad (2.4.70)$$

Questa è la rappresentazione **spinore left-handed** (sinistrorso)  $\psi_L$ , poiché è non nulla l'etichetta sulla sinistra. La generica trasformazione di Lorentz (2.4.45), o anche (2.4.64), diventa:

$$\xi = e^{i \frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot (\vec{\theta} - i \vec{\eta})}. \quad (2.4.71)$$

- $(0, \frac{1}{2})$  quindi abbiamo  $n = 0$  ed  $m = \frac{1}{2}$ , che vuol dire:

$$\vec{N} = 0 \quad , \quad \vec{N}^\dagger = \frac{\vec{\sigma}}{2} \quad , \quad \vec{J} = \frac{\vec{\sigma}}{2} \quad , \quad \vec{K} = i \frac{\vec{\sigma}}{2}. \quad (2.4.72)$$

Questa è la rappresentazione **spinore right-handed** (destrorso)  $\psi_R$ . La generica trasformazione di Lorentz (2.4.45), o anche (2.4.64), diventa:

$$\bar{\xi} = e^{i \frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot (\vec{\theta} + i \vec{\eta})}. \quad (2.4.73)$$

Gli spinori  $\psi_L$  e  $\psi_R$  hanno 2 componenti (up e down) e si dicono **spinori di Weyl**, indicati tendenzialmente con  $\xi$  e  $\bar{\xi}$  e talvolta i loro indici sono indicati con  $\alpha$  e  $\dot{\alpha}$ . Si può notare che le due rappresentazioni  $(\frac{1}{2}, 0)$  e  $(0, \frac{1}{2})$  sono inequivalenti, infatti, per passare da una all'altra è necessaria una coniugazione complessa (vedi p.23 di Gambino [4]). Sono inoltre due rappresentazioni non unitarie.

Avremo a disposizione nella nostra teoria, ovviamente, anche altri valori di  $n$  ed  $m$ , ma anche rappresentazioni generate, con un procedimento simile alla composizione dei momenti angolari, a partire da quelle "base" elencate sopra. Infatti, date le rappresentazioni degli spinori left e right, generiamo le altre rappresentazioni moltiplicando le due di base. Ad esempio potremo avere:

- La rappresentazione di uno **spinore di Dirac** a 4 componenti:

$$\left( \frac{1}{2}, 0 \right) \oplus \left( 0, \frac{1}{2} \right) \quad (2.4.74)$$

- La rappresentazione con spin 1 e 4 componenti (quadrivettori)

$$\left( \frac{1}{2}, 0 \right) \otimes \left( 0, \frac{1}{2} \right) = \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \quad (2.4.75)$$

come ad esempio il quadripotenziale  $A^\mu$ . Questi sono i **campi vettoriali**.

- La composizione di due spinori left-handed:

$$\left(\frac{1}{2}, 0\right) \otimes \left(\frac{1}{2}, 0\right) = (0, 0) \oplus (1, 0) \quad (2.4.76)$$

che si decompone nella somma diretta di uno scalare  $(0, 0)$  ed un tensore di rango 2,  $(1, 0)$ , antisimmetrico self-duale, ovvero tale che:

$$B_{\mu\nu} = -B_{\nu\mu} \quad , \quad B_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}^{\rho\sigma} B_{\rho\sigma} \quad (2.4.77)$$

come ad esempio il tensore di Maxwell  $F^{\mu\nu}$  che trasforma come  $(0, 1) \oplus (1, 0)$ . La rappresentazione  $(0, 1)$  corrisponderebbe ad un tensore antiself-duale, ovvero tale:

$$B_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}^{\rho\sigma} B_{\rho\sigma}. \quad (2.4.78)$$

#### 2.4.7 Teorema di Wigner e regola di superselezione

In Meccanica Quantistica sappiamo bene che gli stati fisici sono raggi in uno spazio di Hilbert, per cui abbiamo una classe di equivalenza di vettori normalizzati che differiscono solo per un fattore di fase. Abbiamo anche che ad ogni simmetria del sistema corrisponde una trasformazione degli stati che preserva l'interpretazione probabilistica della teoria. Vale:

$$P(\Psi \rightarrow \Psi_1) = |\langle \Psi | \Psi_1 \rangle|^2 = P(\Psi' \rightarrow \Psi'_1) = |\langle \Psi' | \Psi'_1 \rangle|^2 \quad (2.4.79)$$

ovvero, la probabilità che lo stato  $\Psi$  transisca in  $\Psi_1$  è uguale anche dopo la trasformazione che manda  $\Psi \rightarrow \Psi'$  e  $\Psi_1 \rightarrow \Psi'_1$ . Wigner ha dimostrato che, per trasformazioni che appartengono ad un gruppo continuo e che sono connesse con l'identità, le trasformazioni  $\Psi \rightarrow \Psi'$  devono essere unitarie e lineari. In simboli possiamo scrivere, quello che va sotto il nome di **teorema di Wigner**:

$$\text{se } |\Psi'\rangle = U|\Psi\rangle \text{ con } UU^\dagger = \mathbb{1} \quad (2.4.80)$$

$$\langle \Psi' | \Psi'_1 \rangle = \langle \Psi | U^\dagger U | \Psi_1 \rangle = \langle \Psi | \Psi_1 \rangle \quad (2.4.81)$$

ciò è alla base delle trasformazioni unitarie in Meccanica Quantistica. Dunque, in presenza di una simmetria continua gli stati fisici non possono trasformarsi secondo rappresentazioni non unitarie del gruppo di simmetria. Allora, gli stati quanto-relativistici non possono trasformarsi secondo rappresentazioni finite del gruppo di Lorentz, in quanto esse non sono unitarie. Nonostante ciò, però, non ci dimentichiamo completamente delle rappresentazioni finite poiché sono comunque importanti perché le quantità (osservabili) fisiche (come quadrimpulso, campo EM, campi spinoriali, etc.) si trasformano per TL secondo rappresentazioni finite del gruppo di Lorentz.

Un altro modo di vedere il teorema di Wigner è:

*Un teoria quantistica formulata su uno spazio di Hilbert mantiene invariate le probabilità in ogni sistema di riferimento inerziale, se e solo se la corrispondenza tra stati in differenti sistemi inerziali si realizza attraverso trasformazioni unitarie del gruppo di Poincaré.*

Se una rappresentazione è unitaria, allora non è finito dimensionale. Vediamo ad esempio  $\vec{J}$  e  $\vec{K}$  che sono terne hermitiane, i cui autostati sono stati fisici ed infinito dimensionali. Per questo la rappresentazione è infinito dimensionale.

Invece, una rappresentazione finito dimensionale non è unitaria. Vediamo ad esempio  $\vec{N}$  ed  $\vec{N}^\dagger$  che sono anch'esse terne hermitiane. Le osservabili si trasformano per TL secondo rappresentazioni finito dimensionali.

Parliamo anche della seconda parte del titolo della sezione, la regola di superselezione. Abbiamo visto nella sezione §2.3 che uno spinore cambia segno con una rotazione di  $2\pi$  attorno un qualsiasi asse. La stessa cosa accade per gli stati spinoriali. Il fatto è che questa rotazione non dovrebbe produrre effetti misurabili. Ciò si traduce nel chiedere che tutte le osservabili fisiche, cui corrispondono elementi di matrice di operatori hermitiani  $\langle B|O|A\rangle$ , devono essere invarianti per rotazioni di  $2\pi$ , che sono a loro volta rappresentate da un operatore unitario  $R_{2\pi}$ . Deve quindi valere:

$$\langle B|O|A\rangle = \langle R_{2\pi}B|O|R_{2\pi}A\rangle = \langle B|R_{2\pi}^\dagger OR_{2\pi}|A\rangle \quad (2.4.82)$$

$$\implies O = R_{2\pi}^\dagger OR_{2\pi} \quad (2.4.83)$$

che implica che tutte le osservabili fisiche  $O$  devono trasformarsi secondo rappresentazioni tensoriali (spin intero) del gruppo di Lorentz. Di conseguenza,  $O$  ha elementi non nulli solo tra stati fisici  $|A\rangle$  e  $|B\rangle$  che si comportano allo stesso modo per rotazioni di  $2\pi$ , dunque devono essere entrambi spinori o entrambi tensori. Questa si chiama **regola di superselezione**.

Facciamo un esempio. Prendiamo  $|\Psi_I\rangle$  uno stato di spin intero e  $|\Psi_S\rangle$  uno stato di spin semi-intero, allora:

$$\langle \Psi_S|O|\Psi_I\rangle = \underbrace{\langle \Psi_S|R_{2\pi}^\dagger}_{\langle \Psi_S|} O \underbrace{R_{2\pi}|\Psi_I\rangle}_{-|\Psi_I\rangle} = -\langle \Psi_S|O|\Psi_I\rangle = 0. \quad (2.4.84)$$

Tipiche osservabili che trattiamo sono i trivettori  $\vec{J}$  (momento angolare) ed  $\vec{S}$  (spin), oppure quadrvettori come il quadri-impulso  $p^\mu$ . La regola di superselezione implica (o riflette) pure l'impossibilità di preparare stati quantistici che siano sovrapposizioni lineari di stati spinoriali e tensoriali.

Una breve osservazione prima di passare al vero colosso del capitolo. Se avessimo fatto tutti i nostri discorsi lavorando in uno spazio euclideo, in cui

il tempo lo avremmo sostituito con  $\sqrt{-1}t$ , avremmo avuto per tutto il tempo in mano la metrica  $-\delta_{\mu\nu}$  al posto di quella minkowskiana  $g_{\mu\nu}$ , ma avremmo ottenuto gli stessi risultati. La differenza sta nel fatto che saremmo arrivati ad un'algebra  $SO(4)$ , ossia delle rotazioni in 4 dimensioni.

Nello spazio minkowskiano abbiamo trovato, invece, l'algebra di  $SU(2) \otimes SU(2)$  attraverso due combinazioni hermitiane dei generatori  $(J_i \pm iK_i)$ . I due  $SU(2)$  sono completamente indipendenti tra loro, poiché non possono essere scambiati uno con l'altro da un'operazione di hermitiana coniugazione. I due  $SU(2)$  però sono collegati da trasformazioni di parità, infatti abbiamo visto che possiamo scambiarli con una trasformazione di quel tipo; ciò perde d'interesse nello spazio euclideo in cui tutte le direzioni sono equivalenti.

Facciamo sempre attenzione a non scambiare le proprietà dei generatori con quelle dell'algebra (o sottoalgebre) del gruppo.

## 2.5 Il gruppo di Poincaré

Come abbiamo già notato nel primo capitolo non vogliamo richiedere che la nostra teoria sia invariante solo per trasformazioni del gruppo di Lorentz, ma vogliamo anche includere nelle invarianze anche le traslazioni<sup>21</sup>, cioè trasformazioni del tipo:

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = x^\mu + a^\mu \quad (2.5.2)$$

in cui  $a^\mu$  è un quadrivettore indipendente da  $x$ . Vogliamo, quindi, l'invarianza per rotazioni e boost, identificati dalle matrici  $\Lambda^\mu_\nu$  come visto per il gruppo di Lorentz, e per traslazioni. Quindi chiediamo l'invarianza per trasformazioni:

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu \quad (2.5.3)$$

che sono trasformazioni a 10 parametri (6 dai dal gruppo di Lorentz, i cui generatori abbiamo visto essere  $\vec{J}$  e  $\vec{K}$ , e gli altri 4 parametri che sono dati dalle traslazioni spazio-temporali). Il gruppo che formano trasformazioni del tipo (2.5.3) sappiamo già qual è, poiché come già accennato, il **gruppo**

---

<sup>21</sup>Formalmente il gruppo di Poincaré  $ISO(3, 1)$  è il prodotto semidiretto:

$$ISO(3, 1) = \mathbb{R}^4 \rtimes SO(3, 1). \quad (2.5.1)$$

Un gruppo prodotto semidiretto tra due gruppi  $N$  ed  $H$ ,  $G = N \rtimes H$ , è costruito da due sottogruppi normali (vedi la definizione 12) e un'azione di  $H$  su  $N$  che ne deforma la struttura del prodotto. La differenza con il prodotto diretto è che in  $G = N \times H$  non c'è interazione tra i due gruppi e i vari elementi commutano tra loro, invece, in  $G = N \rtimes H$  solo  $N$  è normale,  $H$  agisce su  $N$  con un'azione di gruppo e l'operazione di gruppo è "twistata" da questa azione. Nel nostro caso di interesse,  $ISO(3, 1) = \mathbb{R}^4 \rtimes SO(3, 1)$ , sappiamo bene che l'azione delle rotazioni (in  $SO(3, 1)$ ) non commuta con le traslazioni e applicare una rotazione ad un quadrivettore di traslazione restituisce sempre una traslazione, ma con un contributo rotazionale di momento angolare.

**di Poincaré** (o gruppo di Lorentz inomogeneo) è formato dell'"unione" del gruppo delle rotazioni e dei boost nello spazio quadridimensionale di Minkowski (il gruppo di Lorentz) con le traslazioni quadridimensionali. Indichiamo le trasformazioni (2.5.3) di Poincaré con TP e il gruppo con  $ISO(3, 1)$ , ovvero, come gruppo speciale ortogonale inomogeneo.

È possibile vedere subito che le trasformazioni di Poincaré non commutano con le trasformazioni di Lorentz. Considerando 2 TP successive con parametri  $(\Lambda_1, a_1)$  e  $(\Lambda_2, a_2)$  si vede che:

$$x^\mu \longrightarrow \Lambda_1^\mu{}_\nu x^\nu + a_1^\mu \longrightarrow \Lambda_2^\mu{}_\rho \Lambda_1^\rho{}_\nu x^\nu + \Lambda_1^\mu{}_\rho a_1^\rho + a_2^\mu \quad (2.5.4)$$

si vede quindi che il parametro di traslazione  $a_1$  viene ruotato, per cui, i generatori delle rotazioni non commutano con quelli delle traslazioni.

Occorre però notare che le trasformazioni di Lorentz omogenee  $\{\Lambda, 0\}$  e le traslazioni spazio-temporali  $\{1, a\}$  formano sottogruppo, e mentre il secondo è abeliano (visto che le traslazioni commutano) il primo non lo è.

Il gruppo di Poincaré ricopre un ruolo fondamentale nella classificazione degli stati di singola particella in Meccanica Quantistica relativistica. Infatti, alcune delle rappresentazioni irriducibili unitarie (o trivialmente unidimensionali o necessariamente infinito dimensionali, poichè il gruppo è non compatto) sono utilizzate per rappresentare quello che si è osservato in natura, ossia, particelle massive con spin intero o semintero (rappresentazioni infinito dimensionali), particelle con massa nulla ed elicità  $h$  (rappresentazioni unidimensionali).

Nella teoria che costruiremo una particella è rappresentata da una rappresentazione irriducibile del gruppo di Poincaré. Come succedeva in Meccanica Quantistica.

### 2.5.1 Algebra del gruppo di Poincaré

In questa sottosezione cercheremo di capire qual è l'algebra del gruppo di Poincaré. Prima di fare ciò però dobbiamo capire com'è fatto il gruppo delle traslazioni.

Sappiamo dalla Meccanica Quantistica che il generatore delle traslazioni è l'operatore impulso<sup>22</sup>, nel nostro caso quadri-impulso, nello spazio delle

---

<sup>22</sup>Lo vediamo prendendo una trasformazione generica (troncando Taylor al primo ordine):

$$x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu = \varepsilon^\rho \partial_\rho x^\mu \quad (2.5.5)$$

sappiamo dalla (2.5.7) che  $P_\rho = -i\partial_\rho$ , quindi:

$$x'^\mu = x^\mu + i\varepsilon^\rho P_\rho x^\mu \quad (2.5.6)$$

configurazioni definito come:

$$P_\rho = -i\partial_\rho. \quad (2.5.7)$$

Infatti, l'operatore di derivata genera proprio il coefficiente nello sviluppo in serie della traslazione infinitesima:

$$\delta x^\mu = i\varepsilon^\rho P_\rho x^\mu \equiv \varepsilon^\mu \quad (2.5.8)$$

in cui  $\varepsilon^\mu$  sono i parametri della trasformazione, e ciò è il motivo per cui scriviamo per una generica trasformazione:

$$x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu \quad (2.5.9)$$

ed un generico elemento del gruppo, che è chiuso, delle traslazioni:

$$U_t(\varepsilon) = e^{-i\varepsilon^\mu P_\mu} = e^{-i(\varepsilon^0 P_0 - \vec{\varepsilon} \cdot \vec{P})}. \quad (2.5.10)$$

Non ci siamo fatti troppi problemi e abbiamo esteso  $\vec{p}$  allo spazio di Minkowski, dandogli una componente 0. Sappiamo, sempre dalla Meccanica Quantistica, che la traslazione temporale è rappresentata dall'operatore di evoluzione temporale (in cui compare  $\hat{H}$ ):

$$e^{iH\Delta t} = e^{iP^0\Delta t} \quad ; \quad P^0 \equiv H \quad , \quad \varepsilon^0 = \Delta t. \quad (2.5.11)$$

Quindi concludiamo che:

$$P^\mu = (P^0, \vec{P}) \equiv -i\partial_\mu \quad (2.5.12)$$

sono i **generatori del gruppo delle traslazioni**, la cui algebra è:

$$[P^\mu, P^\nu] = 0 \quad (2.5.13)$$

che riflette la natura abeliana del gruppo delle traslazioni.

Cerchiamo a questo punto l'algebra del gruppo di Poincaré.<sup>23</sup> Dalla Meccanica Quantistica sappiamo che gli impulsi non commutano con i generatori del gruppo di Lorentz<sup>24</sup> ( $M_{\mu\nu}$ ):

$$[M_{\mu\nu}, P_\rho] = -ig_{\mu\nu}P_\rho + ig_{\nu\rho}P_\mu \quad (2.5.14)$$

ed in particolare:

$$[P^i, P^j] = 0 \quad [P^i, H] = 0 \quad [J^i, H] = 0 \quad (2.5.15)$$

$$[K^i, P^j] = i\delta^{ij}H \quad [K^i, H] = iP^i \quad [K^i, K^j] = -i\varepsilon^{ijk}J^k \quad (2.5.16)$$

$$[J^i, J^j] = i\varepsilon^{ijk}J^k \quad [J^i, P^j] = i\varepsilon^{ijk}P^k \quad [J^i, K^j] = i\varepsilon^{ijk}K^k. \quad (2.5.17)$$

---

e possiamo dire che  $P_\rho$  è il generatore delle traslazioni.

<sup>23</sup>Possiamo fare riferimento alla sezione 5.1 delle note di Gambino [4] per la dimostrazione dell'algebra del gruppo di Poincaré.

<sup>24</sup>Abbiamo anche visto che le TP non commutano con le TL.

Notiamo che i primi commutatori (2.5.15) evidenziano il fatto che traslazioni e rotazioni sono costanti del moto, mentre dalla seconda delle (2.5.16) vediamo che i generatori dei boost,  $K^i$ , non commutano con  $H$ . È evidente che i 10 generatori (impulso e del gruppo di Lorentz) formino un'algebra chiusa, con sottoalgebre delle rotazioni e traslazioni. Notiamo anche che le traslazioni formano un gruppo non compatto. L'ultima riga (2.5.17) certifica il fatto che  $\vec{J}$ ,  $\vec{K}$  e  $\vec{P}$  sono trivettori. Notiamo anche dai primi due commutatori della seconda riga (2.5.16), che esprimono la variazione delle componenti di  $P^\mu$  per boost, che  $P^\mu$  si comporta, ovviamente, come un quadrvettore, cioè la componente temporale acquista un termine proporzionale all'impulso lungo la direzione del boost e viceversa, mentre le componenti trasversali non vengono modificate.

Dalla classificazione di Wigner, che abbiamo visto nella sezione §2.4.7, le rappresentazioni unitarie del gruppo di Poincaré sono infinito dimensionali (poiché  $P^\mu$  è continuo). La non compattezza del gruppo di Lorentz e del gruppo delle traslazioni, infatti, di porta a dire (in modo equivalente alla frase appena conclusa) che le rappresentazioni irriducibili finito-dimensionali non sono unitarie. Per le applicazioni fisiche a noi interesseranno le rappresentazioni irriducibili unitarie, dunque, per forza (Wigner ci dice così) infinito-dimensionali.

Una breve osservazione. Dalla teoria dei gruppi, ed in particolare dalla teoria delle rappresentazioni, sappiamo che possiamo avere rappresentazioni diverse per uno stesso gruppo.  $P^\mu$  con la rappresentazione differenziale (2.5.12) ha lo svantaggio che è di dimensione infinita, ma il vantaggio di essere unitaria. Se invece dessimo a  $P^\mu$  una rappresentazione matriciale  $4 \times 1$  avremmo una rappresentazione finita, ma con lo svantaggio di non essere unitaria.

Di solito si utilizzano rappresentazioni unitarie per gli stati, in modo da conservare la norma nel tempo (e per poter utilizzare l'operatore di evoluzione temporale  $U$ ), invece, per le osservabili (gli operatori) conviene utilizzare le rappresentazioni finite, in modo da saperli scrivere.

### 2.5.2 Casimir del gruppo di Poincaré

Visti chi sono i generatori e qual è l'algebra del gruppo possiamo cominciare a pensare chi sono gli operatori di Casimir del gruppo di Poincaré. In gruppi non semisemplici, come  $ISO(3, 1)$  (poiché contiene le traslazioni, che sono un gruppo abeliano), gli operatori di Casimir esistono, ma non li possiamo trovare utilizzando solo il rango, ovvero sfruttando il teorema di Racah, dobbiamo costruirli esplicitamente usando l'algebra di Lie e cosa più importante sono legati a quantità fisiche conservative nelle rappresentazioni irriducibili. Un primo operatore di Casimir può essere trovato notando che la "lunghezza" del vettore  $P^\mu$  dev'essere invariante per trasformazioni del

gruppo di Poincaré per definizione, quindi, è un operatore di Casimir:

$$P^2 = P_\mu P^\mu. \quad (2.5.18)$$

Il secondo Casimir è il quadrato dell'operatore che viene chiamato **operatore di Pauli-Lubanski**, che è un operatore completamente antisimmetrico, definito come:

$$W^\mu = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} P_\nu M_{\rho\sigma} \quad (2.5.19)$$

per il quale valgono:

$$W \cdot P = 0 \quad , \quad [W^\mu, P^\nu] = 0. \quad (2.5.20)$$

Inoltre,  $W^\mu$  si trasforma come un quadrirettore, così come  $P^\mu$ . Il commutatore di  $W^\mu$  e  $P^\nu$  è nullo per simmetria e per colpa della presenza di  $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ , questo vincolo comporta che solo 3 componenti di  $W^\mu$  sono indipendenti. In particolare si ottiene:

$$W^0 = \vec{P} \cdot \vec{J} \quad (2.5.21)$$

$$\vec{W} = P^0 \vec{J} - \vec{P} \times \vec{K} \quad (2.5.22)$$

con  $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$  se consideriamo anche rotazioni intriseche e quindi ricordiamo la definizione di  $M^{\mu\nu}$  (2.4.47).

Il secondo operatore di Casimir abbiamo detto essere  $W^2$ . È facile verificare che  $P^2$  e  $W^2$  commutano con tutti i generatori del gruppo di Poincaré.

Come abbiamo già detto, le rappresentazioni unitarie del gruppo di Poincaré sono infinito dimensionali, sono state classificate da Wigner<sup>25</sup> in termini degli operatori di Casimir.

È interessante trovare gli operatori di Casimir, poiché come già visto in Meccanica Quantistica e fatto per il gruppo di Lorentz, possiamo etichettare tutti gli stati fisici quantistici della teoria con gli autovalori dei due operatori di Casimir del gruppo di Poincaré.

### 2.5.3 Interpretazione fisica del vettore di Pauli-Lubanski

Nella sezione §2.5.2 abbiamo definito un operatore di Casimir come il quadrato dell'operatore di Pauli-Lubanski (2.5.19), ma non ci siamo molto preoccupati del senso di quella definizione, ci siamo semplicemente fidati dei due fisici che gli hanno dato il nome. Proviamo in questa sezione a capire meglio l'interpretazione fisica che si può dare al vettore (2.5.19).

---

<sup>25</sup>La scoperta delle rappresentazioni unitarie del gruppo di Poincaré è in realtà dovuta a E. Majorana.

Notiamo che il primo operatore di Casimir è:

$$P^\mu P_\mu = P^0 P_0 - \vec{P} \cdot \vec{P} = E^2 - |\vec{P}|^2 \equiv m^2 \quad (2.5.23)$$

che non è altro che la relazione di mass-shell, per cui, se abbiamo detto che gli stati fisici saranno etichettati dagli autovalori degli operatori di Casimir, allora i nostri stati saranno etichettati, per quello che riguarda  $P^2$ , da  $m$ . Gli stati che considereremo avranno massa definita.

Saremmo molto tentati, forse forzati dalla Meccanica Quantistica, dall'interpretare l'operatore  $W^\mu$  semplicemente come lo spin. Però ciò non è possibile, poiché l'intuizione di spin come momento angolare è persa nel momento in cui introduciamo i boost, che sono presenti perché inseriti in  $M_{\rho\sigma}$ .

Quindi, possiamo fare un'affermazione abbastanza traumatica se ragioniamo in termini di Meccanica Quantistica non relativistica, ossia che, lo spin non è più un operatore di Casimir del gruppo di Lorentz.

Per capire come interpretare  $W^\mu$  dobbiamo distinguere un paio di situazioni, ma vedremo comunque che lo spin in qualche modo rientrerà nella conversazione. Continueremo il discorso anche nella sezione §2.5.4.

Prendiamo una **particella massiva**, con massa  $m$ , e mettiamoci nel suo sistema di riferimento di riposo, in cui:

$$P^\mu = (m, \vec{0}) \implies \begin{cases} W^i = -\frac{1}{2}m\varepsilon^{0ijk}M_{jk} = -mJ^i \\ W^0 = 0 \end{cases} \quad (2.5.24)$$

abbiamo utilizzato le definizioni (2.4.41), in cui ricordiamo che  $J^i$  è il generatore di una rotazione in 3 dimensioni. Però, identifichiamo  $J^i$  con lo spin  $S^i$ , poiché possiamo notare che  $J^i$  non può essere il momento angolare orbitale essendo  $\vec{L} = 0$  nel SR di riposo.

Dunque, vediamo da (2.5.24) che il vettore di Pauli-Lubanski, per una particella massiva e nel suo sistema di riferimento di riposo, è legato al vettore di spin. Sappiamo bene che l'operatore di Casimir, colui che ci fornisce con i suoi autovalori le etichette degli stati fisici, è  $W^2$ , ma sappiamo anche che gli autovalori di  $S^2$  sono  $s(s+1)$ . Quindi abbiamo:

$$W^i = -mS^i \implies W^2 = m^2s(s+1). \quad (2.5.25)$$

Quindi, per una particella massiva  $W^2$  è la generalizzazione dello spin introdotto in Meccanica Quantistica non relativistica, in cui  $s$  assume valori discreti  $0, \frac{1}{2}, 1, \dots$ .

Quindi questa rappresentazione è etichettata dalla massa  $m$  e dallo spin  $s$ . Diversi stati fisici all'interno della rappresentazione sono etichettati dagli autovalori di  $S^3$ , ovvero  $\{-s, -s+1, \dots, s-1, s\}$ , che sono  $2s+1$  termini

e dagli autovalori continui di  $P_i$ . Le particelle massive con massa  $m$ , spin  $s$ , terza componente  $s^3$  e tri-impulso  $P^i$  hanno  $2s + 1$  gradi di libertà.

Ora, analizziamo il caso di **particella massless**. Abbiamo:

$$P^\mu P_\mu = 0 \quad (2.5.26)$$

quindi, gli autovalori dell'operatore di Casimir  $P^2$  sono nulli, e avendo la definizione (2.5.19) di  $W^\mu$ , allora anche:

$$P^\mu W_\mu = 0 \quad , \quad W^\mu W_\mu = 0. \quad (2.5.27)$$

Quindi, complessivamente abbiamo le condizioni:

$$\begin{cases} P^\mu P_\mu = 0 \\ P^\mu W_\mu = 0 \\ W^\mu W_\mu = 0 \end{cases} \quad (2.5.28)$$

e l'unico modo che abbiamo per soddisfare queste 3 condizioni è che  $P^\mu$  e  $W^\mu$  siano proporzionali:

$$P^\mu = \alpha W^\mu \implies \begin{cases} W_\mu P^\mu = \alpha W_\mu W^\mu = 0 \\ P_\mu P^\mu = \alpha P_\mu P^\mu = 0 \end{cases} \quad (2.5.29)$$

per questo scriviamo:

$$W_\mu = h P_\mu \quad (2.5.30)$$

in cui chiamiamo il parametro  $h$  **elicità** e descrive il numero di componenti indipendenti di uno stato massless.

Se guardiamo l'azione di  $W^\mu$  su uno stato fisico di massa zero abbiamo:

$$W^\mu |p\rangle = h P^\mu |p\rangle . \quad (2.5.31)$$

Se a questo punto passiamo in un sistema di riferimento non di riposo, in cui  $P^\mu = (0, P^i)$ , si può vedere che:

$$h = \frac{\vec{J} \cdot \vec{P}}{|\vec{P}|} \quad (2.5.32)$$

ossia, che l'elicità è la proiezione dello spin sul vettore impulso. Ciò ci fa vedere quello raffigurato in figura 2.2. La relazione 2.5.32 la possiamo vedere abbastanza facilmente. Assumiamo che gli autovalori  $P^x = P^y = 0$  e quindi necessariamente che  $P^z = \pm P^0 \neq 0$ , in questo modo abbiamo:

$$W^0 = \vec{P} \cdot \vec{J} = P^z J^z \quad , \quad W^3 = P^0 J^3 \quad (2.5.33)$$

e dunque:

$$W^0 |p, h\rangle = \vec{J} \cdot \vec{P} |p, h\rangle = \pm W^3 |p, h\rangle = \pm P^0 J^3 |p, h\rangle = \pm P^0 h |p, h\rangle \quad (2.5.34)$$

da cui vediamo:

$$\vec{J} \cdot \hat{P} |p, h\rangle = h |p, h\rangle \quad (2.5.35)$$

ovvero quello visto in (2.5.32).



**Figura 2.2:** Raffigurazione del tri-impulso e dello spin.

Facciamo qualche osservazione prima di concludere. A causa della presenza del tensore completamente antisimmetrico  $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$  nella definizione di  $W^\mu$ , quest'ultimo si comporta come uno pseudo-vettore<sup>26</sup>: cambia segno sotto trasformazioni di parità. Di conseguenza, anche l'elicità  $h$  cambia segno per parità ( $h \rightarrow -h$ ), perché sotto parità l'impulso  $\vec{P}$  cambia segno, mentre lo spin  $\vec{J}$  no. Inoltre, per stati massless con spin  $s \neq 0$ , la rappresentazione irriducibile dell'algebra di Poincaré ammette solo due gradi di libertà fisici, corrispondenti a elicità  $\pm s$ , ossia a spin allineato o antiallineato rispetto all'impulso  $P$ . Attenzione però, perché per le particelle mass-less non ogni valore di spin è possibile, infatti, solo alcuni valori di  $s$  si presentano nei modelli fisici (vedi ad esempio il fotone, il gravitone, etc.). In più, per le particelle massless, non esistendo un sistema di riferimento di riposo (poiché in ogni sistema di riferimento hanno sempre velocità  $v = c$ ), non è possibile definire lo spin  $s$ ; ciò che si può definire è l'elicità  $h$ . Ad esempio, il fotone ha spin 1 e due stati di elicità, il gravitone ha spin 2 e due stati di elicità, i neutrini hanno elicità  $\pm 1/2$ .

#### 2.5.4 Piccolo gruppo

Possiamo addentrarci nell'ultima sezione del capitolo e possiamo parlare di quello che va sotto il nome di piccolo gruppo. Il **piccolo gruppo**, o gruppo di Wigner, è il gruppo delle trasformazioni che mantengono invariato il quadrimpulso  $P^\mu$  di una particella. Il piccolo gruppo  $G_P$  è un sottogruppo di  $SO(3, 1)$  e gli elementi trasformani come:

$$\Lambda^\mu_\nu P^\nu = P^\mu \quad (2.5.36)$$

---

<sup>26</sup>Il fatto che  $W^\mu$  sia completamente antisimmetrico è dato dalla presenza di  $J^\mu$ , mentre  $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$  fornisce solo la struttura pseudo-tensoriale.

e sono anche indicate come rotazioni di Wigner. Il piccolo gruppo è importante per la Fisica perché, in generale, per classificare le particelle si guardano i due operatori di Casimir (vedi §2.5.2) e come si trasformano gli stati sotto trasformazioni del piccolo gruppo. Quindi, il piccolo gruppo determina i gradi di libertà interni della particella, ovvero spin per le particelle massive ed elicità per quelle massless.

Nel caso di una particella massiva si ha:

- Le componenti di  $P^\mu$  commutano tra loro, per cui gli autovalori formano una base dello spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$  della particella libera, che potremmo indicare con  $|p, \xi\rangle$ , in cui  $\xi$  rappresenta tutti gli altri numeri quantici (etichette), se necessari, per specificare la particella (come spin, etc.).
- Esiste sempre una trasformazione di Lorentz che porta nel sistema di riferimento di riposo, in cui si ha:

$$P^\mu = (m, \vec{0}) \equiv k^\mu. \quad (2.5.37)$$

- Tutte le rotazioni spaziali lasciano invariato  $k^\mu$ , dunque, il piccolo gruppo nel caso massivo è  $SO(3)$ .
- Tutte le rappresentazioni irriducibili del gruppo delle rotazioni sono unitarie. Il che ci piace perché Wigner ci insegna che per conoscere l'effetto di una trasformazione di Poincaré basta conoscere queste rappresentazioni unitarie irriducibili. Puoi vedere negli appunti di Gambino [4] come agiscono queste trasformazioni e come lo spin  $SU(2)$  emerga in modo naturale, senza dover ricorrere alle rappresentazioni irriducibili proiettive del gruppo delle rotazioni.
- Comunque, ad oggi si è convinti che tutte le particelle elementari abbiano spin  $\frac{1}{2}$  o 1 e la possibilità di particelle scalari, con spin 0 è legata all'esistenza del bosone di Higgs.

Nel caso di una particella massless si ha:

- \* Anche in questo caso le componenti di  $P^\mu$  commutano tra loro, per cui gli stati  $|p, \xi\rangle$  formano una base dello spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$ .
- \* Non è possibile andare nel sistema di riferimento di riposo, poiché una particella massless si muove sempre alla velocità della luce. Si sceglie allora un 4-impulso "standard":

$$P^\mu = (E, 0, 0, E) \equiv k^\mu, \quad (2.5.38)$$

corrispondente a una particella che si muove lungo l'asse  $z$ .

- \* Le trasformazioni di Lorentz che lasciano invariato  $k^\mu$  formano il gruppo  $ISO(2)$ , composto da rotazioni nel piano trasverso ( $SO(2)$ ) e traslazioni ( $\mathbb{R}^2$ ): questo è il piccolo gruppo per una particella massless.
- \* Tuttavia, le rappresentazioni irriducibili unitarie di  $ISO(2)$  sono infinite-dimensionali a meno che le traslazioni agiscano trivialmente. In fisica delle particelle, si considerano solo tali rappresentazioni: ciò riduce il piccolo gruppo effettivo a  $SO(2)$ .
- \* Le rappresentazioni irriducibili unitarie di  $SO(2)$  sono etichettate da un numero intero o semintero, che corrisponde all'**elicità**  $h$  della particella. Questo implica che una particella massless con spin  $s$  ha solo due stati fisici:  $h = \pm s$ .

Concludendo, tutte le rappresentazioni irriducibili del gruppo di Poincaré si possono classificare secondo gli autovalori degli operatori di Casimir, dunque, in termini di  $m$ ,  $s$  ed  $h$ :

- $P^2 = P^\mu P_\mu = m^2 > 0$ ,  $W^2 = m^2 s(s+1)$ : gli stati sono etichettati come  $|m, s\rangle$  con  $s = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots$  e rappresentano particelle di massa  $m$  e spin  $s$ .
- $P^2 = P^\mu P_\mu = 0$ ,  $W^2 = 0$  e con  $W^\mu = \pm s P^\mu$ : gli stati sono etichettati come  $|h\rangle$  con  $h = \pm s$  con  $s = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots$  e rappresentano particelle di massa nulla ed elicità  $h$ .
- $P^2 = P^\mu P_\mu = 0$ ,  $W^2 = k^2 > 0$ : gli stati rappresentano particelle di massa nulla, con stati di polarizzazione che variano in modo continuo,  $s$  continuo, e non sembrano avere applicazioni in QFT (almeno a livello perturbativo), per cui sono stati non realizzabili in natura.
- $P^2 = P^\mu P_\mu = m^2 < 0$ , rappresentano particelle, ad esempio i tachioni, superluminari con  $v > c$ , dunque non realizzabili in natura (inconsistenti con le interpretazioni fisiche usuali).
- $P^2 = P^\mu P_\mu = 0$ ,  $W^2 = 0$ : rappresentano il caso banale (scalare), ovvero il vuoto quantistico, quindi lo stato con nessuna particella.

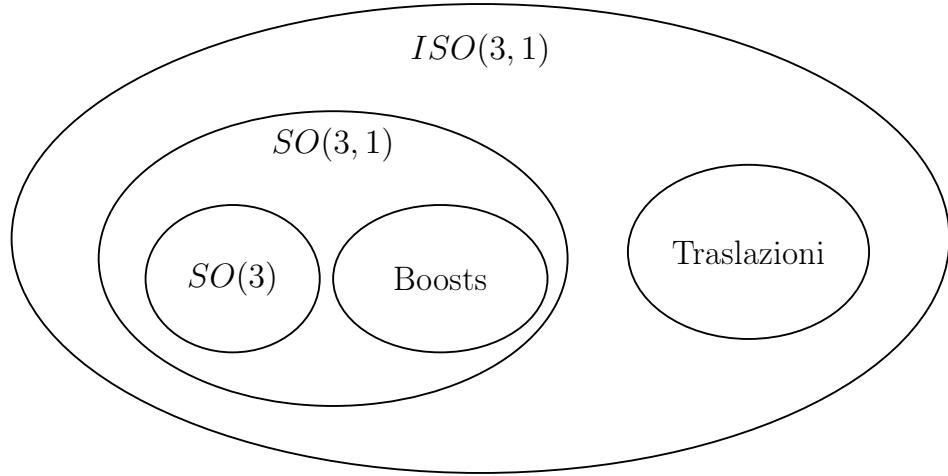
## 2.6 Schema riassuntivo gruppi

Dopo questo lungo capitolo molto astratto sulla teoria dei gruppi e prima di passare nuovamente alla Fisica, vediamo in figura (2.3) un breve diagramma riassuntivo del gruppo di Poincaré e dei gruppi visti. Ricordiamo i vari componenti:

- $SO(3)$ : gruppo delle rotazioni spaziali in 3 dimensioni. I generatori dipendono da 3 parametri, è un gruppo compatto e chiuso, in più è il sottogruppo del gruppo di Lorentz  $SO(1, 3)$ .

Il gruppo  $O(3)$  è il gruppo delle rotazioni spaziali in 3 dimensioni, non necessariamente proprie, ovvero con  $\det = \pm 1$ .

- Boost: non formano un gruppo, poiché l'algebra non è chiusa.
- $SO(3, 1)$ : gruppo delle trasformazioni proprie di Lorentz. È sottogruppo del gruppo  $O(3, 1)$  ed è formato da trasformazioni di  $L_+^\uparrow$  (proprie ed ortocrone), ossia da: Rotazioni + Boost. Le trasformazioni di  $SO(3, 1)$  formano un gruppo chiuso, ma non compatto.
- $O(3, 1)$ : gruppo di Lorentz. Il 3 e l'1 indicano quanti elementi positivi e negativi ci sono nella metrica.
- Traslazioni: sono trasformazioni che formano un gruppo abeliano, non compatto.
- $ISO(3, 1)$ : gruppo di Poincaré, formato da:  $SO(3, 1) +$  Traslazioni. È un gruppo non compatto per via della non compattezza delle traslazioni e dei boost.



**Figura 2.3:** Schema riassuntivo gruppi.

Quello che faremo è costruire una teoria proprio sul gruppo  $ISO(3, 1)$ . Ciò vuol dire che costruiremo una teoria basata sulle leggi di invarianza del sistema, ossia, costruiremo una teoria, in questo caso, relativistica.

Costruiremo un'azione invariante per tutte le trasformazioni che rispecchiano tutte le leggi di invarianza della Relatività Speciale, cioè, tutte le trasformazioni del gruppo di Poincaré.

Potremo descrivere il sistema quantistico-relativistico tramite una rappresentazione irriducibile del gruppo di Poincaré, poiché nel gruppo ci sono

i suoi generatori, tra cui  $H$  che descrive la dinamica del sistema (in Fisica classica si ha l'equazione di Hamilton-Jacobi e in Meccanica Quantistica l'equazione di Schrodinger).



## Capitolo 3

# Campo locale e il suo comportamento sotto trasformazioni del gruppo di Poincaré

Abbiamo detto nel capitolo §1 introduttivo che il nostro scopo è quello di creare una teoria quantistica che possa trattare sistemi con  $\infty$  gradi di libertà e che sia relativistica. Abbiamo anche detto che possiamo inserire la Relatività Speciale nella teoria passando per la teoria dei gruppi, ed in particolare, utilizzando il gruppo di Poincaré.

Per alzare i gradi di libertà dei sistemi, abbiamo detto, che partiremo da un campo classico e che lo renderemo quantistico tramite la seconda quantizzazione, ma questo salto lo faremo solo nel capitolo §6. Non ci siamo dilungati molto sul concetto di campo, poiché ben noto dalla Fisica classica. In termini matematici, un campo è una funzione dipendente da un certo numero di variabili. In termini fisici, un campo, ad esempio il campo gravitazionale, è un oggetto che possiamo pensare come ad una funzione di spazio e tempo che pervade tutto lo spazio circostante e ne cambia le caratteristiche (ad esempio ne cambia la geometria). Sappiamo, inoltre, che possiamo vedere l'azione di questo campo mettendo un oggetto (test), sensibile al campo, nella sua regione di azione.

Attenzione però, i campi classici (gravitazionale, elettrico, etc.) sono funzioni di spazio e tempo, ma quello che noi costruiremo nella nostra teoria quantistica relativistica, sarà il corrispettivo della funzione d'onda della Meccanica Quantistica. La funzione d'onda della MQ non relativistica perde completamente di significato nel momento in cui relativizziamo la teoria. Il nuovo campo, dunque, rappresenterà il sistema e non sarà più una semplice

funzione di tempo e spazio, ma sarà un operatore<sup>1</sup>.

Il concetto di campo e la sua quantizzazione li analizzeremo nel capitolo §6, ora capiamo perché vogliamo scrivere una teoria locale, com'è definito un campo in senso locale e come i diversi tipi di campi che possiamo avere si trasformino sotto le trasformazioni del gruppo di Poincaré. Il riferimento per questo capitolo è [8].

### 3.1 Teoria locale

Facciamo un'osservazione ancora prima di iniziare. La località nella nostra teoria non è importante, ma fondamentale. Una teoria locale garantisce le trasformazioni finite, ossia, garantisce che una serie di trasformazioni infinitesime si traduca in una finita. Ricordiamo che non ci andava bene nel capitolo §1 il fatto che sviluppando la radice dell'hamiltoniana comparivano infinite derivate e rendevano la teoria non locale. Per questo motivo non abbiamo mai scritto termini del tipo:

$$L = \int d^3x d^3y \phi(\vec{x})\phi(\vec{y}) \quad (3.1.1)$$

in cui i campi  $\phi(\vec{x}, t)$  e  $\phi(\vec{y}, t)$  sono legati in punti  $\vec{x} \neq \vec{y}$ . Questo ci garantisce di avere lagrangiane locali e dunque teorie locali. Uno dei motivi per cui si utilizza una teoria di campo per la Fisica Classica è quello di implementare la località.

Passiamo a parlare di campi.

### 3.2 Definizione di campo locale

Nella meccanica classica del punto materiale, un sistema è descritto da un set di coordinate  $\{q_i\}$  e dalla lagrangiana  $L(\{q_i, \dot{q}_i\})$ , dipendente dalle coordinate e dalle rispettive velocità. Inoltre conosciamo il principio di minima azione:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt L[q_i(t), \dot{q}_i(t)] \quad (3.2.1)$$

che ci permette di ottenere le equazioni del moto:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0. \quad (3.2.2)$$

---

<sup>1</sup>Ricorda il discorso sui ruoli di tempo e spazio nella teoria.

Quando scriviamo una teoria di campo il ruolo delle coordinate generalizzate  $\{q_i\}$  è assunto dal campo  $\phi(\mathbf{x}, t)$ , in cui l'indice discreto  $i$  viene rimpiazzato dal vettore posizione  $\mathbf{x}$ , con  $x$  che varia con continuità. Al posto delle equazioni del moto avremo le equazioni di campo.

Ricordiamo però che la posizione  $x$  non è più un'operatore, bensì solo più un'etichetta, o meglio, un parametro che etichetta il campo  $\phi$ . In questo modo  $x$  assume lo stesso ruolo di  $t$  ed ogni campo sarà etichettato dai valori di  $\mathbf{x}$  e  $t$ .

Ovviamente, in un singolo punto  $(\mathbf{x}, t)$  ci possono essere più campi diversi, per questo utilizzeremo un'indice aggiuntivo per distinguerli  $\phi_a(\mathbf{x}, t)$ .

Ogni campo si estende (descrive) su un numero infinito di valori delle coordinate. I campi  $\phi_a$  vengono associati ad una lagrangiana che ne determina l'evoluzione temporale.

La teoria che studieremo noi sarà una teoria di campo locale, per cui la dinamica del sistema non collega punti diversi dello spazio istantaneamente. In altre parole, rispetteremo sempre i principi della Relatività Speciale (e di conseguenza la causalità).

Definiremo una densità lagrangiana  $\mathcal{L}(x^\mu)$  che dipende da  $\mathbf{x}$  e  $t$  attraverso i campi  $\phi_a$  e  $\dot{\phi}_a$ :

$$\mathcal{L}(x^\mu) = \mathcal{L}(\phi_a(x^\mu), \partial_\mu \phi_a(x^\mu)) \quad (3.2.3)$$

per cui avremo:

$$L(t) = \int d^3x \mathcal{L}(x^\mu) \quad , \quad S = \int d^4x \mathcal{L}(\phi_a(x^\mu), \partial_\mu \phi_a(x^\mu)) . \quad (3.2.4)$$

Nelle teorie di campo locali, i campi, in qualsiasi regione spaziale  $R$ , comunicano con lo spazio esterno ad  $R$  solo attraverso il loro comportamento sulla superficie  $\sigma$  di  $R$ , ossia il bordo e dunque le sue condizioni al contorno. Vuole sostanzialmente dire che non ci sono buchi o singolarità.

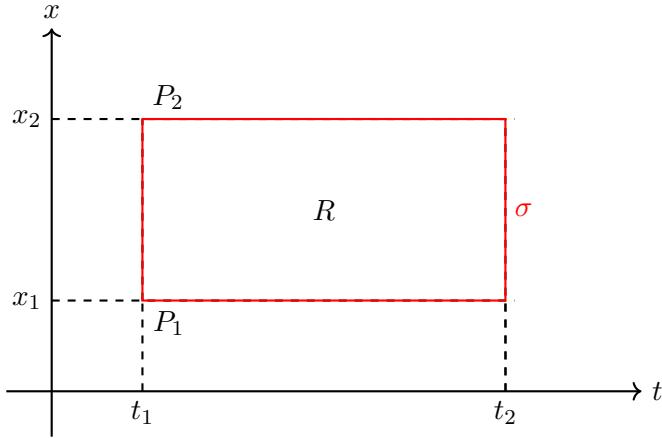
Per questo motivo possiamo dire che per specificare i campi ovunque all'interno di  $R$ , ovvero in ogni  $x^\mu$  dello spazio e del tempo in  $R$ , sarà sufficiente specificare il valore dei campi in ogni punto interno ad  $R$  negli istanti  $t_1$  e  $t_2$ , ed il valore dei campi in ogni punto della superficie  $\sigma$  negli istanti  $t \in [t_1, t_2]$ .

Date queste condizioni, la lagrangiana ed il principio di minima azione specificheranno l'evoluzione temporale dei campi  $\forall t$  tale per cui  $t_1 < t < t_2$  all'interno di  $R$ , tramite le equazioni del moto (di campo).

Le regioni di cui parliamo sono rappresentate in figura 3.1.  $R$  è l'area interna al rettangolo e  $\sigma$  il perimetro dello stesso.

Dunque, un campo locale crea una perturbazione in tutto lo spazio, ma quando è definito all'interno di una certa regione e noi lo conosciamo su tutto il bordo, allora, possiamo prevedere la sua azione anche al di fuori di tale regione grazie alle equazioni del moto e alle condizioni al contorno (di bordo).

Notiamo una cosa riguardo le equazioni del moto. Nella meccanica classica del punto materiale le equazioni del moto sono equazioni differenziali,



**Figura 3.1:** Rappresentazione regioni di un campo locale.

una per ogni coordinata spaziale, in cui compare la derivata totale rispetto al tempo. Per una teoria di campo locale abbiamo 1 equazione differenziale  $\forall \phi_a$ , in cui compare sia la derivata rispetto al tempo che le derivate rispetto le 3 coordinate spaziali. Le equazioni del moto indicano l’evoluzione del sistema da  $t_1$  a  $t_2$  all’interno di  $R$ , nella figura 3.1 è come se ci permettessero di muoverci con il segmento  $\overline{P_1 P_2}$  da  $t_1$  a  $t_2$ , coprendo tutta  $R$ .

### 3.3 Comportamento dei campi locali per trasformazioni di Poincaré

Consideriamo una funzione  $f$  del punto  $P = (x^\mu)$  dello spazio tempo. In un sistema di riferimento inerziale in cui  $P$  si trova in  $x^\mu$ , la funzione sarà  $f(x^\mu)$ , in un altro sistema di riferimento inerziale, in cui  $P$  si trova in  $x'^\mu$ , la funzione sarà  $f(x'^\mu)$ . Dobbiamo capire, non solo come cambiano le coordinate, cosa che in realtà sappiamo già dalle trasformazioni dei sistemi di riferimento, ma dobbiamo studiare attentamente come cambi la forma funzionale del campo quando ci spostiamo in diversi sistemi di riferimento. Per trasformazioni infinitesima dei sistemi di riferimento, del gruppo di Poincaré ad esempio:

$$x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu \quad (3.3.1)$$

la variazione totale sul campo  $f$  sarà:

$$\Delta f = f'(x') - f(x) = f'(x + \delta x) - f(x) \quad (3.3.2)$$

$$= f'(x) - f(x) + \partial_\mu f'(x) \delta x^\mu + \mathcal{O}[(\delta x)^2] \quad (3.3.3)$$

all’ordine più basso, per  $\partial_\mu f'(x)$ , possiamo approssimare la derivata come:

$$\partial_\mu f'(x) \sim \partial_m u f \quad (3.3.4)$$

in cui notiamo che la differenza tra  $\partial_\mu f'$  e  $\partial_\mu f$  è di ordine  $\delta x$ , quindi talte che:

$$\partial_\mu f' \delta x^\mu = \partial_\mu f \delta x^\mu + \mathcal{O}[(\delta x)^2]. \quad (3.3.5)$$

Se facciamo (3.3.4), allora abbiamo:

$$\Delta f = \delta f + \partial_\mu f \delta x^\mu \quad (3.3.6)$$

in cui indichiamo con  $\delta f = f'(x) - f(x)$ . Individuiamo in (3.3.6) il primo termine come la variazione di  $f$  dovuta al cambiamento della forma funzionale di  $f$ , mentre il secondo come un termine di trasporto, che tiene conto della variazione di  $f$  dovuta alla variazione di  $x$ . Vediamo dunque che la variazione totale  $\Delta$  è data dalla variazione della forma funzionale  $\delta$ , più la variazione di  $f$  indotta dalla variazione delle coordinate  $\delta x^\mu \partial_\mu$ . In forma operatoriale possiamo scrivere la (3.3.6) come:

$$\Delta = \delta + \delta x^\mu \partial_\mu \quad (3.3.7)$$

Il piano di lavoro per questa sezione, ricordandoci sempre della definizione di campo locale  $\phi(x)$  che abbiamo, sarà quella di studiare i tipi di campi utili per formulare le teorie a cui siamo interessati, ovvero campi scalari, spinoriali e vettoriali. Successivamente, studiamo come gli specifici campi si trasformano per trasformazioni di Lorentz e Poincaré, e in base alle proprietà di trasformazione impariamo a scrivere degli invarianti, in termini dei campi che abbiamo a disposizione. In particolare, scriveremo delle combinazioni di campi che siano invarianti di Lorentz e con delle altre proprietà ben definite. Gli invarianti che troveremo saranno utilizzati per costruire l'azione (successivamente alla lagrangiana) della teoria a cui siamo interessati.

### 3.3.1 Campo scalare

Un campo scalare, che indichiamo con  $\phi$ , come abbiamo visto nella sezione §2.4.6, corrisponde alla rappresentazione, data da  $SU(2) \otimes SU(2)$ ,  $(0, 0)$  fatta da matrici  $1 \times 1$ , cioè scalari.

$\phi$  è una funzione di  $x^\mu$  che ha lo stesso valore in tutti i sistemi di riferimento inerziali legati tra loro da una trasformazione di Lorentz, è un'invariante di Lorentz:

$$\phi'(x') = \phi(x) \quad (3.3.8)$$

il che comporta:

$$\Delta\phi = \delta\phi + \delta x^\mu \partial_\mu \phi = 0. \quad (3.3.9)$$

Ci possiamo chiedere come trasforma un campo scalare per *traslazioni spazio-temporali*. Consideriamo traslazioni infinitesime:

$$x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu \quad (3.3.10)$$

in cui abbiamo scritto la relazione (3.3.1) con  $\delta x^\mu = \varepsilon^\mu$  quadrivettore. La relazione (3.3.9) diventa:

$$\Delta\phi = \delta\phi + \varepsilon^\mu \partial_\mu \phi = 0 \quad (3.3.11)$$

che diventa:

$$\delta\phi = -\varepsilon^\mu \partial_\mu \phi = -i\varepsilon^\mu P_\mu \phi \quad (3.3.12)$$

in cui abbiamo inserito al posto della derivata  $\partial_\mu$  l'operatore impulso. Vediamo che  $\delta \rightarrow -\varepsilon^\mu \partial_\mu$  è un'operatore differenziale. Abbiamo quindi che una traslazione spazio-temporale delle coordinate  $x^\mu$ , induce sul campo scalare una trasformazione  $\delta\phi$ , generata dall'operatore impulso  $P_\mu$ .

Noi abbiamo considerato una traslazione infinitesima, ma per una traslazione finita possiamo scrivere:

$$\phi' = (\mathbb{1} - \varepsilon^\mu \partial_\mu + \dots) \phi \implies \phi' = e^{-i\varepsilon^\mu P_\mu} \phi \quad (3.3.13)$$

dove individuiamo l'operatore di traslazione (nello spazio-tempo):

$$e^{-i\varepsilon^\mu P_\mu}. \quad (3.3.14)$$

Quello che abbiamo visto, può sembrare banale, ma non lo è. La relazione (3.3.13), così come tutte le altre che vedremo, ci permette di vedere come cambia il nostro campo, che ricordiamo descrivere l'evoluzione spazio-temporale del nostro sistema, per trasformazione di coordinate.

Ora, analizziamo come trasforma un campo scalare per trasformazioni di Lorentz del gruppo  $SO(3, 1)$ . Per quello appreso per le traslazioni spazio-temporali possiamo aspettarci accada una cosa analoga, ma al posto di ritrovarci con l'operatore  $P_\mu$  troveremo l'operatore  $M_\mu$ , generatore del gruppo.

Come prima avremo:

$$\phi'(x') = \phi(x) \implies \Delta\phi = \delta\phi + \delta x^\mu \partial_\mu \phi = 0 \quad (3.3.15)$$

da cui vediamo:

$$\delta\phi = -\delta x^\mu \partial_\mu \phi \quad (3.3.16)$$

in cui possiamo scrivere:

$$\delta x^\mu = \varepsilon^{\mu\rho} x_\rho \quad (3.3.17)$$

con  $\varepsilon^{\mu\rho}$  che sono i parametri completamente antisimmetrici delle trasformazioni di Lorentz, e riottenere:

$$\delta\phi = -\varepsilon^{\mu\rho} x_\rho \partial_\mu \phi \quad (3.3.18)$$

e possiamo di nuovo trovare  $\delta \rightarrow -\varepsilon^{\mu\rho} x_\rho \partial_\mu$  essere un'operatore differenziale. Ora, con che operatore identifichiamo l'operatore differenziale che opera

sul campo scalare  $\phi$ ? Ricordando quello detto a riguardo degli oggetti simmetrici o antisimmetrici nella sezione §2.1.2 e il fatto che  $\varepsilon$  sono parametri completamente antisimmetrici, possiamo esplicitare nella scrittura di  $\delta$  la parte antisimmetrica di  $x_\rho \partial_\mu$ :

$$\delta = -\varepsilon^{\mu\rho} x_\rho \partial_\mu \implies -\frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\rho} (x_\rho \partial_\mu - x_\mu \partial_\rho) \quad (3.3.19)$$

in cui ci viene facile identificare gli operatori  $M_{\rho\mu} = -i(x_\mu \partial_\rho - x_\rho \partial_\mu)$  generatori delle trasformazioni di Lorentz, che contiene egli operatori di momento angolare ( $\mu, \rho \rightarrow i, j$ ) e dei boost ( $\mu, \rho \rightarrow i, 0$ ). Quindi, per trasformazioni di Lorentz infinitesime possiamo scrivere:

$$\delta\phi = -\frac{i}{2} \varepsilon^{\mu\rho} M_{\rho\mu} \phi \quad (3.3.20)$$

in cui, appunto,  $M_{\mu\rho}$  sono gli operatori differenziali i cui indici sono opportunamente contratti con i parametri  $\varepsilon^{\mu\rho}$  per formare un operatore globalmente "scalare di Lorentz". Per una trasformazione finita avremo:

$$\phi' = e^{-\frac{i}{2} \varepsilon^{\mu\rho} M_{\mu\rho}} \phi. \quad (3.3.21)$$

Talvolta l'operatore differenziale  $e^{-\frac{i}{2} \varepsilon^{\mu\rho} M_{\mu\rho}}$  viene anche indicato con  $\Lambda$  (senza indici!). Quindi, possiamo concludere che una trasformazione di Lorentz sulle coordinate  $x^\mu$  induce sul campo scalare una trasformazione (tramite un operatore differenziale) generata dai generatori  $M_{\rho\sigma}$  delle trasformazioni di Lorentz.

Altri esempi di campi scalari a cui possiamo applicare quello che abbiamo imparato in questa sottosezione sono:

$$\phi^n, \sin \phi, \cos \phi, (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi), \partial_\mu(\partial^\mu \phi), \dots \quad (3.3.22)$$

Notiamo solo che la combinazione  $x^\mu \partial_\mu \phi$  è Lorentz invariante, ma non Poincaré invariante, poiché la derivata  $\partial_\mu$  è trasparente alle traslazioni.

Notiamo in conclusione una cosa importante. Sappiamo che all'interno manca il termine  $S_{\mu\rho}$ , di spin, e c'è solo il termine di momento angolare orbitale  $L_{\mu\rho}$  (oltre i boost), legato alla trasformazione delle coordinate, infatti, il termine  $(x_\mu \partial_\rho - x_\rho \partial_\mu)$  non era altro che la generalizzazione del momento angolare. Questa mancanza che troviamo ha senso perché il campo scalare è un oggetto di spin 0 (ricordiamo che ha rappresentazione  $(0, 0)$ ). Il termine di spin  $S_{\mu\rho}$  torna in gioco quando consideriamo un campo che ha almeno un'indice, come ad esempio un campo vettoriale come  $\partial_\mu \phi$ . Lo vediamo nella prossima sottosezione.

### 3.3.2 Campo vettoriale

Consideriamo ora, un campo vettoriale, ovvero un campo con almeno un'indice, come ad esempio:

$$\partial_\mu \phi \quad (3.3.23)$$

con  $\phi$  campo scalare. È un campo con spin 1. Ci chiediamo come si trasforma questo campo per trasformazioni di Lorentz. Abbiamo, dalla definizione (3.3.7):

$$\Delta \partial_\mu \phi = \delta \partial_\mu \phi + \delta x^\rho \partial_\rho \partial_\mu \phi \quad (3.3.24)$$

che possiamo riscrivere come:

$$\Delta \partial_\mu \phi = [\Delta, \partial_\mu] \phi + \partial_\mu \Delta \phi \quad (3.3.25)$$

che diventa, guardando solo l'operatore e ricordando che  $\Delta \phi = 0$  visto che  $\phi$  è uno scalare:

$$\Delta \partial_\mu = [\Delta, \partial_\mu] \quad (3.3.26)$$

relazione valida solo per campi scalari e non in termini generali. Possiamo espandere i conti della (3.3.26) ricordando la (3.3.7):

$$[\Delta, \partial_\mu] = [\delta, \partial_\mu] + [\delta x^\nu \partial_\nu, \partial_\mu] \quad (3.3.27)$$

in cui vediamo che il primo commutatore è nullo dal momento che  $\delta$  è lineare (essendo una semplice differenza) e vale  $\delta \partial_\mu \phi = \partial_\mu \delta \phi$ . Continuando i conti troviamo:

$$[\Delta, \partial_\mu] = [\delta x^\nu \partial_\nu, \partial_\mu] = [\varepsilon^{\nu\rho} x_\nu \partial_\nu, \partial_\mu] \quad (3.3.28)$$

in cui abbiamo esplicitato il coefficiente della trasformazione di Lorentz  $\varepsilon$ . Immaginiamo di applicare<sup>2</sup> il commutatore (3.3.28) al campo  $\phi$ , che avevamo rimosso nella passaggio per arrivare a (3.3.26). Utilizziamo la definizione di commutatore:

$$\Delta \partial_\mu \phi = [\Delta, \partial_\mu] \phi = [\varepsilon^{\nu\rho} x_\nu \partial_\nu, \partial_\mu] \phi \quad (3.3.29)$$

$$= \varepsilon^{\nu\rho} x_\nu \partial_\nu (\partial_\mu \phi) - \varepsilon^{\nu\rho} \partial_\mu (x_\nu \partial_\nu \phi) \quad (3.3.30)$$

$$= \varepsilon^{\nu\rho} x_\nu \partial_\nu (\partial_\mu \phi) - \varepsilon^{\nu\rho} (\partial_\mu x_\rho) (\partial_\nu \phi) - \varepsilon^{\nu\rho} x_\rho \partial_\mu \partial_\nu \phi \quad (3.3.31)$$

in cui possiamo notare che il primo e il terzo termine si annullano per via del fatto che  $\varepsilon$  è completamente antisimmetrico e  $\partial_\mu \partial_\nu$  è simmetrico. Vediamo anche che nel pezzo che rimane abbiamo  $\partial_\mu x^\rho = \delta_\mu^\rho$  che fa scomparire tutta la dipendenza da  $x^\mu$  e dalle sue derivate. Dunque:

$$\Delta \partial_\mu \phi = -\varepsilon^{\nu\rho} \delta_\mu^\rho (\partial_\nu \phi) = -\varepsilon_\mu^\nu (\partial_\nu \phi) = +\varepsilon_\mu^\nu (\partial_\nu \phi) \quad (3.3.32)$$

---

<sup>2</sup>Ricorda che ha senso parlare del commutatore, ma solo quando lo applichiamo a qualcosa e facciamo agire le derivate che ci sono all'interno su qualcosa.

abbiamo cambiato segno essendo  $\varepsilon$  completamente antisimmetrico. Ora, ricordando che (3.3.24) vediamo:

$$\Delta\partial_\mu\phi = \delta\partial_\mu\phi + \delta x^\rho\partial_\rho\partial_\mu\phi = +\varepsilon_\mu^\nu(\partial_\nu\phi) \quad (3.3.33)$$

$$\implies \delta(\partial_\mu\phi) = \varepsilon_\mu^\nu(\partial_\nu\phi) - \varepsilon^{\rho\sigma}x_\sigma\partial_\rho(\partial_\mu\phi) \quad (3.3.34)$$

in cui possiamo già vedere che il secondo termine, che dipendendo da  $x$  e  $\partial_\mu$ , conterrà momenti angolari orbitali e boost, mentre il primo termine, non dipendendo da  $x$  e  $\partial_\mu$ , conterrà il puro spin. Possiamo fare dei conti più esplicativi, riscrivendo  $\varepsilon_\mu^\nu$  in qualche modo come  $\varepsilon^{\rho\sigma}$  così da poterlo raccogliere:

$$\delta(\partial_\mu\phi) = \varepsilon^{\rho\sigma}g_{\rho\mu}g_\sigma^\nu(\partial_\nu\phi) - \varepsilon^{\rho\sigma}x_\sigma\partial_\rho(\partial_\mu\phi) \quad (3.3.35)$$

dove possiamo antisimmetrizzare sia  $g_{\rho\mu}g_\sigma^\nu$  che  $x_\sigma\partial_\rho(\partial_\mu\phi)$ :

$$\delta(\partial_\mu\phi) = \frac{1}{2}\varepsilon^{\rho\sigma}\left[(g_{\rho\mu}g_\sigma^\nu - g_{\sigma\mu}g_\rho^\nu)(\partial_\nu\phi) - (x_\sigma\partial_\rho - x_\rho\partial_\sigma)(\partial_\mu\phi)\right] \quad (3.3.36)$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon^{\rho\sigma}\left[(-i(S_{\rho\sigma})_\mu^\nu)(\partial_\nu\phi) - (-iL_{\sigma\rho})(\partial_\mu\phi)\right] \quad (3.3.37)$$

$$= -\frac{i}{2}\varepsilon^{\rho\sigma}(S_{\rho\sigma})_\mu^\nu(\partial_\nu\phi) - \frac{i}{2}\varepsilon^{\rho\sigma}L_{\rho\sigma}(\partial_\mu\phi) \quad (3.3.38)$$

dove abbiamo indicato con  $L_{\rho\sigma}$  il generatore che racchiude i momenti angolari orbitali ed i boost nello spazio-tempo, mentre con  $S_{\rho\sigma}$  il generatore che comprende i momenti di spin (generatore che soddisfa la stessa algebra dei momenti angolari, ma non dipende né da  $x^\mu$  né da  $\partial_\mu$ ). Ricorda che nell'insieme dei generatori di Lorentz ci sono tutti gli operatori che obbediscono a relazioni di commutazione di tipo momento angolare, quindi ci sono sia operatori tipo  $L_{\rho\sigma}$ , che riguardano trasformazioni dello spazio tempo, ma anche operatori tipo  $S_{\rho\sigma}$ , che con lo spazio tempo non ci hanno nulla a che fare non dipendendo né da  $x^\mu$  né dalle sue derivate. Quest'ultima osservazione è molto importante perché rende la Teoria Quantistica dei Campi molto più ricca della Meccanica Quantistica, poiché ora lo spin non dobbiamo inglobarlo a posteriori nella teoria, ma è già presente vista tutta la fatica che facciamo nel costruire la teoria tramite la teoria delle rappresentazioni e la teoria dei gruppi.

Il campo vettoriale, che in modo generico possiamo indicare con  $A^\mu$ , trasforma secondo la rappresentazione  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ , ma esiste anche un'altra rappresentazione del campo come matrice hermitiana 2x2 (ricordiamo la sezione §2.4.5):

$$A^\mu \longrightarrow A = \begin{pmatrix} A^0 + A^3 & A^1 + iA^2 \\ A^1 - iA^2 & A^0 - A^3 \end{pmatrix}. \quad (3.3.39)$$

Le trasformazioni di Lorentz sono quelle che preservano il fatto che  $A = A^\dagger$  e lasciano  $\det A$  invariante. Ad esempio, sono invarianti le combinazioni:

$$A_\mu(x)A^\mu(x), \partial_\mu A_\nu(x)\partial^\nu A^\mu(x), \partial_\mu A^\mu(x), \dots \quad (3.3.40)$$

e si possono avere sia campi vettoriali che pseudo-vettoriali (assiali).

### 3.3.3 Campo spinoriale

I campi spinoriali vengono anche chiamati campi di materia, in evidenza del fatto che rappresentano particelle massive, a differenza dei campi vettoriali, che ad esempio possono rappresentare particelle massless come i fotoni. Le rappresentazioni spinoriali, come visto nella sezione §2.4.6, del gruppo di Lorentz:

$$\left(\frac{1}{2}, 0\right) \quad , \quad \left(0, \frac{1}{2}\right) \quad (3.3.41)$$

sono realizzate attraverso spinori a 2 componenti complesse che chiamiamo  $\psi_L$  e  $\psi_R$  (che sono collegati tramite trasformazioni di parità e complessa coniugazione, il che rende gli spinori oggetti non banali da trattare e ci permetta creare oggetti bilineari che comprendano sia il settore left che il settore right e non solo uno dei due). Le proprietà di trasformazione sono:

$$\psi_L(x) \longrightarrow \psi'_L(x') = \Lambda_L \psi_L(x) \quad \text{per} \quad \left(\frac{1}{2}, 0\right) \quad (3.3.42)$$

$$\psi_R(x) \longrightarrow \psi'_R(x') = \Lambda_R \psi_R(x) \quad \text{per} \quad \left(0, \frac{1}{2}\right) \quad (3.3.43)$$

con  $\Lambda_{L,R}$  matrici complesse 2x2 che rappresentano appunto la trasformazione indotta sugli spinori dalla trasformazione delle coordinate, ci aspettiamo, parlando di spinori bidimensionali, che esse siano collegate in qualche modo alle matrici di Pauli. Quando la trasformazione è una rotazione, sappiamo dalla rappresentazione spinoriale di  $SU(2)$ , essere:

$$\Lambda_{L,R} = e^{i \vec{\sigma} \cdot \vec{\omega}} \quad (3.3.44)$$

dove  $\sigma_i$  sono le matrici di Pauli, per cui vale:

$$\sigma^i \sigma^j = \delta^{ij} + i \varepsilon^{ijk} \sigma^k. \quad (3.3.45)$$

Per i boost possiamo utilizzare una rappresentazione analoga a quella delle rotazioni:

$$\vec{K} = \pm \frac{i}{2} \vec{\sigma} \quad (3.3.46)$$

che soddisfa tutte le relazioni di commutazione del caso (ricorda il capitolo §2), e abbiamo in generale:

$$\Lambda_L = e^{i \vec{\sigma} \cdot (\vec{\omega} - i \vec{\eta})} \quad (3.3.47)$$

$$\Lambda_R = e^{i \vec{\sigma} \cdot (\vec{\omega} + i \vec{\eta})} \quad (3.3.48)$$

di cui dobbiamo ricordare che  $\Lambda_L$  e  $\Lambda_R$  sono legate da una trasformazione di parità e complessa coniugazione. Queste matrici forniscono una rappresentazione del gruppo di Lorentz, che comprende rotazioni e boost, tramite

matrici di Pauli. Le proprietà importanti da ricordare delle nostre matrici di trasformazione, ereditate dalle matrici di  $\sigma$ , sono<sup>3</sup>:

$$\Lambda_L^{-1} = \Lambda_R^\dagger \quad (3.3.49)$$

$$\Lambda_{L,R}^T = \sigma^2 \Lambda_{L,R}^{-1} \sigma^2 \quad (3.3.50)$$

$$\sigma^2 \Lambda_L \sigma^2 = \Lambda_R^* \quad (3.3.51)$$

$$\Lambda_L^T \sigma^2 \Lambda_L = \sigma^2 \quad (3.3.52)$$

ma anche che: dato uno spinore  $\psi_L$  che trasforma come  $(\frac{1}{2}, 0)$  è possibile costruire lo spinore  $\sigma^2 \psi_L^*$  che si trasforma come  $(0, \frac{1}{2})$ :

$$\sigma^2 \psi_L^* \xrightarrow{\text{T.L.}} \sigma^2 \Lambda_L^* \psi_L^* = \underbrace{\sigma^2 \Lambda_L^* \sigma^2}_{\Lambda_R} \sigma^2 \psi_L^* = \Lambda_R \sigma^2 \psi_L^* \quad (3.3.53)$$

ovvero,  $\sigma^2 \psi_L^*$  trasforma con  $\Lambda_R$ , cioè come uno spinore  $R$ . Questo ci dice che esiste una trasformazione che ci fa passare da  $R$  ad  $L$  e viceversa.

Alcuni esempi di invarianti bilineari dei campi spinoriali sono:

$$\partial_\mu \psi_R^\dagger \sigma^\mu \psi_R, \psi_R^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_R, \partial_\mu \psi_L^\dagger \sigma^\mu \psi_L, \psi_L^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \psi_L, \frac{1}{2} \psi_L^\dagger \sigma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi_L. \quad (3.3.54)$$

in cui  $\overleftrightarrow{\partial}_\mu = \vec{\partial}_\mu - \overleftarrow{\partial}_\mu$ .

Un'altra cosa che possiamo vedere è che da  $(\frac{1}{2}, 0) \otimes (\frac{1}{2}, 0)$  si può ottenere uno scalare, poiché:

$$\left(\frac{1}{2}, 0\right) \otimes \left(\frac{1}{2}, 0\right) = (0, 0) \oplus (1, 0) \quad (3.3.55)$$

infatti vediamo che da:

$$\Lambda_L^T \sigma^2 \Lambda_L = \sigma^2 \quad (3.3.56)$$

ricaviamo, dati due spinori  $\chi_L$  e  $\chi_R$ , che:

$$\chi_L^T \sigma^2 \psi_L \xrightarrow{\text{T.L.}} \chi_L^T \Lambda_L^T \sigma^2 \Lambda_L \psi_L = \chi_L^T \underbrace{\Lambda_L^T \sigma^2 \Lambda_L}_{\sigma^2} \psi_L = \chi_L^T \sigma^2 \psi_L \quad (3.3.57)$$

ovvero, troviamo  $\chi_L^T \sigma^2 \psi_L$  è un invariante per trasformazioni di Lorentz, e dunque è uno scalare, cioè un'invariante. Quando invece prendiamo  $\chi_L = \sigma^2 \psi_R^*$ , allora l'invariante diventa:

$$-i \psi_R^\dagger \psi_L \quad (3.3.58)$$

---

<sup>3</sup>Nota che con  $\sigma^2$  si indica la matrice di Pauli numero 2 e non un quadrato. Utilizziamo in particolare la  $\sigma^2$  in quanto è l'unica a coefficienti complessi e che permette effettivamente di fare una complessa coniugazione.

e stessa cosa vale per  $\psi_L^\dagger \psi_R$ .

Notiamo solo che tutti gli invarianti visti non sono reali, infatti ad esempio passando da  $L$  ad  $R$  otteniamo il complesso coniugato.

Un problema che riscontriamo è che non è possibile scrivere un'invariante di Lorentz usando spinori solo di tipo  $L$ , che appartiene a  $(\frac{1}{2}, 0)$ , oppure solo di tipo  $R$ , che appartiene a  $(0, \frac{1}{2})$ . Siccome questi spinori sono legati da trasformazioni di parità (hanno parità opposta), gli indici possono solo essere composti combinando  $\psi_L$  e  $\psi_R$ , cioè combinando le due rappresentazioni  $(\frac{1}{2}, 0)$  e  $(0, \frac{1}{2})$ . Se vogliamo costruire uno spinore che abbia proprietà di parità ben definite, allora dobbiamo assemblare le rappresentazioni left e right, e lo facciamo nel modo più semplice possibile, costruendo quello che si chiama **spinore di Dirac**. Infatti, partendo da  $\psi_L$  e  $\psi_R$  possiamo costruire uno spinore a 4 componenti, lo spinore di Dirac, come:

$$\psi \equiv \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \quad (3.3.59)$$

è importante perchè le sue proprietà di trasformazione di parità sono ben definite, infatti:

$$\psi \xrightarrow{P} \psi^P = \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = \gamma_0 \psi \quad (3.3.60)$$

dove abbiamo introdotto una nuova matrice 4x4, che chiamiamo  $\gamma_0$ . Nel caso volessimo "eliminare" una sola delle due componenti  $L$  o  $R$  e tenere solo l'altra, cioè, se volessimo proiettare (cioè tirar fuori) una delle due componenti, dovremmo introdurre un'ulteriore matrice 4x4 che abbiamo tutti zeri a parte il blocco o in alto a destra oppure in basso a sinistra (a seconda di chi vogliamo proiettare). Per arrivare a ciò introduciamo i proiettori:

$$\frac{1}{2} (\mathbb{1} \pm \gamma_5) \quad (3.3.61)$$

dove definiamo:

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} -\mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}. \quad (3.3.62)$$

Possiamo riscrivere gli invarianti (3.3.54) in termini di spinori di Dirac. Per esempio:

$$\psi_R^\dagger \psi_L^\dagger \psi_L^\dagger \psi_R = \psi^\dagger \gamma^0 \psi \equiv \bar{\psi} \psi \quad (3.3.63)$$

in cui definiamo:

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0. \quad (3.3.64)$$

o anche:

$$\frac{1}{2} (\psi_L^\dagger \sigma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi_L + \psi_R^\dagger \bar{\sigma}^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi_R) \equiv \frac{1}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi \quad (3.3.65)$$

dove definiamo altre 3 nuove matrici 4x4, oltre alla  $\gamma^0$  già vista:

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad (3.3.66)$$

che sono una specie di estensione quadridimensionale delle matrici di Pauli. Puoi guardare l'Appendice E per una trattazione completa delle matrici di Dirac. Notiamo che quando scriviamo  $\gamma^\mu$ , l'indice  $\mu$  è un indice di quadrivettore. Non siamo stati molto precisi, ma valgono le seguenti definizioni:

$$\sigma^\mu = (\mathbb{1}, \vec{\sigma}) \quad , \quad \bar{\sigma}^\mu = (\mathbb{1}, -\vec{\sigma}) \quad (3.3.67)$$

in cui la matrice  $\bar{\sigma}^\mu$  è la matrice in cui le componenti spaziali sono cambiate di segno rispetto la matrice  $\sigma^\mu$ .

Possiamo anche costruire uno spinore di Dirac, chiamato **spinore coniugato di carica**, sfuggendo il fatto che  $\psi_L \sim \sigma^2 \psi_R^*$ , come:

$$\psi^c \equiv \begin{pmatrix} \sigma^2 \psi_R^* \\ -\sigma^2 \psi_L^* \end{pmatrix} \quad (3.3.68)$$

e notiamo che  $(\psi^c)^c = \psi$ . Possiamo fare di più, poiché siccome  $\sigma^2 \psi_L^*$  trasforma come  $\psi_R$ , allora possiamo costruire uno spinore che è auto-coniugato di carica:

$$\psi^M \equiv \begin{pmatrix} \psi_L \\ -\sigma^2 \psi_L^* \end{pmatrix} \quad (3.3.69)$$

che chiamiamo **spinore di Majorana**. Lo spinore (3.3.69) è l'equivalente di uno spinore di Weyl, ma in 4 dimensioni. Gli spinori di Weyl e di Majorana hanno la metà dei gradi di libertà rispetto agli spinori di Dirac.

### 3.3.4 Altri campi

Il libro di Ramond [8] lo fa sicuramente meglio, ma possiamo costruire campi di spin superiore tramite composizioni, opportune in base alle proprietà che vogliamo avere, delle rappresentazioni più semplici che abbiamo già analizzato. Ad esempio possiamo costruire un campo di spin 3/2 componendo:

$$\left(\frac{1}{2}, 0\right) \otimes \left(\frac{1}{2}, 0\right) \otimes \left(\frac{1}{2}, 0\right) = \left(\frac{3}{2}, 0\right) \oplus \left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus \left(\frac{1}{2}, 0\right) \quad (3.3.70)$$

oppure un campo di spin 2 come:

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \otimes \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right). \quad (3.3.71)$$

Sappiamo bene che le particelle elementari sono classificate in base al loro spin, che corrisponde a specifiche rappresentazioni del gruppo di Lorentz.

Quello che ci interessa è costruire e studiare bene le rappresentazioni rappresentanti i sistemi, le particelle, più semplici, quindi i campi scalari, di spin 0, i campi vettoriali, che ci servono ad esempio per il fotone, e i campi spinoriali, che rappresentano ad esempio particelle di Dirac di spin  $1/2$  come l'elettrone, e solo successivamente, nel caso ci dovesse servire, le componiamo per avere dei campi di spin più alto. Siamo, in qualche misura fortunati, poiché in natura le particelle elementari hanno spin 0,  $1/2$  o al massimo 1 per cui possiamo preoccuparci maggiormente delle rappresentazioni più basse. Spin maggiori di 1 riguardano particelle bosoniche o fermioniche che siano, ma non sicuramente particelle elementari.

## Capitolo 4

# Le equazioni di campo

In questo capitolo approfondiremo in modo più formale ciò che abbiamo detto nel capitolo §1.5 riguardo azione e quantità conservative. Abbiamo visto nel capitolo §3 come si trasformano i vari tipi di campi per trasformazioni di Poincaré e come formare degli invarianti per trasformazioni di quel tipo. Ora, assembliamo tali invarianti per creare delle azioni che descrivono le teorie fisiche che ci interessano (che ovviamente rispettano gli assiomi della Relatività Speciale). Vedremo che la richiesta di invarianza sotto trasformazioni di Poincaré non è sufficiente a determinare una sola azione, ma ne troveremo una classe intera. Dovremo costruire ad hoc altre richieste per arrivare ad una definizione univoca di azione per una certa teoria. Per questo capitolo si può fare riferimento a [5, 8].

Ricordiamo le definizioni e le cose importanti degli oggetti che dovremo utilizzare in questo capitolo. L'azione, che è un funzionale, è definito come:

$$S \equiv \int_{\tau_1}^{\tau_2} d^4x \mathcal{L} \quad (4.0.1)$$

in cui  $d^4 = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$  ed  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \dot{\phi})$  è la densità lagrangiana funzione dei campi e delle loro derivate. La funzione  $\mathcal{L}$  dipende soltanto da  $x^\mu$  nelle teorie locali. Le teorie non locali sono estremamente complesse e le tratteremo comunque con  $\mathcal{L}$  locali.

L'azione è reale, così che in questo modo la probabilità è conservata. Ad esempio, in una teoria classica un potenziale complesso da' origine a fenomeni di assorbimento in cui particelle materiali spariscono nel nulla. Una teoria di questo tipo per noi non è accettabile.

L'azione da' origine ad equazioni del moto che contengono derivate di ordine massimo 2; derivate di ordine più alto generano violazioni di causalità. Avremo nella nostra teoria al massimo  $\partial_\mu \partial^\mu$  che agisce su un campo. Siccome  $\partial_\mu \partial^\mu$  può essere identificato con  $P^2$ , che abbiamo visto in §2 essere un operatore di Casimir del gruppo di Poincaré, e che  $P^2$  corrisponde

al quadrato dell'energia di una particella libera, allora se abbiamo solo un termine  $\partial_\mu \partial^\mu \phi$  stiamo parlando di una teoria di campo libera (e le equazioni del moto si restringono ad una rappresentazione di particella libera).

In più, avremo che l'azione è invariante per trasformazioni di Poincaré, poiché vogliamo costruire una teoria relativistica. L'azione dovrà essere sottoposta ad altre condizioni di invarianza, ad esempio, teorie di gauge coinvolgono altri gradi di libertà, come: carica elettrica, carica debole, carica di colore, etc. ....

Se lavoriamo in unità naturali l'azione  $S$  è adimensionale e conseguentemente la lagrangiana  $\mathcal{L}$  ha dimensionalità:

$$[\mathcal{L}] = L^{-4}. \quad (4.0.2)$$

Punto fondamentale nel processo che vogliamo seguire è il principio di minima azione, che ci permette di arrivare alle equazioni del moto.

## 4.1 Principio di minima azione ed equazione del moto

Prendiamo un campo locale  $\phi(x)$  (scalare, spinoriale e vettoriale che sia) e scriviamo:

$$S(\tau_1, \tau_2, [\phi]) \equiv \int_{\tau_1}^{\tau_2} d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \quad (4.1.1)$$

consideriamo una simmetria interna, che non coinvolge le coordinate spazio-temporali, e possiamo osservare che una variazione del campo  $\delta\phi$  provoca una variazione di  $\mathcal{L}$  e conseguentemente in  $S$ . Scriviamo:

$$\delta S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d^4x \delta \mathcal{L} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d^4x \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_\mu \phi]} \delta (\partial_\mu \phi) \right] \quad (4.1.2)$$

in cui possiamo scrivere  $\delta(\partial_\mu \phi) = \partial_\mu(\delta\phi)$ , poiché in questo caso  $x$  non varia, ma varia solo  $\phi$  (nella sua forma funzionale) e per cui la derivata della differenza  $(\phi - \phi') = \delta\phi$  è uguale alla differenza delle derivate, cioè  $\partial_\mu(\phi - \phi') = \delta\partial_\mu\phi$ . Inserita quest'ultima osservazione in (4.1.2) abbiamo:

$$\delta S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d^4x \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_\mu \phi]} \partial_\mu \right] \delta \phi(x) \quad (4.1.3)$$

in cui possiamo vedere la seconda derivata essere:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_\mu \phi]} \partial_\mu = \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_\mu \phi]} \delta \phi \right] - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_\mu \phi]} \delta \phi \quad (4.1.4)$$

che sostituita porta a:

$$\delta S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d^4x \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_\mu \phi]} \right] \delta \phi + \int_{\tau_1}^{\tau_2} d^4x \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_\mu \phi]} \delta \phi(x) \right]. \quad (4.1.5)$$

Il secondo termine di (4.1.5) è un termine di superficie, che in effetti si può scrivere come integrale di superficie:

$$\oint_{\sigma} d\sigma_{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_{\mu} \phi]} \delta \phi \quad (4.1.6)$$

dove  $\sigma_{\mu}$  è la superficie delimitata dal volume quadridimensionale su cui stiamo integrando. Questo termine di superficie va a 0 se richiediamo che  $\delta \phi$  sia zero ai bordi di  $\sigma$ . Annullando il termine di superficie in (4.1.5) il principio di minima azione, o meglio la condizione che  $S$  sia invariante per la trasformazione infinitesima  $\delta \phi$  del campo, ci fornisce l'equazione del moto:

$$\partial_{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_{\mu} \phi]} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \quad (4.1.7)$$

che è l'**equazione di Eulero-Lagrange** (classica). Nel caso in cui avessimo più campi,  $\varphi_a(x)$ , allora abbiamo 1 equazione per ogni campo  $\varphi_a$ . È importante ricordare che le equazioni (4.1.7) valgono solamente quando le variazioni  $\delta \phi$  sono nulle ai bordi e il termine di superficie è nullo, ma soprattutto che l'avere derivate doppie, e non di ordine più alto, è fondamentale poiché, come sappiamo dalla fisica classica, derivate di ordine più alto portano a soluzioni non causali della teoria. Nella teoria che costruiremo, la richiesta di avere al più una derivata doppia in  $S$ , si riverserà sull'avere al massimo due operatori  $\partial_{\mu}$  nella lagrangiana. Un'altra conseguenza dell'annullarsi del termine di superficie è che le stesse equazioni del moto si ottengono da una qualsiasi lagrangiana che differisca da quella di partenza  $\mathcal{L}$ , per la derivata totale di una funzione arbitraria  $\Lambda^{\mu}$ :

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \partial_{\mu} \Lambda^{\mu} \quad (4.1.8)$$

ed  $\mathcal{L}'$  induce una variazione su  $S$  che dipende solamente dalle condizioni ai bordi imposte su  $\delta \phi$  e  $\delta \partial_{\mu} \phi$ . In Meccanica Classica la trasformazione:

$$\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}' \quad (4.1.9)$$

è detta **trasformazione canonica**. Anche l'aggiunta di un'eventuale costante arbitraria  $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' + K$  non cambia la natura del sistema.

Fin'ora abbiamo considerato una trasformazione del campo  $\phi$  che induce una variazione  $\phi \rightarrow \phi' + \delta \phi$  che agisce solo sulla forma funzionale del campo, ma lascia invariate le coordinate spazio-temporali. Questo tipo di trasformazioni, e le variazioni che inducono su  $\mathcal{L}$ ,  $S$  e di conseguenza sull'applicazione del principio di minima azione e sulle equazioni del moto, sono estremamente interessanti ed importanti. Vedremo nel seguito del capitolo come l'invarianza di  $S$  per una trasformazione di Poincaré sulle coordinate spazio-temporali ci porterà alla formulazione di una legge di conservazione (ricorda che una quantità conservata nel tempo è tale per cui  $\frac{dQ}{dt} = 0$ ).

Per il momento continuiamo a concentrarci su una trasformazione che coinvolga la sola forma funzionale del campo  $\phi$  (quindi per cui  $\phi \rightarrow \phi' = \phi + \delta\phi$ ) e dimostriamo nella prossima sezione il teorema di Noether in questo caso.

Attenzione, tutto quello detto non vale se si vuole descrivere anche l'interazione gravitazionale.

## 4.2 Teorema di Noether

Vediamo in questa sezione l'applicazione del teorema di Noether in diversi casi.

Uno dei maggiori punti di forza del formalismo che stiamo utilizzando, ossia l'utilizzo delle simmetrie (e invarianze) dell'azione, è che permette di derivare delle leggi di conservazione. Possiamo ricordare dal corso di Meccanica Quantistica 1 che le simmetrie dell'hamiltoniana portano a delle leggi di conservazione, e di conseguenza a delle quantità conservative. Ad esempio, avevamo visto che un'hamiltoniana indipendente dal tempo portava alla conservazione dell'energia, un'hamiltoniana invariante per traslazioni portava alla conservazione dell'impulso e un'hamiltoniana centrale, dunque invariante per rotazioni, portava alla conservazione del momento angolare.

Il teorema di Noether formula la corrispondenza tra simmetrie e quantità conservative in termini matematici all'interno di una teoria di campo.

**1.** Supponiamo che  $S$  sia invariante per una trasformazione di simmetria interna, cioè una trasformazione che altrera la forma funzionale dei campi  $\phi^\alpha$ , ma che non implica una variazione delle coordinate spazio-temporali. Una trasformazione del tipo:

$$\phi^\alpha \longrightarrow \phi^\alpha + \varepsilon^\alpha \quad (4.2.1)$$

con  $\delta\phi^\alpha = \varepsilon^\alpha$  parametro piccolo. Come conseguenza alla variazione del campo, l'azione subisce una variazione  $\delta S$ , ovviamente calcolabile. Possiamo provare a ragionare al contrario, ossia, assumiamo che valgono le equazioni del moto e vediamo che conseguenze comporta una variazione dell'azione sul termine di superficie. Calcoliamo:

$$\delta S = \int d^4x \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\alpha} \delta\phi^\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_\mu \phi^\alpha]} \delta[\partial_\mu \phi^\alpha] \right) \quad (4.2.2)$$

$$= \int d^4x \left[ \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_\mu \phi^\alpha]} \delta\phi^\alpha \right) - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_\mu \phi^\alpha]} \right) \delta\phi^\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\alpha} \delta\phi^\alpha \right] \quad (4.2.3)$$

in cui vediamo che gli ultimi due termini ricostruiscono l'equazione del moto, per cui insieme fanno 0 per definizione. Conseguentemente abbiamo:

$$\delta S = \int d^4x \left[ \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_\mu \phi]} \delta \phi \right) \right] \quad (4.2.4)$$

possiamo interpretare la quantità:

$$J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_\mu \phi]} \delta \phi \quad (4.2.5)$$

come una **corrente**, che se l'azione è invariante sotto la trasformazione (4.2.1), allora la corrente  $J^\mu$  è conservata, e possiamo scrivere un'equazione di conservazione (o continuità):

$$\partial_\mu J^\mu = 0. \quad (4.2.6)$$

Inoltre, possiamo definire una **carica** conservata<sup>1</sup> data dall'integrale sulle 3 coordinate spaziali della componente temporale di  $J^\mu$ :

$$Q_\alpha \equiv \int d^3x J^0. \quad (4.2.7)$$

La carica  $Q_\alpha$  è conservata poiché se integriamo su un volume tridimensionale infinito l'equazione di continuità (4.2.6) abbiamo:

$$0 = \int d^3x \partial_\mu J^\mu = \int d^3x \partial_0 J^0 + \int d^3x \partial_i J^i \quad (4.2.8)$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \int d^3x J^0 + \int ds_i J^i \quad (4.2.9)$$

$$= \frac{dQ}{dt} + \text{termine di superficie} \quad (4.2.10)$$

e se il termine di superficie va a 0 all'infinito abbastanza rapidamente, allora abbiamo:

$$\frac{dQ}{dt} = 0 \quad (4.2.11)$$

ossia,  $Q$  è una quantità conservata nel tempo.

Una nota importante è che nel caso avessimo più di un campo, allora ci sarà una corrente ed una carica associata ad ogni campo.

Il teorema di Noether ci dice esattamente quello visto in questo primo punto, ovvero: una simmetria di  $S$  (quindi in questo caso un'invarianza per una trasformazione interna), induce ad una corrente conservata e ad una legge di continuità (4.2.6), che a sua volta porta ad una legge di conservazione (4.2.11).

---

<sup>1</sup>Gli analoghi in Meccanica Quantistica sono: la corrente  $J^\mu$  è quella che chiamavamo corrente di probabilità, mentre la quantità che si conservava era la densità di corrente di probabilità, che chiamavamo  $\rho$ .

2. Supponiamo ora che  $S$  sia invariante per una trasformazione che vari le coordinate spazio-temporali. Prendiamo ad esempio una traslazione, ovvero una trasformazione del tipo:

$$x^\mu \longrightarrow x^\mu + a^\mu \quad (4.2.12)$$

con  $\delta x^\mu = a^\mu$  termine costante e non dipendente da  $x^\mu$ . Abbiamo  $a^0$  traslazione temporale e  $a^i$  traslazione spaziale. Conseguentemente alla traslazione abbiamo:

$$\phi(x) \longrightarrow \phi(x + a) \quad (4.2.13)$$

che se consideriamo una traslazione infinitesima, con  $a^\mu$  piccolo, è:

$$\phi(x) \longrightarrow \phi(x + a) = \phi(x) + \delta\phi \quad (4.2.14)$$

e possiamo calcolare la variazione della forma funzionale del campo (sviluppando in serie  $\phi(x + a)$ ):

$$\delta\phi = \phi(x + a) - \phi(x) \sim \phi(x) + a^\mu \partial_\mu \phi(x) - \phi(x) = a^\mu \partial_\mu \phi(x). \quad (4.2.15)$$

Dunque, in seguito ad una variazione  $\delta x^\mu = a^\mu$  i campi variano come:

$$\delta\phi = a^\mu \partial_\mu \phi \quad (4.2.16)$$

e conseguentemente a  $\delta(\partial_\mu \phi) = \partial_\mu \delta\phi = \partial_\mu a^\mu \partial_\nu \phi$ :

$$\delta(\partial_\mu \phi) = a^\nu \partial_\nu (\partial_\mu \phi). \quad (4.2.17)$$

Ora, dobbiamo tener conto che una trasformazione delle coordinate  $x^\mu$  induce una variazione anche nella lagrangiana e successivamente nell'azione:

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu \mathcal{L} \delta x^\mu = a^\mu \partial_\mu \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_\mu \phi]} \delta[\partial_\mu \phi] \quad (4.2.18)$$

$$= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} a^\nu \partial_\nu \phi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_\mu \phi]} a^\nu \partial_\nu \partial_\mu \phi \quad (4.2.19)$$

$$= a^\nu \left[ \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_\mu \phi]} \partial_\nu \phi \right) - \left( \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_\mu \phi]} \right) \partial_\nu \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \partial_\nu \phi \right] \quad (4.2.20)$$

$$= a^\nu \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_\mu \phi]} \partial_\nu \phi \right) \quad (4.2.21)$$

in cui abbiamo annullato due termini grazie alle equazioni del moto. Abbiamo trovato:

$$a^\mu \partial_\mu \mathcal{L} = a^\nu \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_\mu \phi]} \partial_\nu \phi \right) \quad (4.2.22)$$

$$\implies \partial_\mu \left[ \mathcal{L} \delta_\nu^\mu - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_\mu \phi]} \partial_\nu \phi \right] a^\nu = 0 \quad (4.2.23)$$

in cui abbiamo scritto  $a^\mu = \delta_\nu^\mu a^\nu$ , in cui  $\delta_\nu^\mu = g_\nu^\mu$ . L'equazione (4.2.23) è una legge di conservazione per un tensore, di rango 2, detto **tensores energia-impulso** (stress-tensor o tensore canonico), definito come<sup>2</sup>:

$$-T_\nu^\mu = \mathcal{L}g_\nu^\mu - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_\mu \phi]} \partial_\nu \phi \quad (4.2.24)$$

che fa diventare la legge di conservazione:

$$\partial_\mu T_\nu^\mu = 0. \quad (4.2.25)$$

Il tensore  $T_\nu^\mu$  lo chiamiamo energia-impulso perché sappiamo, dallo studio del gruppo di Poincaré che i generatori del gruppo sono gli impulsi  $P^\mu$  e ci aspettiamo che le traslazioni siano legate a  $P^0$  e  $P^i$ .

Ora, se integrassimo la componente temporale di  $T_\nu^\mu$  su un volume tridimensionale infinito otterremmo la carica che si conserva in questo caso. Ci aspettiamo che le quantità conservative siano proprio energia ed impulso. Infatti, sappiamo che il quadri-impulso  $P^\mu$  è definito come  $P^\mu = (E, P^i)$  e possiamo definire:

$$P^\mu \equiv \int d^3x (T_0^\mu) \quad (4.2.26)$$

in questo modo il teorema di Noether ci garantisce:

$$\frac{dP^\mu}{dt} = 0 \quad (4.2.27)$$

cioè che l'energia e l'impulso sono costanti del moto se l'azione è invariante per traslazioni.

Facciamo attenzione al fatto che le cariche conservative associate alle traslazioni nello spazio sono le tre componenti dell'impulso fisico del campo  $\phi$ :

$$P^i = \int d^3x T_0^i \quad (4.2.28)$$

da non confondere con l'impulso canonicamente coniugato a  $\phi$ , solitamente indicato con  $\pi(x)$  nella formulazione hamiltoniana della Teoria Quantistica dei Campi.

Se immaginiamo di fare una traslazione della componente temporale, allora la carica conservata è l'hamiltoniana  $H$ :

$$H = \int d^3x T_0^0 = \int d^3\mathcal{H} \quad (4.2.29)$$

perché, come avremo modo di vedere, vale:

$$\pi(x^\mu) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(x^\mu)} \quad , \quad \mathcal{H} = \pi \dot{\phi} - \mathcal{L}. \quad (4.2.30)$$

---

<sup>2</sup>La scelta del segno negativo ci sarà chiara in futuro.

Già da questi due casi che abbiamo visto che le cariche di Noether, cioè le quantità conservative, sono i generatori delle trasformazioni sotto le quali l'azione è invariante. Nel caso visto sopra, le componenti del quadri-impulso generano le traslazioni nello spazio-tempo.

Un discorso analogo a questo delle traslazioni spazio-temporali, anche se avremmo qualche difficoltà in più legata alla necessità di definire il tensore risultante come tensore simmetrico, lo si può fare anche nel caso in cui si consideri una trasformazione di Lorentz. Per esempio, se  $S$  è invariante per rotazioni, allora la quantità conservata è il momento angolare. Nel caso generico in cui  $S$  è invariante per trasformazioni di Lorentz le cariche conservative sono le componenti del momento angolare e dei generatori dei boost.

**3.** Vediamo il teorema di Noether nel caso più generale possibile. Consideriamo una trasformazione che agisce sia sui campi che sulle coordinate spazio-temporali. Nel capitolo §3 abbiamo visto che una trasformazione infinitesima induce:

$$\begin{cases} x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu \\ \phi'(x') = \phi(x) + \Delta\phi(x) \quad , \quad \Delta\phi(x) = \phi'(x') - \phi(x) \end{cases} \quad (4.2.31)$$

notando che in  $\Delta\phi(x)$  è inclusa sia la variazione della forma funzionale di  $\phi$  (che va da  $\phi \rightarrow \phi'$ ) sia l'effetto della trasformazione sulle coordinate ( $x^\mu \rightarrow x'^\mu$ ). Come abbiamo visto, la variazione totale  $\Delta\phi$  è data da:

$$\Delta\phi(x) = \phi(x + \delta x) - \phi(x) = \underbrace{\phi'(x) - \phi(x)}_{\delta\phi} + \partial_\mu\phi'\delta x \quad (4.2.32)$$

$$\sim \delta\phi(x) + \partial_\mu\phi(x)\delta(x) \quad (4.2.33)$$

dove abbiamo usato che  $\partial_\mu\phi' \sim \partial_\mu\phi$  all'ordine  $\mathcal{O}(\delta x)$ . Dunque la variazione totale è:

$$\Delta\phi(x) = \delta\phi(x) + \partial_\mu\phi(x)\delta x \quad (4.2.34)$$

con i soliti due termini, di variazione della forma funzionale e di variazione indotta dalla trasformazione indotta dalla trasformazione delle coordinate spazio-temporali. La lagrangiana subirà anch'essa una variazione:

$$\Delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial[\partial_\mu\phi]}\delta[\partial_\mu\phi] + \partial_\mu\mathcal{L}\delta x^\mu \quad (4.2.35)$$

in cui abbiamo  $\partial_\mu\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu}$  e possiamo individuare i termini:

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial[\partial_\mu\phi]}\delta[\partial_\mu\phi] \quad , \quad \partial_\mu\mathcal{L}\delta x^\mu \quad (4.2.36)$$

dove il secondo è la variazione indotta dalla trasformazione di  $x^\mu$  sulla lagrangiana. La variazione dell'azione sarà:

$$\Delta S = \int d^4x \Delta \mathcal{L} + \int (\delta d^4x) \mathcal{L}. \quad (4.2.37)$$

Però, possiamo scrivere un po' meglio queste ultime cose. Ricordando che vale  $\delta \partial_\mu \phi = \partial_\mu \delta \phi$  e usando la regola di derivazione del prodotto, la quantità  $\Delta \mathcal{L}$  diventa:

$$\Delta \mathcal{L} = \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_\mu \phi]} \right) \delta \phi + \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_\mu \phi]} \delta \phi \right) + (\partial_\mu \mathcal{L}) \delta x^\mu \quad (4.2.38)$$

dove la prima parentesi è nulla per le equazioni del moto. Per  $\delta(d^4x)$  abbiamo:

$$d^4x' = |J(x)| d^4x = \left| \det \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \right| d^4x \quad (4.2.39)$$

in cui possiamo vedere lo Jacobiano essere:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} &= \frac{\partial(x^\mu + \delta x^\mu)}{\partial x^\nu} = g^\mu_\nu + \partial_\nu \delta x^\mu \\ &= \begin{vmatrix} 1 + \partial_0 \delta x^0 & \partial_1 \delta x^0 & \partial_2 \delta x^0 & \partial_3 \delta x^0 \\ \partial_0 \delta x^1 & 1 + \partial_1 \delta x^1 & \partial_2 \delta x^1 & \partial_3 \delta x^1 \\ \partial_0 \delta x^2 & \partial_1 \delta x^2 & 1 + \partial_2 \delta x^2 & \partial_3 \delta x^2 \\ \partial_0 \delta x^3 & \partial_1 \delta x^3 & \partial_2 \delta x^3 & 1 + \partial_3 \delta x^3 \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (4.2.40)$$

in cui vediamo che i termini lineari in  $\delta x$  sono  $\partial_\mu \delta x^\mu$ . Possiamo calcolare il determinante Jacobiano, ricordando che vale  $\det(e^X) = e^{\text{Tr} X}$  e sviluppando il logaritmo che comparirà considerando  $\delta x^\mu$  infinitesimo:

$$\det\{g^\mu_\nu + \partial_\mu \delta x^\mu\} = \exp\{\text{Tr}\{\ln(g^\mu_\nu + \partial_\nu \delta x^\mu)\}\} \quad (4.2.41)$$

$$\sim \exp\{\text{Tr}\{\partial_\nu \delta x^\nu\}\} \quad (4.2.42)$$

$$\sim 1 + \partial_\mu \delta x^\mu \quad (4.2.43)$$

dunque troviamo che:

$$\delta(d^4x) = d^4x' - d^4x = (|\det\{\partial_\nu x'^\mu\}| - 1) d^4x \cong \partial_\mu \delta x^\mu d^4x. \quad (4.2.44)$$

Mettendo insieme tutte le cose che abbiamo imparato possiamo scrivere la variazione dell'azione:

$$\Delta S = \int d^4x \left[ \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_\mu \phi]} \delta \phi \right) + \underbrace{(\partial_\mu \mathcal{L}) \delta x^\mu + \mathcal{L} \partial_\mu \delta x^\mu}_{\partial_\mu(\mathcal{L} \delta x^\mu)} \right] \quad (4.2.45)$$

$$= \int d^4x \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_\mu \phi]} \delta \phi + \mathcal{L} \delta x^\mu \right). \quad (4.2.46)$$

Il teorema di Noether ci dice in questo caso che: se l'azione è invariante per le trasformazioni che hanno indotto la variazione  $\delta\phi$  sui campi e la variazione  $\delta x$  sulle coordinate, allora la quantità:

$$j^\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial[\partial_\mu \phi]} \delta\phi + \mathcal{L} \delta x^\mu \quad (4.2.47)$$

che si può interpretare come una *corrente*, è conservata, cioè rispetta l'equazione di continuità:

$$\partial_\mu j^\mu = 0. \quad (4.2.48)$$

Naturalmente se ci mettiamo nel caso in cui abbiamo una simmetria interna, in cui  $\delta x^\mu = 0$ , ritroviamo il risultato (4.2.6). Possiamo riscrivere l'espressione della corrente (4.2.47) in funzione della variazione totale del campo  $\Delta\phi$ , anziché  $\delta\phi$ . Ricordiamo (4.2.34) e otteniamo una corrente:

$$j^\mu = \left( \mathcal{L} g^\mu_\nu - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial[\partial_\mu \phi]} \partial_\nu \phi \right) \delta x^\nu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial[\partial_\mu \phi]} \Delta\phi \quad (4.2.49)$$

$$= -T^\mu_\nu \delta x^\nu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial[\partial_\mu \phi]} \Delta\phi \quad (4.2.50)$$

dove individuiamo  $T^\mu_\nu$  tensore *energia-impulso* (o tensore canonico).

Possiamo dimostrare che anche in questo caso, ad ogni corrente (4.2.50)  $j_a^\mu$  è associata una carica, costante nel tempo, conservata:

$$Q_a \equiv \int d^3x j_a^0(\vec{x}, t) \quad (4.2.51)$$

in cui l'integrale è fatto su un volume infinito. Vediamo infatti che integrando (4.2.48), e fissando opportunamente le condizioni sul bordo in modo che i campi vadano a 0 all'infinito abbastanza rapidamente:

$$0 = \int d^3x \partial_\mu j_a^\mu = \int d^3x \left( \frac{\partial}{\partial t} j_a^0 - \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_a \right) \quad (4.2.52)$$

$$= \int d^3x \frac{\partial}{\partial t} j_a^0 - \underbrace{\int d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_a}_{\rightarrow 0} = \frac{\partial}{\partial t} \int d^3x j_a^0(\vec{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} Q_a \quad (4.2.53)$$

dunque che:

$$\frac{\partial Q_a}{\partial t} = 0 \quad (4.2.54)$$

ossia, che  $Q_a$  è costante nel tempo. Quindi anche in questo caso, del tutto generale, ad ogni simmetria corrisponde una carica conservata.

A proposito dell'osservazione che abbiamo fatto dopo aver derivato l'equazione di Eulero-Lagrange (4.1.7) riguardo la trasformazione canonica:

$$\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}' = \mathcal{L} + \partial_\mu \Lambda^\mu \quad (4.2.55)$$

possiamo aggiungere un paio di cose. Infatti, nonostante la trasformazione canonica non sembri cambiare la descrizione del sistema, ossia le equazioni del moto, ciò che cambia sono le correnti, di una quantità proporzionale a  $\delta\Lambda^\mu$ , e le quantità conservative. Anche le correnti  $j_a^\mu$  non sono univocamente definite, infatti si può sempre aggiungere un quadrivettore conservato tipo  $\partial_\rho t_a^{\rho\mu}$ . Il fatto che ci sia questa ambiguità che possiamo utilizzare è molto importante poiché le correnti e le cariche che si conservano, per via del teorema di Noether, devono essere quantità fisiche sensate e noi potremo renderle tali, nei casi in cui non lo sono, senza modificare le equazioni del moto aggiustando la lagrangiana e l'azione tramite una trasformazione canonica. Per quel che ci riguarda è anche importante che le correnti  $j^\mu$  abbiano le corrette proprietà di simmetria che ci aspettiamo dalla teoria.

Quello che faremo nelle prossime due sezioni sarà costruire una lagrangiana, e un'azione, che sia invariante per trasformazioni di Poincaré, in questo modo avremo che la teoria che troveremo sia già una teoria che rispetti gli assiomi della Relatività Speciale. Ovviamente potremo costruire più invarianti di quelli che vedremo, ma solo pochi saranno effettivamente rilevanti e significativi dal punto di vista fisico. Sarà importante per noi richiedere che l'azione  $S$  sia una quantità reale, poiché solo in questo modo riusciremo ad avere una teoria di campo in cui la probabilità sia conservata.

## 4.3 Equazioni di campo

In questa sezione non facciamo altro che applicare quello detto nel corso del capitolo, dunque, cominciamo a prendere i vari campi, di cui abbiamo analizzato le trasformazioni nel capitolo §3, a costruirsi un'azione e a derivarne le equazioni del moto, ossia le equazioni di campo. Cominceremo con i campi scalari  $\phi$  per poi passare ai campi spinoriali  $\psi$ .

### 4.3.1 Equazione per il campo scalare

La forma più generale per una densità di lagrangiana  $\mathcal{L}$ , che contiene solo un campo scalare  $\phi(x)$ , è:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi(x)\partial^\mu\phi(x) - V[\phi(x)] \quad (4.3.1)$$

in cui abbiamo un termine cinetico ed uno potenziale, che è una funzione scalare del campo  $\phi(x)$  e non delle sue derivate. Possiamo anche vedere che il termine cinetico presenta un'invarianza più forte rispetto  $V(\phi(x))$ , cioè appartiene ad un gruppo più restrittivo, grazie al fatto che è una derivata. Infatti, il termine  $\partial_\mu\phi(x)$  è invariante non solo per trasformazioni del gruppo di Poincaré, ma anche per qualsiasi traslazione globale del campo, ossia trasformazioni del tipo  $\phi \rightarrow \phi' = \phi + a$ , e anche per trasformazioni discrete,

come ad esempio trasformazioni di parità  $\phi \rightarrow -\phi$ . Inoltre, sapendo che l'azione  $S = \int d^4 \mathcal{L}$  dev'essere un numero reale, dobbiamo avere, in 4 dimensioni, la densità lagrangiana tale per cui  $[\mathcal{L}] = L^{-4}$  e di conseguenza il campo scalare  $\phi$  con dimensione  $L^{-1}$ , ricordando che  $[\partial_\mu] = L^{-1}$ .

Sul potenziale  $V[\phi(x)]$  non ci sono restrizioni in una teoria classica, ma ovviamente ci sono casi di maggior interesse rispetto altri, alcuni di essi sono:

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x) - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \quad (4.3.2)$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \quad (4.3.3)$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x) + \frac{m^4}{\lambda} \left[ \cos \frac{\sqrt{\lambda} \phi}{m} - 1 \right] \quad (4.3.4)$$

in cui la lagrangiana (4.3.2) descrive una *particella libera di massa m*, che possiamo notare essere invariante per una trasformazione di parità, la lagrangiana (4.3.3), che va bene in 4 dimensioni e in cui  $\lambda$  è adimensionale, descrive una *teoria self-interagente* e la lagrangiana (4.3.4), che va bene solo i 2 dimensioni, descrive una teoria di tipo *sine-Gordon*. Il fatto che  $m$  sia un parametro interpretabile come massa è giustificato dalle sue dimensioni (in unità naturali).

Possiamo prendere la lagrangiana generica per il campo scalare (4.3.1) ed inserirla nelle equazioni del moto (4.1.7), il che ci permette di ottenere:

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi = -\frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi} \quad (4.3.5)$$

che nel caso particolare della particella libera, in cui  $V = \frac{1}{2} m^2 \phi^2$ , diventa:

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi = 0 \quad (4.3.6)$$

che non è altro che:

$$(\square + m^2) \phi = 0 \quad (4.3.7)$$

che è l'**equazione di Klein-Gordon**. Vediamo a questo punto l'applicazione del teorema di Noether e dunque chi sono le correnti e le quantità conservate per diverse trasformazioni.

**1.** Vediamo, come primo caso, le traslazioni infinitesime nello spazio-tempo che non influiscono sulla forma funzionale del campo, quindi tali per cui  $\delta x^\mu = \varepsilon^\mu$  e  $\delta \phi = 0$ . In questo caso la corrente di Noether (4.2.50) è il tensore energia-impulso:

$$j_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} \mathcal{L} + \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \quad (4.3.8)$$

che è un tensore di rango 2, simmetrico per scambio  $\mu \leftrightarrow \nu$ . In particolare vediamo che:

$$T_{00} = -\mathcal{L} + \partial_0 \phi \partial_0 \phi = \frac{1}{2} \partial_0 \phi \partial_0 \phi + \frac{1}{2} \vec{\nabla} \phi \vec{\nabla} + V(\phi) = \mathcal{H} \quad (4.3.9)$$

in cui  $\mathcal{H}$  è la *densità di energia* e notiamo che  $T_{00}$  è una quantità definita positiva solo se  $V(\phi) > 0$ .

Lo stato fondamentale del campo è quello per cui  $T_{00}$  è il minimo possibile, quindi si raggiunge nel caso di campo statico (cioè quando  $\partial_\mu \phi_c = 0 \forall \mu$ ) e coincide con il minimo del potenziale  $V(\phi_c) = 0$ .

La carica conservata è data da:

$$P_\mu = \int d^3x j_\mu 0 = \int d^3x (-g_{\mu 0} \mathcal{L} + \partial_0 \phi \partial_\mu \phi). \quad (4.3.10)$$

Notiamo anche che il teorema di Noether ci permette di superare il problema legato alle energie negative che trovavamo quando cercavamo di estendere l'equazione di Schrodinger al caso relativistico. L'equazione che ottenevamo (1.2.11) era formalmente identica all'equazione di (4.3.7), ma la sua interpretazione come equazione d'onda era completamente fallimentare. Il problema che riscontravamo era che non veniva conservata la probabilità, ma ora siamo al sicuro perché c'è il teorema di Noether che ci protegge e ci garantisce che una quantità conservata c'è.

Questo breve discorso sui parametri della trasformazione lo si sarebbe potuto fare prima, ma un po' buttato per aria non avendo ancora necessità di essere utilizzato. Per avere delle espressioni di correnti e cariche belle, dobbiamo in qualche modo eliminare il parametero, un'operazione simile a quando facevamo trasformazioni in Teoria dei Gruppi nel capitolo §2 quando riscrivemmo le cose per riuscire a raccogliere i parametri e individuare i generatori. Per scrivere le correnti di Noether e le cariche conservative in forma più fruibile, e in una forma più generalizzabile anche a trasformazioni finite, è conveniente esprimere  $\delta x^\mu$  e  $\delta \phi$  in funzione dei parametri infinitesimi della trasformazione:

$$\delta x^\rho = \frac{\partial x^\rho}{\partial \omega^a} \delta \omega^a \quad (4.3.11)$$

$$\delta \phi = \frac{\partial \phi}{\partial \omega^a} \delta \omega^a \quad (4.3.12)$$

dove  $a$  enumera i parametri della trasformazione. Per pure traslazioni, in cui abbiamo  $\delta \phi = 0$  e i parametri  $\varepsilon^\mu$ , le relazioni (4.3.12) diventano:

$$\delta x^\mu = \varepsilon^\mu \implies \frac{\partial x^\mu}{\partial \omega^\rho} \rightarrow \frac{\partial \varepsilon^\mu}{\partial \varepsilon^\rho} = g^\mu_\rho. \quad (4.3.13)$$

Notiamo che questa operazione di riscrittura introduce un'indice in più nell'oggetto di partenza. Ricordando che  $g^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu$ , ci rendiamo effettivamente conto che, nel caso delle traslazioni, la corrente  $j^\mu$  da quadrivettore diventa un tensore di rango 2, che sappiamo essere, non a caso (visto che vale  $\varepsilon^\mu \rightarrow \partial^\mu = iP^\mu$ ), il tensore energia-impulso.

**2.** Guardiamo ora, il caso leggermente più complicato, delle trasformazioni di Lorentz. Consideriamo trasformazioni, di Lorentz, che influiscono solo sulle coordinate spazio-temporali, ma che lasciano invariata la forma di  $\phi$ , e per cui abbiamo  $\delta\phi = 0$  e  $\delta x^\mu = \varepsilon^{\mu\nu}x_\nu$ . In questo secondo caso la corrente conservata diventa un oggetto con 3 indici. Infatti, come nel caso precedente, dobbiamo scrivere  $\delta x^\mu$  in funzione del parametro infinitesimo della trasformazione  $\varepsilon^{\mu\nu}$ , per dare una forma più pratica alla corrente di Noether. In questo caso in parametro della trasformazione ha due indici e sono completamente antisimmetrici (quindi  $\varepsilon^{\mu\nu} = 0$  se  $\mu = \nu$  e in generale  $\varepsilon^{\mu\nu} + \varepsilon^{\nu\mu} = 0$ ):

$$\delta x^\mu = \varepsilon^{\mu\nu}x_\nu \quad , \quad \frac{\partial x^\mu}{\partial \omega^{\rho\sigma}} \quad (4.3.14)$$

in cui abbiamo<sup>3</sup>:

$$\frac{\partial(\delta x^\mu)}{\partial \varepsilon^{\rho\sigma}} = \frac{\partial(\varepsilon^{\mu\nu}x_\nu)}{\partial \varepsilon^{\rho\sigma}} = \frac{\partial(g^\mu_\rho g^\nu_\sigma \varepsilon^{\rho\sigma})}{\partial \varepsilon^{\rho\sigma}} \quad (4.3.15)$$

$$= \frac{\partial [\varepsilon^{\rho\sigma} \frac{1}{2} (g^\mu_\rho g^\nu_\sigma x_\nu - g^\mu_\sigma g^\nu_\rho x_\nu)]}{\partial \varepsilon^{\rho\sigma}} \quad (4.3.16)$$

$$= \frac{1}{2} (g^\mu_\rho x_\sigma - g^\mu_\sigma x_\rho) \quad (4.3.17)$$

La corrente di Noether  $j_{\mu\nu\rho}$  si scrive:

$$(-g_{\mu\lambda}\mathcal{L} + \partial_\mu\phi\partial_\lambda\phi) (g^\mu_\rho x_\sigma - g^\mu_\sigma x_\rho) = j_{\mu\nu}x_\rho - j_{\mu\rho}x_\nu \quad (4.3.18)$$

e le cariche conservative sono, naturalmente, i generatori del gruppo di Lorentz:

$$M_{\nu\rho} = \int d^3x j_{0\nu\rho} = \int d^3x (j_{0\nu}x_\rho - j_{0\rho}x_\nu) \quad (4.3.19)$$

Un'altro importante esempio di applicazione del teorema di Noether, per trasformazioni che non sono necessariamente simmetrie di  $S$  (cioè che non la lasciano invariata) è dato dalle trasformazioni di dilatazione, che sono trasformazioni del tipo:

$$\delta x^\mu = \alpha x^\mu \quad , \quad \delta\phi = -\alpha\phi \quad (4.3.20)$$

e in cui si vede che il termine cinetico è invariante, ma il termine di massa no poiché contiene un parametro dimensionale. Noi non tratteremo questo tipo di trasformazioni, ma è presente nelle pagine 31 e 32 del Ramond [8].

### 4.3.2 Equazione per il campo spinoriale

Continuiamo, e terminiamo, il capitolo analizzando l'equazione di campo, le correnti di Noether e le cariche conservative nel caso di un campo spinoriale,

---

<sup>3</sup>Nota l'antisimmetrizzazione dell'oggetto  $\varepsilon^{\mu\nu} = g^\mu_\rho g^\nu_\sigma \varepsilon^{\rho\sigma}$  negli indici  $\rho$  e  $\sigma$ .

come quelli analizzati nel capitolo §3.

Per scrivere l'azione di una campo spinoriale partiamo dagli invarianti:

$$\mathcal{L}_L = \frac{1}{2} \psi_L^\dagger \sigma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi_L \quad , \quad \mathcal{L}_R = \frac{1}{2} \psi_R^\dagger \bar{\sigma}^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi_R \quad (4.3.21)$$

che possiamo notare  $\mathcal{L}_L^* = \mathcal{L}_L$  e  $\mathcal{L}_R^* = \mathcal{L}_R$ . Ricordiamo che un'invariante per i campi spinoriali lo scrivevamo, nel capitolo §3, sempre utilizzando una matrice  $\sigma^\mu$ , duqnue con un indice di Lorentz; per questo motivo nel termine cinetico metteremo solo un termine di derivata  $\partial_\mu$  che contrae l'altro indice già presente. Il fatto che  $\mathcal{L}$  contenga solo derivate prime lo ritroveremo anche nell'equazione del moto, che conterrà solo derivate prime. Possiamo scrivere più convenientemente il termine cinetico:

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}}^{\text{cin}} = \mathcal{L}_L^{\text{cin}} + \mathcal{L}_R^{\text{cin}} = \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi \quad (4.3.22)$$

o equivalentemente:

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}}^{\text{cin}} = \frac{1}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi. \quad (4.3.23)$$

L'invariante (4.3.22) è il più semplice che possiamo costruire includendo la derivata del campo spinoriale, e sarà lui che costruirà il nostro termine cinetico. Il termine (4.3.22) è invariante per trasformazioni conformi<sup>4</sup>, così come lo era il termine cinetico della  $\mathcal{L}$  di Klein-Gordon.

Un'altra invarianza di (4.3.22) è per shift (traslazioni) costanti nei campi  $\psi$ :

$$\psi \rightarrow \psi + \alpha \quad (4.3.24)$$

con  $\alpha$  indipendente da  $x^\mu$ .

Il termine cinetico (4.3.22) ha però un'invarianza molto importante, ovvero, l'*invarianza di fase* (globali, ossia che non dipendono da  $x$ ). Infatti, essendo i campi  $\psi_L$  e  $\psi_R$  (e di conseguenza  $\psi$  definito come (3.3.59)) complessi, allora  $\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi$  è un'invariante per trasformazioni:

$$\psi \rightarrow e^{i\alpha} \psi \quad \text{fase costante} \quad (4.3.25)$$

$$\psi \rightarrow e^{i\beta \gamma_5} \psi \quad \text{chiriale} \quad (4.3.26)$$

con  $\alpha, \beta$  indipendenti da  $x^\mu$ . Le correnti di Noether corrispondenti alle trasformazione di fase e chiriali sono:

$$j^\mu = i\bar{\psi} \gamma^\mu \psi = i\psi_L^\dagger \sigma^\mu \psi_L + i\psi_R^\dagger \bar{\sigma}^\mu \psi_R \quad (4.3.27)$$

$$j_5^\mu = i\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi = i\psi_L^\dagger \sigma^\mu \psi_L - i\psi_R^\dagger \bar{\sigma}^\mu \psi_R \quad (4.3.28)$$

---

<sup>4</sup>Trasformazioni conformi sono trasformazioni che preservano gli angoli (come ad esempio le trasformazioni di scala) e variano la metrica in modo locale, del tipo  $g^{\mu\nu} \rightarrow \Omega(x) g^{\mu\nu}$ , e contengono le trasformazioni di Poincaré e le dilatazioni.

possiamo notare che il fattore  $i$  è il risultato della "rimozione" dell'elemento infinitesimo della trasformazione:

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{i\alpha} \psi \sim (1 + i\alpha + \dots) \psi \implies \delta\psi = i\alpha\psi \implies \delta \rightarrow i. \quad (4.3.29)$$

Le cariche conservative saranno ovviamente date da:

$$Q = i \int d^3x \bar{\psi} \gamma^0 \psi = i \int d^3x (\psi_L^\dagger \psi_L + \psi_R^\dagger \psi_R) \quad (4.3.30)$$

$$Q = i \int d^3x \bar{\psi} \gamma^0 \gamma^5 \psi = i \int d^3x (\psi_L^\dagger \psi_L - \psi_R^\dagger \psi_R). \quad (4.3.31)$$

Ovviamente, si possono costruire anche i termini di massa<sup>5</sup> per la  $\mathcal{L}$  di Dirac, costruendo altri invarianti molto semplici, che sono termini quadratici nei campi  $\psi_R$  e  $\psi_L$  senza derivate. Scriviamo:

$$\mathcal{L}_D^m = im\bar{\psi}\psi = im\psi^\dagger\gamma^0\psi \quad (4.3.32)$$

che si potrebbe anche riscrivere come:

$$\mathcal{L}_D^m = im(\psi_L^\dagger \psi_R + \psi_R^\dagger \psi_L) \quad (4.3.33)$$

e in cui notiamo che la  $i$  è essenziale al fine di rendere il termine reale (ricordiamo che  $\psi_R = \sigma^2 \psi_L^*$ ). Ovviamente c'è anche un'altro termine analogo, ma legato a  $\gamma^5$ :

$$\mathcal{L}_{D5}^m = m\bar{\psi}\gamma^5\psi = -m(\psi_L^\dagger \psi_R - \psi_R^\dagger \psi_L). \quad (4.3.34)$$

I due termini (4.3.32) e (4.3.34) sono invarianti per trasformazione di fase globale:

$$\psi \longrightarrow e^{i\alpha}\psi \quad (4.3.35)$$

per cui vale:

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0 = \psi^\dagger e^{i\alpha} \gamma^0 = e^{-i\alpha} \bar{\psi}. \quad (4.3.36)$$

Attenzione però che  $\mathcal{L}_D^m$  (4.3.32) non è invariante per trasformazioni chiriali (4.3.26) per cui si ha:

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0 = \psi^\dagger e^{-i\beta\gamma^5} \gamma^0 \neq \psi^\dagger \gamma^0 e^{-i\beta\gamma^5} \implies \bar{\psi} = \bar{\psi} e^{i\beta\gamma_5} \quad (4.3.37)$$

poiché  $\gamma^0$  non commuta con  $\gamma^5$ , bensì anti-commuta, ossia  $\{\gamma^0, \gamma^5\} = 0$ .

Facciamo attenzione che non è impossibile costruire termini quadratici senza derivate e che siano invarianti chiriali, il problema è che la loro struttura è più involuta. Puoi vedere pagina 36 del Ramond [8]. Noi non utilizzeremo il termine chiriale nella nostra teoria. Il termine simmetrico per

---

<sup>5</sup>Diciamo di massa per via delle discussioni dimensionali che si possono fare.

chirialità viene utilizzato per i sistemi a massa nulla, che sono un caso particolare poiché utilizzando il termine chiriale  $\mathcal{L}_{D5}$  si giunge ad un'equazione del moto disaccoppiata per i termini left e right. Questa si chiama equazione di Weyl e si può dire che è proprio la massa  $m$  che accoppia le parti left e right di uno spinore.

Ovviamente, potremmo continuare a creare nuovi invarianti che contengano più di due campi spinoriali. I termini che potremmo fare, però, avrebbero dimensioni diverse da  $L^{-4}$ , sarebbero da  $L^{-6}$  in su, e di conseguenza ci costringerebbero ad introdurre delle costanti dimensionali per ristabilire le giuste dimensioni di  $\mathcal{L}$ , e questo potrebbe portare a dei problemi di interpretazione dei risultati.

Ad esempio, anche termini del tipo  $\partial_\mu \bar{\psi} \partial^\mu \psi$  sarebbero leciti, ma come avremo modo di vedere, essi violano la connessione di spin e statistica (teorie di gauge).

Possiamo concludere il capitolo determinando l'equazione del moto utilizzando l'equazione di Eulero-Lagrange. Abbiamo la lagrangiana di Dirac:

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi + im\bar{\psi} \psi \quad (4.3.38)$$

riscrivibile anche come:

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi \quad (4.3.39)$$

e facendo variare  $\psi$  e  $\bar{\psi}$  indipendentemente, le equazioni di Eulero-Lagrange (4.1.7) ci danno l'equazione del moto:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0 \quad (4.3.40)$$

che è l'**equazione di Dirac**, che rappresenta l'equazione del moto che descrive la dinamica di una particella massiva, di massa  $m$ , di spin 1/2, elettricamente carica e libera, poiché non abbiamo inserito un termine di interazione all'interno di  $\mathcal{L}_D$ . Faremo teoria interagente alla fine del corso e nel corso di Fondamenti.

L'equazione (4.3.40) esce fuori anche se utilizziamo Eulero-Lagrange con i campi  $\bar{\psi}$  (o  $\psi^\dagger$ ), però, ci esce fuori l'equazione hermitiana-coniugata, del tutto equivalente:

$$-i\partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu - m\bar{\psi} = 0 \quad (4.3.41)$$

nel caso applicassimo Eulero-Lagrange ai campi  $\psi \partial_\mu \psi$ .



# Capitolo 5

## L'equazione di Dirac

Abbiamo derivato nel capitolo precedente le equazioni di campo per campi scalari (4.3.7) e campi spinoriali (4.3.40). Vediamo ora, non solo l'interpretazione che possiamo dare dell'equazione di Dirac (4.3.40), ma tutte le proprietà e caratteristiche che ha. L'equazione spinoriale è particolarmente importante poiché rappresenta particelle fermioniche massive, che sono quelle con cui si ha maggiormente a che fare. Nel capitolo utilizzeremo molto le matrici di Dirac  $\gamma^\mu$ , per alcune proprietà nella rappresentazione più conveniente da utilizzare possiamo vedere l'Appendice E, che in qualche modo sarà fondamentale per i nostri studi. Il riferimento per questo capitolo è il Peskin e Schroeder [7].

### 5.1 Covarianza dell'equazione di Dirac

Riproponiamo l'equazione di Dirac per comodità:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0. \quad (5.1.1)$$

L'equazione (5.1.1), come tutte le leggi della Fisica, dev'essere indipendente dal sistema di riferimento in cui il sistema viene osservato. Possiamo mostrare che l'equazione (5.1.1) è invariante per trasformazioni di Lorentz (TL), ovvero che, l'equazione ha le stesse invarianze della lagrangiana. Gli spinori  $\psi(x)$ , nella rappresentazione quadridimensionale dell'algebra di Dirac, sono:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \quad (5.1.2)$$

che utilizziamo sono rappresentazioni di spin 1/2 del gruppo di Lorentz, ricordiamo la sezione §2.4. Per studiare come si comporta l'equazione di Dirac sotto TL cominciamo a vedere come si comporti uno spinore  $\psi$ . Per trasformazioni di Lorentz gli spinori (5.1.2) si trasformano come:

$$\psi \xrightarrow{\text{T.L.}} \psi' = e^{-\frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}M^{\rho\sigma}}\psi \quad (5.1.3)$$

dove  $M^{\rho\sigma}$  sono i generatori del gruppo di Lorentz:

$$M_{\rho\sigma} = i(x_\rho \partial_\sigma - x_\sigma \partial_\rho) \quad (5.1.4)$$

e possiamo definire:

$$S(\Lambda) = e^{-\frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma} M^{\rho\sigma}}. \quad (5.1.5)$$

così che:

$$\psi \xrightarrow{\text{T.L.}} \psi' = S(\Lambda)\psi. \quad (5.1.6)$$

dove possiamo interpretare  $S$  come una matrice 4x4 che opera una trasformazione di Lorentz sugli spinori, ed essendo gli spinori di Dirac (5.1.2) ottenuti da due spinori di  $SU(2)$  (ricordiamo che  $\psi_L \in [(\frac{1}{2}, 0)]$  e  $\psi_R \in [(0, \frac{1}{2})]$ ), allora  $S$  dovrà essere in qualche modo ottenuta, e quindi legata, alle matrici di Pauli (che ricordiamo essere i generatori di  $SU(2)$ ). Infatti abbiamo:

$$M^{0i} = -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & -\sigma_k \end{pmatrix}, \quad M^{ij} = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix} \quad (5.1.7)$$

in cui  $M^{0i}$  sono i generatori dei boost, sono matrici non hermitiane il che rende la rappresentazione non unitaria (ciò è legato anche al fatto che il gruppo non sia compatto), mentre  $M^{ij}$  sono i generatori delle rotazioni e sono semplicemente le matrici di Pauli replicate due volte. Ricordiamo che, nel caso specifico in cui prendiamo la rappresentazione irriducibile di  $SU(2)$  abbiamo:

$$\psi'_L = \Lambda_L \psi_L = e^{i\vec{\sigma}/2 \cdot (\vec{\omega} - i\vec{\nu})} \psi_L \quad (5.1.8)$$

$$\psi'_R = \Lambda_R \psi_R = e^{i\vec{\sigma}/2 \cdot (\vec{\omega} + i\vec{\nu})} \psi_R. \quad (5.1.9)$$

Vediamo come si comporta l'equazione di Dirac (5.1.1) sotto una generica trasformazione di Lorentz  $S(\Lambda)$  (ricorda che per le matrici  $\gamma^\mu$  sono invarianti di Lorentz):

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x) = 0 \xrightarrow{\text{T.L.}} (i\gamma^\mu \partial'_\mu - m) \psi'(x') = 0 \quad (5.1.10)$$

$$(i\gamma^\mu \Lambda_\mu^\nu \partial_\nu - m) S(\Lambda) \psi(x) = 0 \quad (5.1.11)$$

in cui abbiamo utilizzato il fatto che  $\partial'_\mu = \Lambda_\mu^\nu \partial_\nu$ . Possiamo scrivere anche che  $\Lambda_\mu^\nu = (\Lambda^{-1})_\mu^\nu$ , e moltiplicare a sinistra per  $S^{-1}(\Lambda)$ , in questo modo la trasformazione di Lorentz porta a:

$$S^{-1}(\Lambda) (i\gamma^\mu (\Lambda_\mu^\nu)^{-1} \partial_\nu - m) S(\Lambda) \psi(x) = 0 \quad (5.1.12)$$

$$(iS^{-1}(\Lambda) \gamma^\mu S(\Lambda) (\Lambda_\mu^\nu)^{-1} \partial_\nu - m) \psi(x) = 0 \quad (5.1.13)$$

Notiamo che possiamo far filtrare dentro  $S(\Lambda)$  e scambiare posto con la derivata  $\partial_\mu$  poiché la matrice vive in uno spazio governato dall'algebra di

Clifford, in cui ci stanno gli spinori bidimensionali, (motivo per cui quando incontriamo  $\gamma^\mu$  ci fermiamo) e non gli interessa cosa fanno gli operatori che operano nello spazio delle coordinate ( $\partial_\mu$ ), commutando con essi. Dall'equazione (5.1.13) possiamo vedere che affinché l'equazione di Dirac sia invariante sotto trasformazioni di Lorentz deve valere la condizione:

$$S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda) = \gamma^\rho \Lambda^\mu_\rho \quad (5.1.14)$$

che è una condizione analoga a quella trovata per la Relatività Speciale (2.4.11), che però ora è una relazione che vale per l'operatore che trasforma il campo. In questo modo abbiamo:

$$(i\gamma^\rho \underbrace{\Lambda^\mu_\rho (\Lambda^\nu_\mu)^{-1}}_{\delta^\nu_\rho} \partial_\nu - m) \psi(x) = 0 \quad (5.1.15)$$

$$(i\gamma^\rho \delta^\nu_\rho \partial_\nu - m) \psi(x) = 0 \quad (5.1.16)$$

$$(i\gamma^\nu \partial_\nu - m) \psi(x) = 0 \quad (5.1.17)$$

ossia l'equazione (5.1.1).

## 5.2 Comportamento dell'equazione di Dirac per trasformazioni di parità

Le particelle e i sistemi, descritti da (5.1.1), che studiamo in Fisica ci dicono, oltre al fatto che sono invarianti di Lorentz, anche che sono invarianti per trasformazioni di parità. Vediamo in questa sezione il comportamento dell'equazione di Dirac per trasformazioni di parità, ovvero tramite inversioni spaziali, che trasformano  $x^\mu$  come:

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = (x^0, -\vec{x}). \quad (5.2.1)$$

Vediamo come si trasforma il campo spinoriale  $\psi$  in seguito all'inversione spaziale. Scriviamo genericamente:

$$\psi \xrightarrow{P} \psi'(x') = S_p \psi(x) \quad (5.2.2)$$

e la trasformazione dell'equazione di Dirac:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x) = 0 \xrightarrow{P} (i\gamma^0 \partial_0 - i\gamma^i \partial_i - m) S_p \psi(x) = 0 \quad (5.2.3)$$

che se moltiplichiamo a sinistra per la trasformazione  $S_p^{-1}$  otteniamo:

$$(iS_p^{-1} \gamma^0 S_p \partial_0 - iS_p^{-1} \gamma^i S_p \partial_i - m) \psi(x) = 0. \quad (5.2.4)$$

Possiamo vedere che l'equazione di Dirac è invariante per inversione spaziale solo se valgono:

$$S_p^{-1} \gamma^0 S_p = \gamma^0 \quad , \quad S_p^{-1} \gamma^i S_p = -\gamma^i \quad (5.2.5)$$

che possiamo anche scrivere come:

$$S_p = \eta_p \gamma^0 \quad (5.2.6)$$

in cui  $\eta_p$  è una costante complessa.

Possiamo facilmente vedere che  $\psi^\dagger \psi$  è invariante per inversione spaziale a patto che  $|\eta_p| = 1$ , ossia che  $\eta_p$  sia una pura fase  $e^{i\varphi}$  con  $\varphi \in \mathbb{R}$ . Infatti, abbiamo:

$$\psi^\dagger(t, \vec{x}) \psi(t, \vec{x}) \xrightarrow{\text{P.}} \psi'^\dagger(t, \vec{x}') \psi'(t, \vec{x}') \quad (5.2.7)$$

$$= [\eta_p \gamma^0 \psi(t, \vec{x})]^\dagger [\eta_p \gamma^0 \psi(t, \vec{x})] \quad (5.2.8)$$

$$= |\eta_p|^2 \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \psi \quad (5.2.9)$$

$$= |\eta_p|^2 \psi^\dagger \psi \quad (5.2.10)$$

che è esattamente  $\psi^\dagger \psi$  solo se  $|\eta_p| = 1$ . Il fattore di fase  $\eta_p$  dipende dalla natura del campo fermionico  $\psi$  di spin 1/2 ed è chiamato **parità intrinseca**.

### 5.3 Connessione equazione di Dirac e di Klein Gordon

Dimostriamo in questa sezione che l'equazione di Dirac (5.1.2) implica l'equazione di Klein-Gordon (4.3.7). Moltiplichiamo l'equazione (5.1.1) per la sua complessa coniugata (del termine tra parentesi):

$$(-i\gamma^\mu \partial_\mu - m)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0 \quad (5.3.1)$$

il che è una somma per differenza:

$$(\gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\mu \partial_\nu + m^2)\psi = 0 \quad (5.3.2)$$

possiamo riscrivere:

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\mu \partial_\nu = \frac{1}{2} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \partial_\mu \partial_\nu \quad (5.3.3)$$

poiché  $\gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\mu \partial_\nu$  è completamente simmetrico e possiamo riscriverlo simmetrizzato. Ricordando l'algebra di Clifford  $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$  otteniamo:

$$\left( \frac{1}{2} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \partial_\mu \partial_\nu + m^2 \right) \psi = 0 \quad (5.3.4)$$

$$(\partial_\mu \partial_\nu + m^2) \psi = 0 \quad (5.3.5)$$

ossia l'equazione di Klein-Gordon (4.3.7). Però l'equazione di Dirac sappiamo riguardare uno spinore a 4 componenti, e il fatto che l'equazione (5.1.1) sia collegata con l'equazione di Klein-Gordon (4.3.7) ci dice che ognuna delle 4 componenti di  $\psi$  è un campo scalare descritto da (4.3.7).

## 5.4 Forme bilineari di spinori di Dirac

Per questa sezione è fondamentale aver prima visto la sezione §E.6 nell'Appendice E. In tale appendice vediamo quali sono le matrici, che chiamiamo solitamente  $\Gamma^a$  e che formano una base, che ci permettono di scrivere combinazioni (forme bilineari), del tipo  $\bar{\psi}\Gamma^a\psi$ , con ben definite proprietà di trasformazione sotto il gruppo di Lorentz. Le matrici che abbiamo visto sono:

$\mathbb{1}$	(1 matrice)	scalare
$\gamma^\mu$	(4 matrice)	vettore
$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$	(6 matrici antisimm.)	tensore di rango 2
$\gamma^\mu\gamma^5$	(4 matrici)	pseudo-vettore
$\gamma^5$	(1 matrice)	pseudo-scalare

e il set completo di forme bilineari è di conseguenza:

$\bar{\psi}\psi$	(1)	scalare
$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$	(4)	vettore (o vettore polare)
$\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$	(6)	tensore di rango 2
$\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$	(4)	pseudo-vettore (o vettore assiale)
$\bar{\psi}\gamma^5\psi$	(1)	pseudo-scalare.

Però, detta così sembra un po' un atto di fede, dobbiamo effettivamente verificare che le quantità,  $\bar{\psi}\Gamma^a\psi$  che abbiamo elencato sopra, siano effettivamente oggetti con proprietà di trasformazione ben definiti. Prima di vedere le proprietà di trasformazione delle forme bilineari che abbiamo scritto è necessario capire come trasformi lo spinore  $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$  sotto trasformazioni di Lorentz.

### 5.4.1 Trasformazione dello spinore $\bar{\psi}$

Il motivo per cui avevamo introdotto la matrice  $\gamma^0$  e di conseguenza lo spinore  $\bar{\psi}$ , era che ci eravamo accorti che la quantità  $\psi^\dagger\psi$  non fosse un'invariante per trasformazioni di Lorentz. Infatti, utilizzando le cose imparate nella sezione §E.5 nell'Appendice E possiamo notare come  $\psi^\dagger\psi$  si trasformi per trasformazioni di Lorentz. Abbiamo:

$$\psi^\dagger\psi \longrightarrow \psi'^\dagger\psi' = \psi^\dagger S^\dagger(\Lambda)S(\Lambda)\psi \quad (5.4.1)$$

se le matrici dei boost fossero unitarie (delle rotazioni lo sono)  $S^\dagger S$  allora sarebbe uguale a  $\mathbb{1}$ , però sappiamo bene che  $S(\Lambda)$  non è unitaria poiché i generatori  $M^{0i}$  non sono hermitiani.

Già nel capitolo §3 non ci siamo disperati e abbiamo comunque creato uno spinore  $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$  tale per cui  $\bar{\psi}\psi$  fosse un'invariante. Infatti, preso  $\bar{\psi}$  abbiamo che lui si trasforma come:

$$\begin{aligned} \bar{\psi} &\xrightarrow{\text{T.L.}} \bar{\psi}' = (\psi^\dagger \gamma^0)' = (\psi^\dagger)' \gamma^0 = \psi^\dagger S^\dagger(\Lambda) \gamma^0 = \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^0 S^\dagger(\Lambda) \gamma^0 \quad (5.4.2) \\ &= \bar{\psi} \gamma^0 S^\dagger(\Lambda) \gamma^0 \end{aligned} \quad (5.4.3)$$

ora, per semplicità consideriamo una trasformazione infinitesima (riguarda la relazione (E.5.3) nella sezione §E.5) del tipo:

$$S(\Lambda) = e^{-\frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}} \sim \mathbb{1} - \frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} \quad (5.4.4)$$

dove gli  $\omega_{\mu\nu}$  sono oggetti completamente antisimmetrici e per cui vale  $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$ . Prendendo questa rappresentazione della  $S(\Lambda)$  (facendone il complesso coniugato) abbiamo che  $\bar{\psi}$  si trasforma come:

$$\bar{\psi} \xrightarrow{\text{T.L.}} \bar{\psi}' = \bar{\psi} \gamma^0 \left( \mathbb{1} + \frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}(\sigma^{\mu\nu})^\dagger \right) \gamma^0 \quad (5.4.5)$$

$$\bar{\psi} \left( (\gamma^0)^2 + \frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\gamma^0(\sigma^{\mu\nu})^\dagger\gamma^0 \right) \quad (5.4.6)$$

$$\bar{\psi} \left( \mathbb{1} + \frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\gamma^0(\sigma^{\mu\nu})^\dagger\gamma^0 \right) \quad (5.4.7)$$

in cui abbiamo il termine:

$$\gamma^0(\sigma^{\mu\nu})^\dagger\gamma^0 = -\frac{i}{2}\gamma^0 [(\gamma^\nu)^\dagger, (\gamma^\mu)^\dagger]\gamma^0 \quad (5.4.8)$$

$$= -\frac{i}{2}\gamma^0 [\gamma^0\gamma^\nu\gamma^0, \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0]\gamma^0 \quad (5.4.9)$$

$$= -\frac{i}{2}\gamma^0 (\gamma^0\gamma^\nu\gamma^0\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 + \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0\gamma^0\gamma^\nu\gamma^0)\gamma^0 \quad (5.4.10)$$

$$= -\frac{i}{2}(\gamma^0)^2 [\gamma^\nu, \gamma^\mu](\gamma^0)^2 \quad (5.4.11)$$

$$= -\sigma^{\nu\mu} \quad (5.4.12)$$

$$= \sigma^{\mu\nu} \quad (5.4.13)$$

dove abbiamo utilizzato la definizione (E.5.1), le proprietà di hermeticità e commutazione delle  $\gamma^\mu$  e il fatto che  $\sigma^{\mu\nu}$  sia completamente antisimmetrica. Utilizzando quello imparato, la relazione (5.4.13), nella trasformazione (5.4.7) abbiamo finalmente:

$$\bar{\psi} \xrightarrow{\text{T.L.}} \bar{\psi}' = \bar{\psi} \left( \mathbb{1} + \frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} \right) \quad (5.4.14)$$

che per una trasformazione finita è:

$$\bar{\psi} \xrightarrow{\text{T.L.}} \bar{\psi}' = \bar{\psi} e^{+\frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}} = \bar{\psi} S^{-1}(\Lambda) \quad (5.4.15)$$

che ci dice che  $\bar{\psi}$  si trasforma, sotto trasformazioni di Lorentz, con  $S^{-1}(\Lambda)$ . Ci saremmo potuti aspettare che in (5.4.3) il termine  $\gamma^0 S^\dagger(\Lambda) \gamma^0$  sarebbe diventato  $S^{-1}(\Lambda)$ , poiché è l'unico modo per cui  $\bar{\psi}\psi$  sia un invariante di Lorentz, ricordando che  $\psi \rightarrow S(\Lambda)\psi$ . La relazione importante da ricordare è:

$$S^{-1}(\Lambda) = \gamma^0 S^\dagger(\Lambda) \gamma^0. \quad (5.4.16)$$

#### 5.4.2 Proprietà di trasformazione delle forme bilineari

In questa sottosezione vediamo quali siano effettivamente le proprietà di trasformazione, sotto trasformazioni di Lorentz, degli oggetti indicati all'inizio della sezione §5.4.

Cominciamo a prendere  $\bar{\psi}\psi$ . Imparato come trasforma  $\bar{\psi}$  possiamo facilmente vedere che  $\bar{\psi}\psi$  è un'invariante di Lorentz:

$$\bar{\psi}\psi \xrightarrow{\text{T.L.}} \psi^\dagger S^\dagger(\Lambda) \gamma^0 S(\Lambda) \psi \quad (5.4.17)$$

che, utilizzando quello visto poco fa<sup>1</sup>:

$$\bar{\psi} \xrightarrow{\text{T.L.}} \bar{\psi} S^{-1}(\Lambda). \quad (5.4.18)$$

porta a:

$$\bar{\psi}\psi \xrightarrow{\text{T.L.}} \bar{\psi} S^{-1}(\Lambda) S(\Lambda) \psi = \bar{\psi}\psi \quad (5.4.19)$$

ovvero, abbiamo visto che  $\bar{\psi}\psi$  è invariante sotto trasformazioni di Lorentz, cosa che dopotutto avevamo già visto studiando le proprietà delle rappresentazioni spinoriali di  $SU(2)$  con gli spinori di Weyl.

---

<sup>1</sup>nel caso delle rotazioni abbiamo  $M^{ij} = (M^{ij})^\dagger$  e  $\gamma^0$  ed  $M^{ij}$  commutano (potremmo verificarlo con i calcoli esplicativi conoscendo le espressioni matriciali di entrambi), con i boost però,  $M^{0j} = -(M^{0j})^\dagger$ , e  $\gamma^0$  anticommute (anche in questo caso sarebbe verificabile) con  $M^{0j}$ , il che rimuove il segno negativo che usciva dall'hermitiano di  $M^{0j}$

In modo analogo, preso  $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ , si può vedere che è un vettore di Lorentz. Infatti si ha:

$$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \xrightarrow{\text{T.L.}} \bar{\psi}'\gamma^\mu\psi' \quad (5.4.20)$$

$$\bar{\psi}^\dagger\gamma^0S^\dagger(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda)\psi \quad (5.4.21)$$

$$\bar{\psi}S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda)\psi \quad (5.4.22)$$

$$\text{ricordando 5.1.14} \quad (5.4.23)$$

$$\bar{\psi}\gamma^\rho\Lambda_\rho^\mu\psi \quad (5.4.24)$$

$$\bar{\psi}\gamma^\rho(\Lambda^{-1})_\rho^\mu\psi \quad (5.4.25)$$

$$(\Lambda_\rho^\mu)\bar{\psi}\gamma^\rho\psi \quad (5.4.26)$$

che è la tipica trasformazione di un quadrivettore di Lorentz, che appunto si trasforma con la matrice  $\Lambda_\rho^\mu$ . Sarà importante l'aver notato questa cosa poiché  $\bar{\psi}\gamma^\mu$  è una corrente di Noether.

Notiamo anche, che  $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$  si tratta di un quadrivettore polare, nel senso che, per trasformazioni di parità si ha:

$$\bar{\psi}\gamma^0\psi \xrightarrow{\text{P.}} \bar{\psi}\gamma^0\psi \quad (5.4.27)$$

$$\bar{\psi}\gamma^i\psi \xrightarrow{\text{P.}} -\bar{\psi}\gamma^i\psi \quad (5.4.28)$$

che è la normale relazione di parità per i vettori polari, in cui la componente temporale resta invariata e cambiano di segno tutte le componenti spaziali.

L'oggetto  $\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$  si trasforma come:

$$\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi \xrightarrow{\text{T.L.}} \bar{\psi}'\frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\psi' \quad (5.4.29)$$

$$\frac{i}{2}\bar{\psi}S^{-1}(\Lambda)(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)S(\Lambda)\psi \quad (5.4.30)$$

abbiamo due termini del tipo  $S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu\gamma^\nu S(\Lambda)$ , ma sappiamo che ciascuna matrice  $\gamma^\mu$  si trasforma come un vettore per trasformazioni di Lorentz, per cui vale:

$$S^{-1}\gamma^\mu S = \Lambda_\nu^\mu\gamma^\nu \quad (5.4.31)$$

abbiamo dunque:

$$S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu\gamma^\nu S(\Lambda) = S^{-1}\gamma^\mu S S^{-1}\gamma^\nu S = \Lambda_\rho^\mu\gamma^\rho\Lambda_\sigma^\nu\gamma^\sigma = \Lambda_\rho^\mu\Lambda_\sigma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma \quad (5.4.32)$$

dunque:

$$\bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} \psi \xrightarrow{\text{T.L.}} \frac{i}{2} \bar{\psi} (\Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma \gamma^\rho \gamma^\sigma - \Lambda^\nu{}_\rho \Lambda^\mu{}_\sigma \gamma^\rho \gamma^\sigma) \psi \quad (5.4.33)$$

$$\frac{i}{2} \bar{\psi} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma (\gamma^\rho \gamma^\sigma - \gamma^\sigma \gamma^\rho) \psi \quad (5.4.34)$$

$$\frac{i}{2} \bar{\psi} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma [\gamma^\rho, \gamma^\sigma] \psi \quad (5.4.35)$$

$$\Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma \bar{\psi} \sigma^{\rho\sigma} \psi \quad (5.4.36)$$

che è la legge di trasformazione di un tensore di rango 2.

Possiamo vedere che l'oggetto  $\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi$  è uno pseudo-vettore. Cominciamo a vedere che per trasformazioni di Lorentz si trasforma come un vettore. Abbiamo:

$$\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi \xrightarrow{\text{P.}} \bar{\psi}' \gamma^\mu \gamma^5 \psi' \quad (5.4.37)$$

$$\bar{\psi} S^{-1}(\Lambda) \gamma^\mu \gamma^5 S(\Lambda) \psi \quad (5.4.38)$$

$$\bar{\psi} S^{-1} \gamma^\mu S S^{-1} \gamma^5 S \psi \quad (5.4.39)$$

$$\bar{\psi} \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu \gamma^5 \psi \quad (5.4.40)$$

$$\text{ricordiamo che } \{\sigma^{\mu\nu}, \gamma^5\} = 0 \quad (5.4.41)$$

$$\Lambda^\mu{}_\nu \bar{\psi} \gamma^\rho \gamma^5 \psi \quad (5.4.42)$$

ovvero che  $\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi$  è un vettore di Lorentz. Vediamo ora cosa otteniamo per trasformazione di parità:

$$\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi \xrightarrow{\text{P.}} \bar{\psi}' \gamma^\mu \gamma^5 \psi' \quad (5.4.43)$$

$$\bar{\psi} S_p^{-1} \gamma^\mu \gamma^5 S_p \psi \quad (5.4.44)$$

$$\bar{\psi} \eta_p^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^5 \eta_p \gamma^0 \psi \quad (5.4.45)$$

$$\bar{\psi} \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^5 \gamma^0 \psi \quad (5.4.46)$$

$$\text{ricordiamo che } \{\gamma^0, \gamma^5\} = 0 \quad (5.4.47)$$

$$-\bar{\psi} \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \gamma^5 \psi \quad (5.4.48)$$

e a questo punto dobbiamo distinguere i due casi. Se abbiamo  $\mu = 0$ , allora:

$$\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi \xrightarrow{\text{P.}} -\bar{\psi} \gamma^0 \gamma^5 \psi \quad (5.4.49)$$

se invece  $\mu = i$ , allora, per via di  $\{\gamma^0, \gamma^i\} = 0$ :

$$\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi \xrightarrow{\text{P.}} \bar{\psi} \gamma^i \gamma^5 \psi. \quad (5.4.50)$$

Questo è il tipico comportamento di un vettore (ovviamente intendiamo quadivettore, cioè tensore di rango 1) assiale, o pseudovettore, ossia un oggetto

che sotto trasformazione di parità cambia di segno nella componente temporale, ma non in quelle spaziali.

Possiamo vedere che l'ultimo elemento che ci resta da studiare, ossia  $\bar{\psi}\gamma^5\psi$  si trasforma come:

$$\bar{\psi}\gamma^5\psi \xrightarrow{\text{T.L.}} \bar{\psi}'\gamma^5\psi' \quad (5.4.51)$$

$$\bar{\psi}S^{-1}(\Lambda)\gamma^5S(\Lambda)\psi \quad (5.4.52)$$

per le trasformazioni di Lorentz proprie (quelle connesse con l'identità) abbiamo:

$$\bar{\psi}'\gamma^5\psi' = \bar{\psi}e^{+\frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}}\gamma^5e^{-\frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}}\psi \quad (5.4.53)$$

che, siccome  $[\gamma^\mu, \gamma^5] = 0$  e quindi  $[\sigma^{\mu\nu}, \gamma^5] = 0$ , porta a:

$$\bar{\psi}\gamma^5\psi \xrightarrow{\text{T.L.}} \bar{\psi}\gamma^5\psi \quad (5.4.54)$$

ossia che  $\bar{\psi}\sigma^5\psi$  è un'invariante di Lorentz. Però, possiamo notare che è uno *pseudo-scalare* vedendo che cosa succede con trasformazioni di parità. Infatti, tenendo conto che  $S_p = \eta_p\gamma^0$ , con  $\eta_p$  parità intrinseca, allora abbiamo:

$$\bar{\psi}\gamma^5\psi \xrightarrow{\text{P.}} \bar{\psi}'\gamma^5\psi' \quad (5.4.55)$$

$$\psi^\dagger\gamma^0\eta_p^\dagger\gamma^0\gamma^5\eta_p\gamma^0\psi \quad (5.4.56)$$

$$\psi^\dagger\gamma^5\gamma^0\psi \quad (5.4.57)$$

$$\text{ricordiamo } \{\gamma^0, \gamma^5\} = 0 \quad (5.4.58)$$

$$-\bar{\psi}\gamma^5\psi \quad (5.4.59)$$

che ci dimostra il fatto che  $\bar{\psi}\gamma^5\psi$  è uno pseudoscalare.

## 5.5 Correnti di Noether associate all'equazione di Dirac

Ovviamente non è stato fatto a caso tutto il discorso della sezione §5.4, infatti, utilizziamo le forme bilineari viste o per inserirle nella lagrangiana  $\mathcal{L}_D$ , che però può contenere solo invarianti di Lorentz, oppure li utilizziamo per "costruire" le correnti di Noether. Date le matrici vettore  $\gamma^\mu$  il pseudovettore  $\gamma^\mu\gamma^5$  possiamo formare due correnti:

$$j^\mu(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x), \quad j_5^\mu(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma^5\psi(x). \quad (5.5.1)$$

che sono le correnti di Noether che corrispondono alle trasformazioni:

$$\psi(x) \longrightarrow e^{i\alpha}\psi(x) : j^\mu \quad (5.5.2)$$

$$\psi(x) \longrightarrow e^{i\alpha\gamma^5}\psi(x) : j_5^\mu \quad (5.5.3)$$

in cui (5.5.2) è la **trasformazione di simmetria** della lagrangiana  $\mathcal{L}_D$  di Dirac e  $j^\mu$  è la corrente associata che si conserva sempre; invece, (5.5.3) è la **trasformazione chiriale** che è una simmetria del termine cinetico di  $\mathcal{L}_D$ , ma non del termine di massa  $\mathcal{L}_D^m$ , per questo,  $j_5^\mu$  è la corrente conservata solo nel caso di  $m = 0$ .

Possiamo controllare anche che effettivamente siano quantità conservative, ovvero che rispettino un'equazione di continuità, se  $\psi$  è soluzione dell'equazione di Dirac. Prendiamo la prima delle (5.5.1):

$$\partial_\mu j^\mu = (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi + \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi \quad (5.5.4)$$

se assumiamo che  $\psi$  e  $\bar{\psi}$  soddisfino l'equazione di Dirac, ossia che valgano:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0 \quad , \quad \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu + m) = 0 \quad (5.5.5)$$

allora abbiamo:

$$\partial_\mu j^\mu = (im\bar{\psi})\psi + \bar{\psi}(-im)\psi = 0 \quad (5.5.6)$$

e dunque,  $j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$  è sempre conservata se  $\psi$  è soluzione di Dirac. Quando accoppieremo il campo di Dirac, fermioni carichi, con il campo elettromagnetico, vedremo che  $j^0$  sarà proprio la densità di carica elettrica e  $j^i$  la corrente di carica elettrica.

Possiamo vedere facilmente anche la conservazione di  $j_5^\mu$ , la seconda di (5.5.1):

$$\partial_\mu j_5^\mu = (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \gamma^5 \psi + \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \partial_\mu \psi \quad (5.5.7)$$

anche in questo caso, assumendo la validità di (5.5.5) e ricordando  $\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0$  (il che ci dice che scambiare  $\gamma^\mu$  con  $\gamma^5$  induce un segno meno), allora abbiamo:

$$\partial_\mu j_5^\mu = im\bar{\psi} \gamma^5 \psi + im\bar{\psi} \gamma^5 \psi = 2im\bar{\psi} \gamma^5 \psi \quad (5.5.8)$$

infatti, la corrente  $j_5^\mu$  è detta **corrente assiale** ed è conservata solo se la massa è nulla; cosa non troppo sorprendente sapendo che  $\gamma^5$  è collegata alla chiralità e alla trattazione di sistemi mass-less.

È interessante anche notare che:

$$j_L^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \left( \frac{1 - \gamma^5}{2} \right) \psi \quad , \quad j_R^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \left( \frac{1 + \gamma^5}{2} \right) \psi \quad (5.5.9)$$

nel caso di  $m = 0$ , sono due correnti che si conservano separatamente, corrispondono alle correnti di fermioni sinistrorsi e destrorsi e non si mescolano mai.

## 5.6 Soluzioni dell'equazione

I riferimenti per questa sezione sono [5, 7] e sarà necessario nel corso del capitolo aver appreso e ripassato le nozioni discusse nelle sezioni §2.4.4 e §2.4.5.

Analizziamo in questa sezione le soluzioni dell'equazione di Dirac (5.1.1), che ci interessano poiché, ricordiamo che ogni sistema fisico è una realizzazione di una rappresentazione del gruppo di Lorentz, i campi spinoriali rappresentano particelle fermioniche. Ovviamente cercheremo le soluzioni per campo libero, non avendo incluso nell'equazione alcuna interazione. Ci aspettiamo, inoltre, che l'equazione (5.1.1) ammetta soluzioni che siano combinazioni lineari di onde piane<sup>2</sup>. Abbiamo anche visto che il campo  $\psi$  ha una struttura spinoriale a 4 componenti, per cui in generale possiamo scrivere:

$$\psi(x) = \begin{cases} u_s(\vec{p}) e^{-ip^\mu x_\mu} \\ v_s(\vec{p}) e^{+ip^\mu x_\mu} \end{cases} \quad (5.6.1)$$

in cui  $p^\mu = (E, \vec{p})$  è il quadrimpulso della Relatività Speciale e per cui vale  $p^2 = E^2 - |\vec{p}|^2$ . Notiamo che anche  $u_s(x)$  e  $v_s(x)$  sono spinori a 4 componenti (sono loro che mantengono la natura spinoriale di  $\psi$ ) e il loro indice  $s$  è un indice a 2 valori, legato allo spin associato allo spinore. Noi considereremo sempre casi con  $p^0 = E > 0$  e per cui consideriamo sia  $e^{-ip^\mu x_\mu}$  sia  $e^{+ip^\mu x_\mu}$ .

Se proviamo ad inserire la (5.6.1) nell'equazione di Dirac, usando la notazione di Feynmann descritta nella sezione §E.1 dell'Appendice E, troviamo:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) u_s(p) e^{-ip_\mu x^\mu} = 0 \implies (\gamma^\mu p_\mu - m) u_s(p) e^{-ip_\mu x^\mu} = 0 \quad (5.6.2)$$

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) v_s(p) e^{+ip_\mu x^\mu} = 0 \implies (-\gamma^\mu p_\mu - m) v_s(p) e^{+ip_\mu x^\mu} = 0 \quad (5.6.3)$$

visto che la derivata  $\partial_\mu$  agisce solo sull'esponenziale e non sugli spinori, dipendenti da  $p$ . Abbiamo dunque:

$$(\gamma^\mu p_\mu - m) u_s(p) = 0 \implies (\not{p} - m) u_s(p) = 0 \quad (5.6.4)$$

$$(\gamma^\mu p_\mu + m) v_s(p) = 0 \implies (\not{p} + m) v_s(p) = 0 \quad (5.6.5)$$

che sono due condizioni che  $u_s(p)$  e  $v_s(p)$  devono soddisfare.

Un caso rilevante, è il caso in cui ci mettiamo nel sistema di riferimento di riposo<sup>3</sup>. In tale sistema abbiamo:

$$p^\mu = (m, \vec{0}) = (p^0, \vec{0}) \quad (5.6.6)$$

---

<sup>2</sup>Possiamo dirlo dal fatto che non ci sia un termine potenziale, ma soprattutto dalla forma dell'equazione differenziale.

<sup>3</sup>Nota che possiamo farlo poiché stiamo considerando campi, le cui eccitazioni sono particelle fermioniche massive.

in cui indichiamo con  $m$  la massa di riposo<sup>4</sup>, che non in unità naturali sarebbe  $mc^2$ . Qui sceglieremo come base per gli spinori  $u_s$  e  $v_s$  i quadrivettori:

$$u_1(0) = \begin{pmatrix} (1) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2(0) = \begin{pmatrix} (0) \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.6.7)$$

$$v_1(0) = \begin{pmatrix} (0) \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2(0) = \begin{pmatrix} (0) \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.6.8)$$

Definiamo la base in questo modo perché suggerito da chi già sa come si formerà la teoria e con queste definizioni ci saranno dei risultati che assumeranno una forma più carina.

Notiamo che per formare gli spinori  $u_s$  e  $v_s$  abbiamo semplicemente utilizzato come base un'estensione a 4 dimensioni dei due spinori, che avevamo indicato con  $\chi^\uparrow$  e  $\chi^\downarrow$ , della Meccanica Quantistica.<sup>5</sup> Anche il fatto che l'indice  $s$  possa assumere soltanto due valori è perfettamente consistente con il fatto che  $\psi$  descriva un sistema di spin 1/2, con due possibili stati fisici, uno "up" e uno "down". Facciamo solo attenzione al fatto che  $\psi$  può essere scritto come  $u_s(p)e^{-ip^\mu x_\mu}$  oppure come  $v_s(p)e^{+ip^\mu x_\mu}$ , e in ciascuno dei due casi devono esistere (lo abbiamo appena visto definendo  $u_{1,2}$  e  $v_{1,2}$ ) i due possibili stati up e down, e dunque 4 stati possibili. Il fatto che ci sembri di aver raddoppiato le condizioni sullo spin, rispetto la MQ, è dato dal fatto che non stiamo studiando sistemi scalari, bensì spinoriali, ed è proprio la presenza dello spin ad includere nelle soluzioni dell'equazione di Dirac non solo i campi con energia positiva (con due stati di spin), ma anche quelli ad energia negativa (con altri due stati di spin). Ci sono entrambi i segni dell'energia perché abbiamo la relazione di mass-shell inglobata nella teoria, poiché è portata dentro dal gruppo di Lorentz.

Notiamo ancora una cosa importante. Se prima interpretavamo il termine  $e^{-ip^\mu x_\mu}$  come un'onda entrante e  $e^{+ip^\mu x_\mu}$  come un'onda uscente, ora li interpretiamo come  $e^{-ip^\mu x_\mu}$  il termine di particella con energia positiva (ad esempio) e  $e^{+ip^\mu x_\mu}$  come il termine di particella ad energia negativa. Entrambe le soluzioni (energia positiva e negativa) sono già di base inglobate nella teoria per via del fatto che costuiamo le equazioni di campo basandoci sulle invarianze del gruppo di Poincaré, e dunque della Relatività Speciale. In più esse ci sono sempre entrambe e non posso eliminarle, proprio perché

---

<sup>4</sup>Per una particella in movimento avremmo  $p^0 = E = \gamma mc^2$ .

<sup>5</sup>Ricordiamoci che erano:

$$\chi^\uparrow = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi^\downarrow = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.6.9)$$

la relazione di mass-shell le considera entrambe e noi con la rappresentazione spinoriale del gruppo di Lorentz siamo in una rappresentazione irriducibile. Quindi, quando facciamo una teoria quantistica e relativistica ci sono, per costruzione, fin dall'inizio sia le particelle che le antiparticelle.

Ovviamente non vogliamo vivere sempre nel sistema di riferimento di riposo, ma la Fisica che ci piace avviene in sistemi di riferimento generici. Operiamo un boost su  $u_s(0)$  e  $v_s(0)$  in modo da portarli dal sistema di riferimento di riposo ad uno generico, in cui l'impulso del sistema è  $p^\mu = (E, \vec{p})$ . Occorre però ricordare come possiamo rappresentare una trasformazione di boost. Possiamo dare una rappresentazione matriciale di  $S(\Lambda)$  in una direzione generica  $\hat{n}$ . Per farlo, conviene utilizzare la rappresentazione del gruppo di Lorentz  $SO(3, 1)$  data da  $SL(2, \mathbb{C})$ , che appunto fornisce una rappresentazione una rappresentazione bidimensionale e spinoriale. La rappresentazione che fornisce  $SL(2, \mathbb{C})$  è data da matrici 2x2 della forma:

$$S(\Lambda) = e^{i\vec{\theta} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2} \pm \vec{\eta} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}} \quad (5.6.10)$$

in cui ci sono sia le rotazioni che i boost. Abbiamo il vettore  $\vec{\eta} = |\vec{\eta}| \hat{n} = \eta \hat{n}$ . Nel nostro caso siamo interessati ad un boost, per cui utilizziamo solamente i generatori associati, ossia  $\pm \vec{\eta} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}$ , e abbiamo:

$$S(\Lambda) \longrightarrow e^{\pm \vec{\eta} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}} \quad (5.6.11)$$

$$e^{\pm \frac{\vec{\eta}}{2} \cdot \vec{\sigma}} \quad (5.6.12)$$

$$= \mathbb{1} + \left( \pm \frac{\vec{\eta}}{2} \cdot \vec{\sigma} \right) + \frac{1}{2} \left( \pm \frac{\vec{\eta}}{2} \cdot \vec{\sigma} \right)^2 + \frac{1}{3!} \left( \pm \frac{\vec{\eta}}{2} \cdot \vec{\sigma} \right)^3 + \dots \quad (5.6.13)$$

$$= \mathbb{1} \cosh \frac{\eta}{2} \pm \vec{\sigma} \cdot \hat{n} \sinh \frac{\eta}{2} \quad (5.6.14)$$

in cui il primo termine ( $\mathbb{1} \cosh \frac{\eta}{2}$ ) è un termine diagonale che raccoglie tutte le potenze pari in cui  $(\sigma^i)^{2n} = \mathbb{1} \quad \forall i$ , mentre il secondo è un termine off-diagonale e raccoglie tutte le potenze dispari in cui  $(\sigma^i)^{2n+1} = \sigma^i \quad \forall i$ . Passando alla rappresentazione di  $SO(3, 1)$  data dalle matrici  $\gamma^\mu$  (vedi l'Appendice E), in cui i generatori dei boost sono dati da  $\frac{1}{2}\sigma^{0i}$  il ragionamento è lo stesso. Infatti, in tale rappresentazione abbiamo:

$$M^{0i} = K^i = \frac{1}{2}\sigma^{0i} = -\frac{i}{2} \begin{vmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i \end{vmatrix} = \frac{i}{4} [\gamma^0, \gamma^i] \quad (5.6.15)$$

$$S(\Lambda) = e^{-\frac{i}{4}\omega_{0i}\sigma^i} \quad (5.6.16)$$

in cui i parametri  $\omega_{0i}$  possono essere scritti in forma esplicita tramite la rapidità:

$$\vec{\eta} = (\omega^{01}, \omega^{02}, \omega^{03}) \quad (5.6.17)$$

e ricordiamo che  $\eta$  è la quantità additiva per boost successivi. Ad esempio, per un boost lungo la direzione  $z$  abbiamo:

$$K^3 = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.6.18)$$

e conseguentemente:

$$S(\Lambda) = e^{\pm \eta_{03} \cdot K^3} = \mathbb{1} \cosh \frac{\eta_{03}}{2} - i K^3 \sinh \frac{\eta_{03}}{2}. \quad (5.6.19)$$

Torniamo al risultato che abbiamo trovato per una direzione generica (5.6.14) e scriviamolo esplicitamente in forma matriciale:

$$S(\Lambda) = \begin{pmatrix} \mathbb{1} \cosh \frac{\eta}{2} & \vec{\sigma} \cdot \hat{n} \sinh \frac{\eta}{2} \\ \vec{\sigma} \cdot \hat{n} \sinh \frac{\eta}{2} & \mathbb{1} \cosh \frac{\eta}{2} \end{pmatrix} \quad (5.6.20)$$

dai legami tra rapidità e massa di riposo ed energia di un sistema visti nell'Appendice D, ossia:

$$\cosh \frac{\eta}{2} = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \quad , \quad \sinh \frac{\eta}{2} = \sqrt{\frac{E-m}{2m}} \quad (5.6.21)$$

possiamo riscrivere la matrice  $S(\Lambda)$  come:

$$S(\Lambda) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \vec{\sigma} \cdot \hat{n} \sqrt{\frac{E-m}{E+m}} \\ \vec{\sigma} \cdot \hat{n} \sqrt{\frac{E-m}{E+m}} & \mathbb{1} \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \frac{\vec{p} \cdot \vec{p}}{E+m} \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} & \mathbb{1} \end{pmatrix} \quad (5.6.22)$$

in cui abbiamo usato:

$$\sqrt{\frac{E-m}{E+m}} = \frac{|\vec{p}|}{E+m} \quad , \quad |\vec{p}| \cdot \hat{n}. \quad (5.6.23)$$

Ora, applichiamo il boost (5.6.22) agli spinori di base nel sistema di riferimento di riposo, così da portarli in un sistema di riferimento generico, in cui il loro impulso è  $p$ . Indichiamo:

$$\chi^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \chi^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.6.24)$$

$$\phi^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \phi^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (5.6.25)$$

Applicando  $S(\Lambda)$  agli spinori  $u_s(0)$  e  $v_s(0)$  otteniamo:

$$u_s(p) = \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} \chi^s \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \chi^s \end{pmatrix} \quad (5.6.26)$$

$$v_s(p) = \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \phi^s \\ \phi^s \end{pmatrix} \quad (5.6.27)$$

in cui attenzione, abbiamo fissato la normalizzazione di  $u_s(p)$  e  $v_s(p)$  senza un pezzo  $1/\sqrt{2m}$ , che in base alle relazioni viste in precedenza saremmo portati a dire esserci. Si veda la sezione §5.6.1 per motivazioni.

Possiamo "facilmente" verificare che  $u_s(p)$  e  $v_s(p)$  soddisfano le relazioni:

$$(\not{p} - m)u_s(p) = 0 \quad (5.6.28)$$

$$(\not{p} + m)v_s(p) = 0. \quad (5.6.29)$$

Per verificarlo dobbiamo ricordare che:

$$E - m - \frac{|\vec{p}|^2}{E + m} = 0 \quad (5.6.30)$$

e notare che:

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{p} = \sigma^1 p^1 + \sigma^2 p^2 + \sigma^3 p^3 = \begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{pmatrix} \quad (5.6.31)$$

e di conseguenza:

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2 = \begin{pmatrix} p_z^2 + (p_x - ip_y)(p_x + ip_y) & (p_x + ip_y)p_z - p_z(p_x + ip_y) \\ p_z(p_x + ip_y) - (p_x - ip_y)p_z & (p_x + ip_y)(p_x - ip_y) + p_z^2 \end{pmatrix} \quad (5.6.32)$$

$$= \begin{pmatrix} \vec{p}^2 & 0 \\ 0 & \vec{p}^2 \end{pmatrix} \quad (5.6.33)$$

$$= \mathbb{1} \cdot \vec{p}^2. \quad (5.6.34)$$

Utilizzando (5.6.30) e (5.6.34) possiamo vedere che (dimenticando il fattore  $\sqrt{E+m}$  che sarebbe davanti a tutto):

$$(\not{p} - m)u_s = (E\gamma^0 - \vec{p} \cdot \vec{\gamma} - m\mathbb{1}) \begin{pmatrix} \chi^s \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \chi^s \end{pmatrix} \quad (5.6.35)$$

$$= \left[ E \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} - \vec{p} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} - m \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \chi^s \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \chi^s \end{pmatrix} \quad (5.6.36)$$

$$= \begin{pmatrix} E - m & -\vec{p} \cdot \vec{\sigma} \\ \vec{p} \cdot \vec{\sigma} & -E - m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi^s \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \chi^s \end{pmatrix} \quad (5.6.37)$$

$$= \begin{pmatrix} \left[ E - m - \frac{\vec{p}^2}{E+m} \right] \chi^s \\ \vec{p} \cdot \vec{\sigma} \left( 1 - \frac{E+m}{E+m} \right) \chi^s \end{pmatrix} \quad (5.6.38)$$

$$= 0. \quad (5.6.39)$$

Analogamente si dimostra che:

$$(\not{p} + m)v_s(p) = 0. \quad (5.6.40)$$

Appunto importante è che noi abbiamo utilizzato la rappresentazione di Weyl per le matrici  $\gamma^\mu$ , ma ovviamente si giunge allo stesso risultato anche utilizzando la rappresentazione di Dirac.

Notiamo anche che (5.6.26) e (5.6.27) sono ancora soluzioni dell'equazione di Dirac, anche se moltiplicate per una fase globale  $e^{i\alpha}$ .

Prima di parlare di normalizzazioni vediamo che avremmo potuto utilizzare un piccolo trucco per arrivare ad un'espressione di  $u_s(p)$  (e  $v_s(p)$ ) in un generico sistema di riferimento<sup>6</sup>. Infatti, valendo l'identità:

$$(\not{p} - m)(\not{p} + m) = 0 \quad (5.6.41)$$

dimostrabile semplicemente:

$$(\not{p} - m)(\not{p} + m) = \not{p}\not{p} - m^2 \quad (5.6.42)$$

$$= \gamma^\mu p_\mu \gamma^\nu p_\nu - m^2 \quad (5.6.43)$$

$$= \gamma^\mu \gamma^\nu \underbrace{p_\mu p_\nu}_{\text{simmetrico}} - m^2 \quad (5.6.44)$$

$$= \frac{1}{2} (\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu) p_\mu p_\nu - m^2 \quad (5.6.45)$$

$$= p_\mu p_\nu \frac{1}{2} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} - m^2 \quad (5.6.46)$$

$$= p^2 - m^2 = 0 \quad (5.6.47)$$

otteniamo:

$$(\not{p} - m) \underbrace{(\not{p} + m) u_s(0)}_{}, \quad s = 1, 2 \quad (5.6.48)$$

e ricordando che:

$$(\not{p} - m) u_s(p) = 0 \quad (5.6.49)$$

possiamo porre:

$$u_s(p) = C(\not{p} + m) u_s(0) \quad (5.6.50)$$

così che:

$$u_s(p) = C \begin{pmatrix} E + m & -\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & -E + m \end{pmatrix} u_s(0), \quad E = p^0 > 0 \quad (5.6.51)$$

che con l'opportuna scelta:

$$C = \frac{1}{\sqrt{E + m}} \quad (5.6.52)$$

porta allo stesso risultato visto prima, ossia (5.6.26).

---

<sup>6</sup>Questa cosa potrebbe tornare utile soprattutto allo scritto del corso di *Fondamenti di Teoria Quantistica dei Campi*.

### 5.6.1 Normalizzazione spinori

Possiamo fissare la normalizzazione degli spinori  $u_s(p)$  e  $v_s(p)$  richiedendo che:

$$u_s^\dagger(p)u_{s'}(p) = 2E\delta_{ss'} \quad (5.6.53)$$

$$v_s^\dagger(p)v_{s'}(p) = 2E\delta_{ss'} \quad (5.6.54)$$

che possiamo effettivamente verificare esplicitamente (ricordando che  $(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) = (\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^\dagger$ ):

$$u_s^\dagger(p)u_{s'}(p) = (E+m) \begin{pmatrix} \chi_s^\dagger & \chi_s^\dagger \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_{s'} \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \chi_{s'} \end{pmatrix} \quad (5.6.55)$$

$$= (E+m) \left[ \chi_s^\dagger \chi_{s'} + \chi_s^\dagger \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2}{(E+m)^2} \chi_{s'} \right] \quad (5.6.56)$$

$$= (E+m)\delta_{ss'} \left( 1 + \frac{\vec{p}^2}{(E+m)^2} \right) \quad (5.6.57)$$

$$= (E+m) \frac{E^2 + m^2 + 2mE + \vec{p}^2}{(E+m)^2} \delta_{ss'} \quad (5.6.58)$$

$$\text{ricordiamo } \vec{p}^2 = E^2 - m^2 \quad (5.6.59)$$

$$= \frac{2E(E+m)}{(E+m)} \delta_{ss'} \quad (5.6.60)$$

$$= 2E\delta_{ss'} \quad (5.6.61)$$

e analogamente per  $v_s^\dagger(p)v_{s'}(p)$ . Possiamo notare che, la densità di probabilità, ossia  $\psi^\dagger\psi$ , non è un'invariante di Lorentz, ma si trasforma come la componente 0 di un quadrivettore ( $j^\mu$ ), in accordo con il fatto che  $\psi^\dagger\psi d^3x$  sia lo stesso in ogni sistema di riferimento inerziale; ciò che accade è che se il volume  $V$  subisce una contrazione relativistica, allora  $\psi^\dagger\psi$  si dilata e compensa la variazione di  $V$ . Ne ripareremo quando tratteremo la normalizzazione delle soluzioni dell'equazione di Dirac.

A questo punto possiamo definire gli spinori aggiunti  $\bar{u}_s$  e  $\bar{v}_s$  come:

$$\bar{u}_s(p) = u_s^\dagger(p)\gamma^0 \quad (5.6.62)$$

$$\bar{v}_s(p) = v_s^\dagger(p)\gamma^0 \quad (5.6.63)$$

per cui valgono:

$$\bar{u}_s(p)(\not{p} - m) = 0 \quad (5.6.64)$$

$$\bar{v}_s(p)(\not{p} + m) = 0 \quad (5.6.65)$$

come si può provare prendendo le relazioni hermitiano-coniugate di:

$$(\not{p} - m)u_s(p) = 0 \quad (5.6.66)$$

$$(\not{p} + m)v_s(p) = 0 \quad (5.6.67)$$

infatti:

$$(\not{p} - m) u_s(p) \implies u_s^\dagger ((\gamma^\mu)^\dagger p_\mu - m) = 0 \quad (5.6.68)$$

$$\text{ricordiamo } (\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \quad (5.6.69)$$

$$\left[ u_s^\dagger (\gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 p_\mu - m) = 0 \right] \gamma^0 \quad (5.6.70)$$

$$u_s^\dagger \gamma^0 \not{p} \gamma^0 - u_s^\dagger m \gamma^0 = 0 \quad (5.6.71)$$

$$\bar{u}_s (\not{p} - m) = 0 \quad (5.6.72)$$

e analogamente per  $\bar{v}_s$ .

Come per  $u_s^\dagger$  e  $v_s^\dagger$  possiamo vedere che le condizioni di normalizzazione per  $\bar{u}_s u_s$  e  $\bar{v}_s v_s$ :

$$\bar{u}_s(p) u_{s'}(p) = 2m \delta_{ss'} \quad (5.6.73)$$

$$\bar{v}_s(p) v_{s'}(p) = -2m \delta_{ss'} \quad (5.6.74)$$

che possiamo notare essere una condizione di normalizzazione Lorentz invariante, poiché coinvolge  $\bar{\psi}$  e  $\psi$ . Vediamo:

$$\bar{u}_s(p) u_{s'}(p) = (E + m) \begin{pmatrix} \chi_s^\dagger & \chi_s^\dagger \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_{s'} & \frac{\chi_{s'}}{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}} \end{pmatrix} \quad (5.6.75)$$

$$= (E + m) \begin{pmatrix} \chi_s^\dagger & -\chi_s^\dagger \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_{s'} & \frac{\chi_{s'}}{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}} \end{pmatrix} \quad (5.6.76)$$

$$= (E + m) \left( \chi_s^\dagger \chi_{s'} - \chi_s^\dagger \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2}{(E + m)^2} \chi_{s'} \right) \quad (5.6.77)$$

$$= \delta_{ss'} (E + m) \left( 1 - \frac{|\vec{p}|^2}{(E + m)^2} \right) \quad (5.6.78)$$

$$\text{usiamo ancora } E^2 - |\vec{p}|^2 = m^2 \quad (5.6.79)$$

$$= \delta_{ss'} (E + m) \frac{E^2 + 2mE + m^2 + m^2 - E^2}{(E + m)^2} \quad (5.6.80)$$

$$= \delta_{ss'} \frac{2m(E + m)}{(E + m)} \quad (5.6.81)$$

$$= 2m \delta_{ss'} \quad (5.6.82)$$

e analogamente per  $\bar{v}_s v_{s'}$ .

È facile dimostrare la relazione di ortogonalità tra gli spinori  $u_s$  e  $v_s$ , ossia vedere che vale la relazione:

$$\bar{u}_s(p) v_{s'}(p) = \bar{v}_s(p) u_{s'}(p) = 0. \quad (5.6.83)$$

**Limite non relativistico** Possiamo notare che nel limite in cui  $|\vec{p}| \ll m$ , il rapporto  $\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m}$  è molto piccolo, quindi lo spinore  $u_s(p)$  avrà le componenti superiori ( $\chi_s$ ) largamente dominanti, che vengono chiamate grandi componenti. Per lo spinore  $v_s(p)$ , nella stessa situazione, le componenti dominanti sono quelle inferiori ( $\phi_s$ ).

### 5.6.2 Normalizzazione soluzioni

Avendo visto quali sono le condizioni di normalizzazione degli spinori, possiamo vedere quali siano effettivamente le condizioni sulle soluzioni. Consideriamo le soluzioni ad energia positiva, di tipo  $u_s$ :

$$\psi_p^{(s)}(x) = N u_s(p) e^{-ip^\mu x_\mu} \quad (5.6.84)$$

la costante di normalizzazione  $N$  è fissabile richiedendo che in un volume infinito si abbia:

$$\int d^3x \psi_p^{(s)\dagger}(x) \psi_{p'}^{(s')}(x) = \delta_{ss'} \delta^3(\vec{p}' - \vec{p}) \quad (5.6.85)$$

da cui ricaviamo:

$$\int d^3\psi_p^{(s)\dagger}(x) \psi_{p'}^{(s')}(x) = |N|^2 u_s^\dagger(\vec{p}) u_{s'}(\vec{p}') \int d^3x e^{-i(\vec{p}' - \vec{p}) \cdot \vec{x}} \quad (5.6.86)$$

$$= |N|^2 2E \delta_{ss'} (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p}' - \vec{p}) \quad (5.6.87)$$

e dunque:

$$|N| = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E}}. \quad (5.6.88)$$

Una prova analoga vale per le soluzioni di tipo  $v_s$ .

Come già accennato, la normalizzazione che abbiamo imposto è giustificata dal fatto che, come abbiamo già visto,  $\psi^\dagger \psi$  non è un'invariante di Lorentz, ma varia sotto trasformazioni di Lorentz come la componente temporale di un quadrirettore, avendo  $dV \psi^\dagger \psi$ , se il volume  $V$  si dilata, allora  $\psi^\dagger \psi$  si contrae per compensare la variazione di  $V$ , in modo da mantenere invariante  $dV \psi^\dagger \psi$  per ogni sistema di riferimento inerziale (in moto relativo rispetto all'altro). Se il volume  $V$  va ad infinito, allora  $\psi^\dagger \psi$  si contrae in modo da garantire che l'integrale su tutto lo spazio sia una delta di Dirac.

### 5.6.3 Interpretazione soluzioni

Vediamo in questa sottosezione come interpretiamo le soluzioni (5.6.1) dell'equazione di Dirac. Potremmo ripetere cose già accennate nella sezione §5.6.

Facciamo solo attenzione che non possiamo ancora parlare in modo lecito di particelle o antiparticelle, potremo farlo solo quando avremo quantizzato il campo, poiché siamo ancora in presenza di un campo classico. Però, quello che stiamo facendo noi è: imporre le simmetrie del sistema e dire che gli stati fisici sono dati da una qualsiasi delle rappresentazioni irriducibili del gruppo di simmetria del sistema, nel nostro caso, del gruppo di Poincaré. Quella che facciamo noi è una procedura molto potente e generale, talmente potente che è valida a priori, sia che siamo in presenza di un campo classico che di uno quantistico.

Ad ogni modo, le soluzioni di tipo  $\psi = u_{1,2}e^{-ip^\mu x_\mu}$  rappresentano, in modo relativistico, un campo libero di spin 1/2, quadrimpulso  $p^\mu$ , massa  $m$  ed energia  $E$ . Infatti,  $e^{-ip^\mu x_\mu} = e^{-i(E-\vec{p}\cdot\vec{x})}$  è la tipica forma di un'onda piana che si propaga nella direzione  $\vec{x}$  in avanti nel tempo. Le due proiezioni di spin del campo sono date dagli spinori bidimensionali che abbiamo chiamato  $\chi_1$  e  $\chi_2$ , rispettivamente up e down.

In modo analogo, le soluzioni di tipo  $\psi = v_{1,2}e^{+ip^\mu x_\mu}$  hanno le stesse caratteristiche delle precedenti, ma segno opposto per tutte le componenti di  $p^\mu$ , vuol dire che abbiamo  $p^\mu \rightarrow -p^\mu$  e lo stesso vale per le componenti dello spin. Avendo  $-p^\mu$  l'onda si propaga in direzione  $-\vec{x}$  e  $-t$ , cioè evolve indietro nel tempo. L'evoluzione indietro nel tempo avviene a meno che non si assuma  $E < 0$ . Dirac interpretò queste soluzioni ad energia negativa come campi che rappresentavano antiparticelle, cioè oggetti con la stessa energia, impulso e spin delle soluzioni  $u_{1,2}e^{-ip^\mu x_\mu}$ , ma con carica opposta. La prova sperimentale di questa interpretazione arrivò nel 1932 da Anderson, che scoprì il positrone, 4 anni dopo la congettura di Dirac. Facciamo però attenzione che il fatto che parliamo di particella (energia positiva) e antiparticella (energia negativa) questo non è legato al fatto che uno spinore sia left o right sono due discorsi completamente differenti, faremo maggiore chiarezza su parti left e right di uno spinore nella sezione §5.7.2.

Notiamo che in Meccanica Quantistica, o banalmente in Meccanica Classica, potevamo rimuovere una delle due soluzioni che trovavamo da equazioni di secondo grado, banalmente imponendo delle condizioni iniziali. Ad esempio, nelle buche di potenziale risolvendo l'equazione di Schrodinger trovavamo degli esponenziali entranti o uscenti, ma potevamo eliminare una delle due soluzioni semplicemente dicendo di non avere l'onda riflessa; oppure, anche nello studio del moto uniformemente accelerato avevamo equazioni di secondo grado nel tempo, ma eliminavamo le soluzioni con  $t < 0$  banalmente chiedendo che il tempo scorresse in avanti. Ora, che stiamo costruendo la Teoria Quantistica dei Campi, non possiamo eliminare le soluzioni negative che vengono da  $E = \pm\sqrt{p^2 + m^2}$  imponendo a mano dall'esterno delle condizioni, l'unica cosa che imponiamo sono le invarianti e le simmetrie del sistema, ma tutto ciò che ne consegue ce lo dobbiamo tenere.

Notiamo anche che nel formalismo relativistico lo spin è già compreso nella teoria senza che noi dobbiamo fare nulla; nella Meccanica Quantistica non relativistica non era così, infatti, lo avevamo dovuto aggiungere ad hoc a posteriori in modo da spiegare la degenerazione che incontravamo studiando alcuni fenomeni, come Stern-Gerlach o l'effetto Zeeman anomalo.

#### 5.6.4 Proiettori su stati ad energia positiva o negativa

Abbiamo visto che le quantità  $\bar{u}_s(p)u_{s'}(p)$  e  $\bar{v}_s(p)v_{s'}(p)$  sono numeri, vedi le relazioni (5.6.73) e (5.6.74). Però, non ci siamo chiesti quale tipo di informazione fisica possa essere contenuta in questi prodotti. Notiamo che

$\bar{u}_s(p)u_{s'}(p)$  e  $\bar{v}_s(p)v_{s'}(p)$  sono matrici 4x4 e ci diamo degli indici  $\alpha$  e  $\beta$ . Definiamo gli operatori:

$$[\Lambda_+(\vec{p})]_{\alpha\beta} = \sum_{s=1,2} \frac{u_\alpha^s(\vec{p})\bar{u}_\beta^s(\vec{p})}{2m} \quad (5.6.89)$$

$$[\Lambda_-(\vec{p})]_{\alpha\beta} = - \sum_{s=1,2} \frac{v_\alpha^s(\vec{p})\bar{v}_\beta^s(\vec{p})}{2m}. \quad (5.6.90)$$

Applicando (5.6.89) allo spinore  $u^{s'}(p)$  otteniamo:

$$\Lambda_+(\vec{p})u^{s'}(\vec{p}) = \sum_{s,\beta} \frac{u_\alpha^s(\vec{p})\bar{u}_\beta^s(\vec{p})u_\beta^{s'}(\vec{p})}{2m} \quad (5.6.91)$$

$$= \sum_s \frac{u_\alpha^s(\vec{p})2m\delta_{ss'}}{2m} \quad (5.6.92)$$

$$= u^{s'}(\vec{p}) \quad (5.6.93)$$

mentre se lo applichiamo a  $v^{s'}(p)$  otteniamo:

$$\Lambda_+(\vec{p})v^{s'}(\vec{p}) = 0 \quad (5.6.94)$$

per via dell'ortogonalità di  $u$  e  $v$ . Inoltre possiamo vedere i proiettori sono idempotenti, ossia sono tali che:

$$[\Lambda_+(\vec{p})]^2 = \frac{1}{4m^2} \sum_{s,\rho} u_\alpha^s(\vec{p})\bar{u}_\rho^s(\vec{p}) \sum_{s'} u_\rho^{s'}(\vec{p})\bar{u}_\beta^{s'}(\vec{p}) \quad (5.6.95)$$

$$= \frac{1}{4m^2} \sum_{s,s',\rho} u_\alpha^s(\vec{p}) \underbrace{\bar{u}_\rho^s(\vec{p})u_\rho^{s'}(\vec{p})}_{2m\delta_{ss'}} \bar{u}_\beta^{s'}(\vec{p}) \quad (5.6.96)$$

$$= \frac{1}{2m} \sum_s u_\alpha^s(\vec{p})\bar{u}_\beta^s(\vec{p}) \quad (5.6.97)$$

$$= \Lambda_+(\vec{p}) \quad (5.6.98)$$

e diciamo che  $\Lambda_+$  è un proiettore su stati ad energia positiva. Notiamo che vale:

$$(\not{p} - m)\Lambda_+(\vec{p}) = 0 \quad (5.6.99)$$

come conseguenza di (5.6.28). Se ricordiamo il trucchetto (5.6.41) possiamo rappresentare  $\Lambda_+(\vec{p})$  come:

$$\Lambda_+(\vec{p}) = \frac{\not{p} + m}{2m} \quad (5.6.100)$$

che chiaramente soddisfa tutte le proprietà di cui sopra.

Per la definizione (5.6.90) possiamo fare gli stessi discorsi di  $\Lambda_+$ , ma in questo caso l'operatore  $\Lambda_-(\vec{p})$  proietta su stati ad energia negativa, o meglio su stati di tipo  $v_s$ . In questo caso possiamo rappresentarlo come:

$$\Lambda_-(\vec{p}) = \frac{-\not{p} + m}{2m} \quad (5.6.101)$$

Notiamo anche che valgono le seguenti proprietà. La relazione di completezza:

$$\Lambda_+(\vec{p}) + \Lambda_-(\vec{p}) = \mathbb{1} \quad (5.6.102)$$

che si può facilmente vedere da:

$$\Lambda_+(\vec{p}) + \Lambda_-(\vec{p}) = \frac{\not{p} + m}{2m} + \frac{-\not{p} + m}{2m} = \mathbb{1} \quad (5.6.103)$$

e la relazione di ortogonalità:

$$\Lambda_+(\vec{p})\Lambda_-(\vec{p}) + \Lambda_-(\vec{p})\Lambda_+(\vec{p}) = 0 \quad (5.6.104)$$

visibile da:

$$\frac{(\not{p} + m)(-\not{p} + m)}{4m^2} = \frac{-\not{p}\not{p} + m^2}{4m^2} \underset{\not{p}\not{p}=m^2}{=} \frac{-m^2 + m^2}{4m^2} = 0 \quad (5.6.105)$$

## 5.7 Chiralità ed elicità

In questa sezione parleremo della chiralità e dell'elicità, del loro ruolo nello studio dell'equazione di Dirac e il loro collegamento con la massa delle paricelle.

### 5.7.1 Autostati e proiettori di chiralità

Utilizziamo per questa sezione la rappresentazione di Weyl:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} -\mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}. \quad (5.7.1)$$

Nella sezione §3.3.3 avevamo definito i proiettori:

$$P_R = \frac{\mathbb{1} + \gamma^5}{2}, \quad P_L = \frac{\mathbb{1} - \gamma^5}{2} \quad (5.7.2)$$

che ci consentono di "estrarre" le componenti left e right dello spinore:

$$\psi = \begin{pmatrix} \phi_L \\ \phi_R \end{pmatrix} \quad (5.7.3)$$

e che possiamo notare essere collegati come:

$$P_L \gamma^\mu = \gamma^\mu P_R \quad (5.7.4)$$

poiché per via del fatto che  $\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$  si ha:

$$P_L \gamma^\mu = \frac{1 - \gamma^5}{2} \gamma^\mu = \frac{\gamma^\mu - \gamma^5 \gamma^\mu}{2} = \frac{\gamma^\mu + \gamma^\mu \gamma^5}{2} = \gamma^\mu \frac{1 + \gamma^5}{2} = \gamma^\mu P_R \quad (5.7.5)$$

Abbiamo infatti:

$$\psi_L \equiv \frac{1 - \gamma^5}{2} \psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_L \\ \phi_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_L \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.7.6)$$

$$\psi_R \equiv \frac{1 + \gamma^5}{2} \psi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_L \\ \phi_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_R \end{pmatrix}. \quad (5.7.7)$$

$P_{L,R}$  sono proiettori nel senso che vale  $P_{L,R}^2 = P_{L,R}$  e inoltre  $P_L + P_R = 1$  con  $P_L P_R = P_R P_L = 0$ .

La distinzione tra spinori left e right è valida in qualsiasi rappresentazione, come abbiamo visto nell'Appendice E, e in analogia a  $\psi$  possiamo definire gli spinori  $u_L$  e  $u_R$  tramite i proiettori:

$$u_L(\vec{p}) = P_L u(\vec{p}) \quad (5.7.8)$$

$$u_R(\vec{p}) = P_R u(\vec{p}) \quad (5.7.9)$$

da cui possiamo ottenere:

$$\bar{u}_L(\vec{p}) = u_L^\dagger \gamma^0 = \left( \frac{1 - \gamma^5}{2} u \right)^\dagger \gamma^0 = u^\dagger \frac{1 - \gamma^5}{2} \gamma^0 \quad (5.7.10)$$

$$= u^\dagger \gamma^0 \frac{1 + \gamma^5}{2} = \bar{u}(\vec{p}) P_R \quad (5.7.11)$$

quindi:

$$\bar{u}_L(\vec{p}) = \bar{u}(\vec{p}) P_R \quad (5.7.12)$$

$$\bar{u}_R(\vec{p}) = \bar{u}(\vec{p}) P_L \quad (5.7.13)$$

### 5.7.2 Fermioni chiriali ed equazione di Weyl

Studiamo in questa sezione come si riducono le equazioni di Dirac se scriviamo lo spinore  $\psi$  nelle sue parti left e right e analizziamo che equazioni abbiamo nel caso massless. Analizziamo il significato e il legame tra chiralità ed elicità. Potrebbe risultare utile aver ripassato la sezione §2.5.3. Potrebbe sembrare uno studio abbastanza inutile quello di particelle fermioniche, di spin 1/2, e massless, dal momento che in natura ce ne sono poche, però, come vedremo, lo studio di sistemi di questo tipo è particolarmente rilevante perché è una situazione in cui ci si ritrova nel limite di altissime energie, in cui  $E \gg m$  e la massa  $m$  è irrilevante.

Un fenomeno è detto **chiriale** quando *non* è identico alla sua immagine speculare, indotta da una trasformazione di parità. Sappiamo bene che nella rappresentazione di Weyl, o rappresentazione chiriale, lo spinore di Dirac  $\psi$  è dato da due componenti  $\psi_L$  left e  $\psi_R$  right che trasformano in modo differente sotto trasformazioni di Lorentz (lo abbiamo visto nella sezione §5.1), e a proposito ricordiamo che  $\psi_L$  e  $\psi_R$  sono legati attraverso una relazione di complessa coniugazione. Possiamo riscrivere l'equazione di Dirac in termini di  $\psi_L$  e  $\psi_R$  (utilizziamo la rappresentazione di Weyl per le  $\gamma$ ):

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x) = 0 \quad (5.7.14)$$

$$\begin{pmatrix} -m\mathbb{1} & i(\partial_0 + \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}) \\ i(\partial_0 - \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}) & -m\mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L(x) \\ \psi_R(x) \end{pmatrix} = 0 \quad (5.7.15)$$

da cui otteniamo:

$$\begin{cases} i(\partial_0 + \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}) \psi_R(x) - m\psi_L(x) = 0 \\ i(\partial_0 - \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}) \psi_L(x) - m\psi_R(x) = 0 \end{cases} \quad (5.7.16)$$

che ci sta in qualche maniera dicendo che la massa "mescola" le componenti left e right nell'equazione di Dirac.

Solo se facciamo il limite  $m \rightarrow 0$ , ossia guardiamo il caso mass-less,  $\psi_L$  e  $\psi_R$  si disaccoppiano e otteniamo le equazioni:

$$\begin{cases} i(\partial_0 + \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}) \psi_R(x) = 0 \\ i(\partial_0 - \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}) \psi_L(x) = 0 \end{cases} \quad (5.7.17)$$

che vengono solitamente chiamate **equazioni di Weyl** per particelle a massa nulla. Le equazioni (5.7.17) sono molto importanti poiché permettono di vedere il fatto che l'equazione di Dirac ci sta dicendo che in natura esistono solo due tipi di particelle massless, un tipo sinistrorso e uno destrorso. Possiamo riscrivere l'equazione (5.7.17) ricordando che per particelle libere, che sono autostati dell'impulso, possiamo porre:

$$\psi(x) = \psi(\vec{p}) e^{p^\mu x_\mu} = \psi(\vec{p}) e^{-iEt + i\vec{p}\cdot\vec{x}} \quad (5.7.18)$$

e se la loro massa è nulla anche:

$$E^2 - |\vec{p}|^2 = m^2 \implies E = |\vec{p}| \quad (5.7.19)$$

così che le equazioni (5.7.17) diventano:

$$(E \pm \vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \psi_{R,L}(\vec{p}) = 0 \quad (5.7.20)$$

che scrivendo  $E = |\vec{p}|$  e  $\vec{p} = |\vec{p}|\hat{p}$ , con  $\hat{p}$  direzione del moto, diventano:

$$\begin{cases} \vec{\sigma} \cdot \hat{p} \psi_R = \psi_R \\ \vec{\sigma} \cdot \hat{p} \psi_L = -\psi_L. \end{cases} \quad (5.7.21)$$

Se chiamiamo **operatore di elicità**<sup>7</sup> l'operatore:

$$\vec{\sigma} \cdot \hat{p} = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} \quad (5.7.22)$$

allora la riscrittura delle equazioni di Weyl in termini di esso (5.7.21) ci permettono di vedere che una particella destrorsa ha elicità positiva e una particella sinistrorsa ha elicità negativa. Facciamo solo attenzione che le stessa relazioni (5.7.21) per antiparticelle hanno segni scambiati:

$$\begin{cases} \vec{\sigma} \cdot \hat{p} \phi_R = -\phi_R \\ \vec{\sigma} \cdot \hat{p} \phi_L = \phi_L. \end{cases} \quad (5.7.23)$$

Le equazioni di Weyl 5.7.21 sono molto importanti, esse ci dicono che per particelle libere *massless*, gli spinori  $\psi_L$  e  $\psi_R$  sono autostati dell'operatore di elicità, ed il loro spin è completamente allineato, o antiallineato, lungo la direzione del moto. È molto importante ricordare che questa interpretazione è valida solo ed esclusivamente per particelle a massa nulla, poiché per  $m = 0$  lo spin non è ben definito, a differenza del caso  $m \neq 0$ .

Possiamo vedere che nel caso  $m = 0$  i concetti di chiralità ed elicità coincidono. Infatti, se prendiamo  $m = 0$  e indichiamo con  $\psi_+$  una generica soluzione dell'equazione di Dirac, per esempio di tipo  $u$  o  $v$ , allora l'equazione di Dirac (5.1.1) diventa:

$$\not{p} \psi_+ = 0 \implies (\gamma^0 E - \vec{\gamma} \cdot \vec{p}) \psi_+ = 0 \quad (5.7.24)$$

$$\implies \gamma^0 (\gamma^0 |\vec{p}| - \vec{\gamma} \cdot \vec{p}) \psi_+ = 0 \quad (5.7.25)$$

$$\implies (\mathbb{1} - \gamma^0 \vec{\gamma} \cdot \hat{p}) \psi_+ = 0 \quad (5.7.26)$$

$$\implies \left( \mathbb{1} - \gamma^5 \frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} \right) \psi_+ = 0 \quad (5.7.27)$$

$$\implies \gamma^5 \left( \mathbb{1} - \gamma^5 \frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} \right) \psi_+ = 0 \quad (5.7.28)$$

$$\implies \left( \gamma^5 - \frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} \right) \psi_+ = 0 \quad (5.7.29)$$

$$\implies \gamma^5 = \frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} \quad (5.7.30)$$

il che ci mostra, sempre con  $\vec{\Sigma}$  definita da (E.5.6), che, nel caso  $m = 0$ , la chiralità ( $\gamma^5$ ) e l'elicità:

$$\frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} \quad (5.7.31)$$

---

<sup>7</sup>Vedi il seguito del capitolo per capire come esso può essere generalizzato anche in 4 dimensioni.

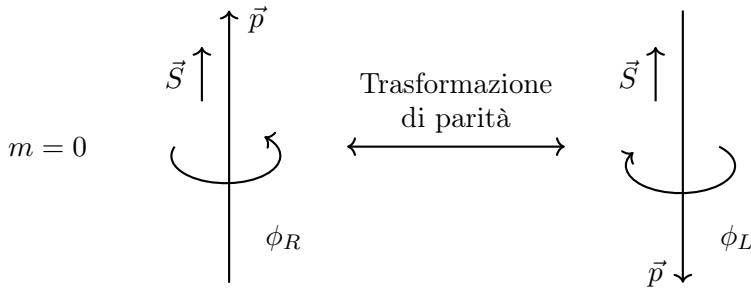
generalizzata in 4 dimensioni coincidono, anche se sono concettualmente diverse. Notiamo solo che, come già accennato,  $\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}$  generalizza a 4 dimensioni il prodotto  $\vec{\sigma} \cdot \vec{p}$ .

Facciamo ora delle osservazioni riguardo chiralità ed elicità nei casi di  $m = 0$  ed  $m \neq 0$ .

L'elicità non è un'invariante di Lorentz, infatti ci dice solo se lo spin e l'impulso della particella sono allineati o antiallineati, e per questo essa dipende dal sistema di riferimenti in cui è misurata. Infatti una particella di massa  $m$  (per stati massless è diverso) può essere boostata in un sistema di riferimento, differente da quello iniziale, in cui lo spin non cambia, ma l'impulso fa  $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$  e di conseguenza in cui l'elicità è cambiata di segno. Possiamo vedere esplicitamente questa cosa facendo una trasformazione di parità. Infatti, per parità lo spin (rappresentato dalla matrice  $\sigma$  o se vogliamo  $\Sigma$ ) non cambia segno, però l'impulso si, dunque, quando facciamo una trasformazione di questo tipo quello che abbiamo è:

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \quad \longrightarrow \quad -\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \quad (5.7.32)$$

quindi l'elicità cambia di segno e se prima una particella era destrorsa, quindi l'autovalore dell'elicità era  $+1$ , quindi spin ed impulso allineati, dopo una trasformazione di parità, l'autovalore dell'elicità ha cambiato segno, lo spin sarà antiparallelo all'impulso, e la particella sarà sinistrorsa. Questa cosa è visibile nella figura 5.1. Un'altro piccolo appunto: la trasformazione  $\psi_{L,R} \xrightarrow[P]{} \psi_{R,L}$  è uno dei motivi per cui abbiamo bisogno di uno spinore a quattro componenti per l'equazione di Dirac. Infatti, per via della trasformazione possiamo dire che abbiamo le stesse proprietà per una certa particella se sottoposta a trasformazioni di parità.



**Figura 5.1:** Trasformazione di parità di una particella massless

A differenza, la chiralità è un'invariante di Lorentz e  $\psi_L$  e  $\psi_R$  sono autostati di  $\gamma^5$  in qualsiasi sistema di riferimento. Infatti la matrice  $\gamma^5$  commuta con tutti i generatori di Lorentz  $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$  (ricordiamoci che  $\gamma^5$  anticommute con tutte le  $\gamma^\mu$ ).

Quindi in conclusione, nel caso di particelle massive,  $m \neq 0$ , gli autostati di chiralità, cioè gli autostati di  $\gamma^5$  (che se utilizziamo la rappresentazione di Weyl è diagonale),  $\psi_L$  e  $\phi_R$  non sono autostati di elicità.<sup>8</sup>

Però attenzione, perché se è vero che per stati massivi l'elicità non è un'invariante relativistica, per una particella relativistica l'elicità, non lo spin, è una costante del moto. Si può dimostrare infatti che  $[H, \vec{\Sigma} \cdot \vec{p}] = 0$  ricordando che  $\Sigma$  è la matrice che in (E.5.6) avevamo definito come la matrice di spin. In altre parole, se una particella relativistica, o massless, ha una certa elicità in un istante  $t$ , essa rimarrà nello stesso stato di elicità a qualsiasi  $t'$  successivo.

Per concludere la sezione facciamo un attimo delle precisazioni e della attenzioni. Tutto il discorso sulle interpretazioni che diamo delle energie positive e negative non è collegato con il fatto che abbiamo parte left e parte right di una particella. Quando abbiamo cominciato a vedere come si separasse l'equazione di Dirac se spezzavamo lo spinore  $\psi$  in parte left e right noi stavamo comunque parlando di una singola particella e i due stati left e right sono due stati possibili di una singola particella. Le interpretazioni che diamo delle soluzioni di Dirac sono una parte di particella e una parte di antiparticella rispettivamente ad energia positiva e negativa, ma questo tipo di interpretazione non centra assolutamente nulla con il fatto che un sistema sia rappresentato da uno spinore left piuttosto che uno right. Come avremo modo di vedere in corsi successivi, un elettrone è descritto da una sovrapposizione di stato left e uno right, ossia il suo stato oscilla tra parte left e parte right. Un altro modo che abbiamo di accorgerci che left e right non centrano con particella e antiparticella è che i proiettori su stati ad energia positiva (5.6.89) o negativa (5.6.90) sono ben diversi dalle definizioni che abbiamo dato dei proiettori left (5.7.2). In particolare i proiettori sulle energie positive o negative non dipendono per nulla dalla chiralità  $\gamma^5$ , che è una proprietà fondamentale che diventa fondamentale quando  $m = 0$  e separammo l'equazione di Dirac in parte left e right. Per particelle massless, come ad esempio il neutrino, abbiamo un comportamento differente rispetto le particelle massive, come l'elettrone, e non vediamo un'oscillazione tra parte left e right bensì, le particelle con  $m = 0$  si trovano solamente in uno dei due stati e le due parti (left e right) non sono mescolate.

Notiamo solo che anche se abbiamo particelle con  $m \neq 0$  possiamo comunque proiettare il loro stato, che mescola  $\psi_L$  e  $\psi_R$ , su parte left e parte right, ma troveremo che queste particelle non sono descritte da autostati dell'operatore di elicità.

---

<sup>8</sup>Ad eccezione del limite ad altissime energie,  $E \gg m$ , in cui la massa  $m$  può essere trascurata.

## 5.8 Momento angolare e spin

Vediamo in questa sezione, con le sue sottosezioni, alcune cose da ricordare e da tenere con noi riguardo lo spin e il momento angolare.

### 5.8.1 Operatore di spin

Avevamo recuperato il concetto di spin nella sezione §2.5.3 parlando dell'operatore di Pauli-Lubanski<sup>9</sup>:

$$W^\mu = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} P_\nu M_{\rho\sigma} \quad (5.8.1)$$

in cui  $P_\nu$  è il quadrimpulso e  $M_{\rho\sigma}$  sono i generatori del gruppo di Lorentz. Tramite (5.8.1) avevamo definito l'operatore di Casimir:

$$W^2 = -m^2 s(s+1) \quad (5.8.2)$$

del gruppo delle trasformazioni di Lorentz. Per una particella massiva, che sappiamo poter mettere in un sistema di riferimento di riposo in cui  $P^\mu = (m, \vec{0})$ , il vettore (5.8.1) diventa:

$$W^i = -\frac{1}{2} m \varepsilon^{0ijk} M_{jk}. \quad (5.8.3)$$

Noi a suo tempo avevamo individuato  $\varepsilon^{0ijk} M_{jk}$  con l'operatore  $2S^i$  di spin poiché soddisfavano la stessa algebra di momento angolare, ma  $\varepsilon^{0ijk} M_{jk}$  non sarebbe potuto essere un momento angolare orbitale poiché nel sistema di riposo  $\vec{L} = 0$ . Avevamo scritto quindi:

$$W^i = -m S^i \quad (5.8.4)$$

e l'operatore di Casimir:

$$W^2 = -ms(s+1) \quad (5.8.5)$$

che ci permette di etichettare con i suoi autovalori gli stati fisici di spin della particella. Avevamo anche visto che gli stati fisici di una particella massiva sono etichettati da 3 autovalori (un di  $S^3$  e due dei Casimiri  $W^2$  e  $P^2$ ), la massa  $m$  (corrispondente a  $P^2$ ), lo spin  $s(s+1)$  (corrispondente a  $W^2$ ) e la terza componente dello spin  $S^3$  che può assumere valori  $-s, \dots, s$ . Per questo avevamo detto che la particella massiva ha  $2s+1$  gradi di libertà.

Però, a questo punto della nostra teoria ci siamo messi nello spazio delle matrici  $\gamma$  e vogliamo scrivere l'operatore  $W^\mu$  in termini di esse. Ricordiamo che:

$$M^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad (5.8.6)$$

---

<sup>9</sup>Ricordiamo anche che il segno meno è solo una convenzione, avremmo anche potuto mettere un +.

e che vale:

$$\gamma^5 = -\frac{i}{4}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \quad (5.8.7)$$

da cui possiamo ricavare che<sup>10</sup>:

$$\gamma^5\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\sigma_{\rho\sigma}. \quad (5.8.8)$$

Grazie a (5.8.8) riusciamo a riscrivere il vettore (5.8.1), nel caso generico, come:

$$W^\mu = -\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}P_\nu M_{\rho\sigma} \quad (5.8.9)$$

$$= -\frac{1}{4}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}P_\nu\sigma_{\rho\sigma} \quad (5.8.10)$$

$$= \frac{i}{2}P_\nu\gamma_5\sigma^{\mu\nu} \quad (5.8.11)$$

dunque abbiamo l'operatore di Pauli-Lubanski:

$$W^\mu = \frac{i}{2}\gamma^5\sigma^{\mu\nu}P_\nu. \quad (5.8.12)$$

Nel sistema di riferimento di riposo, dove  $P^\mu = (m, \vec{0})$ , l'operatore (5.8.12) diventa:

$$W^\mu(m, \vec{0}) = \frac{i}{2}\gamma^5\sigma^{\mu 0}m = -\frac{1}{4}\gamma^5m[\gamma^\mu, \gamma^0] \quad (5.8.13)$$

dunque:

$$\begin{cases} W^0(m, \vec{0}) = 0 \\ W^i(m, \vec{0}) = -\frac{1}{2}m\gamma^5\gamma^i\gamma^0 = -mS^i \end{cases} \quad (5.8.14)$$

come fatto per (5.8.4) identifichiamo:

$$\gamma^5\gamma^i\gamma^0 = -\Sigma^i \quad (5.8.15)$$

che vuol dire identificare  $\gamma^5\gamma^i\gamma^0$  con lo spin. Definiamo quindi l'**operatore di spin**:

$$\vec{\Sigma} = \frac{2}{m}\vec{W} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \quad (5.8.16)$$

come avevamo già visto (E.5.6). Notiamo che l'operatore (5.8.16) si ottiene replicando le matrici di Pauli e le estende in 4 dimensioni; inoltre ha questa forma sia nella rappresentazione di Weyl che di Dirac.

Notiamo che se consideriamo una particella massless, lo spin non è un numero quantico ben definito e non possiamo utilizzare la relazione (5.8.16),

---

<sup>10</sup>È difficile da dimostrare in generale, ma la si può verificare per due valori specifici di  $\mu$  e  $\nu$ , ad esempio per  $\mu = 0$  e  $\nu = 1$  così che  $\gamma^5\sigma^{01} = -\gamma^2\gamma^3$ .

però possiamo ricorrere all'elicità  $h$ , come visto nella sezione §2.5.3, definita dalla relazione:

$$W_\mu = h P_\mu \implies h = \frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} = \vec{\Sigma} \cdot \hat{p} \quad (5.8.17)$$

ossia, come la proiezione dello spin  $\Sigma$  sulla direzione dell'impulso  $\hat{p}$ .

### 5.8.2 Momento angolare orbitale e spin

Ricordiamo alcune cose già dette nel capitolo §2 riguardo il momento angolare orbitale e lo spin, in generale dei generatori del gruppo di Lorentz e come tutto sia collegato alla matrice di spin  $\Sigma$ .

Ricordiamoci che la forma più generale dei generatori delle trasformazioni di Lorentz è:

$$M_{\rho\sigma} = i(x_\rho \partial_\sigma - x_\sigma \partial_\rho) + S_{\rho\sigma} \quad (5.8.18)$$

in cui identifichiamo il termine dipendente da coordinate e derivate come il momento angolare  $L_{\rho\sigma}$ <sup>11</sup> e il secondo termine  $S_{\rho\sigma}$  come lo spin.

Però, ora sappiamo che lo spin del campo fermionico viene identificato con il generatore  $\sigma^{\mu\nu}$ . Per trasformazioni infinitesime possiamo scrivere:

$$\psi'(x') = \left( \mathbb{1} - \frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}(x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu) \right) \psi(x) \quad (5.8.19)$$

e possiamo identificare l'operatore di momento angolare totale con:

$$J_{\text{tot}}^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu} + i(x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu). \quad (5.8.20)$$

Concentriamoci sulla parte spaziale di (5.8.20). Sappiamo che per  $\mu = \nu = i$  il termine  $i(x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu)$  è il momento angolare orbitale  $L^i$ . Per quanto riguarda la parte di spin ricordiamoci che vale:

$$S^i = \frac{1}{4}\varepsilon_{ijk}\sigma^{jk} = \frac{i}{8}\varepsilon_{ijk}[\gamma^j, \gamma^k] = \frac{i}{4}\varepsilon_{ijk}\gamma^j\gamma^k \quad (5.8.21)$$

che coincide con:

$$S^i = \frac{1}{2}\Sigma^i = \frac{1}{2}\gamma^5\gamma^0\gamma^i. \quad (5.8.22)$$

Riscriviamo quindi (5.8.20) come:

$$\vec{J}_{\text{tot}} = \frac{1}{2}\vec{\Sigma} + \vec{L} \quad (5.8.23)$$

in accordo con l'algebra del momento angolare.

---

<sup>11</sup>Ricordiamoci che per  $\rho = \sigma = i$  allora  $L_{\rho\sigma}$  è proprio l'operatore di momento angolare orbitale.



## Capitolo 6

# Seconda quantizzazione

Non l'ho mai fatto, ma vorrei iniziare questo capitolo con una citazione:

The career of a young theoretical physicist consists of treating the harmonic oscillator in ever increasing levels of abstraction.

Sidney Coleman

Vediamo in questo capitolo il processo che dobbiamo fare per passare da una teoria classica, con campi classici, alla teoria di campi quantistici e relativistici che tanto stiamo inseguendo. Come vedremo, sarà un passaggio che a parole sembra banale e solo concettuale, ma nella pratica ci metteremo un po'. Vediamo nella prima sezione com'è fatto un campo classico e solo dopo cominceremo a trattare campi quantistici. Nel corso del capitolo il primo tipo di campo di cui parleremo è il campo scalare scarico, motivo per cui alcuni concetti li introdurremo, e dunque spiegheremo più in dettaglio, con esso e li applicheremo velocemente ai campi che tratteremo in seguito; questo è il motivo per cui la sezione del campo scalare è più ampia delle altre. Successivamente vedremo campi scalari carichi e campi spinoriali. Ho anche scritto una sezione riassuntiva dei risultati delle varie sezioni. Parleremo per ultimo anche dell'interpretazione che daremo dei risultati introducendo formalmente, finalmente, i concetti di particella ed antiparticella tramite l'interpretazione di Feynmann<sup>1</sup>. Nota importante: la sezione §6.7 può essere letta come prima sezione o come ultima, non contenendo nessun conto, ma solamente alcune interpretazioni. I riferimenti per questo capitolo sono il

---

<sup>1</sup>In realtà l'interpretazione che studieremo è stata data anche dal fisico svizzero Ernst Stuckelberg a cui spesso non si fa molto merito e che ha contribuito anche in altri modi alla Teoria Quantistica dei Campi; infatti, ha anche dato una sua formulazione di quelli che chiamiamo *diagrammi di Feynmann*, ha formulato un analogo della *teoria di Yukawa* che considera particelle messaggere, ha anche "scoperto" il gruppo di rinormalizzazione e la conservazione del numero barionico.

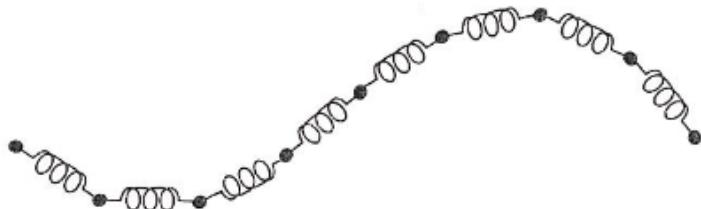
Peskin e Schroeder [7], lo Srednicki [10], il Kaku [5], ma anche il Lancaster e Blundell [6] per discorsi più qualitativi, discorsivi e di interpretazione.

## 6.1 Campo classico

Prima di addentrarci nella definizione di campo in Teoria Quantistica dei Campi, parlando di lagrangiane, azioni, minimizzazioni e cose complicate, proviamo a capire come possiamo descrivere una Teoria di Campo Classica, che descrive un sistema classica con infiniti gradi di libertà. Sembra una sezione completamente inutile e una perdita di tempo, e forse per certi versi lo è (e io l'ho sicuramente pensato all'inizio), ma in realtà è lo strumento migliore che abbiamo per avere in mente un'immagine (seppur pittorica) di che cosa possa effettivamente essere un campo. Quindi, analizziamo un campo classico solo per riuscire ad avere un'immagine nella nostra testa di quello che poi diventerà un campo quantistico. Per fare ciò ci aiutiamo con la sezione §1.8 di M. Kaku [5].

Il processo che rende le coordinate  $q^i$  e  $p^i$  delle quantità quantizzate lo chiamiamo *prima quantizzazione*, invece, il processo che permette di quantizzare i campi, rendendoli degli operatori quantistici, è detta *seconda quantizzazione*.

Ora, vogliamo passare da 3 gradi di libertà a  $\infty$  gradi di libertà. Consideriamo un sistema classico, ad esempio possiamo prendere un sistema di  $N$  masse  $m$ , tutte attaccate tra loro tramite delle molle. Il sistema lo possiamo vedere nella figura 6.1.



**Figura 6.1:** Sistema di masse  $m$  collegate tramite molle

La lagrangiana di un sistema di questo tipo sarà, prendendo  $x_r$  la coordinata che descrive la posizione delle masse:

$$L = \sum_{r=1}^N \left[ \frac{1}{2} m_r (\dot{x}_r^2) - \frac{1}{2} k (x_r - x_{r+1})^2 \right] \quad (6.1.1)$$

in cui  $k$  è la costante elastica delle molle. Ora, partendo dal nostro sistema discretizzato, immaginiamo di estendere al continuo il sistema, il che vuol

dire immaginare che le masse siamo sempre più vicine tra loro, in modo che  $x_r$  possa variare con continuità. Se pensiamo che a coppie le masse siano separate da una distanza  $\varepsilon$ , allora per fare il limite al continuo possiamo fare  $\varepsilon \rightarrow 0$ , o equivalentemente  $N \rightarrow \infty$ . I due limiti sono equivalenti perché se mandiamo ad infinito il numero di masse è la stessa cosa che chiedere che esse siano infinitesimalmente vicine. Riscriviamo in modo comodo la lagrangiana:

$$L = \sum_{r=1}^N \frac{\varepsilon}{2} \left[ \frac{m_r (\dot{x}_r^2)}{\varepsilon} - k \frac{(x_r - x_{r+1})^2}{\varepsilon} \right] \quad (6.1.2)$$

le cui quantità, quando facciamo il limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ , diventano:

$$\varepsilon \rightarrow dx \quad (6.1.3)$$

$$x_r \rightarrow \phi(x, t) \quad (6.1.4)$$

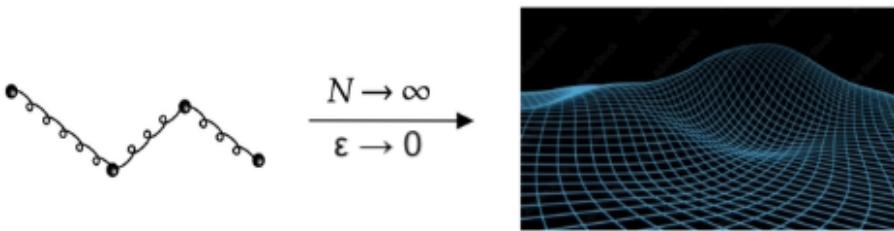
$$\dot{x}_r \rightarrow \dot{\phi}(x) \quad (6.1.5)$$

$$\frac{m}{\varepsilon} \rightarrow \mu \quad (6.1.6)$$

$$k\varepsilon \rightarrow Y \quad (6.1.7)$$

$$\frac{(x_r - x_{r+1})^2}{\varepsilon^2} \rightarrow \left( \frac{\partial \phi(x)}{\partial x} \right)^2 \quad (6.1.8)$$

in cui interpretiamo il campo  $\phi$  come estensione al continuo della variabile cinematica  $x_r$ , ovvero passiamo da un insieme discreto di punti ad una funzione continua ( $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ ) e in questo moto il campo rappresenta una perturbazione che pervade tutto lo spazio e indica lo spostamento della particella nella posizione  $x$  al tempo  $t$ . Abbiamo indicato con  $\mu$  la densità lineare di massa e con  $Y$  il modulo di Young. Possiamo guardare la figura 6.2 per un'immagine pittorica rappresentativa di un campo classico.



**Figura 6.2:** Immagine pittorica di un campo.

Se a questo punto ci mettessimo a scrivere l'equazione di Eulero-Lagrange della lagrangiana che abbiamo scritto troveremmo:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\mu}{Y} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (6.1.9)$$

che ci è familiare, poiché non è altro che l'equazione delle onde unidimensionale per un sistema che si muove a velocità  $\sqrt{Y/\mu}$ . Questo fatto è molto importante perché (6.1.9) ci dice che  $\phi$  è un'onda.

Noi quando faremo Teoria Quantistica dei Campi scriveremo delle lagrangiane del tipo:

$$L(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) \quad (6.1.10)$$

in cui indichiamo:

$$\partial_\mu = \left( \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \quad (6.1.11)$$

cose necessarie dal momento che dobbiamo lavorare nello spazio di Minkowski quadridimensionale. Utilizzeremo la densità lagrangiana  $\mathcal{L}$ , che è quella che fa partire il tutto perché permette di calcolare:

$$L = \int d^3x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \quad (6.1.12)$$

e successivamente:

$$S = \int d^4x \mathcal{L} = \int dt L. \quad (6.1.13)$$

A onor del vero, ci riferiamo alla seconda quantizzazione quando prendiamo un campo classico  $\phi(\vec{x}, t)$  e lo quantizziamo, ovvero, lo eleviamo al ruolo di operatore  $\hat{\phi}(x^\mu)$  e diciamo come opera, il che equivale a definirne l'algebra. Analizzeremo tutto meglio e in modo più formale nel corso del capitolo.

## 6.2 Quantizzazione di una teoria di campo

Tramite i capitoli §3 e §4 abbiamo sviluppato tutti gli strumenti necessari per costruire i funzionali di azione  $S$  in termini di invarianti per trasformazioni di Poincaré, così da assicurarci la consistenza con i principi della Relatività Speciale. Però tutto ciò che abbiamo detto e dimostrato ci ha fatto fare un passo indietro rispetto la Meccanica Quantistica, infatti, abbiamo sviluppato tutto secondo una teoria di campo classica, ovviamente non applicata alla descrizione di una singola particella (un singolo punto materiale), ma piuttosto ad un campo e dunque ad un sistema esteso. Però tutto va secondo i piani, ora dobbiamo solo rendere tutti i nostri oggetti quantistici.

Il metodo formalmente più elegante è la *quantizzazione attraverso il path-integral*, che vedremo nel corso di "Fondamenti di Teoria Quantistica dei Campi". Il metodo degli integrali di cammino ha il vantaggio di essere basato su principi molto semplici ed intuitivi, ma comporta lo svantaggio che i calcoli sono molto complicati. La sua potenza è che si può applicare a

teorie di campo interagenti. L'integrazione funzionale è una cosa matematicamente molto delicata, che a rigore non esiste nello spazio Minkowskiano (ricordiamoci che per fare i conti facevamo sempre la rotazione di Wick).

Noi utilizzeremo un metodo più diretto, forse meno elegante, detto **quantizzazione canonica**. È il metodo che ricalca i passaggi che storicamente sono stati fatti per arrivare alla Teoria Quantistica dei Campi, e mette in luce in modo esplicito la natura di questo procedimento. Il problema che si porta dietro è che è un processo molto semplice e funziona molto bene per campi scalari e spinoriali liberi, ma diventa lungo e complesso per lagrangiane interagenti o più complesse. Per esempio, vedremo negli altri corsi, che è molto più semplice quantizzare il campo interagente con fermione carico tramite gli integrali di cammino rispetto che con la quantizzazione canonica.

Riassumendo, *quantizzare* vuol dire: interpretare i campi, che rappresentano le variabili canoniche estese al continuo, come degli operatori; fissare opportunamente le relazioni di commutazione; e risolvere la teoria trovando autovalori e autovettori dell'hamiltoniana.

### 6.2.1 Quantizzazione canonica

In Meccanica Quantistica la quantizzazione canonica è l'operazione che ci permette di passare dal formalismo lagrangiano a quello hamiltoniano, proprio come in Meccanica Classica partivamo dalle coordinate generalizzate  $q^i$  e passavamo ai momenti coniugati  $p_i$ . In Meccanica Classica avevamo:

$$[q^i, q^j] = [p_i, p_j] = 0 \quad , \quad [q^i, p_j] = i\delta_{ij} \quad (6.2.1)$$

nella teoria di campo imporremo ai campi e ai loro momenti coniugati delle relazioni di commutazione (o anticommutazione) analoghe a queste, a simboleggiare anche il passaggio  $q^i \rightarrow \phi(x^\mu)$  e  $p_i \rightarrow \Pi(x^\mu)$ .

La quantizzazione canonica è anche chiamata *seconda quantizzazione*, in realtà ormai non più, riferendosi alla prima quantizzazione come all'operazione che si è fatta in Meccanica Quantistica elevando  $E \rightarrow \partial_t$  e  $p \rightarrow \partial_x$  al ruolo di operatori. I passi che dobbiamo seguire per svolgere la quantizzazione canonica sono:

1. Scrivere una lagrangiana  $\mathcal{L}$  in funzione degli invarianti di Lorentz costruiti tramite i campi che ci interessano. Questa è la parte creativa del processo perché possiamo sbizzarrirci facendo questa cosa, dal momento che esistono diverse combinazioni per creare invarianti, tutte sono possibili, ma non tutte porteranno a risultati interessanti o sensati fisicamente.
2. Partendo da  $\mathcal{L}$  e dai campi calcoliamo la densità di impulso  $\Pi$  e di hamiltoniana  $\mathcal{H}$ .

3. Promuoviamo i campi e i loro impulsi coniugati al ruolo di operatori. Dovremo dunque impostare le appropriate condizioni di commutazione tra i campi  $\phi$  e i momenti  $\Pi$ , in modo da renderli operativamente quantistici.
4. Sviluppiamo i campi in funzione di operatori di creazione e distruzione, tramite un'analisi dei modi normali di oscillazione e le trasformate di Fourier. Questi operatori creano e distruggono particelle e ci permettono di utilizzare il formalismo dei numeri di occupazione e di lavorare nello spazio di Fock<sup>2</sup>.
5. Risolvere la teoria trovando autovalori e autovettori dell'hamiltoniana  $\mathcal{H}$ , con la precisazione del normal ordering che ci consente di eliminare gli infiniti che si vengono a creare.

L'obbiettivo di una qualsiasi teoria quantistica è risolvere lo spettro dell'hamiltoniana. Nella teoria di campo che stiamo costruendo questo non sarà sempre possibile, anche ostacolati dal fatto che sono presenti infiniti gradi di libertà. Però, esistono alcune teorie semplificate in cui riusciamo a diagonalizzare  $\hat{H}$  che sono le teorie libere, guarda caso quelle che analizzeremo nel corso del capitolo. Le teorie di campo libere sono "facili" perché le lagrangiane che scriviamo tipicamente sono quadratiche nei campi e le equazioni del moto di conseguenza sono lineari.

### 6.3 Quantizzazione canonica del campo scalare

Per fare la quantizzazione canonica di un campo scalare  $\phi$  di Klein-Gordon dobbiamo spostarci dalla formulazione lagrangiana, in cui abbiamo  $\mathcal{L}$  manifestamente Lorentz invariante, alla formulazione hamiltoniana, in cui saremo costretti a perdere l'invarianza. La lagrangiana del campo scalare è:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \psi^2 \quad (6.3.1)$$

e a partire dal campo  $\phi(x)$  costruiamo il suo canonico coniugato. Dobbiamo ricordarci che il campo  $\phi(x)$  è l'estensione al continuo della variabile cinematica  $x$  di un sistema discreto, e se prima avevamo  $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}$  ora,

---

<sup>2</sup>Per motivi di tempo e anche di brevità non riporto tutta la trattazione relativa agli operatori  $a$  e  $a^\dagger$  e allo spazio di Fock, ma farò come la maggior parte della letteratura e mi limiterò a intrudurre solamente gli oggetti e le relazioni utili ai miei fini. Lo spazio di Fock permette di "riorganizzare" lo spazio di Hilbert e di trattare sistemi di particelle identiche con un nuovo formalismo, trattando la funzione d'onda, nel senso della MQ, come un campo. Io ho scritto nell'Appendice F un breve riassunto delle cose chiave che ci serviranno nel capitolo, ma una trattazione più soddisfacente può essere trovata nelle *note del corso di Meccanica Quantistica 2* del Prof. Sciuto. Se avete seguito il corso di IFIF sarà sufficiente rivedere gli appunti.

data  $\mathcal{L}(\phi(x^\mu), \partial_\mu \phi(x^\mu))$ , possiamo costruire  $\Pi(x^\mu)$  il campo canonicamente coniugato a  $\phi(x^\mu)$  come:

$$\Pi(\vec{x}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(\vec{x}, t)} \quad (6.3.2)$$

che possiamo anche interpretare come densità di impulso associato al campo  $\phi$ . Facendo la derivata rispetto  $\dot{\phi}$  stiamo rompendo l'invarianza di Lorentz, poiché non stiamo più tenendo spazio e tempo sullo stesso piano, ma ne stiamo preferendo una rispetto l'altra, infatti  $\dot{\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial t}$ . Presa la lagrangiana (6.3.1) possiamo riscriverla come:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \quad (6.3.3)$$

$$= \frac{1}{2} (\partial_0 \phi \partial^0 \phi + \partial_i \phi \partial^i \phi) - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \quad (6.3.4)$$

$$= \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \quad (6.3.5)$$

che ci fa ottenere:

$$\Pi(\vec{x}, t) = \dot{\phi}(\vec{x}, t). \quad (6.3.6)$$

Calcolato  $\Pi(x^\mu)$  possiamo scrivere l'hamiltoniana:

$$\mathcal{H} = \Pi \dot{\phi} - \mathcal{L} = \frac{1}{2} [\Pi^2 + (\vec{\nabla} \phi)^2 + m^2 \phi^2]. \quad (6.3.7)$$

La transizione da Meccanica Classica a Meccanica Quantistica avviene formalmente elevando i campi al ruolo di operatori<sup>3</sup> e postulando le opportune relazioni di commutazione tra il campo  $\phi$  e il suo momento coniugato  $\Pi$ , che vuol dire specificare il loro comportamento. Postuliamo:

$$[\hat{\phi}(\vec{x}, t), \hat{\Pi}(\vec{y}, t)] = i\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad (6.3.8)$$

dove abbiamo preso i campi a tempi uguali e posizioni diverse e abbiamo omesso di scrivere nel termine di destra un  $\hbar$  poiché stiamo lavorando in unità naturali. Abbiamo scritto la (6.3.8) in analogia al caso discreto in cui  $[\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\delta_{ij}$ , ma ora avendo i campi  $\phi$  e  $\Pi$  che descrivono sistemi continui il commutatore è normalizzato alla  $\delta$  di Dirac. Ovviamente, dobbiamo definire anche le regole di commutazione:

$$[\hat{\phi}(\vec{x}, t), \hat{\phi}(\vec{y}, t)] = 0 \quad (6.3.9)$$

$$[\hat{\Pi}(\vec{x}, t), \hat{\Pi}(\vec{y}, t)] = 0. \quad (6.3.10)$$

---

<sup>3</sup>Che agiscono nello spazio di Fock, in cui la base degli autostati è formata da stati di un numero definito di particelle.

I commutatori (6.3.9) e (6.3.10) garantiscono la causalità, o meglio garantiscono che la misura di  $\phi$  nel punto  $\vec{x}$  all'istante  $t$  sia completamente indipendente dalla misura di  $\phi$  nel punto  $\vec{y}$ , con  $\vec{y} \neq \vec{x}$ , nello stesso istante  $t$ .<sup>4</sup> Quando diciamo misure intendiamo misure in senso quantistico. Viene rispettata la causalità poiché se  $t_x = t_y$  allora  $(x^\mu - y^\mu)^2 < 0$ , cioè è un intervallo di tipo spazio.

Ora, diamo una rappresentazione esplicita ai campi operatoriali in termini di trasformate di Fourier, ovvero, in termini di uno sviluppo in onde piane. Ma perché? Ci sono moltissimi modi di rispettare le regole di commutazione (6.3.9) e (6.3.10), ma è più comodo cercare un'espressione di  $\phi(x^\mu)$  e  $\Pi(x^\mu)$  in termini di trasformata di Fourier e sovrapposizione di onde piane perché l'oscillatore armonico è soluzione dell'equazione di Klein-Gordon<sup>5</sup> e possiamo scrivere una generica soluzione di essa  $\phi(x)$  come sovrapposizione infinita di oscillatori, questo è anche uno dei motivi per cui compariranno gli operatori di creazione  $a^\dagger$  e di distruzione  $a$ .

In realtà il motivo per cui si scriva l'operatore di campo  $\hat{\phi}$  proprio nel modo che troveremo mi è leggermente oscuro, ma sicuramente è un limite mio. I modi in cui ho cercato di rispondermi, prendendo spunto dalle varie fonti sono spiegati nell'Appendice G. Nel seguito della sezione cerco di seguire il discorso fatto dalla professoressa aggiustando il tiro sulle cose che non capivo.

Ci sarà utile per la nostra trattazione riprendere dalla Relatività Speciale il quadrivettore numero d'onda:

$$k^\mu = (k^0, \vec{k}) \quad (6.3.11)$$

in cui  $E = \hbar k^0 = k^0 = \omega_k$  e  $\vec{p} = \hbar \vec{k} = \vec{k}$  in unità naturali. Ricordiamo anche che:

$$k_\mu x^\mu = \omega_k t - \vec{k} \cdot \vec{x} \quad (6.3.12)$$

che è un binomio di propagazione di un'onda, è Lorentz invariante. Abbiamo anche che nello spazio degli impulsi<sup>6</sup>:

$$\partial_\mu^2 + m^2 \rightarrow k^2 - m^2. \quad (6.3.13)$$

La relazione di mass-shell risulta:

$$E^2 - m^2 = \vec{p}^2 \implies k^2 - m^2 = 0. \quad (6.3.14)$$

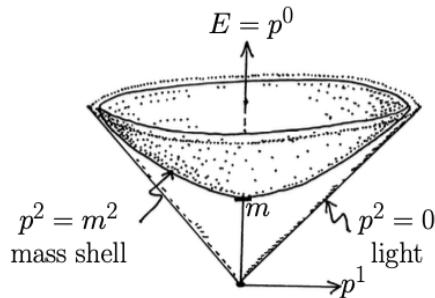
Per scrivere un'espressione del campo quantizzato possiamo ragionare con le soluzioni dell'equazione di Klein-Gordon (4.3.7), che avendo soluzioni onde piane, essendo un'equazione di teoria libera, ci permette di poter

<sup>4</sup>Questo discorso lo puoi vedere meglio sul Peskin e Schroeder [7] a pagina 27-29.

<sup>5</sup>Lo si può vedere a pagina 22 delle note di Tong [12].

<sup>6</sup>O anche meglio  $\partial_\mu^2 + m^2 \rightarrow m^2 - k^2$  poiché facciamo  $k_\mu = -i\partial_\mu$ .

dire che il campo sarà una combinazione di onde piane, o meglio, sarà uno sviluppo di Fourier. Sviluppare con Fourier vuol dire che stiamo integrando nello spazio di  $k$ , ovviamente  $k^\mu$ , e quindi con una misura di integrazione Lorentz invariante  $d^4k$ . Ovviamente dobbiamo considerare anche altri aspetti. Innanzitutto, consideriamo delle normalizzazioni davanti i termini di onda piana, che non saranno altro che i coefficienti dello sviluppo di Fourier, che avranno ruolo di operatore. Saranno proprio i coefficienti, che chiamiamo  $\hat{A}$  e  $\hat{A}^\dagger$ , che daranno la natura operatoriale a  $\phi$ . Poi, dobbiamo ricordarci che la nostra teoria vogliamo che sia non solo quantistica, ma anche relativistica e quindi vogliamo che valga la relazione di mass-shell (6.3.14), di cui possiamo garantire la validità scrivendo  $\delta(k^2 - m^2)$  (che assicura proprio che una particella di massa  $m$  assuma solo i valori di  $k^\mu$  tali per cui  $k^2 = m^2$ ). Notiamo che la condizione di mass-shell nello spazio dei quadri-momenti corrisponde ad un'iperbole<sup>7</sup>, come possiamo notare dalla figura 6.3.



**Figura 6.3:** Iperboleoide del mass-shell  $k^2 = m^2$  nello spazio dei quadri-momenti.

Sarebbe anche carino che il campo contenga grandezze che fisicamente siano sensate, ci serve per questo richiedere che l'energia sia positiva<sup>8</sup> e lo facciamo tramite il termine  $\theta(k^0)$ . Mettiamo anche la normalizzazione  $1/(2\pi)$  della trasformata di Fourier, che ovviamente sarà alla terza visto che

<sup>7</sup>Per discorsi riguardante la causalità e la relazione di mass-shell puoi leggere la sezione 2.4 di Peskin e Schroeder [7].

<sup>8</sup>Abbiamo fatto tutto il corso dicendo che esistono anche le soluzioni ad energia negativa e che le interpretiamo come antiparticelle, come mai ora le eliminiamo da campo? La risposta è che non le stiamo eliminando. È vero che interpretiamo gli stati ad energia negativa come antiparticelle, ma sistemando opportunamente i segni tra energia, carica elettrica ed impulso noi vediamo anche l'antimateria come sistemi ad energia positiva. Vedi il proseguo del capitolo per capire meglio. È necessario che  $E > 0$  perché stiamo trattando una teoria libera, ma soprattutto ancora classica, e non vogliamo energie non fisiche.

integriamo su uno spazio tridimensionale.<sup>9</sup> Scriviamo il campo:<sup>10</sup>

$$\hat{\phi}(x) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^3} \delta(k^2 - m^2) \theta(k^0) \left[ \hat{A}(k) e^{-ik^\mu x_\mu} + \hat{A}^\dagger(k) e^{ik^\mu x_\mu} \right]. \quad (6.3.15)$$

Ovviamente possiamo scrivere un po' meglio il campo (6.3.15), possiamo infatti analizzare meglio la delta e la theta, ma possiamo anche definire meglio gli operatori  $\hat{A}$  e  $\hat{A}^\dagger$ .

Abbiamo detto poco sopra che ci assicuriamo che valga la relazione di mass-shell (6.3.14) scrivendo  $\delta(k^2 - m^2)$  e che l'energia sia positiva con  $\theta(k^0)$ , dunque, la misura di integrazione che abbiamo in  $\hat{\phi}$  è:

$$d^4 k \delta(k^2 - m^2) \theta(k^0) \quad (6.3.16)$$

che è Lorentz invariante. Possiamo a questo punto utilizzare  $\delta(k^2 - m^2)$  per integrare su una delle 4 componenti di  $d^4 k$  e scegliamo  $k^0$ . Per poter fare il conto è necessario ricordare la relazione:

$$\delta(f(k)) = \sum_a \frac{\delta(k - a)}{|f'(a)|} \quad , \quad f(a) = 0 \quad (6.3.17)$$

possiamo vedere che gli zeri di  $k^2 - m^2$  sono:

$$k^2 - m^2 = (k^0)^2 - \vec{k}^2 - m^2 = 0 \implies k^0 = \pm \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} \quad (6.3.18)$$

e dunque scriviamo:

$$\delta(k^2 - m^2) = \frac{\delta(k^0 - \sqrt{\vec{k}^2 + m^2})}{2k^0} + \frac{\delta(k^0 + \sqrt{\vec{k}^2 + m^2})}{2k^0} \quad (6.3.19)$$

che se utilizziamo anche la  $\theta(k^0)$ , che manda a 0 il termine corrispondente alla soluzione negativa, è:

$$\delta(k^2 - m^2) \theta(k^0) = \frac{\delta(k^0 - \sqrt{\vec{k}^2 + m^2})}{2k^0} \quad (6.3.20)$$

in cui possiamo indicare:

$$k^0 = \omega_k = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}. \quad (6.3.21)$$

---

<sup>9</sup>Noi inseriamo il  $(2\pi)^3$  a questo punto della trattazione, ma potremmo anche evitarlo, non mettere nulla e fare finta di nulla. Troveremmo, se usassimo l'approccio gnorri, un fattore  $(2\pi)^{3/2}$  di normalizzazione per gli operatori  $\hat{A}^{(\dagger)}$  quando andiamo a studiare gli stati ad impulso definito. Dunque, in qualche modo la normalizzazione, prima o dopo, sbucherebbe.

<sup>10</sup>Noi scriviamo  $\hat{\phi}(x)$  intendendo  $x = x^\mu = (t, \vec{x})$ . Si potrebbe seguire il procedimento fatto nel Lancaster e Blundell [6] al capitolo 11.1 in cui definisce prima  $\hat{\phi}(\vec{x})$ , per vedere meglio l'analogia con gli oscillatori armonici, e poi facendo agire gli operatori di evoluzione temporale (nella rappresentazione di Heisenberg) trova  $\hat{\phi}(t, \vec{x})$ .

Utilizzando (6.3.20) per integrare su  $k^0$  abbiamo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dk^0 \delta(k^2 + m^2) \theta(k^0) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk^0 \frac{\delta(k^0 - \omega_k)}{2k^0} = \frac{1}{2\omega_k}. \quad (6.3.22)$$

Dunque, ci rimane la misura di integrazione:

$$\frac{d^3k}{2k^0} = \frac{d^3k}{2\omega_k} \quad (6.3.23)$$

e il campo è:

$$\hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} [\hat{A}(k) e^{-ik^\mu x_\mu} + \hat{A}^\dagger(k) e^{ik^\mu x_\mu}]. \quad (6.3.24)$$

Ora, ci resta da capire chi effettivamente siano gli operatori  $\hat{A}$  e  $\hat{A}^\dagger$  che compaiono in (6.3.24). Uno dei modi che abbiamo è quello di guardare le relazioni di commutazione tra il campo e il suo coniugato. Abbiamo:

$$\hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} [\hat{A}(k) e^{-ik^\mu x_\mu} + \hat{A}^\dagger(k) e^{ik^\mu x_\mu}] \quad (6.3.25)$$

$$\hat{\Pi}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} i\omega_k [-\hat{A}(k) e^{-ik^\mu x_\mu} + \hat{A}^\dagger(k) e^{ik^\mu x_\mu}] \quad (6.3.26)$$

e controlliamo le relazioni (6.3.8), (6.3.9) e (6.3.10). Notiamo che per comodità possiamo scrivere (cambiando la variabile di integrazione nel secondo termine dei campi):

$$\hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} [\hat{A}(k) + \hat{A}^\dagger(-k)] e^{-ik^\mu x_\mu} \quad (6.3.27)$$

$$\hat{\Pi}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} i\omega_k [-\hat{A}(k) + \hat{A}^\dagger(-k)] e^{-ik^\mu x_\mu} \quad (6.3.28)$$

così vediamo:

$$[\hat{\phi}(x), \hat{\Pi}(y)] = \int \frac{d^3k d^3k'}{(2\pi)^6} \frac{i\omega_{k'}}{2\omega_k} [\hat{A}(k) + \hat{A}^\dagger(-k), -\hat{A}(k') + \hat{A}^\dagger(-k')] e^{-i(k^\mu x_\mu + k'^\mu y_\mu)} \quad (6.3.29)$$

$$[\hat{\phi}(x), \hat{\Pi}(y)] = \int \frac{d^3k d^3k'}{(2\pi)^6} \frac{i\omega_{k'}}{2\omega_k} \left\{ -[\hat{A}(k), \hat{A}(k')] + [\hat{A}(k), \hat{A}^\dagger(-k')] - [\hat{A}^\dagger(-k), \hat{A}(k')] + [\hat{A}^\dagger(-k), \hat{A}^\dagger(-k')] \right\} e^{-i(k^\mu x_\mu + k'^\mu y_\mu)}. \quad (6.3.30)$$

Il commutatore è (6.3.8), a meno di fattori numerici, solo se valgono:

$$[\hat{A}(p), \hat{A}(p')] = 0 \quad (6.3.31)$$

$$[\hat{A}(p), \hat{A}^\dagger(p')] = \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \quad (6.3.32)$$

$$[\hat{A}^\dagger(p), \hat{A}^\dagger(p')] = 0 \quad (6.3.33)$$

come possiamo effettivamente verificare, ma ricordando prima che  $[A, B] = -[B, A]$ :

$$\begin{aligned} [\hat{\phi}(x), \hat{\Pi}(y)] &= \int \frac{d^3k d^3k'}{(2\pi)^6} \frac{i\omega_{k'}}{2\omega_k} \left\{ 0 + [\hat{A}(k), \hat{A}^\dagger(-k')] + \right. \\ &\quad \left. + [\hat{A}(k'), \hat{A}^\dagger(-k)] + 0 \right\} e^{-i(k^\mu x_\mu + k'^\mu y_\mu)} \end{aligned} \quad (6.3.34)$$

$$[\hat{\phi}(x), \hat{\Pi}(y)] = \int \frac{d^3k d^3k'}{(2\pi)^6} \frac{i\omega_{k'}}{2\omega_k} [\delta^3(\vec{k} + \vec{k}') + \delta^3(\vec{k}' + \vec{k})] e^{-i(k^\mu x_\mu + k'^\mu y_\mu)} \quad (6.3.35)$$

grazie alla simmetria della  $\delta$  scriviamo (notando che l'applicazione della  $\delta$  toglie un'integrazione  $d^3k'$  e cambia un segno nell'esponenziale):

$$[\hat{\phi}(x), \hat{\Pi}(y)] = \int \frac{d^3k d^3k'}{(2\pi)^6} \frac{i\omega_{k'}}{2\omega_k} 2\delta^3(\vec{k} + \vec{k}') e^{-i(k^\mu x_\mu + k'^\mu y_\mu)} \quad (6.3.36)$$

$$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^6} \frac{i\omega_k}{\omega_k} e^{-ik^\mu(x_\mu - y_\mu)} \quad (6.3.37)$$

$$= \frac{i}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{-ik^\mu(x_\mu - y_\mu)} \quad (6.3.38)$$

ricordandoci la definizione della  $\delta$ :

$$\delta^3(\vec{z}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{-ip \cdot \vec{z}} \quad (6.3.39)$$

e il fatto che il commutatore tra i campi è preso a tempi uguali, ossia  $x_0 = y_0 = t$  (quindi nel prodotto scalare  $k^\mu(x_\mu - y_\mu)$  perdiamo la componente  $k^0$ ), allora vediamo che:

$$[\hat{\phi}(x), \hat{\Pi}(y)] = \frac{i}{(2\pi)^3} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad (6.3.40)$$

che è esattamente il commutatore (6.3.8) che volevamo appartenente quel fattore  $(2\pi)^3$ , ma ciò non è un problema perché possiamo buttarlo dentro la definizione di  $\hat{A}$  e  $\hat{A}^\dagger$ .

Ma quindi, chi sono  $\hat{A}$  e  $\hat{A}^\dagger$ ? Come anticipato, la loro identità la possiamo identificare nei commutatori (6.3.31), (6.3.32) e (6.3.33), che è facile rendersi

conto essere identici a quelli soddisfatti dagli operatori di creazione  $\hat{a}_k^\dagger$  e distruzione  $\hat{a}_k$  descritti nell'Appendice F.4. Possiamo cominciare a scrivere:

$$\hat{A}(\vec{k}) \propto (2\pi)^{3/2} \hat{a}_k \quad (6.3.41)$$

$$\hat{A}^\dagger(\vec{k}) \propto (2\pi)^{3/2} \hat{a}_k^\dagger \quad (6.3.42)$$

tenendo conto della normalizzazione che ci siamo resi conto debba esserci. Però non è finita, perché quando nell'Appendice F abbiamo parlato di  $\hat{a}_k^\dagger$  e  $\hat{a}_k$  li abbiamo descritti come operatori che creavano e distruggevano particelle ad impulso fissato (in questo caso), quindi ci piacerebbe che gli stati  $|k\rangle$  ad quadri-impulso ( $k \equiv k^\mu$ ) fissato siano ben normalizzati. Richiediamo che (ricordando qual è la misura Lorentz invariante che abbiamo visto prima):

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} |k\rangle \langle k| = 1 \quad (6.3.43)$$

che a sua volta richiede che anche lo spazio degli stati a quadri-impulso definito sia Lorentz invariante. Se la norma degli stati a tri-impulso fissato è<sup>11</sup>:

$$\langle \vec{k} | \vec{k}' \rangle = \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \quad (6.3.44)$$

allora per gli stati a quadri-impulso fissato dobbiamo avere<sup>12</sup>:

$$|k\rangle = (2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega_k} |\vec{k}\rangle \quad (6.3.45)$$

affinché valga (6.3.43). Sapendo che:

$$\hat{a}_k^\dagger |0\rangle = |\vec{k}\rangle \quad (6.3.46)$$

allora vediamo che anche  $\hat{a}_k^\dagger$  dev'essere opportunamente normalizzato (in parallelo anche  $\hat{a}_k$ ) e possiamo finalmente scrivere le relazioni che definiscono gli operatori  $\hat{A}(k)$  e  $\hat{A}^\dagger(k)$ :

$$\hat{A}(\vec{k}) = (2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega_k} \hat{a}_k \quad (6.3.47)$$

$$\hat{A}^\dagger(\vec{k}) = (2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega_k} \hat{a}_k^\dagger. \quad (6.3.48)$$

---

<sup>11</sup>Puoi vedere l'Appendice G.2 per dimostrare che non è Lorentz invariante.

<sup>12</sup>È una relazione dimostrabile in modo molto rapido.

Definiti così abbiamo le relazioni di commutazione tra gli operatori<sup>13</sup>:

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}] = 0 \quad (6.3.49)$$

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^\dagger] = \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \quad (6.3.50)$$

$$[\hat{a}_k^\dagger, \hat{a}_{k'}^\dagger] = 0. \quad (6.3.51)$$

Possiamo scrivere, indicando  $kx \equiv k^\mu x_\mu$ , l'operatore di campo e il suo momento coniugato:

$$\hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_k}} [\hat{a}_k e^{-ikx} + \hat{a}_k^\dagger e^{ikx}] \quad (6.3.52)$$

$$\hat{\Pi}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_k}} i\omega_k [-\hat{a}_k e^{-ikx} + \hat{a}_k^\dagger e^{ikx}]. \quad (6.3.53)$$

Possiamo anche invertire la trasformata di Fourier (e trovare le frequenze di Fourier in questa analisi) e scrivere  $\hat{a}_k$  e  $\hat{a}_k^\dagger$  in termini dei campi:

$$\hat{a}_k = i \int d^3x \frac{e^{ikx}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_k}} \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi(x) \quad (6.3.54)$$

$$\hat{a}_k^\dagger = -i \int d^3x \frac{e^{-ikx}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_k}} \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi(x) \quad (6.3.55)$$

$$(6.3.56)$$

in cui abbiamo  $A \overleftrightarrow{\partial} B = A\partial B - (\partial A)B$ .

### 6.3.1 Hamiltoniana del campo scalare

Abbiamo appena terminato di vedere che il campo è una sovrapposizione di fattori oscillanti, e di conseguenza interpretiamo  $\hat{\phi}(x)$  come un'onda che si propaga nello spazio e nel tempo. Cerchiamo ora un'espressione dell'hamiltoniana, aspettandoci che sia analoga a quella di una somma continua di oscillatori armonici, poiché il nostro campo è una somma continua di fattori oscillanti. Non dovrebbe troppo sorprendere questa aspettativa dal momento che nell'espressione di  $\hat{\phi}(x)$  abbiamo visto comparire gli operatori  $\hat{a}$  e  $\hat{a}^\dagger$  dell'oscillatore armonico. Ricordiamo l'interpretazione di campo che abbiamo dato nella sezione §6.1, ovvero quella di infiniti oscillatori armonici, molle, tutti collegati tra loro. Ovviamente, assoceremo al campo delle particelle (si

---

<sup>13</sup>Nell'Appendice F abbiamo descritto gli operatori di creazione e distruzione con la regola di commutazione  $[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^\dagger] = \delta_{kk'}$ . Quando passiamo dalla Meccanica Classica, con uno spazio discreto, alla teoria dei campi (anche classica), le nostre variabili cinematiche diventano variabili continue e la regola di commutazione si modifica e diventa  $[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^\dagger] = \delta^3(\vec{k} - \vec{k}')$ , quindi con una delta di Dirac al posto di una delta di Kronecker.

veda la sezione §6.7) e ciascuna particella corrisponderà ad un'eccitazione del campo  $\hat{\phi}(x)$ , il quale, contenendo tutti i possibili modi di oscillazione (è una somma continua), contiene già dall'inizio tutte le particelle possibili (in questo caso saranno particelle scalari di spin 0). Per l'oscillatore armonico i vari stati erano classificati in base all'eccitazione del sistema e i vari livelli energetici li potevamo raggiungere agendo con  $\hat{a}$  e  $\hat{a}^\dagger$ , che in quel caso ci permettevano di "scalare" la scala energetica; ora, i vari livelli eccitati dell'oscillatore corrispondono a particelle (create o distrutte) e sono sempre  $\hat{a}$  e  $\hat{a}^\dagger$  che ci permettono di averle nel nostro sistema piuttosto che no.

Vedremo come interpretare le varie eccitazioni e i vari modi di oscillazione in una sezione dedicata.

Abbiamo già ottenuto i seguenti risultati:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left[ \Pi^2 + (\vec{\nabla}\phi)^2 + m^2\phi^2 \right] \quad (6.3.57)$$

$$\hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_k}} \left[ \hat{a}_k e^{-ikx} + \hat{a}_k^\dagger e^{ikx} \right] \quad (6.3.58)$$

$$\hat{\Pi}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_k}} i\omega_k \left[ -\hat{a}_k e^{-ikx} + \hat{a}_k^\dagger e^{ikx} \right] \quad (6.3.59)$$

e possiamo calcolare l'hamiltoniana:

$$\hat{H} = \int d^3x \mathcal{H}. \quad (6.3.60)$$

Implementiamo i conti<sup>14</sup>:

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int d^3x \left[ \Pi^2 + \partial_i\phi\partial^i\phi + m^2\phi^2 \right] \quad (6.3.62)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \int d^3x \int \frac{d^3k d^3k'}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_k} \sqrt{2\omega_{k'}}} \left[ -(\omega_k \omega_{k'} + \vec{k} \cdot \vec{k}') \left( a_k e^{-ikx} - a_k^\dagger e^{ikx} \right) \times \right. \\ &\times \left. \left( a_{k'} e^{-ik'x} - a_{k'}^\dagger e^{ik'x} \right) + m^2 \left( a_k e^{-ikx} + a_k^\dagger e^{ikx} \right) \left( a_{k'} e^{-ik'x} + a_{k'}^\dagger e^{ik'x} \right) \right] \end{aligned} \quad (6.3.63)$$

possiamo integrare prima sulla  $d^3x$  e sfruttare la definizione della  $\delta$ :

$$\int d^3x e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k}) \quad (6.3.64)$$

---

<sup>14</sup>Notando che vale:

$$\vec{\nabla}\phi = \partial_i\phi\partial^i\phi = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_k}} (i\vec{k}) \left[ \hat{a}_k e^{-ikx} - \hat{a}_k^\dagger e^{ikx} \right]. \quad (6.3.61)$$

così:

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \frac{1}{2} \int \frac{d^3 k d^3 k'}{\sqrt{2\omega_k} \sqrt{2\omega_{k'}}} \left[ \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \left( \omega_k \omega_{k'} + \vec{k} \cdot \vec{k}' + m^2 \right) \times \right. \\ & \times \left( a_k^\dagger a_{k'} e^{i(\omega_k - \omega_{k'})t} + a_k a_{k'}^\dagger e^{-i(\omega_k - \omega_{k'})t} \right) - \\ & - \delta^3(\vec{k} + \vec{k}') \left( \omega_k \omega_{k'} + \vec{k} \cdot \vec{k}' - m^2 \right) \left( a_k^\dagger a_{k'}^\dagger e^{i(\omega_k + \omega_{k'})t} + a_k a_{k'} e^{-i(\omega_k + \omega_{k'})t} \right) \left. \right] \end{aligned} \quad (6.3.65)$$

ora, utilizziamo le funzioni  $\delta^3(\vec{k} \pm \vec{k}')$  per fare l'integrale su  $d^3 k'$ :

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \frac{1}{2} \int \frac{d^3 k}{2\omega_k} \left[ \left( \omega_k^2 + \vec{k}^2 + m^2 \right) \left( a_k^\dagger a_k + a_k a_k^\dagger \right) + \right. \\ & \left. + \left( -\omega_k^2 + \vec{k}^2 + m^2 \right) \left( a_k^\dagger a_{-k}^\dagger + a_k a_{-k} \right) \right] \end{aligned} \quad (6.3.66)$$

ci dobbiamo ricordare la relazione di mass-shell:

$$\omega_k^2 = \vec{k}^2 + m^2 \quad (6.3.67)$$

così da semplificare un termine e ottenere:

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int \frac{d^3 k}{2\omega_k} 2\omega_k^2 \left( a_k^\dagger a_k + a_k a_k^\dagger \right) \quad (6.3.68)$$

$$= \frac{1}{2} \int d^3 k \omega_k \left( a_k^\dagger a_k + a_k a_k^\dagger \right) \quad (6.3.69)$$

possiamo utilizzare la relazione di commutazione (6.3.50), che avendo già  $\vec{k} = \vec{k}'$  sarà semplicemente  $\delta(0)$ . Abbiamo quindi in conclusione:

$$\hat{H} = \int d^3 k \left( a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2} \delta(0) \right) \omega_k \quad (6.3.70)$$

che ha la forma analoga all'hamiltoniana dell'oscillatore armonico.<sup>15</sup> Notiamo anche un fatto importante, ossia che il termine  $\delta(0)$  da un contributo divergente all'energia, ma a noi questo non disturba più di tanto poiché osservando sempre delle differenze di energia eliminiamo la divergenza con uno shift (infinito) del valore dell'energia di punto zero. Il termine  $\delta(0)$  ci saremmo potuti aspettare sarebbe uscito, perché 6.3.70 non è altro che una somma continua di oscillatori armonici, quindi se sommiamo gli operatori  $a^\dagger a$  otteniamo una somma continua sui valori di  $\vec{k}$  e  $a_k^\dagger a_k$ , ma quando sommiamo in modo continuo le energie dello stato fondamentale  $\frac{\omega_k}{2}$  otteniamo

---

<sup>15</sup>Che ricordiamo essere:

$$H = \left( a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) \omega. \quad (6.3.71)$$

il pezzo con la  $\delta(0)$ . Torneremo, dopo aver calcolato il momento coniugato, su questo discorso degli infiniti dell'energia.

Sappiamo che l'hamiltoniana è la componente 0 del tensore energia impulso (vedi la sezione §4.2) e per questo possiamo considerare le altre 3 componenti di  $T^{\mu}_{\nu}$ , e con un calcolo perfettamente analogo possiamo trovare l'impulso canonicamente coniugato. Il teorema di Noether, applicato al campo scalare, ci dice che l'impulso, o meglio le 3 componenti dell'impulso, sono le cariche conservative associate alle traslazioni spaziali:

$$P^i = \int d^3x T^i{}_0 \quad (6.3.72)$$

con  $T^{\mu}_{\nu}$  tensore energia-impulso:

$$-T^{\mu}_{\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)} \partial_{\nu}\phi - \mathcal{L} \delta^{\mu}_{\nu} \quad (6.3.73)$$

$$= \partial^{\mu}\phi \partial_{\mu}\phi - \frac{1}{2} \partial^{\mu}\phi \partial_{\nu}\phi + \frac{1}{2} m\phi^2 \delta^{\mu}_{\nu} \quad (6.3.74)$$

dunque:

$$\vec{P} = - \int d^3x \Pi \vec{\nabla}\phi = - \int d^3x \Pi \partial_i \phi \quad (6.3.75)$$

alzando l'indice della  $\partial$ :

$$P^i = \int d^3x \Pi \partial^i \phi \quad (6.3.76)$$

$$= \int d^3x \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{i\omega_k}{\sqrt{2\omega_k}} \left( -a_k e^{-ikx} + a_k^\dagger e^{ikx} \right) \times \\ \times \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^{3/2}} \frac{ik'^i}{\sqrt{2\omega_{k'}}} \left( -a_{k'} e^{-ik'x} + a_{k'}^\dagger e^{ik'x} \right) \quad (6.3.77)$$

$$= - \int \frac{d^3k d^3k'}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_k} \sqrt{2\omega_{k'}}} \omega_k k'^i \int d^3x \left[ a_k a_{k'} e^{-ix(k+k')} + a_k^\dagger a_{k'}^\dagger e^{ix(k+k')} - a_k a_{k'}^\dagger e^{-ix(k-k')} - a_k^\dagger a_{k'} e^{ix(k-k')} \right] \quad (6.3.78)$$

possiamo integrare in  $d^3x$  e usare la definizione della  $\delta$ :

$$= \int \frac{d^3k d^3k'}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_k} \sqrt{2\omega_{k'}}} \omega_k k'^i (2\pi)^3 \left[ -\delta^3(\vec{k} + \vec{k}') e^{-i(\omega_k + \omega_{k'})t} a_k a_{k'} + \right. \\ \left. - \delta^3(\vec{k} + \vec{k}') e^{+i(\omega_k + \omega_{k'})t} a_k^\dagger a_{k'}^\dagger + \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') e^{-i(\omega_k - \omega_{k'})t} a_k a_{k'}^\dagger + \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') e^{+i(\omega_k - \omega_{k'})t} a_k^\dagger a_{k'} \right] \quad (6.3.79)$$

utilizziamo le  $\delta^3$  e indtegriamo in  $d^3k'$ :

$$= \int \frac{d^3k}{2\omega_k} \omega_k k^i \left[ -e^{-2i\omega_k t} a_k a_{-k} - e^{+2i\omega_k t} a_k^\dagger a_{-k}^\dagger + a_k a_k^\dagger + a_k^\dagger a_k \right] \quad (6.3.80)$$

$$= - \int \frac{d^3k}{2} k^i \left[ e^{2i\omega_k t} a_k a_{-k} + e^{+2i\omega_k t} a_k^\dagger a_{-k}^\dagger \right] + \int \frac{d^3k}{2} k^i \left[ a_k a_k^\dagger + a_k^\dagger a_k \right] \quad (6.3.81)$$

ora, l'integrando del primo pezzo è dispari in  $\vec{k}$  è quindi l'integrale va a zero. Ci rimane quindi, usando di nuovo la regola di commutazione (6.3.50):

$$P^i = \int d^3k k^i \left[ a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2} \delta^3(0) \right]. \quad (6.3.82)$$

Anche ora con (6.3.82) abbiamo il problema del contributo divergente all'energia. Ovviamente, anche in questo caso questo termine corrisponde alla somma continua su tutti i modi normali delle energie associate a ciscuno stato fondamentale, che è consistente con l'interpretazione di campo inteso come somma di infiniti oscillatori armonici (estesi al continuo).

La presenza di infiniti in una teoria è sempre inquietante e a dubitare molto, anche se sappiamo che in questo caso si tratta di una quantità non osservabile. Notiamo che nei casi esaminati, il termine divergente (che eliminiamo facendo uno shift infinito dell'energia di punto zero) derivava dal commutatore (6.3.50), ed è quindi legato all'ordinamento degli operatori di creazione e distruzione che compaiono all'interno delle espressioni di  $\hat{\phi}$ ,  $\hat{\Pi}$  e  $\hat{H}$ . Operativamente possiamo eliminare questo termine indesiderato dando una prescrizione sull'ordine in cui mettere gli operatori, sto parlando del **normal ordering** o ordinamento temporale. Parliamo del normal ordering nella sezione §F.5 dell'Appendice F, ma sostanzialmente si tratta della prescrizione che ci dice di mettere tutti gli operatori di distruzione sulla destra (così nel caso in cui agiscano sullo stato di vuoto  $|0\rangle$  danno 0) e tutti gli operatori di creazione a sinistra. Il normal ordering ci permette di eliminare tutti i contributi privi di significato da un prodotto di operatori di campo quantizzati.

Completiamo il processo di quantizzazione canonica interpretando  $\hat{H}$  secondo il normal ordering, quindi da:

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int d^3k \omega_k \left[ a_k a_k^\dagger + a_k^\dagger a_k \right] \quad (6.3.83)$$

facciamo:

$$: \hat{H} : = \int d^3k \omega_k a_k^\dagger a_k = \int d^3x \omega_k \hat{n}_k \quad (6.3.84)$$

in cui l'operatore  $\hat{n}_k = \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k$  è l'**operatore numero** che conta quante particelle, o meglio quante eccitazioni, corrispondenti ad un certo modo normale

$k$  ci sono in un generico stato. In modo analogo troviamo l'operatore impulso canonicamente coniugato normal ordered:

$$P^i = \int \frac{d^3k}{2} k^i [a_k a_k^\dagger + a_k^\dagger a_k] \quad (6.3.85)$$

$$: P^i : = \int d^3k k^i a_k^\dagger a_k = \int d^3k k^i \hat{n}_k. \quad (6.3.86)$$

Determinata l'hamiltoniana (normal ordered, quindi senza infiniti) possiamo concentrarci sullo spettro dei suoi autovalori. Ovviamente stiamo trattando una teoria libera e lo spettro di  $H$  è quello dato dall'impulso, quindi gli autovettori di  $\hat{H}$  sono gli stati  $|k\rangle$  ad impulso fissato.

Ripassiamo brevemente quello visto nella sezione §F.4 dell'Appendice F riguardo stati ad impulso fissato. Abbiamo definito lo stato di vuoto  $|0\rangle$  come uno stato non occupato da alcuna particella, o da alcuna eccitazione del campo di Klein-Gordon. Vale la condizione:

$$\hat{a}_k |0\rangle = 0. \quad (6.3.87)$$

Definiamo lo stato di un particella con impulso  $k$  fissato come:

$$\hat{a}_k^\dagger |0\rangle = |k\rangle \quad (6.3.88)$$

e uno stato ad  $n$  particelle, ciascuno con impulso  $k_i$ , sarà dato da:

$$\hat{a}_{k_1}^\dagger \hat{a}_{k_2}^\dagger \dots \hat{a}_{k_n}^\dagger |0\rangle = |k_1, k_2, \dots, k_n\rangle \quad (6.3.89)$$

e l'insieme degli stati ad  $1, 2, \dots, n$  particelle forma lo spazio di Fock. Teniamo anche a mente che la quantizzazione canonica quantizza stati a molte particelle, il cui numero non è generalmente fissato, mentre la *prima* quantizzazione si riferisce ad una dinamica di una particella singola che, con fatica, può essere esteso a più particelle, infatti, il motivo per cui introduciamo il formalismo dei numeri di occupazione (vedi l'Appendice F) è proprio per risolvere le difficoltà che incontriamo quando vogliamo descrivere sistemi quantistici a molte particelle identiche, che come facilmente visibile, se le particelle sono più di 2 o 3 il tutto diventa estremamente lungo e complicato. È anche utile per comodità futura capire la sezione §F.5.1 dell'Appendice F in cui analizziamo l'operatore numero che conta le particelle che popolano un certo stato (o sistema); per renderlo "attuale" rispetto i discorsi che stiamo facendo, riguardo stati ad impulso  $k$  fissato, basta sostituire la nozione di stato generico  $i$ , di cui si parla nell'Appendice, con la nozione di stato generico con impulso  $k$ .

Abbiamo quasi finito la sezione riguardante il campo scalare  $\hat{\phi}$ , di cui daremo un'interpretazione nella sezione §6.7. Vediamo per concludere cosa

succede quando applichiamo il campo  $\hat{\phi}$  sullo stato di vuoto  $|0\rangle$ . Vediamo:

$$\hat{\phi}(x)|0\rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_k}} [\hat{a}_k e^{-ikx} + \hat{a}_k^\dagger e^{ikx}] |0\rangle \quad (6.3.90)$$

$$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_k}} e^{ikx} |k\rangle \quad (6.3.91)$$

dunque,  $\hat{\phi}(x)$  quando agisce su  $|0\rangle$  crea una sovrapposizione lineare, continua, di stati di singola particella ad impulso (ora stiamo guardando quadri-impulso) definito nel punto  $\vec{x}$ . Se nella sovrapposizione selezioniamo uno specifico stato  $|k'\rangle$  possiamo calcolare l'ampiezza, opportunamente normalizzata. Dobbiamo usare la relazione (6.3.45):

$$\langle k'| = (2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega_{k'}} \langle \vec{k}' | \quad (6.3.92)$$

e vediamo:

$$\langle k' | \hat{\phi}(x) | 0 \rangle = \int d^3k e^{ikx} \langle \vec{k}' | \vec{k} \rangle \quad (6.3.93)$$

$$= \int d^3k e^{ikx} \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \quad (6.3.94)$$

$$= e^{ik'x} \quad (6.3.95)$$

dunque,  $e^{ik'x}$  ci da' il peso del modo  $k'$ -esimmo all'interno dello stato creato dall'operatore  $\hat{\phi}(x)$  fatto agire sul vuoto  $|0\rangle$ . Dunque, in base ai discorsi che abbiamo fatto nella sezione §F.6 nell'Appendice F, è evidente che l'operatore  $\hat{\phi}$  è legato alla funzione d'onda intesa come nella MQ non relativistica, dal momento che la funzione d'onda  $e^{ik'x}$  (soluzione dell'equazione di Klein-Gordon nel senso della MQ) è esattamente il peso di ciascun operatore di creazione (o di distruzione, facendo un discorso analogo) presente nella sovrapposizione di  $\hat{\phi}$ .

### 6.3.2 Teorema spin-statistica

Notiamo una cosa importante. Questo formalismo di quantizzazione, che abbiamo utilizzato, ci permette anche di stabilire la statistica rispettata dalle particelle. Infatti, se consideriamo uno stato con 2 particelle con diverso impulso  $k$  e  $k'$  dato da:

$$\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_{k'}^\dagger |0\rangle . \quad (6.3.96)$$

Per via del commutatore:

$$[\hat{a}_k^\dagger, \hat{a}_{k'}^\dagger] = 0 \quad (6.3.97)$$

allora (per discorsi analoghi a quelli che abbiamo fatto nella sezione §F.4 dell'Appendice F parlando di bosoni e fermioni) lo stato (6.3.96) è perfettamente identico a:

$$\hat{a}_{k'}^\dagger \hat{a}_k^\dagger |0\rangle . \quad (6.3.98)$$

cioè allo stato in cui le due particelle sono scambiate.

Inoltre, ogni singolo "modo normale"  $k$  può contenere un numero arbitrario di particelle (vuol dire che non siamo vincolati dal principio di esclusione di Pauli):

$$\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k^\dagger \dots \hat{a}_k^\dagger |0\rangle \quad (6.3.99)$$

e per questo il campo di Klein-Gordon descrive **bosoni**, cioè particelle, di spin intero, che obbediscono alla **statistica di Bose-Einstein**.

## 6.4 Quantizzazione canonica del campo scalare carico

I riferimenti per questa sezione sono il Kaku [5] e il capitolo 7, 11, 12 del Lancaster e Blundell [6]. Possiamo generalizzare i discorsi fatti nella sezione §6.3 pensando che ci sia più di un campo scalare. I campi che tratteremo in questa sezione li chiameremo carichi, ma attenzione perché stiamo ancora trattando campi scalari, dunque con carica elettrica nulla, e quando ci riferiamo alla carica intendiamo dire carica generalizzata nel senso del teorema di Noether. Immaginiamo di prendere due campi  $\phi_1(x)$  e  $\phi_2(x)$  reali ed indipendenti, ossia tali per cui:

$$[\phi_1, \phi_2] = 0. \quad (6.4.1)$$

Presi i due campi possiamo definire:

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1(x) + i\phi_2(x)) \quad (6.4.2)$$

$$\phi^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1(x) - i\phi_2(x)) \quad (6.4.3)$$

che possiamo verificare essere indipendenti, ossia commutanti, grazie al fatto che anche  $\phi_1$  e  $\phi_2$  lo siano:

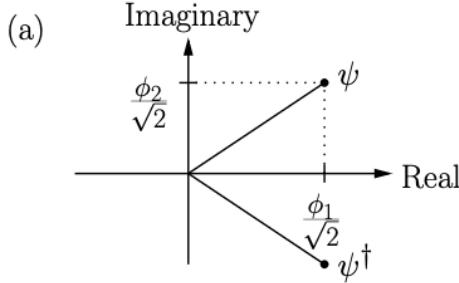
$$[\phi, \phi^\dagger] = 0. \quad (6.4.4)$$

I due nuovi campi che abbiamo definito possono essere rappresentati sul piano di Arnald-Gauss, con il campi  $\phi_1$  sull'asse reale e  $\phi_2$  sull'asse immaginario, come mostrato in figura 6.4.

La lagrangiana in questo caso sarà:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi \quad (6.4.5)$$

e la teoria che ne deriva viene chiamata anche *teoria di campo scalare complessa* (o carica). In questa teoria anziché parlare dei 2 campi  $\phi_1$  e  $\phi_2$ , immaginiamo di fonderli e di trattarne solamente uno, ossia  $\psi$  (e poi  $\psi^\dagger$ ). Il vantaggio di passare dalla trattazione di due campi ad uno è che il nuovo



**Figura 6.4:** Rappresentazione dei campi complessi nel piano di Arnold-Gauss.

campo  $\psi$  ora ha 2 gradi di libertà e la lagrangiana possiede la simmetria  $U(1)$ , ma ne parleremo meglio dopo.<sup>16</sup>

Avremo nella nostra teoria due momenti coniugati, uno per ciascuno di  $\phi$  e  $\phi^\dagger$ :

$$\Pi_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi}^\dagger \quad (6.4.6)$$

$$\Pi_{\phi^\dagger} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^\dagger} = \dot{\phi} \quad (6.4.7)$$

e l'hamiltoniana sarà la somma dei contributi relativi ai due campi<sup>17</sup>:

$$\mathcal{H} = \Pi_\phi \dot{\phi} + \Pi_{\phi^\dagger} \dot{\phi}^\dagger - \mathcal{L} \quad (6.4.8)$$

$$= \dot{\phi}^\dagger \dot{\phi} + \dot{\phi} \dot{\phi}^\dagger - \dot{\phi}^\dagger \dot{\phi} + \vec{\nabla} \phi^\dagger \vec{\nabla} \phi + m^2 \phi^\dagger \phi \quad (6.4.9)$$

$$= \dot{\phi}^\dagger \dot{\phi} + \vec{\nabla} \phi^\dagger \vec{\nabla} \phi + m^2 \phi^\dagger \phi \quad (6.4.10)$$

in cui abbiamo usato il commutatore (6.4.4).

Possiamo promuovere i campi al ruolo di operatori e fissiamo le regole di commutazione:

$$[\hat{\phi}(\vec{x}, t), \hat{\Pi}_\phi(\vec{y}, t)] = i\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad (6.4.11)$$

$$[\hat{\phi}^\dagger(\vec{x}, t), \hat{\Pi}_{\phi^\dagger}(\vec{y}, t)] = i\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad (6.4.12)$$

<sup>16</sup>Notiamo solo un paio di cose. Il fatto che  $\psi$  abbia due gradi di libertà anziché uno, come i campi  $\phi_i$ , lo rende un campo più complesso, nel senso che possiamo assegnare un'etichetta a questi gradi di libertà, e trattare campi più ricchi di quelli scalari. Notando che  $\mathcal{L}$  gode della simmetria  $U(1)$ , che ricordiamo è anche chiamato gruppi delle trasformazioni di carica, allora possiamo arbitrariamente chiamare il grado di libertà intrinseco di  $\psi$  *carica* (nel senso di Noether) e trattare una teoria di campo carica, in cui esisteranno particelle di tipo *a* e particelle di tipo *b* con *carica* opposta ad *a*. Quando vogliamo fare una teoria di campo carica (quindi con gradi di libertà aggiuntivi) dobbiamo sempre avere, o in qualche modo rendere, i campi complessi.

<sup>17</sup>Ricordandoci che in Meccanica Quantistica abbiamo imparato che l'hamiltoniana è additiva.

e tutti gli altri commutatori (a tempi uguali) sono nulli. Grazie ai lunghissimi discorsi che abbiamo fatto nella sezione §6.3 riguardo i fattori di normalizzazione possiamo scrivere:

$$\hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega_k}} [\hat{a}_k e^{-ikx} + \hat{b}_k^\dagger e^{+ikx}] \quad (6.4.13)$$

$$\hat{\phi}^\dagger(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega_k}} [\hat{a}_k^\dagger e^{+ikx} + \hat{b}_k e^{-ikx}] \quad (6.4.14)$$

in cui gli operatori  $\hat{a}$  e  $\hat{b}$  sono di natura diversa. Nel caso scalare avevamo trovato che l'operatore (6.3.52) che era un'operatore hermitiano; ora, nel caso di campo complesso non c'è motivo per cui  $\phi$  e  $\phi^\dagger$  siano hermitiani. Però, per definizione sono l'uno l'hermitiano coniugato dell'altro.

Possiamo prendere le definizioni (6.4.13) e (6.4.14), imporre che siano indipendenti, quindi che commutino, e verificare che gli operatori  $\hat{a}$  e  $\hat{b}$  soddisfino le relazioni di commutazione:

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^\dagger] = [\hat{b}_k, \hat{b}_{k'}^\dagger] = \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \quad (6.4.15)$$

e tutti gli altri loro commutatori sono nulli.

Con un conto del tutto analogo a quello fatto nella sezione §6.3 e con l'applicazione del normal ordering possiamo ottenere l'hamiltoniana:

$$:\hat{H}: = \int d^3k \omega_k (\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k) \quad (6.4.16)$$

$$= \int d^3k \omega_k (\hat{n}_k^a + \hat{n}_k^b) \quad (6.4.17)$$

con  $\hat{n}_k^a$  ed  $\hat{n}_k^b$  che contano, rispettivamente, il numero di particelle  $a$  e  $b$ . Notiamo la simmetria di  $\hat{H}$  per scambio  $a \longleftrightarrow b$ , il che ci dice che l'hamiltoniana non distingue tra i due tipi di operatori e possiamo dire che i due tipi di particelle hanno la stessa energia.

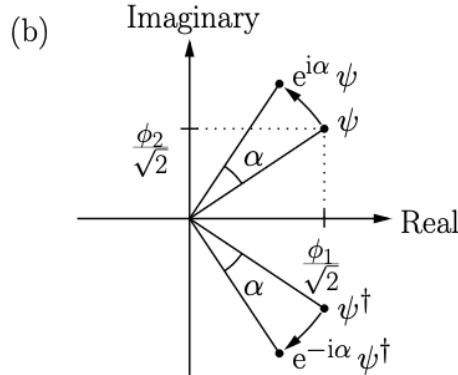
### 6.4.1 Simmetrie, teorema di Noether e cariche conservative

Abbiamo accennato prima al fatto che il campo scalare complesso ha una simmetria interna di tipo  $U(1)$ , infatti per questo la lagrangiana è invariante per trasformazioni:

$$\phi \longrightarrow e^{i\alpha} \phi \quad (6.4.18)$$

$$\phi^\dagger \longrightarrow e^{-i\alpha} \phi^\dagger \quad (6.4.19)$$

che possono essere rappresentate nel piano di Arnald-Gauss come delle rotazioni, come mostrato in figura 6.5.



**Figura 6.5:** Rappresentazione dei campi complessi nel piano di Arnald-Gauss sotto una trasformazione del gruppo  $U(1)$ .

Facciamo un’osservazione rapida. Il fatto che la lagrangiana sia invariante per trasformazioni di  $U(1)$  è la stessa cosa che dire che l’invarianza la si ha per rotazioni nel piano di  $\phi_1 - \phi_2$  che sono invece rappresentate dal gruppo  $SO(2)$  (ricorda che  $SO(2)$  è il gruppo delle rotazioni bidimensionali). Sono la stessa cosa perché il gruppo  $U(1)$  è un gruppo unidimensionale di trasformazioni unitarie che è isomorfo al gruppo  $SO(2)$ , il che li rende dal punto di vista matematico, e fondamentale, uguali.

La lagrangiana è anche invariante per trasformazioni infinitesime (sempre di  $U(1)$ ):

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi + i\alpha\phi \implies \Delta\phi = i\phi \quad (6.4.20)$$

$$\phi^\dagger \rightarrow \phi'^\dagger = \phi^\dagger - i\alpha\phi^\dagger \implies \Delta\phi^\dagger = -i\phi^\dagger. \quad (6.4.21)$$

La corrente di Noether, utilizzando la relazione (4.2.5) valida quando abbiamo una simmetria interna, è:

$$\hat{j}^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\Delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^\dagger)}\Delta\phi^\dagger \quad (6.4.22)$$

$$= i(\partial^\mu\phi^\dagger)\phi - i(\partial^\mu\phi)\phi^\dagger. \quad (6.4.23)$$

La carica conservata è di conseguenza:

$$\hat{Q} = \int d^3x \hat{j}^0 \quad (6.4.24)$$

$$= i \int d^3x \left[ (\partial^0\phi^\dagger)\phi - (\partial^0\phi)\phi^\dagger \right] \quad (6.4.25)$$

utilizzando le espressioni (6.4.13) e (6.4.14) e facendo il normal ordering:

$$:\hat{Q}: = \int d^3k \left( \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k - \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \right) \quad (6.4.26)$$

$$= \int d^3k \left( \hat{n}_k^b - \hat{n}_k^a \right). \quad (6.4.27)$$

Quindi la carica conservata sarà data dal numero di particelle  $b$  (che interpreteremo come antiparticelle) meno il numeri di particelle  $a$  (particelle). Questa quantità è proporzionale alla carica totale del sistema. Tutto questo garantisce la conservazione della carica all'interno del sistema, perché? Le particelle, che associamo ad  $\hat{a}$  hanno un certo segno della carica di Noether, per conservare la carica totale del sistema, abbiamo bisogno di un'altro tipo di eccitazione (le antiparticelle) del campo che abbia segno della carica di Noether opposta in modo che cancelli il contributo di particella. Discende da ciò che se assumessimo la non esistenza dell'antimateria allora la carica di Noether non sarebbe conservata.

Notiamo che, nonostante particelle e antiparticelle contribuiscano con segno opposto alla carica di Noether, essi contribuiscono con lo stesso segno all'energia totale (6.4.17).

È naturale, anche se lo analizzeremo meglio in §6.7, interpretare i "quanti" corrispondenti agli operatori di tipo  $\hat{a}$  e  $\hat{b}$ , come l'uno l'antiparticella dell'altro. Noi possiamo associare (per pura convenzione) ad  $\hat{a}$  il ruolo di particella e a  $\hat{b}$  quello di antiparticella. In particolare vediamo dall'espressioni (6.4.13) e (6.4.14) che l'azione del campo  $\hat{\phi}$  è di distruggere una particella (per la presenza di  $\hat{a}$ ) e di creare un'antiparticella (per via di  $\hat{b}^\dagger$ ) nello stesso punto  $\vec{x}$ . Ovviamente,  $\hat{\phi}^\dagger$  farà l'opposto, ovvero crea una particella e distrugge un'antiparticella. Ripeto, motivazioni più dettagliate le vediamo in §6.7, per ora fidati.

Come accennato all'inizio della sezione, quando parliamo di carica non ci riferiamo alla carica elettrica, infatti, finché non parleremo del campo di Dirac e dell'interazione con il campo elettromagnetico non possiamo parlare di carica elettrica, ma solamente di carica abeliana.

Interpretare  $\hat{Q}$ , quantità conservata, come una carica abeliana (simile in qualche modo alla carica elettrica) non è cosa da poco conto. Infatti, il fatto che  $\hat{Q}$  sia la differenza tra due quantità e quindi possa, potenzialmente, essere negativa, creò problemi e confusione quando si provò ad interpretare l'equazione di Klein-Gordon come l'estensione relativistica dell'equazione d'onda di Schrodinger. Per questo  $\hat{Q}$  non può essere interpretata come densità di probabilità e la consideriamo una carica abeliana.

Per convenzione associamo una carica positiva alle particelle scalari (tipo  $a$ ) e carica negativa alle antiparticelle scalari (tipo  $b$ ). Infatti, se vuoi i segni in (6.4.27) possono essere cambiati e avere  $\hat{Q} \propto \hat{n}_k^a - \hat{n}_k^b$ ; questo si fa

cambiando convenzione in  $\hat{j}^\mu$ , vedi il capitolo 12.2 del Lancaster e Blundell [6].

In base a tutto ciò che abbiamo detto, gli operatori tipo  $b$  introducono una nuova forma di materia nella teoria, l'**antimateria**.

## 6.5 Quantizzazione canonica del campo spinoriale

Consideriamo ora un campo spinoriale di spin 1/2 e seguiamo la stessa strategia utilizzata per il campo scalare e scalate carico.

In questo caso la lagrangiana è data da:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi \quad (6.5.1)$$

con  $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$  e in cui  $\bar{\psi}$  e  $\psi$  sono indipendenti, proprio come  $\phi^\dagger$  e  $\phi$  lo erano per il campo carico.

I momenti coniugati sono:

$$\Pi_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = i\bar{\psi} \gamma^0 = i\psi^\dagger \quad (6.5.2)$$

$$\Pi_{\bar{\psi}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\bar{\psi}}} = 0. \quad (6.5.3)$$

L'hamiltoniana corrispondente è:

$$\mathcal{H} = \Pi_\psi \dot{\psi} - \mathcal{L} \quad (6.5.4)$$

$$= i\psi^\dagger \partial_0 \psi - i\psi^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \partial_0 \psi - i\psi^\dagger \gamma^0 \gamma^i \partial_i \psi + m\psi^\dagger \gamma^0 \psi \quad (6.5.5)$$

$$= \bar{\psi} (-i\gamma^i \partial_i + m) \psi \quad (6.5.6)$$

espressione che possiamo ulteriormente semplificare utilizzando l'equazione di Dirac:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0 \implies (i\gamma^0 \partial_0 + i\gamma^i \partial_i - m) \psi = 0 \quad (6.5.7)$$

$$\implies i\gamma^i \partial_i \psi = m\psi - i\gamma^0 \partial_0 \psi \quad (6.5.8)$$

il che ci permette di avere l'hamiltoniana:

$$\mathcal{H} = \bar{\psi} (+i\gamma^0 \partial_0 - m + m) \psi \quad (6.5.9)$$

$$= i\bar{\psi} \gamma^0 \partial_0 \psi \quad (6.5.10)$$

$$= i\psi^\dagger \dot{\psi}. \quad (6.5.11)$$

A questo punto, come sappiamo, dobbiamo elevare al ruolo di operatore i nostri campi ed imporre le opportune regole di commutazione, o meglio, di anticommutazione. Infatti, dobbiamo stare attenti e non dobbiamo cadere

in inganno e semplicemente seguire ciò che abbiamo fatto per i campi scalari. L'equazione di Dirac descrive campi fermionici, per i quali ci aspettiamo regole di anticommutazione, poiché abbiamo imparato dalla trattazione quantistica delle particelle identiche (vedi l'Appendice F) che i fermioni hanno funzione d'onda antisimmetriche per scambio di particelle. Imponiamo che a tempi uguali si abbia:

$$\left\{ \psi_s(\vec{x}, t), \psi_{s'}^\dagger(\vec{y}, t) \right\} = \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \delta_{ss'} \quad (6.5.12)$$

$$\left\{ \psi_s(\vec{x}, t), \psi_{s'}(\vec{y}, t) \right\} = \left\{ \psi_s^\dagger(\vec{x}, t), \psi_{s'}^\dagger(\vec{y}, t) \right\} = 0. \quad (6.5.13)$$

Per via delle cose imparate nelle sezioni precedenti possiamo fare un'analisi di Fourier dei campi fermionici:

$$\hat{\psi}(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2E_p}} \sum_{s=1}^2 \left( u_s(\vec{p}) \hat{a}_s(\vec{p}) e^{-ipx} + v_s(\vec{p}) \hat{b}_s^\dagger(\vec{p}) e^{ipx} \right) \quad (6.5.14)$$

$$\hat{\bar{\psi}}(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2E_p}} \sum_{s=1}^2 \left( \bar{u}_s(\vec{p}) \hat{a}_s^\dagger(\vec{p}) e^{ipx} + \bar{v}_s(\vec{p}) \hat{b}_s(\vec{p}) e^{-ipx} \right) \quad (6.5.15)$$

dove abbiamo inserito: il prodotto  $px \equiv p^\mu x_\mu$ ; gli spinori<sup>18</sup>  $u_s(\vec{p})$  e  $v_s(\vec{p})$  che conferiscono la natura spinoriale a  $\hat{\psi}$ ; gli operatori  $\hat{a}_s^{(\dagger)}(\vec{p})$  e  $\hat{b}_s^{(\dagger)}(\vec{p})$  che conferiscono la natura operatoriale a  $\hat{\psi}$  e che rispettivamente creano/distruggono particelle e antiparticelle (per seguire la convenzione iniziata nella sezione §6.4). È dimostrabile che gli operatori  $\hat{a}_s(\vec{p})$  e  $\hat{b}_s(\vec{p})$  rispettino le regole di anticommutazione:

$$\left\{ \hat{a}_s(\vec{p}), \hat{a}_r^\dagger(\vec{p}') \right\} = \left\{ \hat{b}_s(\vec{p}), \hat{b}_r^\dagger(\vec{p}') \right\} = \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \delta_{sr} \quad (6.5.16)$$

con tutti gli altri anticommutatori nulli.

Possiamo ora scriverci l'hamiltoniana  $\mathcal{H}$  in funzione degli operatori  $\hat{a}_s(\vec{p})$  e  $\hat{b}_s(\vec{p})$  facendo praticamente gli stessi conti della sezione §6.3. Vediamo:

$$\hat{H} = \int d^3 x \mathcal{H} \quad (6.5.17)$$

$$= \int d^3 x i \psi^\dagger \dot{\psi} \quad (6.5.18)$$

$$\begin{aligned} &= \int d^3 x \int \frac{d^3 p d^3 p'}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_p} \sqrt{2E_{p'}}} \sum_{s,r=1}^2 \left( u_s^\dagger(\vec{p}) \hat{a}_s^\dagger(\vec{p}) e^{ipx} + v_s^\dagger(\vec{p}) \hat{b}_s^\dagger(\vec{p}) e^{-ipx} \right) \times \\ &\quad \times \gamma^0 E_{p'} \left( u_r(\vec{p}') \hat{a}_r(\vec{p}') e^{-ip'x} - v_r(\vec{p}') \hat{b}_r^\dagger(\vec{p}') e^{+ip'x} \right) \end{aligned} \quad (6.5.19)$$

---

<sup>18</sup>Nota che li abbiamo messi poiché nel caso dell'equazione di Dirac abbiamo visto che la soluzione è del tipo (5.6.1), in analogia con il fatto che nell'equazione di Klein-Gordon avevamo messo solamente gli esponenziali  $e^{\pm ikx}$ , che erano soluzioni di quell'equazione differenziale.

ora, se integriamo su  $d^3x$ , sfruttiamo la definizione della  $\delta$  di Dirac e poi utilizziamo le  $\delta^3(\vec{p} - \vec{p}')$  per integrare su  $d^3p'$ , otteniamo:

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int d^3p \left( u_s^\dagger(\vec{p}) \hat{a}_s^\dagger(\vec{p}) u_r(\vec{p}) \hat{a}_r(\vec{p}) - v_s^\dagger(\vec{p}) \hat{b}_s^\dagger(\vec{p}) v_r(\vec{p}) \hat{b}_r^\dagger(\vec{p}) \right) \quad (6.5.20)$$

ricordandoci che  $u$  e  $v$  sono ortogonali, utilizzando le relazioni di normalizzazione:

$$\begin{cases} u_s^\dagger(\vec{p}) u_r(\vec{p}) = 2E_p \delta_{sr} \\ v_s^\dagger(\vec{p}) v_r(\vec{p}) = 2E_p \delta_{sr} \end{cases} \quad (6.5.21)$$

e facendo il normal ordering (così ci liberiamo del termine costante che ci porta ad un infinito) otteniamo:

$$:\hat{H}: = \int d^3p \sum_{s=1}^2 E_p \left( \hat{a}_s^\dagger(\vec{p}) \hat{a}_s(\vec{p}) + \hat{b}_s^\dagger(\vec{p}) \hat{b}_s(\vec{p}) \right) \quad (6.5.22)$$

$$= \int d^3p \sum_{s=1}^2 E_p \left( \hat{n}_{sp}^a + \hat{n}_{sp}^b \right) \quad (6.5.23)$$

in cui facciamo attenzione al fatto che ci sia un segno più tra i due termini di  $\hat{H}$ ; questo ci dice che sia  $\hat{a}_s^\dagger(\vec{p})$  che  $\hat{b}_s^\dagger(\vec{p})$  creano particelle/antiparticelle ad energia positiva, il che non è banale perché ci porta ad avere di conseguenza energia  $\hat{H}$  definita positiva. Il segno + è dovuto alla scelta di regole di anticommutazione anziché di commutazione, che avrebbero portato ad un segno negativo.<sup>19</sup>

L'operatore impulso associato al campo è dato da:

$$:\vec{P}: = \int d^3x \psi^\dagger \left( -i\vec{\nabla} \right) \psi \quad (6.5.24)$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \sum_s \vec{p} \left( \hat{a}_s^\dagger(\vec{p}) \hat{a}_s(\vec{p}) + \hat{b}_s^\dagger(\vec{p}) \hat{b}_s(\vec{p}) \right) \quad (6.5.25)$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \sum_s \vec{p} \left( \hat{n}_{sp}^a + \hat{n}_{sp}^b \right) \quad (6.5.26)$$

Nel senso visto nelle sezioni precedenti, e nella sezione §F.4 dell'Appendice F, intesi gli operatori  $\hat{a}_s(\vec{p})$  e  $\hat{b}_s(\vec{p})$  come di distruzione (o creazione) di stati a spin  $s$  ed impulso  $\vec{p}$  definito e definito lo stato di vuoto  $|0\rangle$  come:

$$\hat{a}_s(\vec{p}) |0\rangle = \hat{b}_s(\vec{p}) |0\rangle = 0 \quad (6.5.27)$$

---

<sup>19</sup>Puoi a questo proposito vedere l'inizio del capitolo 3.5 del Peskin e Schroeder [7] in cui c'è una sezione intitolata *How Not to Quantize the Dirac Field: A Lesson in Spin and Statistics* che mostra come si arrivi, imponendo delle relazioni di commutazione, ad un'espressione dell'hamiltoniana in cui si ha  $\hat{H} \propto E_p \left( \hat{a}_s^\dagger(\vec{p}) \hat{a}_s(\vec{p}) - \hat{b}_s^\dagger(\vec{p}) \hat{b}_s(\vec{p}) \right)$  e quindi ad una situazione in cui è possibile creare molte più particelle  $\hat{b}^\dagger$  e scendere sempre di più nello spettro energetico, non avendo un'energia definita positiva.

allora, definiamo uno stato fermionico (particella) e anti-fermionico (antifermionico) a spin e tri-impulso definito come:

$$|\vec{p}, s\rangle_a = \hat{a}_s^\dagger(\vec{p}) |0\rangle \quad (6.5.28)$$

$$|\vec{p}, s\rangle_b = \hat{b}_s^\dagger(\vec{p}) |0\rangle \quad (6.5.29)$$

la cui normalizzazione è fissata come:

$$\langle \vec{p}, s | \vec{p}', r \rangle = \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \delta_{sr} \quad (6.5.30)$$

$$\langle p, s | p', r \rangle = 2E_p \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \delta_{sr}. \quad (6.5.31)$$

### 6.5.1 Teorema spin-statistica

Come nel caso del campo scalare, imporre ben precise regole di anticommutazione tra i campi  $\psi$  e  $\psi^\dagger$  richiede ben precise regole di anticommutazione tra gli operatori di creazione e distruzione:

$$\left\{ \hat{a}_s(\vec{p}), \hat{a}_r^\dagger(\vec{p}') \right\} = \left\{ \hat{b}_s(\vec{p}), \hat{b}_r^\dagger(\vec{p}') \right\} = \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \delta_{sr} \quad (6.5.32)$$

$$\left\{ \hat{a}_s(\vec{p}), \hat{a}_r(\vec{p}') \right\} = \left\{ \hat{a}_s^\dagger(\vec{p}), \hat{a}_r^\dagger(\vec{p}') \right\} = 0 \quad \forall s, r \quad (6.5.33)$$

$$\left\{ \hat{b}_s(\vec{p}), \hat{b}_r(\vec{p}') \right\} = \left\{ \hat{b}_s^\dagger(\vec{p}), \hat{b}_r^\dagger(\vec{p}') \right\} = 0 \quad \forall s, r \quad (6.5.34)$$

da cui ricaviamo che, per via degli anticommutatori  $\{\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger\} = \{\hat{b}^\dagger, \hat{b}^\dagger\} = 0$ , abbiamo:

$$\left( \hat{a}_s^\dagger(\vec{p}) \right)^2 = \left( \hat{b}_s^\dagger(\vec{p}) \right)^2 = 0 \quad (6.5.35)$$

e cioè che gli stati possono contenere una sola particella a definito spin, tri-impulso ed energia. Questo non è altro che il principio di esclusione di Pauli. Infatti vediamo che partendo dal vuoto  $|0\rangle$ , creiamo una particella con quadri-impulso  $p^\mu$  e spin  $s$  definiti:

$$\hat{a}_s^\dagger(\vec{p}) |0\rangle \quad (6.5.36)$$

se aggiungiamo una seconda particella con stesso  $p^\mu$  e spin  $s$ , allora otteniamo 0:

$$\hat{a}_s^\dagger(\vec{p}) \hat{a}_s^\dagger(\vec{p}) |0\rangle. \quad (6.5.37)$$

Quindi, le regole di anticommutazione implicano che le eccitazioni del campo  $\psi$  (e di  $\psi^\dagger$ ) siano particelle (e antiparticelle), di spin semi-intero, che obbediscono alla statistica di Fermi-Dirac.

Un generico stato a molte particelle ed antiparticelle è dato da:

$$\prod_{i=1}^N \hat{a}_{\alpha_i}^\dagger(\vec{p}_i) \prod_{j=1}^M \hat{b}_{\beta_j}^\dagger(\vec{p}_j) |0\rangle. \quad (6.5.38)$$

### 6.5.2 Simmetrie, teorema di Noether e cariche conservative

La lagrangiana di Dirac presenta una simmetria per trasformazioni globali  $U(1)$ :

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x) = e^{i\alpha}\psi \quad (6.5.39)$$

con  $\alpha$  costante reale ed indipendente da  $x$ . La corrente di Noether corrispondente a questa simmetria è data da:

$$j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad (6.5.40)$$

la cui carica associata è:

$$:Q: = \int d^3p \sum_s \left( \hat{a}_s^\dagger(\vec{p}) \hat{a}_s(\vec{p}) - \hat{b}_s^\dagger(\vec{p}) \hat{b}_s(\vec{p}) \right) \quad (6.5.41)$$

$$= \int d^3p \sum_s \left( \hat{n}_{sp}^a - \hat{n}_{sp}^b \right) \quad (6.5.42)$$

vediamo la forte somiglianza con la carica conservata per il campo scalare carico (6.4.27). In questo caso la carica conservata è la carica totale, ovvero, il numero di particelle – il numero di antiparticelle. Quando accoppieremo il campo di Dirac con il campo elettromagnetico potremo confermare il fatto che la carica (6.5.42) sia effettivamente la carica elettrica (in unità naturali).<sup>20</sup>

Possiamo anche calcolare il tensore energia-impulso  $T^{\mu\nu}$  e il momento angolare associati al campo fermionico:

$$T^{\mu\nu} = i\bar{\psi} \gamma^\mu \partial^\nu \psi \quad (6.5.43)$$

$$M^{\lambda\mu\nu} = i\bar{\psi} \gamma^\lambda \underbrace{\left( x^\mu \partial^\nu - n^\nu \partial^\mu - \frac{i}{2} \sigma^{\mu\nu} \right)}_{M^{\mu\nu}=L^{\mu\nu}+S^{\mu\nu}} \psi. \quad (6.5.44)$$

La carica conservata associata al tensore di momento angolare è:

$$Q_j = \int d^3x M^{0\mu\nu} \quad (6.5.45)$$

$$= \int d^3x i\psi^\dagger \left( x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu - \frac{i}{2} \sigma^{\mu\nu} \right) \psi \quad (6.5.46)$$

---

<sup>20</sup>Infatti, in QED utilizzeremo il campo spinoriale  $\psi$  per descrivere elettroni e positroni. Le particelle create da  $\hat{a}_s(\vec{p})$  sono elettroni di tri-impulso  $\vec{p}$ , energia  $E_p > 0$ , spin  $s = \frac{1}{2}$ , terza componente di spin data da  $u_s(p)$  e carica  $Q = +1$  (sarebbe  $Q = 1 \cdot e$  se non fossimo in unità di carica  $e$ ). Le antiparticelle create da  $\hat{b}_s(\vec{p})$  sono positroni di tri-impulso  $\vec{p}$ , energia  $E_p > 0$ , spin  $s = \frac{1}{2}$ , terza componente di spin data da  $v_s(p)$  (cioè opposta a quella di  $e^-$ ) e carica  $Q = -1$  (quindi  $Q = -e$ ).

rispetto a quello calcolabile con la teoria scalare ora abbiamo il termine di spin non banale, proporzionale a  $\frac{i}{2}\sigma^{\mu\nu}$ , che ancora una volta ci conferma che siamo in presenza di particelle di spin  $\frac{1}{2}$ .

Sostituendo l'espressione di  $\psi$  e  $\psi^\dagger$  in termini di  $\hat{a}$ ,  $\hat{a}^\dagger$ ,  $\hat{b}$  e  $\hat{b}^\dagger$  è possibile esprimere il momento angolare totale nel sistema di riferimento di riposo:

$$\begin{aligned}\hat{J}_z = \int d^3p \int \frac{d^3p' d^3p'}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_p} \sqrt{2E_{p'}}} e^{-ip'\cdot\vec{x}} e^{-ip\cdot\vec{x}} \sum_{r,r'} & \left( \hat{a}_{r'}^\dagger(\vec{p}') u_{r'}^\dagger(\vec{p}') + \hat{b}_{r'}^\dagger(\vec{p}') v_{r'}^\dagger(\vec{p}') \right) \times \\ & \times \frac{\Sigma_3}{2} \left( \hat{a}_r(\vec{p}) u_r(\vec{p}) + \hat{b}_r(\vec{p}) v_r(\vec{p}) \right) \quad (6.5.47)\end{aligned}$$

$$\hat{J}_z \hat{a}_s^\dagger(\vec{0}) |0\rangle = \frac{1}{2m} \left( \sum_r u_s^\dagger(\vec{0}) \frac{\Sigma_3}{2} u_r(\vec{0}) \right) \hat{a}_r^\dagger(\vec{0}) |0\rangle \quad (6.5.48)$$

da cui si ricava:

$$\hat{J}_z \hat{a}_s^\dagger(\vec{0}) |0\rangle = \pm \frac{1}{2} \hat{a}_s^\dagger(0) |0\rangle \quad (6.5.49)$$

$$\hat{J}_z \hat{b}_s^\dagger(\vec{0}) |0\rangle = \mp \frac{1}{2} \hat{b}_s^\dagger(0) |0\rangle \quad (6.5.50)$$

che conferma che le particelle, o antiparticelle, associate al campo di Dirac hanno spin  $\frac{1}{2}$  e terza componenti di spin opposta tra loro (ad esempio  $\pm \frac{1}{2}$  per un fermione e  $\mp \frac{1}{2}$  per antifermione). Si veda meglio pagina 60-62 del Peskin e Schroeder [7].

## 6.6 Schema riassuntivo

Riassumiamo brevemente tutti i risultati visti in questo capitolo, in modo da evidenziare i punti chiave in vista dell'interpretazione che ne potremo dare nella sezione §6.7.

### Campo scalare

$$\hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega_k}} \left[ \hat{a}_k e^{-ikx} + \hat{a}_k^\dagger e^{ikx} \right] \quad (6.6.1)$$

$$:\hat{H}: = \int d^3x \omega_k \hat{n}_k. \quad (6.6.2)$$

### Campo scalare carico

$$\hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_k}} \left[ \hat{a}_k e^{-ikx} + \hat{b}_k^\dagger e^{+ikx} \right] \quad (6.6.3)$$

$$\hat{\phi}^\dagger(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_k}} \left[ \hat{a}_k^\dagger e^{+ikx} + \hat{b}_k e^{-ikx} \right] \quad (6.6.4)$$

$$:\hat{H}: = \int d^3k \omega_k \left( \hat{n}_k^a + \hat{n}_k^b \right) \quad (6.6.5)$$

$$:\hat{Q}: = \int d^3k \left( \hat{n}_k^b - \hat{n}_k^a \right) \quad (6.6.6)$$

### Campo spinoriale

$$\hat{\psi}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2E_p}} \sum_{s=1}^2 \left( u_s(\vec{p}) \hat{a}_s(\vec{p}) e^{-ipx} + v_s(\vec{p}) \hat{b}_s^\dagger(\vec{p}) e^{+ipx} \right) \quad (6.6.7)$$

$$\hat{\bar{\psi}}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2E_p}} \sum_{s=1}^2 \left( \bar{u}_s(\vec{p}) \hat{a}_s^\dagger(\vec{p}) e^{+ipx} + \bar{v}_s(\vec{p}) \hat{b}_s(\vec{p}) e^{-ipx} \right) \quad (6.6.8)$$

$$:\hat{H}: = \int d^3p \sum_{s=1}^2 E_p \left( \hat{n}_{sp}^a + \hat{n}_{sp}^b \right) \quad (6.6.9)$$

$$:\hat{Q}: = \int d^3p \sum_s \left( \hat{n}_{sp}^a - \hat{n}_{sp}^b \right) \quad (6.6.10)$$

## 6.7 Significato fisico dell'analisi di Fourier

Ora che abbiamo quantizzato il campo siamo autorizzati a parlare di particelle. Sfruttiamo il riassunto dei risultati elencati nella sezione §6.6 per darne un'interpretazione. I riferimenti per questa sezione sono il Lancaster e Blundell [6] e il Barone [1]. L'analisi di Fourier dei campi la possiamo scrivere come:<sup>21</sup>

$$\hat{\phi}(x) = \sum_k \left( \text{Termine } e^{-ikx} \right) + \sum_k \left( \text{Termine } e^{ikx} \right). \quad (6.7.1)$$

Ricordiamoci che sia l'equazione di Klein-Gordon che quella di Dirac ammettono soluzioni ad energia sia positiva che negativa. Se vediamo  $\phi(x)$  come una funzione d'onda quantistica (cosa che in realtà non è) possiamo interpretare<sup>22</sup> il termine  $e^{ikx}$  come il contributo delle energie negative. Infatti, sappiamo che la soluzione dell'equazione di Schrodinger libera è  $\phi \propto e^{-i(E(\vec{k})t - \vec{k} \cdot \vec{x})}$  in cui  $E(\vec{k})$  è l'energia della particella; se prendiamo  $e^{ikx} = e^{i(k^0 t - \vec{k} \cdot \vec{x})} = e^{i(E(\vec{k})t - \vec{k} \cdot \vec{x})}$  alloraabbiamo un segno meno da associare

---

<sup>21</sup>Scriviamo  $\hat{\phi}(x)$ , ma vale anche per i campi spinoriali.

<sup>22</sup>Vedi il capitolo 3 di Srednicki [10].

all'energia, che quindi diventa negativa. Il termine  $e^{-ikx}$  invece è un termine che associamo alle energie positive.

Però, noi nell'espressione primordiale (6.3.15) del campo  $\hat{\phi}$  avevamo messo una  $\theta(k^0)$  che ci selezionava solamente le energie (e masse, per via del mass-shell) positive. Dobbiamo risolvere questa contraddizione e dare un'interpretazione non solo alle soluzioni ad energie negative, ma anche, di conseguenza, al termine  $e^{+ikx}$ .

Per raggiungere il nostro scopo possiamo seguire la strada tracciata da Feynmann<sup>23</sup>, che in un certo senso è più corretta (sempre che possa ritenersi un'interpretazione più corretta di un'altra) della visione del mare di Dirac visto nel capitolo §1. Prima guarderemo le equazioni poi adotteremo un'approccio più pittorico.

Cominciamo con il ricordarci che: date le equazioni di una teoria i segni che adottiamo all'interno di essa sono pura convenzione.

Conosciamo già dalla Relatività Speciale le equazioni del moto di una particella carica in moto in un campo elettromagnetico, ossia:

$$m \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = q F^\mu{}_\nu \frac{dx^\nu}{d\tau} \quad (6.7.2)$$

in cui  $\tau$  è il tempo proprio,  $q$  la carica della particelle (assunta come positiva) ed  $F^\mu{}_\nu$  il tensore di campo elettromagnetico. Possiamo immaginare di invertire il segno del tempo proprio (guardiamo un film al contrario):

$$\tau \longrightarrow -\tau \quad (6.7.3)$$

il che è lecito dopotutto. Facendo questo cambio vediamo che abbiamo:

$$m \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = -q F^\mu{}_\nu \frac{dx^\nu}{d\tau} \quad (6.7.4)$$

in cui ovviamente il segno – esce dalla derivata prima, dal momento che la derivata seconda si compensa da sola. Scrivo l'equazione sul foglio e me ne dimentico per qualche mese; nel momento in cui riprendo in mano i vecchi appunti e vedo l'equazione (6.7.4) mi sono scordato da dove sbuca quel segno meno, ma è del tutto lecito il fatto che io ora lo associi alla carica elettrica  $q$  e pensi il tempo che scorre in avanti e con segno positivo. Quindi, in questo senso, vedere una carica elettrica  $q$  positiva che si muove indietro nel tempo (il che ci sembra in qualche modo innaturale, o per lo meno strano), possiamo vedere una carica  $-q$  negativa che invece si muove avanti nel tempo (cosa che ci rende più sereni).

Per l'equazione di Klein-Gordon possiamo fare un ragionamento analogo. Prendiamo il termine che associamo alle energie negative:

$$e^{ipx} = e^{i(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})} \quad (6.7.5)$$

---

<sup>23</sup>In realtà anche il fisico svizzero Ernst Stuckelberg sviluppò in parallelo un'interpretazione molto simile.

e immaginiamo di fare anche in questo caso il cambio:

$$t \longrightarrow -t \quad (6.7.6)$$

che però, in analogia con quanto detto sopra, possiamo associare all'energia  $E$  e quindi considerare energie  $-E$  negative. Ovviamente, dobbiamo ricordarci di avere una teoria relativistica, quindi non possiamo cambiare segno solo al tempo, ma dobbiamo fare in realtà il cambio:

$$x^\mu \longrightarrow -x^\mu. \quad (6.7.7)$$

Facendo il cambio (6.7.7) possiamo vedere che la velocità  $\frac{dx^\mu}{dt}$  non cambia di segno per via del fatto che sia posizione che tempo cambiano di segno. Grazie a (6.7.7) il nostro esponenziale associato alle energie negative ora è:

$$e^{ipx} = e^{i(-Et + \vec{p} \cdot \vec{x})} = e^{-i(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})} \quad (6.7.8)$$

in cui possiamo associare i cambi di segno che ci sono stati uno all'energia e l'altro all'impulso della particella, avendo quindi:

$$E \longrightarrow -E, \quad \vec{p} \longrightarrow -\vec{p}. \quad (6.7.9)$$

Però non è ancora molto chiaro tutto sto discorso, anche perché con il cambio (6.7.7) l'altro esponenziale  $e^{-ipx}$  è diventato  $e^{ipx}$ . Quindi, forse non abbiamo risolto il problema del segno nell'esponenziale, però, abbiamo capito che i due esponenziali della soluzione di Klein-Gordon appartengono a due gruppi distinti.

Guardiamo un'altra cosa. Prendiamo dal Lancaster e Blundell [6] l'espressione per la corrente di Noether elettromagnetica per una carica positiva, con energia positiva:

$$J_{EM}^\mu = (+q)2|N|^2 p^\mu = (+q)2|N|^2(E, \vec{p}) \quad (6.7.10)$$

che per una carica positiva, ma ad energia negativa è:

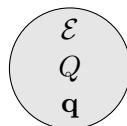
$$J_{EM}^\mu = (+q)2|N|^2 p^\mu = (+q)2|N|^2(-E, -\vec{p}). \quad (6.7.11)$$

Ora, per avere quantità fisicamente osservabili dobbiamo avere energie positive, quindi possiamo immaginare di raccogliere un segno meno dal quadri-impulso:

$$J_{EM}^\mu = (-q)2|N|^2 p^\mu = (+q)2|N|^2(E, -\vec{p}) \quad (6.7.12)$$

in questo modo ci è chiaro che se associamo il segno negativo alla carica elettrica  $q$ , possiamo vedere che le soluzioni ad energia negativa le possiamo vedere come particelle, che chiamiamo **antiparticelle**, ad energia positiva, ma con carica elettrica e tri-impulso cambiati di segno.

Bene, ora abbiamo capito che le energie negative le possiamo vedere come positive e associate a delle particelle con carica elettrica e tri-impulso cambiato di segno, però non è molto limpido sto discorso. Continuiamo a ragionare. Nella sezione §F.4 dell'Appendice F abbiamo parlato degli operatori di creazione e distruzione  $\hat{a}_p^\dagger$  e  $\hat{a}_p$ , che appunto creavano e distruggevano particelle ad impulso definito (nel caso di campi spinoriali anche a spin fissato); ora, nei campi che abbiamo studiato sono presenti sia  $\hat{a}_p^\dagger$  e  $\hat{a}_p$  che altri operatori  $\hat{b}_p^\dagger$  e  $\hat{b}_p$ , che abbiamo appurato essere associati a termini (gli esponenziali) corrispondenti ad energie negative, quindi sono operatori di natura diversa da  $\hat{a}_p^\dagger$  e  $\hat{a}_p$  e possiamo dire che creano e distruggono antiparticelle ad impulso fissato. Però, nei campi  $\hat{\phi}$  e  $\hat{\psi}$  che ruolo hanno questi operatori di creazione e distruzione? Ovviamente come dice il nome hanno il compito di creare e distruggere particelle e antiparticelle ad impulso (e spin) definito. Per verificarlo basta applicare i campi allo stato di vuoto  $|0\rangle$ . Però perché i campi  $\hat{\phi}$  e  $\hat{\psi}$  distruggono particelle e creano antiparticelle e non il contrario?<sup>24</sup> La risposta rapida è che possiamo ragionare per analogia con gli operatori  $\hat{a}$  e  $\hat{b}$ . Infatti, abbiamo detto che gli operatori senza croce distruggono particelle e quelli hermitiani coniugati le creano, quindi è logico che  $\hat{\phi}$  e  $\hat{\psi}$  distruggano particelle e che  $\hat{\phi}^\dagger$  e  $\hat{\psi}^\dagger$  le creino. Però perché per le antiparticelle fanno il contrario? Rispondiamo a questo sfruttando diagrammi di Feynmann presi brutalmente dal Lancaster e Blundell [6]. Immaginiamo i sistemi come delle palle che possano assorbire ed emettere dei quanti, ossia particelle e antiparticelle. Possiamo rappresentare un sistema ad energia  $\mathcal{E}$ , carica  $Q$  ed impulso  $\vec{q}$  come una palla, tipo quella in figura 6.6.



**Figura 6.6:** Raffigurazione pittorica del sistema ad energia  $\mathcal{E}$ , carica  $Q$  e tri-impulso  $\mathbf{q}$ .

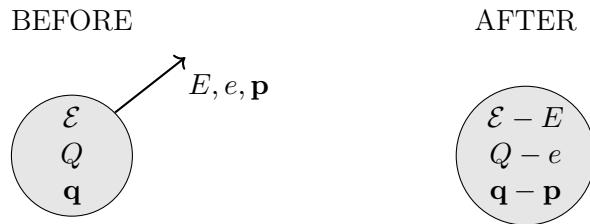
Se il termine  $e^{-ikx}$  è interpretato come una particella entrante nel sistema, quindi come un'onda progressiva che arriva da  $-\infty$  e si sposta verso  $x \rightarrow +\infty$ , allora  $e^{ikx}$  sarà un'antiparticella che esce dal sistema, ossia un'onda che si sposta da  $x = +\infty$  verso  $x = -\infty$ . Con il termine "entrante" ci riferiamo, nel senso dei diagrammi di Feynmann, ad una particella (associata a  $e^{-ikx}$ ) che arriva nel sistema e viene assorbita (quindi annichilita grazie a  $\hat{a}$ ), come possiamo vedere nella figura 6.7 in cui viene assorbita una particella di energia  $E$ , carica  $e$  e impulso  $\vec{p}$ .

<sup>24</sup>Notiamo che parlare di antiparticelle con il campo scalare è un po' forzato non essendo campi con carica elettrica, e per cui *ogni particella è l'antiparticella di se stessa*, possiamo fare riferimento ai campi scalari carichi per questo.



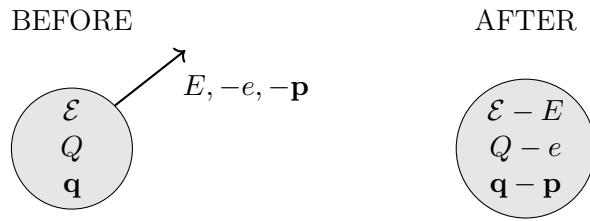
**Figura 6.7:** Raffigurazione assorbimento di una particella di energia  $E$ , carica  $e$  e tri-impulso  $\mathbf{p}$ .

Ovviamente una particella uscente dal sistema sarebbe raffigurabile come in figura 6.8, in cui il sistema emette (quindi creata grazie a  $\hat{a}^\dagger$  presente in  $\hat{\psi}^\dagger$ ) una particella di energia  $E$ , carica  $e$  e impulso  $\vec{p}$ .



**Figura 6.8:** Raffigurazione emissione di una particella di energia  $E$ , carica  $e$  e tri-impulso  $\mathbf{p}$ .

Quando invece diciamo che al termine  $e^{+ikx}$  associamo un'antiparticella "uscente" significa che essa viene creata (grazie a  $\hat{b}^\dagger$  presente in  $\hat{\psi}$ ) nel sistema e poi ne esce al di fuori. Questa situazione la possiamo vedere nella figura 6.9.



**Figura 6.9:** Raffigurazione emissione di un'antiparticella di energia  $E$ , carica  $-e$  e tri-impulso  $-\mathbf{p}$ .

Notiamo però che l'assorbimento di una particella ad energia negativa equivale ad emettere una particella ad energia positiva, ma con carica ed impulso cambiato di segno, che interpretiamo come antiparticella. Quest'ultima analogia la possiamo vedere nelle figure 6.9 e 6.10.



**Figura 6.10:** Raffigurazione assorbimento di un'antiparticella di energia  $-E$ , carica  $e$  e tri-impulso  $\mathbf{p}$ .

In questo senso troviamo anche consistenza con gli operatori che sono associati ai termini  $e^{-ikx}$  ed  $e^{+ikx}$ , infatti abbiamo rispettivamente  $\hat{a}_k^\dagger$  che crea una particella (entrante nel sistema) e  $\hat{b}_k$  che distrugge un'antiparticella. Un altro modo di vederlo è che in realtà il campo  $\hat{\phi}$  distrugge sia le particelle che le antiparticelle, rappresenta quindi le figure 6.7 e 6.10, ma per via del fatto che tra le due energie  $E = \pm\sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4}$ , che derivavano dall'equazione di mass-shell, hanno senso fisico solo quelle positive, allora interpretiamo l'annichilazione delle particelle ad energia negativa come la creazione di antiparticelle ad energia positiva, carica elettrica e tri-impulso cambiati di segno, dunque in conclusione otteniamo che il campo  $\hat{\phi}$  rappresenta le figure 6.7 e 6.9.

Alla luce di ciò possiamo scrivere in senso del tutto generale.<sup>25</sup>

$$\hat{\phi}(x) = \sum_k \begin{pmatrix} e^{-ikx} \\ \text{particella entrante} \\ \text{ad energia positiva} \\ \text{annichilita} \end{pmatrix} + \sum_k \begin{pmatrix} e^{+ikx} \\ \text{antiparticella entrante} \\ \text{ad energia positiva} \\ \text{creata} \end{pmatrix}. \quad (6.7.13)$$

Dunque, il campo è sviluppato in termini di operatori di creazione e distruzione di particelle (e antiparticelle), ciascuno dei quali è associato ad una frequenza di Fourier associata all'onda piana  $e^{-ikx}$  o  $e^{+ikx}$ .

Le particelle, e antiparticelle, sono le eccitazioni, a frequenza definita, del campo. Proprio perché le particelle e antiparticelle sono create e annichilate, il sistema, una volta quantizzato, non corrisponde ad un numero fissato di particelle. Come già accennto in una sezione precedente, assoceremo al campo particelle e antiparticelle, ciascuna corrisponderà ad un'eccitazione del campo, il quale, contenendo tutti i possibili modi di oscillazione (è una somma continua), contiene già dall'inizio tutte le particelle possibili (nel caso di  $\hat{\phi}$  saranno particelle scalari di spin 0, mentre per  $\hat{\psi}$  sono particelle fermioniche si spin 1/2). Un'ultima cosa da ricordare per completezza della sezione è l'analogia del campo con l'oscillatore armonico. Per l'oscillatore armonico

<sup>25</sup>Anche in questo caso vale anche per il campo spinoriale.

i vari stati erano classificati in base all'eccitazione del sistema e i vari livelli energetici li potevamo raggiungere agendo con  $\hat{a}$  e  $\hat{a}^\dagger$ , che in quel caso ci permettevano di "scalare" la scala energetica; ora, i vari livelli eccitati dell'oscillatore corrispondono a particelle (create o distrutte) e sono sempre  $\hat{a}$  e  $\hat{a}^\dagger$ , così come  $\hat{b}$  e  $\hat{b}^\dagger$ , che ci permettono di averle nel nostro sistema piuttosto che no.

Però attenzione, potremmo chiederci se il fatto che cambiando il segno del tempo e questo corrisponde a cambiare segno dell'energia sia casuale. Per questa risposta facciamo riferimento alle sezioni 2.8, 2.9 e 4.14.4 del Barone [1].

In particolare, nella sezione 2.8 possiamo vedere quando viene rispettata la causalità tra due eventi nello spazio tempo. Infatti, se prendiamo due eventi in un certo sistema di riferimento  $K$ , ad esempio l'emissione di un segnale in  $(t_a, x_a, y_a, z_a)$  e l'arrivo dello stesso segnale in  $(t_b, x_b, y_b, z_b)$ , e assumiamo che il segnale si propaghi solo lungo  $x$ , con velocità  $u$  costante, allora abbiamo:

$$x_b - x_a = u(t_b - t_a). \quad (6.7.14)$$

Supponiamo che l'evento  $B$  avvenga dopo l'evento  $A$ . Prendiamo un secondo sistema di riferimento  $K'$  in moto rispetto  $K$  con velocità  $v$  costante lungo  $x$  e vediamo che dalle trasformazioni di Lorentz abbiamo:

$$\Delta t' = \gamma \left(1 - \frac{vu}{c^2}\right) \Delta t \quad (6.7.15)$$

che ci dice che se la velocità del segnale  $u$  e del moto relativo tra i due sistemi di riferimento  $v$  sono minori della velocità della luce  $c$ , allora  $\Delta t'$  ha lo stesso segno di  $\Delta t$  e l'ordine degli eventi è preservato. Se  $u$  dovesse essere maggiore di  $c$ , allora potremmo trovare un sistema di riferimento in cui l'ordine degli eventi non è preservato e dunque un sistema di riferimento in cui la causa succede all'effetto, perderemmo dunque la causalità della teoria. È quindi una conseguenza alla richiesta che la causalità sia sempre rispettata che qualunque segnale, e quindi particella, si muova sempre a velocità inferiori a quella della luce.

Nella sezione 2.9 invece fa un breve riassunto di quali sono i vari tipi di intervalli che si possono avere. Riporto un breve reminder:

- $\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta r^2$  dove  $r = (x, y, z)$ .
- $\Delta s^2 > 0$  intervallo di tipo *tempo*.
- $\Delta s^2 = 0$  intervallo di tipo *luce*.
- $\Delta s^2 < 0$  intervallo di tipo *spazio*.

Ricordiamo anche che per via del fatto che gli intervalli sono invarianti, anche la loro classificazione lo è. Dunque se un intervallo è di un certo tipo in un

sistema di riferimento inerziale, allora lo sarà anche in tutti gli altri. Teniamo bene a mente che due intervalli sono connessi causalmente solo se separati da intervalli di tipo tempo o luce.

Nella sezione 4.14.4 comincia la parte che ci interessa di più, ma in cui non ci preoccupiamo di dimostrare i teoremi, ma ci concentreremo solo sulle interpretazioni. Prendiamo, sempre per semplicità, una particella soggetta ad una perturbazione nel punto  $(t_1, \vec{x}_1)$  e successivamente nel punto  $(t_2, \vec{x}_2)$ , in cui  $t_2 > t_1$ . È possibile calcolare, secondo la formulazione degli integrali di cammino della Meccanica Quantistica non relativistica, l'ampiezza di probabilità di trasizione dalla perturbazione 1 alla 2:<sup>26</sup>

$$\langle \vec{x}_2 | e^{-\frac{i}{\hbar} H(t_2 - t_1)} | \vec{x}_1 \rangle = A(t_1, \vec{x}_1, t_2, \vec{x}_2) \quad (6.7.16)$$

$$\sim \int \frac{d^3 p}{2E} \exp\{-i(E(t_2 - t_1) - \vec{p} \cdot (\vec{x}_2 - \vec{x}_1))\}. \quad (6.7.17)$$

A questo punto è cruciale un teorema dell'analisi di Fourier, che ci dice che: Data una funzione  $F(\omega)$  limitata, al quadrato integrabile e nulla per  $\omega < 0$ , allora la sua trasformata di Fourier:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{-i\omega t} F(\omega) \quad (6.7.18)$$

non può annullarsi solo in un intervallo finito di  $t$ , a meno di non essere identicamente nulla. La parte fondamentale per noi è che  $F(\omega) = 0$  per  $\omega < 0$ , poiché in questo modo  $f(t)$  diventa un'integrale a sole frequenze positive. Riprendendo l'integrale (6.7.17), cambiano la variabile di integrazione da  $p$  ad  $E$  e ricordando che dobbiamo imporre che le energie siano positive affinché abbiano senso fisicamente, allora possiamo applicare il teorema visto sopra e concludere che (6.7.17) è non nulla al di fuori del cono luce di 1, in cui abbiamo:

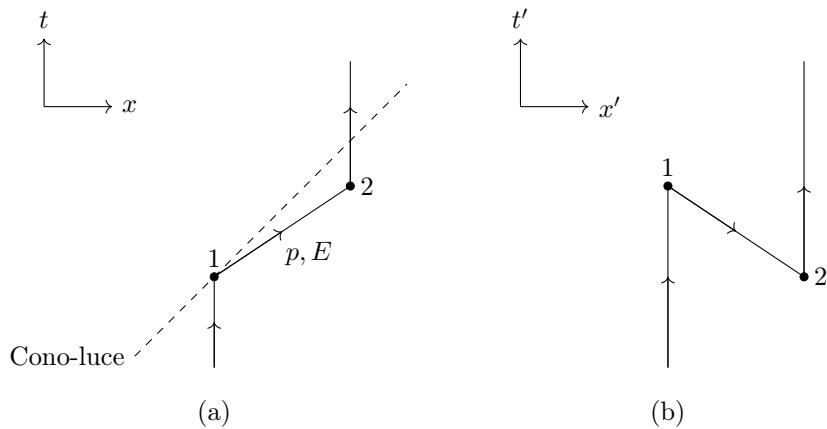
$$\Delta s^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (\vec{x}_2 - \vec{x}_1)^2 < 0 \quad (6.7.19)$$

ovvero intervalli di tipo spazio. Dalle motivazioni viste poco fa sappiamo che per la Relatività Speciale due eventi sono causalmente connessi solo se sono separati da intervalli di tipo tempo o luce, ma quello trovato con (6.7.17) sembra contraddirre ciò e quindi rendere l'ordine temporale di due eventi dipendente dal sistema di riferimento.<sup>27</sup> Effettivamente è così, avendo due

<sup>26</sup>Vedi la parte finale della sezione §8.2.1.

<sup>27</sup>Infatti, intervalli di tipo spazio, per la RS, collegano due eventi non causalmente connessi, però, come abbiamo appena visto con (6.7.17) per la MQ due eventi sono causalmente connessi anche se sono collegati da intervalli di tipo spazio, ciò è reso possibile dalla non località della teoria quantistica. Infatti in Meccanica Quantistica nulla vieta che una particella "virtuale" contribuisca all'ampiezza anche in regioni di tipo spazio, sebbene con un'ampiezza molto piccola e in modo che non violi la causalità macroscopica. Tali contributi sono possibili ma esponenzialmente soppressi. Questo significa che il formalismo quantistico relativistico permette che ci siano contributi "virtuali" alla propagazione di una particella anche in regioni non connesse causalmente nel senso classico.

eventi separati da un'intervallo spaziale, allora possiamo trovare un altro sistema di riferimento inerziale in cui la successione temporale degli eventi 1 e 2 sia invertita. Consideriamo un sistema di riferimento  $K'$  in cui l'evento 2 accade prima dell'evento 1, dunque con  $t'_2 < t'_1$ . La rappresentazione dei due sistemi di riferimento è in figura 6.11.



**Figura 6.11:** Rappresentazione diagrammatica di un processo in cui una particella è soggetta a due perturbazioni successive (1 e 2). Il sistema di riferimento (a) gli eventi sono ordinati con  $t_1 < t_2$ , mentre in (b) con  $t'_2 < t'_1$ .

Possiamo osservare che nella figura (b) nel punto  $\vec{x}'_2$  vengono create due particelle, una che si muove avanti nel tempo (la linea verticale), mentre l'altra indietro nel tempo andando da  $\vec{x}'_1$  a  $\vec{x}'_2$  (la linea inclinata che collega 1 e 2). Seguendo il diagramma temporale (che come vedremo sarà come un diagramma di Feynmann) dal basso verso l'alto, com'è il verso dell'asse temporale, osserviamo: partiamo con una particella che si muove avanti nel tempo (la linea verticale), avviene l'evento 2 e si creano due particelle che si muovono una avanti nel tempo e una indietro, successivamente avviene l'evento 1 in cui la particella con cui siamo partiti si annichilisce con una di quelle create in 2 e ci rimane soltanto una particella che si muove nel verso positivo di  $t'$  (ossia la linea verticale che parte da 2). Il punto di questo discorso è che la particella che viaggia indietro nel tempo può essere interpretata come un'antiparticella che si sposta avanti nel tempo da  $\vec{x}'_2$  a  $\vec{x}'_1$ . Per via dell'invarianza della massa e della conservazione della carica in processi di assorbimento ed emissione possiamo, in generale, associare ad ogni particella una corrispettiva antiparticella, con massa identica, ma carica elettrica opposta. Quindi, dalla coesistenza della MQ e della RS e dalla richiesta che esistano solo stati ad energia positiva emerge che sono possibili processi di creazione e annichilazione di coppie, e si deve quindi concludere che sia necessaria l'esistenza delle antiparticelle.

## Capitolo 7

# Simmetrie discrete del campo di Dirac

Vediamo in questo capitolo quali sono le simmetrie discrete che possiede il campo spinoriale di Dirac. Può essere visto come una parte attaccata al capitolo §2, ma con qualche spolverata di Fisica. Rileggi brevemente la sezione §5.2 in cui abbiamo giusto accennato due cose sulla trasformazione di parità. Il riferimento principale è il capitolo 3.6 sul Peskin e Schroeder [7], ma puoi anche vedere il capitolo 15 del Lancaster e Blundell [6]. Una descrizione (che non abbiamo seguito) fatta bene è presente anche sullo Srednicki [10].

Come abbiamo avuto modo di vedere, ci sono alcune trasformazioni che non appartengono al gruppo di Lorentz ristretto  $L_+^\uparrow$ , tra di esse ci sono:

- Trasformazione di parità  $P$ .
- Inversione temporale  $T$ .
- Coniugazione di carica  $C$ .

Analizzeremo nel corso del capitolo ciascuna di essere, ma perché? Perché ci si è resi conto, dalle osservazioni sperimentali, che la natura rispetta la simmetria per trasformazioni  $CPT$ . Infatti, ad esempio, le interazioni forti, EM e gravitazionale sono simmetriche per  $C$ ,  $P$  e  $T$  separatamente. Allo stesso tempo le interazioni deboli violano  $C$  e  $P$  separatamente, ma rispettano le simmetrie  $CP$  e  $T$  (apparte alcuni casi particolari rari).

In particolare, una Teoria Quantistica dei Campi costruita in modo corretto deve possedere simmetria  $CPT$ , il che vuol dire che se invertiamo le 4 coordinate dello spazio-tempo e cambiamo le cariche, quindi scambiamo particelle con antiparticelle, allora tutto dev'essere invariante. Questo va sotto il nome di *teorema CPT*. Una conseguenza del teorema è che la massa e il tempo di vita di una qualsiasi particella devono essere identici a quelli della corrispettiva antiparticella.

## 7.1 Parità

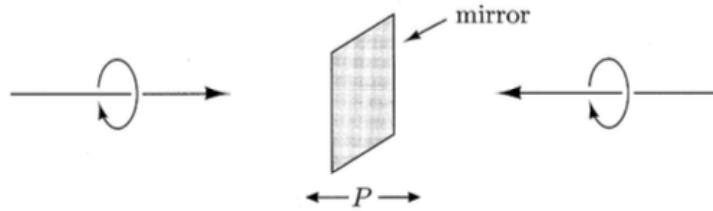
In generale, per una trasformazione di Lorentz abbiamo:

$$\psi(x) \xrightarrow{\text{T.L.}} \psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x). \quad (7.1.1)$$

Per una trasformazione di parità, abbiamo visto con l'equazione (5.2.2), in cui vale (5.2.6), che:

$$\psi(x) \xrightarrow{P} \psi'(x') = S_P\psi(x) \quad \text{con } S_P = \eta_P\gamma^0 \quad (7.1.2)$$

in cui  $\eta_P = e^{i\varphi}$  con  $\varphi \in \mathbb{R}$ . Una trasformazione di parità consiste sostanzialmente in un'inversione spaziale e, come sappiamo, riesce a invertire l'impulso di una particella, ma non il suo spin. Una descrizione pittorica della trasformazione è quella che da il Peskin e Schroeder che ho riportato in figura 7.1.



**Figura 7.1**

Come sappiamo, una trasformazione di Lorentz trasforma il campo  $\psi(x)$  tramite una matrice 4x4 costante, ci aspettiamo quindi anche di poter rappresentare la trasformazione di parità tramite matrici 4x4, e allo stesso tempo, trattando  $\hat{\psi}(x)$  come un'operatore, di scrivere una trasformazione per esso del tipo:

$$S_P\hat{\psi}(x)S_P = \eta_P\gamma^0\hat{\psi}(t, -\vec{x}). \quad (7.1.3)$$

Nota che scriviamo  $S_P\hat{\psi}(x)S_P$  e non  $S_P^{-1}\hat{\psi}(x)S_P$  perché vale che  $S_P^{-1} = S_P^\dagger$ , essendo la parità rappresentabile da un'operatore unitario (poiché  $S_P^2 = \mathbb{1}$ ), e con un'abuso di notazione scriviamo  $S_P\hat{\psi}(x)S_P$ , ovviamente intendendo che uno dei due operatori  $S_P$  sia l'inverso dell'altro.

Per riuscire a trovare dei risultati concreti riformuliamo il tutto utilizzando il linguaggio della QFT, ossia, riformuliamo tutto in termini di operatori di creazione e distruzione e degli stati di singola particella che essi creano agendo sul vuoto:

$$\hat{a}_s^\dagger(\vec{p})|0\rangle, \quad \hat{b}_s^\dagger(\vec{p})|0\rangle. \quad (7.1.4)$$

L'operatore di parità trasforma ogni stato (7.1.4) come:

$$\begin{cases} \hat{a}_s^\dagger(\vec{p})|0\rangle & \xrightarrow{P} \hat{a}_s^\dagger(-\vec{p})|0\rangle \\ \hat{b}_s^\dagger(\vec{p})|0\rangle & \xrightarrow{P} \hat{b}_s^\dagger(-\vec{p})|0\rangle \end{cases} \quad (7.1.5)$$

per cui dobbiamo avere che:

$$\begin{cases} S_P \hat{a}_s(\vec{p}) S_P = \eta_a \hat{a}_s(-\vec{p}) \\ S_P \hat{b}_s(\vec{p}) S_P = \eta_b \hat{b}_s(-\vec{p}) \end{cases} \quad (7.1.6)$$

conseguentemente:

$$\begin{cases} S_P \hat{a}_s^\dagger(\vec{p}) S_P = \eta_a^* \hat{a}_s^\dagger(-\vec{p}) \\ S_P \hat{b}_s^\dagger(\vec{p}) S_P = \eta_b^* \hat{b}_s^\dagger(-\vec{p}) \end{cases} \quad (7.1.7)$$

e siccome due applicazioni successive dell'operatore di parità devono portare l'osservabile al suo valore originale, e siccome le osservabili sono costituite da un numero pari di operatori fermionici, allora si ha:

$$|\eta_{a,b}|^2 = 1 \implies \eta_{a,b} = \pm 1. \quad (7.1.8)$$

Visto come trasformano gli operatori di creazione e distruzione possiamo calcolare come trasforma l'operatore  $\hat{\psi}(x)$  esprimendolo in termini di  $\hat{a}^{(\dagger)}$  e  $\hat{b}^{(\dagger)}$ . Ricordando l'espressione del campo spinoriale quantizzato (6.5.14) scriviamo:

$$S_P \hat{\psi}(x) S_P \xrightarrow[\text{P.}]{\quad} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_k \left[ \eta_a \hat{a}_s(-\vec{p}) (u_s(\vec{p}) e^{-ipx})' + \eta_b^* \hat{b}_s^\dagger(-\vec{p}) (v_s(\vec{p}) e^{+ipx})' \right] \quad (7.1.9)$$

in cui abbiamo lasciato da trasformare le parentesi con gli spinori  $u_s$  e  $v_s$ . Ora, indichiamo:

$$\tilde{p}^\mu = (p^0, -\vec{p}) = (E_p, -\vec{p}) \quad (7.1.10)$$

da cui conseguie:

$$px = p_\mu x^\mu = \tilde{p} \cdot (t, \vec{x}) = \tilde{p}_\mu \tilde{x}^\mu = \tilde{p} \tilde{x} \quad (7.1.11)$$

ma anche che:

$$\tilde{p} \cdot \sigma = p \cdot \bar{\sigma} \quad (7.1.12)$$

$$\tilde{p} \cdot \overleftarrow{\sigma} = p \cdot \sigma. \quad (7.1.13)$$

Gli spinori quindi trasformano come:

$$\begin{cases} v(\vec{p}) = \gamma^0 v(\tilde{p}) \\ v(\vec{p}) = -\gamma^0 v(\tilde{p}) \end{cases} \quad (7.1.14)$$

è facile dimostrarlo (vedi pagina 65 del Peskin) utilizzando le relazioni tra  $p$  e  $\sigma$  di sopra. Quindi otteniamo:

$$S_P \hat{\psi}(x) S_P \xrightarrow{P} \int \frac{d^3 \tilde{p}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_k \left[ \eta_a \hat{a}_s(\tilde{p}) u_s(\tilde{p}) e^{-i\tilde{p}\tilde{x}} - \eta_b^* \hat{b}_s^\dagger(\tilde{p}) v_s(\tilde{p}) e^{+i\tilde{p}\tilde{x}} \right] \quad (7.1.15)$$

che mi aspetto essere proporzionale ad  $\hat{\psi}(t, -\vec{x})$ . Possiamo rispettare le nostre aspettative richiedendo che:

$$\eta_b^* = -\eta_a \quad (7.1.16)$$

così che si fattorizzino e si cambi il segno, ma che implica anche che:

$$\eta_a \eta_b = -\eta_a \eta_a^* = -1. \quad (7.1.17)$$

Per convenzione si sceglie  $\eta_a = +1$  e dunque  $\eta_b = -\eta_a = -1$ . Troviamo quindi:

$$S_P \hat{\psi}(x) S_P \xrightarrow{P} \eta_a \gamma^0 \hat{\psi}(t, -\vec{x}) \quad (7.1.18)$$

con  $|\eta_a|^2 = 1$ .

Grazie alla trasformazione (7.1.18) il Peskin verifica anche tutte le proprietà di trasformazione degli invarianti bilineari sotto parità.

Facciamo un'attimo un breve appunto sull'operatore di parità. Abbiamo riportato la figura 7.1 del Peskin e Schroeder per rappresentare una trasformazione di parità, ma chi la spiega effettivamente bene è il Lancaster e Blundell. Loro ci dicono: quando guardiamo una certa immagine in uno specchio tutto sembra uguale, ma allo stesso tempo diverso. Quando guardiamo una mano riflessa, ovviamente se contiamo il numero di dita esso rimane lo stesso. Allo stesso tempo però, ci rendiamo conto che lo specchio ci mostra una realtà opposta a quella in cui effettivamente viviamo, ribaltando la coordinata spaziale perpendicolare alla superficie dello specchio e lasciando invariate le altre due. L'effetto dello specchio non può essere ricostruito tramite delle rotazioni. Però se dopo lo specchio agiamo con una rotazione di  $180^\circ$  attorno l'asse perpendicolare allo specchio, allora otteniamo una trasformazione di *inversione*, che è rappresentata dall'operatore di parità  $P$  di cui abbiamo parlato. Successivamente all'inversione, come già detto, otteniamo come risultato che tutte e tre le coordinate spaziali risultano ribaltate.

Però, non tutte le quantità si trasformano ugualmente sotto parità. Abbiamo parlato ad esempio delle dita della mano, il cui numero non viene modificato con lo specchio; le quantità invarianti sotto  $P$  si chiamano **scalari**. Per i vettori, come ad esempio il campo elettrico, l'azione di  $P$  ha l'effetto

di cambiamento di segno ottenendo l'oggetto opposto. Però, esistono anche degli oggetti intermedi, ossia oggetti che sono matematicamente scalari o vettori, ma che non si comportano come tali. Chiamiamo **pseudoscalari** gli oggetti che sono effettivamente scalari, ma che sotto parità cambiano segno. Allo stesso modo chiamiamo **pseudovettori** gli oggetti che sono vettori (formati dal prodotto esterno di due vettori, a volte chiamati *vettori polati*), ma che sotto l'azione di  $P$  non cambiano segno. Riassumiamo brevemente i risultati:

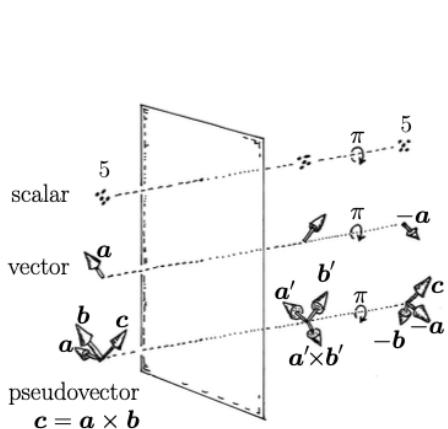
$$P(\text{scalare}) = \text{scalare}$$

$$P(\text{pseudoscalare}) = -\text{pseudoscalare}$$

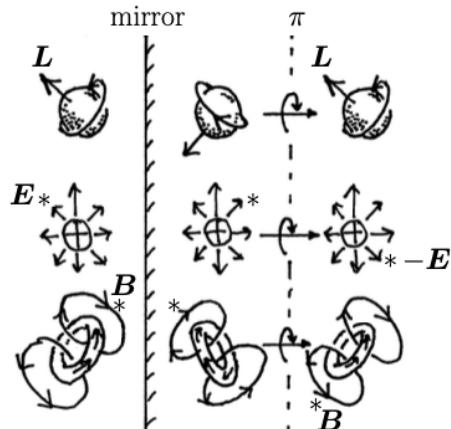
$$P(\text{vettore}) = -\text{vettore}$$

$$P(\text{pseudovettore}) = \text{pseudovettore}.$$

Tutto quello che abbiamo detto è riassunto nelle figure (7.2) e (7.3).



**Figura 7.2:** Operazione di parità composta dal riflesso su uno specchio e una rotazione di  $180^\circ$  attorno all'asse perpendicolare lo specchio stesso.



**Figura 7.3:** Operazione di parità su quantità fisiche. Possiamo vedere che il momento angolare  $\vec{L}$  e il campo magnetico  $\vec{B}$  si comportano come pseudovettori, ma il campo elettrico  $\vec{E}$  come un vettore.

## 7.2 Inversione temporale

Vediamo in questa sezione la trasformazione, che chiamiamo  $T$ , dell'inversione temporale. Come la parità, e come vedremo la coniugazione di carica,

vorremmo che anche  $T$  fosse un'operatore unitario e vorremmo che agisse nel modo seguente:

$$\begin{cases} \hat{a}_s(\vec{p}) & \xrightarrow{T.} \hat{a}_s(-\vec{p}) \\ \psi(t, \vec{x}) & \xrightarrow{T.} \psi(-t, \vec{x}) \end{cases} \quad (7.2.1)$$

ossia una trasformazione che inverte l'asse temporale. Ovviamente ci sono relazioni analoghe anche per l'operatore  $\hat{b}$  di antiparticella. Notiamo che invertendo il segno del tempo, la velocità cambia segno e di conseguenza anche l'impulso.

Ad ogni modo, ottenere una trasformazione di questo tipo è molto difficile poiché, come abbiamo già avuto modo di vedere, l'operazione di mandare  $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$  implica la trasformazione  $(t, \vec{x}) \rightarrow (t, -\vec{x})$  nello sviluppo di  $\hat{\psi}(x)$  in termini di operatori di creazione e distruzione. Ci si può anche rendere conto che la difficoltà cresce se si vuole imporre che  $T$  sia una simmetria per la teoria di Dirac.

Quello che si può fare è rinunciare ad avere  $T$  definito in modo convenzionale, ma pur mantenendo l'unitarietà (cose che non vogliamo perdere se vogliamo preservare la probabilità). Definiamo quindi un'operatore unitario, quindi tale per cui:

$$T^{-1} = T^\dagger \quad (7.2.2)$$

che non agisce solamente sugli operatori, ma anche sui c-numeri tramite un'operazione di complessa coniugazione:

$$T \text{ (c-numero)} = (\text{c-numero})^* T. \quad (7.2.3)$$

In questo modo, anche se  $T$  è simmetria del sistema, ovvero se  $[T, H] = 0$ , abbiamo che  $Te^{-iHt} = e^{+iHt}T$  e dal momento che l'evoluzione temporale avviene con gli operatori  $e^{-iHt}$  ed  $e^{+iHt}$ , allora effettivamente  $T$  inverte la freccia del tempo. Puoi vedere i conti sul Peskin e Schroeder. Notiamo anche che definendo così l'operatore  $T$  perdiamo la linearità, da momento che l'operatore complesso coniugato non è un'operazione lineare, infatti,  $T$  è detto operatore *antiunitario* o *antilineare*.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Il Lancaster e Blundell spiega molto bene l'inversione temporale, in particolare ci dice che cos'è un operatore antiunitario e perché dobbiamo introdurlo. Quando invertiamo l'asse temporale, ma lasciamo invariato lo spazio vogliamo delle trasformazioni che facciano:

$$T^{-1}\hat{x}T = \hat{x} \quad , \quad T^{-1}\hat{p}T = \hat{p} \quad (7.2.4)$$

e l'unico modo che abbiamo per rispettare la regola di commutazione tra posizione ed impulso  $[\hat{x}, \hat{p}] = i$  deve valere  $T^{-1}iT = -i$ , che è proprio la relazione tipica degli operatori antiunitari. Gli operatori antiunitari, chiamiamolo  $S$ , non sono lineari e vale:

$$S(a|\phi\rangle + b|\chi\rangle) = a^*S|\phi\rangle + b^*S|\chi\rangle \quad (7.2.5)$$

proprietà che, tra l'altro, giustifica il fatto che anche dei c-numeri si trasformino sotto azione di  $S$ , cosa che diremmo non succedere visto che seppur c-numeri sono comunque numeri e quindi che commutino con tutto.

Oltre ad invertire il senso dell'asse temporale,  $T$  inverte anche la proiezione dello spin; cosa importante poiché  $\hat{\psi}$  ha una struttura spinoriale data da  $u_s$  e  $v_s$  con  $s = 1, 2$ . Il Peskin e Schroeder danno un'immagine pittorica della trasformazione che riporto in figura 7.4.



**Figura 7.4**

È utile ricordare le convenzioni che avevamo scelto nella sezione §5.6, in particolare ricordare che associammo gli spinori  $u_s(\vec{p})$  alle particelle fermioniche e  $v_s(\vec{p})$  alle antiparticelle, ma anche rinfrescare la memoria sulla forma degli spinori bidimensionali  $\chi_{1,2}$  e  $\phi_{1,2}$ . Notiamo anche che l'operazione di  $T$ , nel passaggio particella e antiparticella ci fa fare, automaticamente anche lo scambio up→down, cioè, se per le particelle avevamo spin  $s$ , per le antiparticelle avremo  $-s$  nel pedice associato agli spinori; dunque scriviamo ad esempio  $\phi_s = \chi_{-s}$ .

Con un po' di algebra, e se vuoi con l'aiuto del Peskin, si può dimostrare che l'operazione che effettivamente "flippi" la componente di spin sia:

$$\begin{cases} u_{-s}(\tilde{p}) = -\gamma^1 \gamma^3 [u_s(\vec{p})]^* \\ v_{-s}(\tilde{p}) = -\gamma^1 \gamma^3 [v_s(\vec{p})]^* \end{cases} \quad (7.2.6)$$

in cui  $\tilde{p} = (p^0, -\vec{p}) = (E_p, -\vec{p})$ . Le relazioni (7.2.6) rendono esplicito il fatto che l'inversione temporale richiede un'operazione di complessa coniugazione. Per gli operatori di distruzione possiamo scrivere:

$$\begin{cases} T \hat{a}_s(\vec{p}) T = \hat{a}_{-s}(-\vec{p}) \\ T \hat{b}_s(\vec{p}) T = \hat{b}_{-s}(-\vec{p}) \end{cases} \quad (7.2.7)$$

a meno di un fattore di fase  $\eta_T$  del tutto ininfluente che possiamo omettere per semplicità.

Viste le proprietà di trasformazione degli spinori e degli operatori di creazione e distruzione possiamo vedere come si trasformi il campo sotto queste trasformazioni (mettiamo esplicitamente gli operatori  $T^\dagger$  per vedere meglio le trasformazioni):

$$\begin{aligned} T^\dagger \hat{\psi}(t, \vec{x}) T &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_s T^\dagger \left( \hat{a}_s(\vec{p}) u_s(\vec{p}) e^{-ipx} + \right. \\ &\quad \left. + \hat{b}_s^\dagger(\vec{p}) v_s(\vec{p}) e^{+ipx} \right) T \end{aligned} \quad (7.2.8)$$

$$\begin{aligned}
 &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_s T^\dagger \left( \hat{a}_s(\vec{p}) \underbrace{TT^\dagger}_{=1} u_s(\vec{p}) e^{-ipx} + \right. \\
 &\quad \left. + \hat{b}_s^\dagger(\vec{p}) \underbrace{TT^\dagger}_{=1} v_s(\vec{p}) e^{+ipx} \right) T \quad (7.2.9)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_s \left( \hat{a}_{-s}(-\vec{p}) u_s^*(\vec{p}) e^{+ipx} + \right. \\
 &\quad \left. + \hat{b}_{-s}^\dagger(-\vec{p}) v_s^*(\vec{p}) e^{-ipx} \right) \quad (7.2.10)
 \end{aligned}$$

ricordandoci che  $T$  agisce anche sui c-numeri restituendone il complesso coniugato. Continuando i conti:

$$\begin{aligned}
 T^\dagger \hat{\psi}(t, \vec{x}) T = (\gamma^1 \gamma^3) \int \frac{d^3 \tilde{p}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_s \left( \hat{a}_{-s}(\tilde{p}) u_{-s}(\tilde{p}) e^{+i\tilde{p}\cdot(t, -\vec{x})} + \right. \\
 \left. + \hat{b}_{-s}^\dagger(\tilde{p}) v_{-s}(\tilde{p}) e^{-i\tilde{p}\cdot(t, -\vec{x})} \right) \quad (7.2.11)
 \end{aligned}$$

notando che  $\tilde{p} \cdot (t, -\vec{x}) = -\tilde{p} \cdot (-t, \vec{x})$ , allora possiamo finalmente scrivere:

$$T^\dagger \hat{\psi}(t, \vec{x}) T = \gamma^1 \gamma^3 \hat{\psi}(-t, \vec{x}). \quad (7.2.12)$$

Come per la parità (e la coniugazione di carica) sul Peskin e Schroeder ci sono le proprietà di trasformazione anche degli invarianti bilineari.

### 7.3 Coniugazione di carica

La trasformazione di coniugazione di carica, che indichiamo con  $C$ , è convenzionalmente definita come l'operazione che trasforma un fermione, con una certa proiezione di spin, in un anti-fermione con stessa proiezione di spin. In generale, quello che fa è mandare una particella in un'antiparticella lasciandone invariata la proiezione dello spin e cambiandone tutte le quantità *charge-like*, ossia tutte le quantità collegate alla carica, ossia, carica elettrica, numero leptonico, hypercarica etc. . Il Lancaster e Blundell lo rappresentano con la figura 7.5.

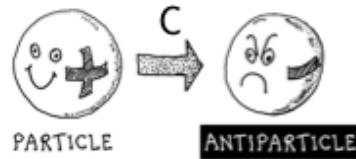


Figura 7.5

Quello che fa una trasformazione di questo tipo è:

$$\begin{cases} C\hat{a}_s(\vec{p})C = \hat{b}_s(\vec{p}) \\ C\hat{b}_s(\vec{p})C = \hat{a}_s(\vec{p}) \end{cases} \quad (7.3.1)$$

a meno di una fase  $\eta_C$  che ignoriamo per semplicità. Relazioni analoghe anche per gli operatori di creazione. Gli spinori si trasformano come (il Peskin e Schroeder lo verificano velocemente):

$$\begin{cases} u_s(\vec{p}) = -i\gamma^2 [v_s(\vec{p})]^* \\ v_s(\vec{p}) = -i\gamma^2 [u_s(\vec{p})]^* \end{cases} \quad (7.3.2)$$

in cui possiamo notare che anche in questo caso entra in gioco l'operazione di complessa coniugazione. Inserendo le trasformazioni degli spinori all'interno dell'espressione della trasformazione dell'operatore di campo (6.5.14):

$$\begin{aligned} C\hat{\psi}(x)C &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_s \left[ -i\gamma^2 \hat{b}_s(\vec{p}) [v_s(\vec{p})]^* e^{-ipx} - \right. \\ &\quad \left. - i\gamma^2 \hat{a}_s^\dagger(\vec{p}) [u_s(\vec{p})]^* e^{+ipx} \right] \\ &= -i\gamma^2 \hat{\psi}^*(x) = -i\gamma^2 (\hat{\psi}^\dagger)^T = -i(\hat{\bar{\psi}} \gamma^0 \gamma^2)^T. \end{aligned} \quad (7.3.3)$$

Quindi possiamo vedere che:

$$C\hat{\psi}(x)C = -i\gamma^2 \hat{\psi}^*(x) \quad (7.3.4)$$

che ci mostra che la coniugazione di carica manda  $\psi$  in  $\psi^*$ , ma equivalentemente abbiamo:

$$C\hat{\psi}(x)C = -i(\hat{\bar{\psi}} \gamma^0 \gamma^2)^T \quad (7.3.5)$$

in cui dobbiamo stare attenti che la  $\gamma^0$  è presente solo nella relazione che lega l'operazione di coniugazione di carica  $C\hat{\psi}C$  con  $\bar{\psi}$ .

Ovviamente, anche l'operatore di coniugazione di carica  $C$  è un'operatore unitario.

## 7.4 Sommario di $C$ , $P$ e $T$

Noi non le abbiamo viste, ma sul Peskin e Schroeder sono presenti tutte le trasformazioni di tutte le forme bilineari che abbiamo visto per i campi spinoriali. Riassumiamo in una tabella tali proprietà di trasformazione (mettiamo anche l'operatore derivata e lasciamo fuori ovviamente l'identità e lo spinore  $\psi$ , che abbiamo già visto):

	$\bar{\psi}\psi$	$i\bar{\psi}\gamma^5\psi$	$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$	$\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$	$\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$	$\partial_\mu$
$P$	+1	-1	$(-1)^\mu$	$-(-1)^\mu$	$(-1)^\mu(-1)^\nu$	$(-1)^\mu$
$T$	+1	-1	$(-1)^\mu$	$(-1)^\mu$	$-(-1)^\mu(-1)^\nu$	$-(-1)^\mu$
$C$	+1	+1	-1	+1	-1	+1
$CPT$	+1	+1	-1	-1	+1	-1

## Capitolo 8

# Teoria del propagatore in una teoria libera

Ci sono delle  $i$  che non tornano in generale, è un capitolo da risistemare.

Ora che abbiano quantizzato i campi (con spin 0 e  $1/2$ ) ad un istante  $t$  fissato ed interpretato i risultati ottenuti in termini di particelle relativistiche, siamo interessati a studiarne l'evoluzione temporale, il che ci porterà ad introdurre la nozione di propagatore (che abbiamo già visto ad MQ2). L'espressione esplicita del propagatore per il campo scalare e spinoriale è uno dei risultati più importanti a cui arriveremo in questo corso e sarà alla base delle regole di Feynmann per il calcolo della sezioni d'urto dei processi di scattering tra particelle relativistiche.

In generale ci sono due modi per studiare l'evoluzione spazio-temporale di un sistema:

- L'uso di un'equazione differenziale, che da un'indicazione dell'evoluzione per intervalli infinitesimi.
- L'utilizzo dell'ampiezza di transizione, in cui non guardiamo l'evoluzione passo passo, ma abbiamo un'informazione più globale.

In elettromagnetismo sappiamo che un sistema lo possiamo studiare tramite:

- Equazioni di Maxwell.
- Principio di Huygens-Fresnel.

In Meccanica Quantistica il corrispettivo è:

- Equazione di Schrodinger.
- Utilizzo del propagatore  $K$ .

In MQ relativistica l'utilizzo del propagatore è cruciale, anche perché non abbiamo la possibilità di utilizzare l'equazione di Schrodinger. Nella QFT, in particolare nelle teorie interagenti (in teorie libere l'equazione differenziale è ancora utilizzabile), risolvere l'equazione differenziale è molto complicato per cui  $K$  diventa l'unica via percorribile. Il propagatore  $K$  ci permette di scrivere un principio di Huygens-Fresnel generalizzato al caso quantistico relativistico, ossia è un modo che ci fa studiare l'evoluzione dei fronti d'onda pensandoli come inviluppo delle onde generate da ciascun punto del fronte d'onda precedente. Quindi, vorremmo scrivere le funzioni d'onda, in realtà i campi, come inviluppo degli stessi, ma a tempi precedenti.

Utilizzeremo, per motivi di convenienza, per lo studio dell'evoluzione utilizziamo la rappresentazione di Heisenberg per gli operatori di campo quantistici.

La sezione è organizzata in modo da vedere la definizione di propagatore prima in Meccanica Quantistica, poi cominciamo a parlare di operatori di campo, vediamo come essi evolvono nello spazio tempo definendo i vari propagatori nei 3 diversi casi (campo scalare neutro, scalare carico e spinoriale), ma sempre in casi liberi. Sarà presente al termine della sezione un riepilogo di risultati. Dopo aver visto l'espressione dei propagatori nelle teorie libere cominceremo a vedere le teorie interagenti e i vari sviluppi perturbativi.

I riferimenti per questa sezione sono i capitolo 16 e 17 del Lancaster e Blundell [6] e Peskin e Schroeder [7]. Può essere anche utile rivedere gli appunti relativi al propagatore fatti al corso di MQ2.

## 8.1 Propagatore in Meccanica Quantistica

Come sappiamo bene dalla Meccanica Quantistica il propagatore è strettamente legato alla funzione di Green dell'equazione che stabilisce l'evoluzione spazio-temporale del sistema. In MQ2 avevamo visto che il propagatore (sempre inteso come ampiezza di probabilità che una particella, che si trova in  $\vec{x}_i$  a  $t_i$ , evolva nel tempo propagandosi nel punto  $\vec{x}_f$  al tempo  $t_f$ ) è la funzione di Green dell'operatore di Schrodinger:

$$\left( i \frac{\partial}{\partial t} - H \right) \quad (8.1.1)$$

cioè:

$$\left( i \frac{\partial}{\partial t} - H \right) G(x - y) = \delta^4(x - y). \quad (8.1.2)$$

Nel caso della MQ non relativistica trovavamo una forma del propagatore:

$$K(1, 2) = \langle \vec{x}_f | \hat{U}(t_1, t_2) | \vec{x}_i \rangle \quad (8.1.3)$$

$$= \langle \vec{x}_f | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}(t_2 - t_1)} | \vec{x}_i \rangle \quad (8.1.4)$$

$$= \langle \vec{x}_f | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}(t_2 - t_1)} \sum_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n| \vec{x}_i \rangle \quad (8.1.5)$$

$$= \sum_n e^{-\frac{i}{\hbar} E_n (t_2 - t_1)} \langle \vec{x}_f | \psi_n \rangle \langle \psi_n | \vec{x}_i \rangle \quad (8.1.6)$$

$$= \sum_n e^{-\frac{i}{\hbar} E_n (t_2 - t_1)} \psi_n^\dagger(\vec{x}_i) \psi_n(\vec{x}_f) \quad (8.1.7)$$

che se imponiamo che il tempo scorra in avanti, otteniamo la funzione di Green ritardata:

$$G^+(x_i, t_i; x_f, t_f) \equiv K(t_f, \vec{x}_f; t_i, \vec{x}_i) = \theta(t_f - t_i) \sum_n \psi_n(\vec{x}_f) \psi_n^\dagger(\vec{x}_i) e^{-\frac{i}{\hbar} E_n (t_2 - t_1)} \quad (8.1.8)$$

scritta in termini degli autostati stazionari dell'hamiltoniana. Ovviamente ci sono scritture del propagatore  $K(1, 2)$  più o meno convenienti per fare i conti e verificare (8.1.2), possiamo trovarne una in cui togliamo di mezzo il tempo e inseriamo l'energia. Prendiamo il propagatore  $K(t_f, \vec{x}_f; t_i, \vec{x}_i)$ , mettiamo  $t_i = 0$  e  $t_f = t$  per semplicità e facciamo una trasformata di Fourier<sup>1</sup>:

$$K(E, \vec{x}_f, \vec{x}_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{iEt} K(t, \vec{x}_f; 0, \vec{x}_i) \quad (8.1.9)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{iEt} \theta(t) \sum_n \psi_n(\vec{x}_f) \psi_n^\dagger(\vec{x}_i) e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t} \quad (8.1.10)$$

$$= \sum_n \psi_n(\vec{x}_f) \psi_n^\dagger(\vec{x}_i) \int_0^{+\infty} dt e^{it(E - E_n)} \quad (8.1.11)$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \sum_n \psi_n(\vec{x}_f) \psi_n^\dagger(\vec{x}_i) \int_0^{+\infty} dt e^{it(E - E_n + i\epsilon)} \quad (8.1.12)$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \sum_n \psi_n(\vec{x}_f) \psi_n^\dagger(\vec{x}_i) \frac{1}{i(E - E_n + i\epsilon)} \left. e^{it(E - E_n + i\epsilon)} \right|_0^{+\infty} \quad (8.1.13)$$

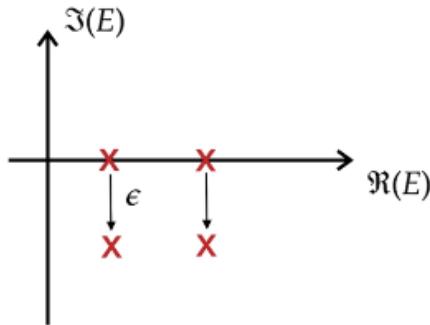
$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \sum_n \psi_n(\vec{x}_f) \psi_n^\dagger(\vec{x}_i) \frac{i}{E - E_n + i\epsilon} \quad (8.1.14)$$

in cui al punto (8.1.11) avendo un'integrale non convergente, avendo una divergenza sul cammino di integrazione per  $E = E_n$  e oscillando a  $t \rightarrow \infty$ ,

---

<sup>1</sup>Come  $x$  e  $p$  in MQ non relativistica sono legati da una trasformata di Fourier, anche  $t$  ed  $E$  lo sono.

bisognava regolarizzarlo, per questo si è utilizzata la tecnica del *damping factor*, il che consiste nel traslare i poli dell'integrando verso il basso moltiplicando il tutto per un fattore  $e^{-\epsilon t}$  (ovviamente mandando  $\epsilon \rightarrow 0^+$  nel conto). Il termine  $+i\epsilon$  a denominatore di (8.1.14) è fondamentale, non solo perché regolarizza l'integrale rimuovendo la singolarità, ma anche perché garantisce la causalità. L'azione dei damping factor può essere vista nella figura 8.1.



**Figura 8.1:** Traslazione dei poli nel piano complesso dell'energia tramite il metodo dei damping factor

L'espressione che abbiamo trovato:

$$K(E, \vec{x}_f, \vec{x}_i) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \sum_n \psi_n(\vec{x}_f) \psi_n^\dagger(\vec{x}_i) \frac{i}{E - E_n + i\epsilon} \quad (8.1.15)$$

spesso si chiama anche **propagatore di Feynmann** e ci insegna molte cose riguardo l'utilità del propagatore. Quello che stiamo per dire si vede se mandiamo  $\epsilon \rightarrow 0^+$ . Innanzitutto vediamo che le singolarità del propagatore sono gli autostati dell'hamiltoniana  $E = E_n$ , per cui se abbiamo per le mani  $K(E, x)$  e non conosciamo lo spettro energetico del sistema possiamo facilmente trovarlo. In secondo luogo possiamo vedere che i residui del propagatore sono proporzionali a  $i \sum_n \psi_n(\vec{x}_f) \psi_n^\dagger(\vec{x}_i)$ , ossia alle funzioni d'onda, il che ci dice che possiamo fare tranquillamente Meccanica Quantistica utilizzando il propagatore, dal momento che contiene più informazioni della singola funzione d'onda essendo essa contenuta in  $K(1, 2)$ .

Ricordandoci il significato fisico del propagatore, ossia, che è quell'oggetto che ci dice l'ampiezza di probabilità che il sistema quantistico transisca dallo stato iniziale a  $(\vec{x}_i, t_i)$  a quello finale a  $(\vec{x}_f, t_f)$ , allora possiamo raffigurarlo graficamente con un disegno che è quello in figura 8.2, e di cui studieremo meglio le varie parti quando parleremo dei diagrammi di Feynmann e degli sviluppi perturbativi nel capitolo §10.

Prima di passare alla QFT parliamo ancora del propagatore in MQ, ma nello spazio degli impulsi. Possiamo scrivere il propagatore, indicando con  $q$

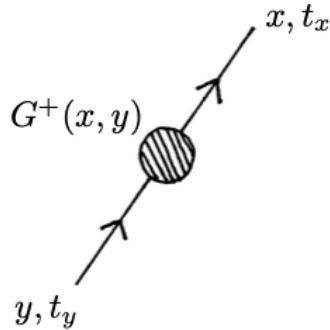


Figura 8.2

il tri-impulso iniziale nella posizione  $y$  al tempo  $t_y$  e  $p$  il tri-impulso finale in  $x$  a  $t_x$ , come:

$$G^+(p, t_x; q, t_y) = \theta(t_x - t_y) \langle p | U(t_x - t_y) | q \rangle \quad (8.1.16)$$

$$= \theta(t_x - t_y) \langle p | e^{-iH(t_x - t_y)} | q \rangle \quad (8.1.17)$$

$$= \theta(t_x - t_y) e^{-iE_q(t_x - t_y)} \langle p | q \rangle \quad (8.1.18)$$

$$= \theta(t_x - t_y) \delta(\vec{p} - \vec{q}) e^{-iE_q(t_x - t_y)} \quad (8.1.19)$$

in cui notiamo che  $\delta(\vec{p} - \vec{q})$  non rappresenta altro che la conservazione del tri-impulso.<sup>2</sup> C'è di più, perché la conservazione dell'impulso implica la conservazione dell'energia, visto che se utilizziamo la delta, allora otteniamo  $E_q \rightarrow E_p$ . Questa cosa è molto importante e va tenuta a mente:

*Il propagatore libero, in Meccanica Quantistica non relativistica (ma anche in QFT) garantisce la conservazione del tri-impulso e dell'energia (quindi del quadri-impulso), dunque se lo rappresentiamo come una linea che congiunge due vertici  $(x, t_x)$  e  $(y, t_y)$ , che sono punti dello spazio tempo, allora questo ci dice che il sistema conserva  $\vec{p}$  ed  $E$  nella propagazione (libera) da un vertice all'altro.*

Come abbiamo fatto con il propagatore  $K(x, t)$  andando ad ottenere  $K(x, E)$ , possiamo fare la stessa cosa ora. Facciamo una trasformata di

---

<sup>2</sup>Molti libri omettono questa delta nelle relazioni dell'impulso semplicemente dando per scontato la conservazione dell'impulso e per semplicità di scrittura.

Fourier tra  $t$  ed  $E$  (mettendo  $q = 0$  e  $t_y = 0$  per semplicità):

$$G^+(\vec{p}, E) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{iEt} G^+(p, t, 0) \quad (8.1.20)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{iEt} \theta(t) \delta(\vec{p}) e^{-iE_p t} \quad (8.1.21)$$

$$= \delta(\vec{p}) \int_0^{+\infty} dt e^{it(E - E_p + i\epsilon)} \quad (8.1.22)$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \delta(\vec{p}) \frac{-i}{E - E_p + i\epsilon} e^{i(E - E_p + i\epsilon)} \Big|_0^{+\infty} \quad (8.1.23)$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \delta(\vec{p}) \frac{i}{E - E_p + i\epsilon} \quad (8.1.24)$$

che è un'espressione di notevole importanza poiché già relativistica.

### 8.1.1 Sommario propagatori in Meccanica Quantistica

Riepiloghiamo tutte le espressioni che abbiamo trovato per il propagatore valide in Meccanica Quantistica indicando con  $\vec{x}$ ,  $t_x$  e  $\vec{q}$  posizione, tempo e tri-impulso iniziali, mentre con  $\vec{y}$ ,  $t_y$  e  $\vec{p}$  posizione, tempo e tri-impulso finali:

$$G^+(\vec{x}, t_x, \vec{y}, t_y) = \theta(t_y - t_x) \sum_n e^{-\frac{i}{\hbar} E_n (t_y - t_x)} \psi_n^\dagger(\vec{x}) \psi_n(\vec{y}) \quad (8.1.25)$$

$$G^+(\vec{x}, \vec{y}, E) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \sum_n \psi_n(\vec{y}) \psi_n^\dagger(\vec{x}) \frac{i}{E - E_n + i\epsilon} \quad (8.1.26)$$

$$G^+(\vec{q}, t_x, \vec{p}, t_y) = \theta(t_x - t_y) \delta(\vec{p} - \vec{q}) e^{-iE_q (t_x - t_y)} \quad (8.1.27)$$

$$G^+(\vec{q}, \vec{p}, E) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \delta(\vec{p} - \vec{q}) \frac{i}{E - E_p + i\epsilon} \quad (8.1.28)$$

## 8.2 Campo scalare neutro

Vediamo in questa sezione tutto ciò che riguarda l'evoluzione temporale e spazio-temporale del campo scalare neutro. Come già successo capiterà che la sezione sul campo scalare sarà leggermente più lunga rispetto le altre poiché verranno introdotti certi concetti per la prima volta.

### 8.2.1 Evoluzione temporale del campo di Klein-Gordon

La rappresentazione di Heisenberg ci permette di scrivere l'evoluzione temporale come (in unità naturali):

$$\hat{\phi}(\vec{x}, t) = e^{iHt} \hat{\phi}(\vec{x}) e^{-iHt} \quad (8.2.1)$$

$$\hat{\Pi}(\vec{x}, t) = e^{iHt} \hat{\Pi}(\vec{x}) e^{-iHt} \quad (8.2.2)$$

e sappiamo che l'equazione del moto degli operatori è data, in generale per l'operatore  $\hat{Q}$  da:

$$i \frac{d}{dt} \hat{Q}(t) = [\hat{Q}(t), \hat{H}] . \quad (8.2.3)$$

Da qui in poi eviteremo di scrivere i cappelletti sopra gli operatori per semplicità.

Possiamo vedere quali sono le equazioni del moto degli operatori di campo  $\hat{\phi}$  e  $\hat{\Pi}$ . Vediamo:

$$i \frac{\partial \phi}{\partial t} = [\phi, H] \quad (8.2.4)$$

$$= \left[ \phi(\vec{x}, t), \int d^3x' \frac{1}{2} \left\{ \Pi^2(\vec{x}', t) + (\vec{\nabla}\phi(\vec{x}', t) + m^2\phi^2(\vec{x}', t)) \right\} \right] \quad (8.2.5)$$

sviluppiamo i commutatori:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \int d^3x' \left\{ \underbrace{[\phi(\vec{x}), \Pi^2(\vec{x}')] + \left[ \phi(\vec{x}), (\vec{\nabla}\phi(\vec{x}'))^2 \right]}_{=0} + \right. \\ &\quad \left. + m^2 \underbrace{[\phi(\vec{x}), \phi^2(\vec{x}')]_{=0}} \right\} \quad (8.2.6) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \int d^3x' \left\{ [\phi(\vec{x}, t), \Pi(\vec{x}', t)] \Pi(\vec{x}', t) + \Pi(\vec{x}', t) [\phi(\vec{x}, t), \Pi(\vec{x}', t)] \right\} \quad (8.2.7)$$

$$= \frac{1}{2} \int d^3x' 2i\delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \Pi(\vec{x}', t) \quad (8.2.8)$$

$$= i\Pi(\vec{x}, t) \quad (8.2.9)$$

dunque confermiamo ancora che  $\Pi = \dot{\phi}$ . Per il campo coniugato abbiamo:

$$i \frac{\partial \Pi}{\partial t} = [\Pi, H] \quad (8.2.10)$$

$$= \left[ \Pi(\vec{x}, t), \int d^3x' \frac{1}{2} \left[ \Pi^2(\vec{x}', t) + (\vec{\nabla}\phi(\vec{x}', t) + m^2\phi^2(\vec{x}', t)) \right] \right] \quad (8.2.11)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \int d^3x' \left\{ \underbrace{[\Pi(\vec{x}), \Pi^2(\vec{x}')]_{=0}} + \left[ \Pi(\vec{x}), \underbrace{(\vec{\nabla}\phi(\vec{x}'))^2}_{=\vec{\nabla}\phi \cdot \vec{\nabla}\phi} \right] + \right. \\ &\quad \left. + m^2 [\Pi(\vec{x}), \phi^2(\vec{x}')] \right\} \quad (8.2.12) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \int d^3x' \left\{ \vec{\nabla}_{x'} \phi(\vec{x}') \left[ \Pi(\vec{x}), \vec{\nabla}_{x'} \phi(\vec{x}') \right] + \left[ \Pi(\vec{x}), \vec{\nabla}_{x'} \phi(\vec{x}') \right] \vec{\nabla}_{x'} \phi(\vec{x}') - 2im^2 \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \phi(\vec{x}') \right\} \quad (8.2.13)$$

possiamo sfruttare il fatto che la derivata  $\vec{\nabla}_{x'}$  è fatta rispetto  $x'$  ed è lineare, quindi possiamo scrivere:

$$\left[ \Pi(\vec{x}), \vec{\nabla}_{x'} \phi(\vec{x}') \right] = \vec{\nabla}_{x'} \left[ \Pi(\vec{x}), \phi(\vec{x}') \right] \quad (8.2.14)$$

così abbiamo:

$$= \frac{1}{2} \int d^3x' \left\{ 2\vec{\nabla}_{x'} \phi(\vec{x}') \vec{\nabla}_{x'} \left[ \Pi(\vec{x}), \phi(\vec{x}') \right] - 2im^2 \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \phi(\vec{x}') \right\} \quad (8.2.15)$$

integrando per parti il primo termine e usando la  $\delta$  per il secondo:

$$= \underbrace{\vec{\nabla}_{x'} \phi(\vec{x}') \delta^3(\vec{x} - \vec{x}')}_{=0} \Big|_{V \text{ infinito}} + \int d^3x' \left\{ \left( \vec{\nabla}_{x'} \right)^2 \phi(\vec{x}') i \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') - im^2 \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \phi(\vec{x}') \right\} \quad (8.2.16)$$

$$= +i \left( \vec{\nabla}^2 - m^2 \right) \phi(\vec{x}). \quad (8.2.17)$$

Abbiamo trovato dunque:

$$i \frac{\partial \Pi}{\partial t} = i \left( \vec{\nabla}^2 - m^2 \right) \phi(\vec{x}) \quad (8.2.18)$$

che ricordando che  $\Pi = \dot{\phi}$  non è altro che l'equazione di Klein-Gordon.

Possiamo anche vedere l'evoluzione temporale degli operatori di creazione e distruzione:

$$e^{iHt} \hat{a}(\vec{k}) e^{-iHt} = \hat{a}(\vec{k}) e^{-iE_k t} \quad (8.2.19)$$

$$e^{iHt} \hat{a}^\dagger(\vec{k}) e^{-iHt} = \hat{a}^\dagger(\vec{k}) e^{+iE_k t} \quad (8.2.20)$$

che sostituendo dentro l'espressione dei campi  $\hat{\phi}(\vec{x})$  e  $\hat{\Pi}(\vec{x})$  ci forniscono le già note espressioni dei campi dipendenti dal tempo:

$$\hat{\phi}(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2E_k}} \left( \hat{a}(\vec{k}) e^{-ikx} + \hat{a}^\dagger(\vec{k}) e^{+ikx} \right) \Big|_{k^0 = E_k > 0} \quad (8.2.21)$$

$$\hat{\Pi}(\vec{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \hat{\phi}(\vec{x}, t) = \dot{\hat{\phi}}(\vec{x}, t). \quad (8.2.22)$$

Però ovviamente studiare solo l'evoluzione temporale dei campi non è congeniale con una teoria relativistica in cui dovremmo trattare spazio e tempo allo stesso modo. Potremmo fare un calcolo analogo considerando una traslazione spaziale invece che temporale. Per le traslazioni spaziali il generatore è  $\vec{P}$  e abbiamo:

$$e^{-i\vec{P}\cdot\vec{x}}\hat{a}(\vec{k})e^{+i\vec{P}\cdot\vec{x}} = \hat{a}(\vec{k})e^{i\vec{P}\cdot\vec{x}} \quad (8.2.23)$$

$$e^{-i\vec{P}\cdot\vec{x}}\hat{a}^\dagger(\vec{k})e^{+i\vec{P}\cdot\vec{x}} = \hat{a}^\dagger(\vec{k})e^{-i\vec{P}\cdot\vec{x}} \quad (8.2.24)$$

da cui otteniamo la corretta relazione tra  $\hat{\phi}(x^\mu)$  e  $\hat{\phi}(0)$ :

$$\hat{\phi}(x^\mu) = e^{i(Ht-\vec{P}\cdot\vec{x})}\hat{\phi}(0)e^{-i(Ht-\vec{P}\cdot\vec{x})} = e^{iP^\mu x_\mu}\hat{\phi}(0)e^{-iP^\mu x_\mu} \quad (8.2.25)$$

in cui abbiamo indicato con  $\vec{P}$  l'impulso associato al campo, mentre con  $\vec{k}$  è l'impulso associato al singolo modo normale del campo, ossia alla singola frequenza di Fourier.

### 8.2.2 Definizione di propagatore

Possiamo definire<sup>3</sup>, viste le cose imparate fino qui, l'*ampiezza di probabilità che una particella si propaghi da  $x$  a  $y$*  (intendiamo con particella un'eccitazione del campo scalare neutro):

$$D(x - y) = \langle 0 | \phi(x)\phi(y) | 0 \rangle \quad (8.2.26)$$

$$= \int \frac{d^3k d^3k'}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_k} \sqrt{2E_{k'}}} \langle \vec{k} | e^{-ikx} e^{+ik'y} | \vec{k}' \rangle \quad (8.2.27)$$

$$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{-ik(x-y)}}{2E_k} \quad (8.2.28)$$

in cui abbiamo usato la definizione vista del campo scalare neutro (6.3.52) e la definizione di operatore di creazione di particella ad impulso fissato  $\hat{a}^\dagger(\vec{k})|0\rangle = |\vec{k}\rangle$ . Notiamo anche che  $D(x - y)$  è un'invariante di Lorentz.

Però che cosa fa effettivamente  $D(x - y)$ ? Presa la definizione (6.3.52) e la sua espressione di evoluzione temporale (8.2.1) ci sarà semplice vederlo. Stiamo parlando di campi scalari scarichi, quindi per ora parlare di particelle o antiparticelle è la stessa cosa. Abbiamo:

$$D(x - y) = \langle 0 | \phi(x)\phi(y) | 0 \rangle \quad (8.2.29)$$

$$= \langle 0 | e^{i\hat{H}t_x} \hat{\phi}(\vec{x}) e^{-i\hat{H}t_x} e^{i\hat{H}t_y} \hat{\phi}(\vec{y}) e^{-i\hat{H}t_y} \rangle \quad (8.2.30)$$

$$= \langle 0 | e^{i\hat{H}t_x} \hat{\phi}(\vec{x}) e^{-i\hat{H}(t_x-t_y)} \hat{\phi}(\vec{y}) e^{-i\hat{H}t_y} | 0 \rangle \quad (8.2.31)$$

vediamo cosa vuol dire andando da destra verso sinistra:

---

<sup>3</sup>Alcuni libri lo definiscono come  $\Delta(x - y)$ .

- $e^{-i\hat{H}t_y}|0\rangle$  fa evolvere lo stato di vuoto fino al tempo  $t_y = y^0$ .
- $\hat{\phi}(\vec{y})e^{-i\hat{H}t_y}|0\rangle$  al tempo  $y^0$  crea una particella nel punto  $\vec{y}$  di impulso fissato.
- $e^{-i\hat{H}(t_x-t_y)}$  fa evolvere la particella creata in  $\vec{y}$  da tempo  $y^0$  al tempo  $t_x = x^0$ .
- $e^{i\hat{H}t_x}\hat{\phi}(\vec{x})$  distrugge la particella di impulso fissato nel punto  $\vec{x}$ , sempre al tempo  $x^0$ . Ci rendiamo conto che è necessario che  $y^0 < x^0$  affinché sia rispettata la causalità e che la particella sia assorbita (distrutta) dopo essere stata creata. Se  $y^0 > x^0$  allora il principio di causalità è violato.
- $\langle 0 |$  ci permette di "chiudere il panino" e vedere quale sia l'ampizza di probabilità del processo, ossia, la probabilità che partiamo da uno stato di vuoto, creiamo una particella "test" al tempo  $y^0$  e in  $\vec{y}$ , la facciamo evolvere fino a  $x^0$  e la distruggiamo in  $\vec{x}$ , dopodiché ci chiediamo quale sia la probabilità che non sia successo nulla e ci troviamo ancora nello stato di vuoto.

Quello che abbiamo detto è circa quello che facciamo con una particella test in presenza di un campo elettrico ad esempio. Prendiamo la particella test, la buttiamo in una certa regione, la osserviamo mentre si muove, la tolgo e dopo mi chiedo quale sia la probabilità che il sistema sia rimasto nello stesso stato di partenza.

Però facciamo un'attimo attenzione. Preso  $D(x - y)$  abbiamo detto che dobbiamo stare attenti all'ordine temporale, per questo motivo definiamo il **prodotto temporalmente ordinato** che garantisce che soltanto l'ordine causale venga considerato nei prodotti come:

$$T\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y) = \theta(x^0 - y^0)\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y) + \theta(y^0 - x^0)\hat{\phi}(y)\hat{\phi}(x) \quad (8.2.32)$$

il che ci permette di definire il propagatore di Feynmann come:

$$i\Delta_F(x - y) = \langle 0 | T\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y) | 0 \rangle. \quad (8.2.33)$$

Dotati della presa di coscienza (8.2.33) e ricordando (8.2.28) allora possiamo dare una rappresentazione esplicita del propagatore libero nel caso di teoria libera:

$$\Delta(x - y) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3(2E_k)} \left[ \theta(x^0 - y^0)e^{-ik(x-y)} + \theta(y^0 - x^0)e^{+ik(x-y)} \right]. \quad (8.2.34)$$

Inoltre, possiamo calcolare  $D(x - y)$  in due casi opposti, ma ugualmente semplici:

- se abbiamo  $(x - y)^2 > 0$ , quindi un'intervallo di tipo tempo, come ad esempio se  $x^0 = y^0 = t$  e  $(\vec{x} - \vec{y}) = 0$ , allora:

$$D(x - y) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} e^{-imt} \quad (8.2.35)$$

quindi, la propagazione può avvenire nel cono luce.

- se abbiamo  $(x - y)^2 < 0$ , quindi un'intervallo di tipo spazio, come ad esempio se  $x^0 = y^0 = 0$  e  $(\vec{x} - \vec{y}) = \vec{r}$ , allora:

$$D(x - y) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} e^{-mr} \quad (8.2.36)$$

quindi, la propagazione fuori dall'cono luce corrisponde ad un'ampiezza che va a zero esponenzialmente, ma non è nulla. Vedi i discorsi finali della sezione §6.7.

### 8.2.3 Causalità per il campo scalare neutro

Ricordiamoci che per la Relatività Speciale due eventi sono connessi causalmente solo se connessi tramite intervalli di tipo tempo o luce e non per intervalli di tipo spazio. Quello detto alla fine della sezione precedente potrebbe far pensare che siamo in presenza di una teoria in cui rompiamo il principio di causalità, ma in realtà non è così, perché la non località della teoria quantistica rende possibile una cessione causale anche per intervalli di tipo spazio. Per controllare che il principio di causalità sia rispettato nella propagazione dei quanti associati al campo scalare, dobbiamo capire non tanto se essi possono propagarsi al di fuori del cono-luce (cioè su distanze tipo spazio, con  $(x - y)^2 < 0$ ), ma piuttosto se una misura compiuta in un punto  $x$  possa avere effetto su una misura effettuata in un punto  $y$  separato da una distanza tipo spazio. Dobbiamo quindi calcolare il commutatore:

$$[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)] \quad (8.2.37)$$

a tempi diversi. Se il commutatore va a zero, allora una misura non può avere effetto sull'altra ed esse sono indipendenti. Naturalmente sappiamo già che il commutatore va a zero a tempi uguali, ma ora facciamo il calcolo in generale:

$$\begin{aligned} [\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)] &= \int \frac{d^3k d^3k'}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_k} \sqrt{2E_{k'}}} \left[ \left( \hat{a}(\vec{k}) e^{-ikx} + \hat{a}^\dagger(\vec{k}) e^{+ikx} \right) , \right. \\ &\quad \left. \left( \hat{a}(\vec{k}') e^{-ik'y} + \hat{a}^\dagger(\vec{k}') e^{+ik'y} \right) \right] \quad (8.2.38) \end{aligned}$$

sopravvivono solamente due termini per cui:

$$[\hat{a}(\vec{k}), \hat{a}^\dagger(\vec{k}')] = \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \quad , \quad [\hat{a}^\dagger(\vec{k}), \hat{a}(\vec{k}')] = -\delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \quad (8.2.39)$$

e dunque:

$$\left[ \hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y) \right] = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_k} \left( e^{-ik(x-y)} - e^{+ik(x-y)} \right) \quad (8.2.40)$$

$$= D(x-y) - D(y-x). \quad (8.2.41)$$

Notiamo che sia  $D(x-y)$  sia  $D(y-x)$  sono invarianti di Lorentz. Nel caso in cui abbiamo distanze di tipo spazio, quindi con  $(x-y)^2 < 0$ , possiamo fare una trasformazione di Lorentz continua su  $D(x-y)$ , grazie al fatto che i due propagatori siano Lorentz invarianti individualmente, tale per cui  $(x-y) \rightarrow -(x-y)$ . In questo modo  $D(x-y)$  e  $D(y-x)$  diventano uguali e si cancellano dando un commutatore nullo. Questo ci dice che al di fuori del cono-luce (in cui  $(x-y)^2 < 0$ ) il commutatore è nullo e il principio di causalità è rispettato anche se la teoria della Relatività Speciale ci direbbe di no.

Per trasformazioni di tipo tempo (quindi per cui  $(x-y)^2 > 0$ ) non esiste alcuna trasformazione di Lorentz continua che possa fare  $(x-y) \rightarrow -(x-y)$ . In questo caso il commutatore è proporzionale a  $e^{-imt} - e^{+imt}$  per il caso  $(\vec{x} - \vec{y}) = 0$ . La propagazione, quindi, può avvenire nel cono luce senza violare la causalità.

#### 8.2.4 Funzione di Green per Klein-Gordon

Ricordando quello visto nella sezione §8.1 guardiamo ora il caso di campo scalare, facendo lo stesso discorso. Partiamo dall'equazione di Klein-Gordon a cui aggiungiamo una sorgente  $J(x)$  classica, che agisce per un breve intervallo e su corto range:

$$(\square + m^2) \hat{\phi}(x) = J(x) \quad (8.2.42)$$

e dalla teoria delle funzioni di Green sappiamo che questa equazione differenziale può essere facilmente risolta nel caso in cui riuscissimo a conoscere una funzione  $G$  tale per cui:

$$(\square + m^2) G(x-y) = \delta^4(x-y). \quad (8.2.43)$$

In questo caso la soluzione  $\hat{\phi}(x)$  sarà data da:

$$\hat{\phi}(x) = \phi_0(x) + \int d^4y G(x-y) J(y) \quad (8.2.44)$$

come si può dimostrare applicando  $(\square + m^2)$  ad entrambi i membri. Abbiamo indicato con  $\phi_0(x)$  la soluzione dell'equazione omogenea, cioè dell'equazione di Klein-Gordon nel caso senza sorgente. Nota che scrivendo la soluzione (8.2.44) non abbiamo fatto nulla, se non aver sostituito ad un'equazione differenziale un'equazione integrale.

Risolviamo l'equazione:

$$(\square + m^2) G(x - y) = \delta^4(x - y) \quad (8.2.45)$$

considerando la trasformata di Fourier del primo e secondo membro. Al primo membro definiamo:

$$G(x - y) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} \tilde{G}(k) \quad (8.2.46)$$

in cui  $\tilde{G}(k)$  è l'antitrasformata di Fourier di  $G(x - y)$ . A secondo membro abbiamo che la funzione  $\delta^4(x - y)$  è la trasformata di Fourier di una costante:

$$\delta^4(x - y) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} \cdot 1. \quad (8.2.47)$$

Abbiamo quindi:

$$(\square_x + m^2) G(x - y) = \delta^4(x - y) \quad (8.2.48)$$

$$(\square_x + m^2) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} \tilde{G}(k) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} \cdot 1 \quad (8.2.49)$$

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (-k^2 + m^2) e^{-ik(x-y)} \tilde{G}(k) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} \cdot 1 \quad (8.2.50)$$

$$- \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} (k^2 - m^2) \tilde{G}(k) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} \cdot 1 \quad (8.2.51)$$

$$\implies (k^2 - m^2) \tilde{G}(k) = +1 \quad (8.2.52)$$

troviamo dunque:

$$\tilde{G}(k) = \frac{+1}{k^2 - m^2} \quad (8.2.53)$$

in cui:

$$k^2 = k^{02} - \vec{k}^2 \quad (8.2.54)$$

che ci permette di vedere i poli di  $\tilde{G}(k)$ , ossia:

$$k^2 - m^2 = 0 \implies k^{02} = \vec{k}^2 + m^2 \quad (8.2.55)$$

$$k^0 = \pm \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} \quad (8.2.56)$$

che si trovano sul cammino di integrazione, avendo l'integrale  $d^4 k$  sull'asse reale. Noi questi poli (la relazione di mass-shell) li sposteremo con la prescrizione di Feynmann (nota che ci sono 4 modi per spostare le singolarità, ma Feynmann ci dice che solo uno è quello fisicamente corretto):

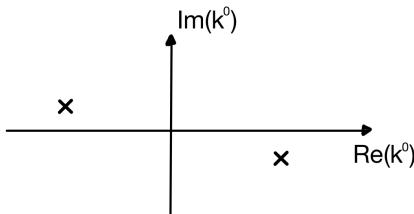
$$k^2 - m^2 \longrightarrow k^2 - m^2 + i\epsilon \quad (8.2.57)$$

con  $\epsilon > 0$ . Il fatto che solo uno dei 4 modi possibili di spostare le singolarità vada bene, ci dice che il fattore  $\epsilon$  non è solamente un trucchetto matematico, ma ha anche un significato fisico. Trovata (8.2.53) possiamo trovare la funzione di Green  $G(x - y)$  facendone l'antitrasformata di Fourier. Integriamo sulla sola componente  $k^0$  e, come già detto, spostando leggermente i poli, uno in alto ed uno in basso. Scriviamo<sup>4</sup>:

$$\tilde{G}(k) = \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (8.2.60)$$

$$= \frac{1}{2k^0} \left( \frac{1}{k^0 - \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} + i\eta} + \frac{1}{k^0 + \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} - i\eta} \right) \quad (8.2.61)$$

e abbiamo quindi singolarità come quelle rappresentate in figura 8.3.



**Figura 8.3:** Singolarità di  $\tilde{G}(k)$ .

Per via del lemma di Jordan il cammino di integrazione andrà chiuso nel semipiano superiore nel caso  $(t_x - t_y) > 0$ , mentre andrà chiuso nel semipiano inferiore se  $(t_x - t_y) < 0$ . Facciamo i conti con il *teorema dei residui*: **Non ho ben capito i conti, da rivedere**

$$G(x - y) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} \tilde{G}(k) \quad (8.2.62)$$

$$= \theta(t_x - t_y) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} \frac{1}{2k^0} \frac{1}{k^0 - \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} + i\eta} + \\ + \theta(t_y - t_x) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{+ik(x-y)} \frac{1}{2k^0} \frac{1}{k^0 + \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} - i\eta} \quad (8.2.63)$$

---

<sup>4</sup>Utilizzando i fratti semplici, infatti:

$$\frac{1}{2k^0} \left( \frac{1}{k^0 - \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} + i\eta} + \frac{1}{k^0 + \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} - i\eta} \right) = \frac{1}{2k^0} \frac{2k^0}{k^{02} - (\sqrt{\vec{k}^2 + m^2} - i\eta)^2} \quad (8.2.58)$$

$$\xrightarrow{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{k^{02} - \vec{k}^2 - m^2 + 2i\eta\sqrt{\vec{k}^2 + m^2}} = \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (8.2.59)$$

che è esattamente l'espressione di  $\tilde{G}(k)$  con  $\epsilon$  riscalato in modo da dare il termine  $2i\eta\sqrt{\dots}$ .

$$\begin{aligned}
&= -(2\pi)i\theta(t_x - t_y)\text{Res}\left\{\frac{1}{2k^0} \frac{1}{k^0 - \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} + i\eta}\right\}_{k^0 = -\sqrt{\vec{k}^2 + m^2} + i\eta} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^4 \sqrt{2E_k}} e^{-ik(x-y)} - \\
&- i(2\pi)\theta(t_y - t_x)\text{Res}\left\{\frac{1}{2k^0} \frac{1}{k^0 + \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} - i\eta}\right\}_{k^0 = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} - i\eta} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^4 \sqrt{2E_k}} e^{-ik(x-y)}
\end{aligned} \tag{8.2.64}$$

$$= -i\theta(t_x - t_y) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_k}} e^{-ik(x-y)} - i\theta(t_y - t_x) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_k}} e^{-ik(x-y)} \tag{8.2.65}$$

in cui: il fattore  $2\pi i$  viene dal teorema di Cauchy e il segno meno viene dal fatto che proviamo a prendere il cammino in senso orario. Possiamo riscrivere l'espressione anche come:

$$G(x - y) = -i\theta(t_x - t_y)D(x - y) - i\theta(t_y - t_x)D(y - x). \tag{8.2.66}$$

Dunque possiamo dire che particelle con energia positiva si muovono in avanti nel tempo, mentre particelle con energia negativa si muovono indietro nel tempo, e ciò è coerente con tutto ciò che abbiamo detto con l'interpretazione di particella e antiparticella, anche se con il campo neutro non ha molto senso parlare di cariche.

L'espressione che identifichiamo con il propagatore di Feynmann è:

$$G(x - y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ik(x-y)}. \tag{8.2.67}$$

Prima di passare oltre notiamo che in MQ non relativistica, o in meccanica classica, le condizioni al contorno ci costringerebbero a scegliere solo uno dei due pezzi che abbiamo trovato in  $G(x - y)$ .

### 8.2.5 Confronto tra funzione di Green e definizione di propagatore

Cerchiamo ora di trovare un collegamento tra la funzione di Green (8.2.65) e la definizione di propagatore di Feynmann che avevamo visto (8.2.33).

Abbiamo che il propagatore di Feynmann è la funzione di Green dell'equazione del moto solamente nel caso libero, ma quando tratteremo teorie interagenti questo non sarà più vero.

Se prendiamo il commutatore  $[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)]$  esso è un numero e possiamo dire che:

$$[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)] = \langle 0 | [\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)] | 0 \rangle \tag{8.2.68}$$

che è un'oggetto semplice da maneggiare poiché sappiamo già come gli operatori di scala agiscono sullo stato di vuoto. Supponiamo  $x^0 > y^0$  e vediamo:

$$\langle 0 | [\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)] | 0 \rangle = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{2E_k} (e^{-ik(x-y)} - e^{+ik(x-y)}) \quad (8.2.69)$$

$$= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^{3/2}} \left\{ \frac{1}{2E_k} e^{-ik(x-y)} \Big|_{k^0=E_k} + \frac{1}{-2E_k} e^{-ik(x-y)} \Big|_{k^0=-E_k} \right\} \quad (8.2.70)$$

e possiamo vedere che questa espressione è, a meno di un fattore  $-i$ , esattamente la funzione di Green (8.2.65). Definiamo quindi il propagatore del campo scalare neutro come:<sup>5</sup>

$$i\Delta_F(x-y) = \langle 0 | T\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y) | 0 \rangle \quad (8.2.71)$$

in cui, come già detto,  $T$  indica il prodotto temporale ordinato, ossia mettiamo gli operatori più vecchi a destra e i più giovani a sinistra:

$$T\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y) = \begin{cases} \hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y) & \text{se } x^0 > y^0 \\ \hat{\phi}(y)\hat{\phi}(x) & \text{se } y^0 > x^0. \end{cases} \quad (8.2.72)$$

### 8.2.6 Calcoli esplicativi propagatore di Feynmann

Nelle sezioni precedenti siamo stati molto rapidi a fare le nostre considerazioni e i nostri conti, ma ora facciamo un passo indietro e vediamo bene tutti i conti esplicativi, seppur lunghetti, per arrivare all'espressione del propagatore di Feynmann. Precedentemente abbiamo detto che esisteva una prescrizione (quella di Feynmann) che era l'unica possibile per giungere ad un risultato fisicamente sensato, ora, proviamo a rimuovere il "fattore umano" della scelta specifica della prescrizione e cerchiamo di arrivare al medesimo risultato, ma solamente facendoci trascinare dalla matematica. Sarà fondamentale per questa sezione conoscere la rappresentazione integrale della funzione  $\theta$  di Heaviside.

Partiamo dalla rappresentazione più generica del propagatore, ossia, quello in cui compaiono le due  $\theta$  che impongono la causalità, ovvero la forma (8.2.34). Possiamo fare due cose: o lasciamo la  $\theta$  separata nei conti e poi dall'esterno cambiamo i segni e togliamo i pezzi che non vanno bene; oppure, scriviamo la  $\theta$  in un modo uniforme e la buttiamo dentro il conto.

Per scrivere la  $\theta$  in una forma integrale possiamo sfruttare quello che sappiamo dall'analisi complessa. Possiamo costruirci un'integrale con una funzione integranda con un polo, che possiamo mettere o nel semipiano superiore o in quello inferiore. Dobbiamo anche fare attenzione a costruire la

---

<sup>5</sup>Nota che avendo ancora campi scalari, dunque scarichi, vale  $T\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y) = [\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)]$ .

funzione in modo che se chiudiamo sopra l'integrale faccia 1, ma se chiudiamo sotto faccia 0. In questo discorso chiudiamo sopra o sotto in base al lemma di Jordan che ci dice che in base al segno dell'esponenziale (in cui noi metteremo  $x^0 - y^0$ ) chiudiamo sopra piuttosto che sotto. Definiamo:

$$\theta(z^0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \frac{e^{i\tau z^0}}{\tau - i\epsilon} \quad (8.2.73)$$

e questa è la **rappresentazione integrale della  $\theta$  di Heaviside**.<sup>6</sup>

Poniamo per comodità:

$$z^\mu = x^\mu - y^\mu \quad (8.2.76)$$

e riscriviamo il propagatore utilizzando la misura invariante (in 4 dimensioni) che avevamo trovato nella costruzione dell'operatore di campo:

$$i\Delta_F(z) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4 p \theta(p^0) \delta(p^2 - m^2) [\theta(z^0)e^{-ipz} + \theta(-z^0)e^{ipz}]. \quad (8.2.77)$$

Inseriamo la rappresentazione (8.2.73) all'interno del propagatore:

$$i\Delta_F(z) = \frac{1}{(2\pi)^4 i} \int d^4 p \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \theta(p^0) \delta(p^2 - m^2) \left\{ \frac{e^{-i(pz - \tau z^0)}}{\tau - i\epsilon} + \frac{e^{+i(pz - \tau z^0)}}{\tau - i\epsilon} \right\} \quad (8.2.78)$$

nel secondo termine possiamo fare il cambio:

$$p^\mu \longrightarrow -p^\mu \quad , \quad \tau \longrightarrow -\tau \quad (8.2.79)$$

in modo che:

$$\frac{e^{+i(pz - \tau z^0)}}{\tau - i\epsilon} \longrightarrow \frac{e^{-i(pz - \tau z^0)}}{-\tau - i\epsilon} = \frac{e^{-i(p^0 z^0 - \vec{p} \cdot \vec{z} - \tau z^0)}}{-\tau - i\epsilon} = \frac{e^{-ip' z}}{-\tau - i\epsilon} \quad (8.2.80)$$

$$\theta(p^0) \longrightarrow \theta(-p^0) \quad (8.2.81)$$

---

<sup>6</sup>Possiamo verificare che effettivamente sia la  $\theta$ . Quando  $z^0 < 0$  dobbiamo chiudere sotto, ma essendo la singolarità in  $\tau = i\epsilon$ , all'interno della curva nel semipiano inferiore non c'è nulla e Cauchy ci dice che l'integrale fa 0. Quando  $z^0 > 0$  chiudiamo sopra, circondiamo la singolarità  $\tau = i\epsilon$  e possiamo utilizzare il teorema dei residui:

$$\theta(z^0 > 0) = 2\pi i \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \text{Res} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \frac{e^{i\tau z^0}}{\tau - i\epsilon} \right\} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left( \lim_{\tau \rightarrow i\epsilon} e^{i\tau z^0} \right) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} e^{-\epsilon z^0} = 1. \quad (8.2.74)$$

Dunque l'integrale dà:

$$\theta(z^0) = \begin{cases} 0 & z^0 < 0 \\ 1 & z^0 > 0. \end{cases} \quad (8.2.75)$$

in cui abbiamo definito:

$$p'^0 = p^0 - \tau \quad , \quad \vec{p}' = \vec{p} \quad (8.2.82)$$

$$\implies p'^2 - m^2 \neq 0 \quad (8.2.83)$$

$$\text{poniamo } \vec{p}'^2 + m^2 = \omega_{p'}^2. \quad (8.2.84)$$

Con il cambio di variabili scelto e le quantità definite possiamo vedere che abbiamo:

$$\delta(p^2 - m^2) = \delta(p^0 - \vec{p}^2 - m^2) \quad (8.2.85)$$

$$= \delta((p'^0 + \tau)^2 - \omega_{p'}^2) \quad (8.2.86)$$

$$= \frac{\delta(p'^0 + \tau + \omega_{p'})}{2\omega_{p'}} + \frac{\delta(p'^0 + \tau - \omega_{p'})}{2\omega_{p'}} \quad (8.2.87)$$

in cui abbiamo utilizzato la proprietà della  $\delta$  e dei suoi zeri. Naturalmente abbiamo anche:

$$\theta(p^0) = \theta(p'^0 + \tau) \quad , \quad \theta(-p^0) = \theta(-p'^0 - \tau). \quad (8.2.88)$$

Sostituendo tutto otteniamo:

$$\begin{aligned} i\Delta_F(z) &= \frac{1}{(2\pi)^4 i} \int d^4 p' \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau e^{-ip'z} \left\{ \frac{\delta(p'^0 + \tau + \omega_{p'})}{2\omega_{p'}} + \frac{\delta(p'^0 + \tau - \omega_{p'})}{2\omega_{p'}} \right\} \times \\ &\quad \times \left\{ \frac{\theta(p'^0 + \tau)}{\tau - i\epsilon} + \frac{\theta(-p'^0 - \tau)}{-\tau - i\epsilon} \right\} \end{aligned} \quad (8.2.89)$$

in cui sopravviveranno solamente due dei quattro prodotti a causa dell'incompatibilità delle funzioni  $\delta$  e  $\theta$  (notando anche che  $\omega_{p'} > 0$ ). Quelli che sopravvivono sono:

$$\frac{\delta(p'^0 + \tau + \omega_{p'})}{2\omega_{p'}} \frac{\theta(-p'^0 - \tau)}{-\tau - i\epsilon} \quad , \quad \frac{\delta(p'^0 + \tau - \omega_{p'})}{2\omega_{p'}} \frac{\theta(p'^0 + \tau)}{\tau - i\epsilon}. \quad (8.2.90)$$

Cancellando i termini incompatibili possiamo integrare su  $\tau$  sfruttando le  $\delta$ :

$$\begin{aligned} i\Delta_F(z) &= \frac{1}{(2\pi)^4 i} \int d^4 p' e^{-ip'z} \frac{1}{2\omega_{p'}} \left\{ \frac{1}{p'^0 + \omega_{p'} - i\epsilon} + \frac{1}{-p'^0 + \omega_{p'} - i\epsilon} \right\} \\ &\quad \end{aligned} \quad (8.2.91)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4 i} \int d^4 p' e^{-ip'z} \frac{1}{2\omega_{p'}} \left\{ \frac{2\omega_{p'} - 2i\epsilon}{(\omega_{p'} - i\epsilon)^2 - (p'^0)^2} \right\} \quad (8.2.92)$$

del termine a numeratore possiamo trascurare  $2i\epsilon$  nel limite  $\epsilon \rightarrow 0^+$ , mentre a denominatore possiamo trascurare  $\mathcal{O}(\epsilon^2)$  e riscaliamo  $-2\omega_{p'}\epsilon \rightarrow -\epsilon$ .

Tenendo conto di:

$$\omega_{p'}^2 - p'^2_0 = \vec{p}^2 + m^2 - p'^2_0 \quad (8.2.93)$$

$$= \vec{p}'^2 + m^2 - p'^2_0 \quad (8.2.94)$$

$$= m^2 - p'^2 \quad (8.2.95)$$

e sostituendo, solo alla fine,  $p'$  con  $p$  (che è una variabile di integrazione, per cui muta) abbiamo ottenuto:

$$\Delta_F(z) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p \frac{ie^{-ipz}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (8.2.96)$$

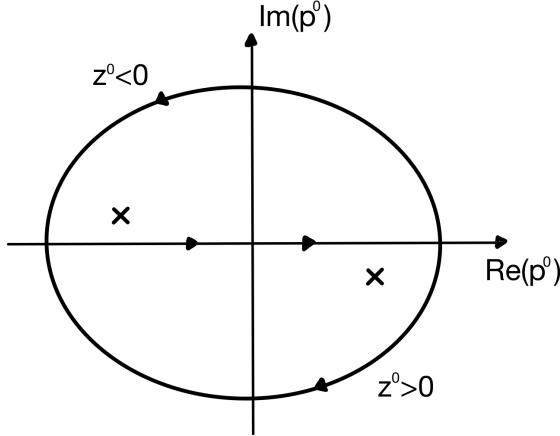
in cui possiamo notare che il termine  $i\epsilon$  origina dalla rappresentazione integrale della  $\theta(x^0 - y^0)$ , che definisce il prodotto cronologico, e non da una nostra specifica scelta. È proprio la presenza di  $+i\epsilon$  che garantisce la causalità. Chiamiamo **propagatore di Feynmann** il propagatore di causale.

Il propagatore (8.2.96) è scritto nello spazio delle coordinate, potremmo darne una scrittura nello spazio degli impulsi facendone l'integrale su una delle 4 componenti di  $p$ . Sceglieremo di integrare su  $p^0$ . In (8.2.96) vediamo che abbiamo poli in:

$$p^0 = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} - i\epsilon = \omega_p - i\epsilon \quad (8.2.97)$$

$$p^0 = -\sqrt{\vec{p}^2 + m^2} + i\epsilon = -\omega_p + i\epsilon \quad (8.2.98)$$

che possiamo raffigurare nella figura 8.4.



**Figura 8.4:** Singolarità di  $\Delta_F(z)$ .

Per  $z^0 > 0$  ( $x^0 > y^0$ ) chiudiamo sotto e l'integrale è dato dal residuo del polo in  $p^0 = \omega_p - i\epsilon$ . Per  $z^0 < 0$  ( $x^0 < y^0$ ) chiudiamo sopra e l'integrale

è dato dal residuo del polo in  $p^0 = -\omega_p + i\epsilon$ . Il risultato che troviamo è identico a quello già trovato (8.2.65).

Nello spazio dei momenti il propagatore è un termine di polo puro:

$$\tilde{\Delta}_F(p') = \int d^4z e^{ip'z} \Delta_F(z) = \frac{i}{p'^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (8.2.99)$$

Possiamo, infine, verificare che  $\Delta_F(z)$  è proprio una funzione di Green dell'operatore di Klein-Gordon. Infatti:

$$(\square_x + m^2) \Delta_F(x - y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p}{p^2 - m^2 + i\epsilon} (-p^2 + m^2) e^{-ip(x-y)} \quad (8.2.100)$$

a questo punto il termine  $+i\epsilon$ , che protegge i poli, diventa superfluo poiché ( $p^2 - m^2$ ) a numeratore e denominatore si semplificano e lasciano solo l'esponenziale, che per definizione da una  $\delta^4$ . Quindi:

$$(\square_x + m^2) \Delta_F(x - y) = -\delta^4(x - y) \quad (8.2.101)$$

che conferma il fatto che  $\Delta_F(x - y)$  è una<sup>7</sup> funzione di Green dell'operatore di KG. La prescrizione di ordinamento temporale in questo caso ha fissato le condizioni a contorno in modo che i campi di annullino a  $t = \pm\infty$ .

### 8.3 Campo scalare carico

Vediamo ora il caso leggermente più interessante di campo scalare carico, ossia riprendiamo i campi complessi:

$$\hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2E_k}} \left( \hat{a}(\vec{k}) e^{-ikx} + \hat{b}^\dagger(\vec{k}) e^{+ikx} \right) \quad (8.3.1)$$

$$\hat{\phi}^\dagger(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2E_k}} \left( \hat{a}^\dagger(\vec{k}) e^{+ikx} + \hat{b}(\vec{k}) e^{-ikx} \right) \quad (8.3.2)$$

in cui  $\hat{a}^{(\dagger)}$  e  $\hat{b}^{(\dagger)}$  rispettivamente creano e distruggono particelle e antiparticelle.

#### 8.3.1 Definizione di propagatore

In questo caso il propagatore è definito come il valore di aspettazione sul vuoto temporalmente ordinato di:

$$D(x - y) = \langle 0 | T\hat{\phi}(x)\hat{\phi}^\dagger(y) | 0 \rangle. \quad (8.3.3)$$

---

<sup>7</sup>Ricordiamoci che ci sono più funzioni di Green, a seconda delle condizioni al contorno.

In analogia a quanto fatto per il campo neutro possiamo analizzare il significato del propagatore (8.3.3). Possiamo esplicitare il prodotto temporalmente ordinato:

$$D(x - y) = \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | \hat{\phi}(x) \hat{\phi}^\dagger(y) | 0 \rangle + \theta(y^0 - x^0) \langle 0 | \hat{\phi}^\dagger(y) \hat{\phi}(x) | 0 \rangle \quad (8.3.4)$$

e considerare i due casi separatamente. Vediamo che:

- Se  $x^0 < y^0$  allora abbiamo:

$$D(x - y) = \langle 0 | \hat{\phi}^\dagger(y) \hat{\phi}(x) | 0 \rangle \quad (8.3.5)$$

e sempre partendo da destra vediamo che, per via delle relazioni:

$$\hat{a}(\vec{k}) | 0 \rangle \quad , \quad \hat{b}^\dagger(\vec{k}) | 0 \rangle = |\vec{k}\rangle \quad (8.3.6)$$

abbiamo che  $\hat{\phi}(x) | 0 \rangle$  crea un'antiparticella nel punto  $\vec{x}$  nell'istante  $x^0$ , successivamente, facendo agire  $\hat{\phi}^\dagger(y) | k \rangle_b$  (dobbiamo ricordarci che  $\hat{\phi}^\dagger(y)$  contiene  $\hat{a}^\dagger$  e  $\hat{b}$ ) distrugge l'antiparticella<sup>8</sup> all'istante  $y^0$  e nel punto  $\vec{y}$ . Il processo è causale solo se  $x^0 < y^0$ .

- Nel caso  $y^0 < x^0$  abbiamo:

$$D(x - y) = \langle 0 | \hat{\phi}(x) \hat{\phi}^\dagger(y) | 0 \rangle \quad (8.3.7)$$

dunque:  $\hat{\phi}^\dagger(y) | 0 \rangle$  crea una particella nell'istante  $y^0$  nel punto  $\vec{y}$ , successivamente,  $\hat{\phi}(x) | k \rangle_a$  annichila la particella nell'istante  $x^0$  nel punto  $\vec{x}$ . In questo caso il processo è causale solo se  $y^0 < x^0$ .

Naturalmente i due processi non sono separati, ma per la Meccanica Quantistica sono entrambi contemplati e le relative ampiezze devono essere sommate. Per questo motivo la definizione di propagatore è:

$$D(x - y) = \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | \hat{\phi}(x) \hat{\phi}^\dagger(y) | 0 \rangle + \theta(y^0 - x^0) \langle 0 | \hat{\phi}^\dagger(y) \hat{\phi}(x) | 0 \rangle \quad (8.3.8)$$

che possiamo rappresentare tramite diagrammi visibili in figura 8.5.

In questo caso definiamo il propagatore di Feynmann come:

$$i\Delta_F(x - y) = \langle 0 | T \hat{\phi}(x) \hat{\phi}^\dagger(y) | 0 \rangle \quad (8.3.9)$$

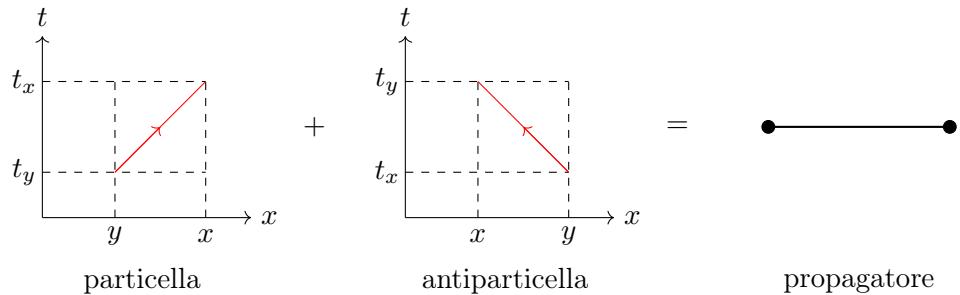
con:

$$\tilde{\Delta}_F(k) = \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (8.3.10)$$

$$\Delta_F(x - y) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (8.3.11)$$

---

<sup>8</sup>In realtà crea anche una particella di impulso fissato, ma poi non essendoci altri operatori rimane  $\langle 0 | k \rangle_a$  che è nullo.



**Figura 8.5:** Raffigurazione propagatore di campo scalare carico.

e dove:

$$(\square_x + m^2) \Delta_F(x - y) = -\delta^4(x - y) \quad (8.3.12)$$

ossia, il propagatore è la funzione di Green dell'operatore di Klein-Gordon, fissata dalle condizioni al contorno date dal prodotto time-ordered  $T$  (che garantiscono la causalità).

### 8.3.2 Causalità per il campo scalare carico

È più interessante il problema della causalità quando viene studiato per campi in cui ci sono sia i contributi di particelle che di antiparticelle. Infatti, nel caso di campo scalare complesso, le eccitazioni dei campi  $\hat{\phi}$  e  $\hat{\phi}^\dagger$  corrispondono a particella (di tipo *a*) e antiparticella (di tipo *b*), che sono distinte tra loro a differenza del campo neutro. Quando viene quantizzato, il campo  $\hat{\phi}(x)$  è associato alla creazione di particelle con carica positiva (di tipo *b*) e alla distruzione di particelle di carica negativa (di tipo *a*). Per  $\hat{\phi}^\dagger(y)$  vale il discorso opposto. Il commutatore  $[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}^\dagger(y)]$  riceverà contributi non nulli, che dovranno cancellarsi tra loro al di fuori del cono-luce, per preservare il principio di causalità. Questi contributi saranno del tipo  $D(x-y)$  e  $D(y-x)$ , in cui però è coinvolta anche la carica della particella corrispondente. Il primo termine rappresenta la propagazione di una particella di carica negativa da  $y$  ad  $x$ , mentre il secondo di una particella di carica positiva da  $x$  ad  $y$ . Ovviamente affinché la cancellazione avvenga bisogna che particella e antiparticella esistano, abbiano carica opposta e la stessa massa (devono anche avere propagatori uguali, in modo che  $D(x-y) - D(y-x) = 0$ ). Dunque concludiamo che: in una teoria di campo, il principio di causalità richiede che ogni particella abbia la sua corrispondente antiparticella, con la stessa massa, ma carica opposta (più in generale con numeri quantici opposti). Ricordiamo che nel caso del campo reale particella e antiparticella coincidono.

## 8.4 Campo spinoriale

Vediamo finalmente il caso dei campi  $\hat{\psi}$  di Dirac. In questo caso dovremo stare solo attenti ad applicare le corrette regole di anticommutazione e delle matrici  $\gamma$ . Per questa sezione puoi vedere il capitolo del Peskin e Schroeder [7].

### 8.4.1 Definizione di propagatore

Anche per questo tipo di campi cominciamo dall'equazione di Dirac a cui ci aggiungiamo una sorgente classica  $J(x)$ :

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x) = J(x) \quad (8.4.1)$$

definiamo il propagandosi di Feynmann  $S_F(x - y)$  tale per cui:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) S_F(x - y) = \delta^4(x - y) \quad (8.4.2)$$

che se riusciamo a trovarne una forma esplicita ci permette di scrivere la soluzione dell'equazione di Dirac come:

$$\psi(x) = \psi_0(x) + \int d^4y S_F(x - y) J(y) \quad (8.4.3)$$

in cui  $\psi_0(x)$  è la soluzione omogenea di Dirac. Come già fatto per il campo scalare, per trovare un'espressione per  $S_F(x - y)$  ricorriamo alla trasformata di Fourier:

$$S_F(x - y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (8.4.4)$$

che soddisfa la relazione:

$$S_F(x - y) = (i\gamma^\mu \partial_\mu + m) \Delta_F(x - y) \quad (8.4.5)$$

in cui  $\Delta_F(x - y)$  è il propagatore del campo scalare carico. La relazione (8.4.5) è facilmente spiegabile se si ricorda che l'equazione di Klein-Gordon si trova come il quadrato dell'equazione di Dirac.

A questo punto possiamo procedere ad integrare su  $p^0$ . L'integrazione si svolge in modo identico a quella fatta per il campo scalare (il denominatore è lo stesso), ma questa volta a numeratore abbiamo  $\not{p} + m$ . Dobbiamo ricordarci le relazioni (5.6.28) e (5.6.29). Si ottiene:

$$S_F(x - x')_{ab} = -i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \sum_k \left[ \underbrace{u_a^s(\vec{p}) \bar{u}_b^s(\vec{p})}_{\hat{\Lambda}_+(\vec{p})} e^{-ip(\vec{x}-\vec{x}')} \theta(t - t') + \underbrace{v_a^s(\vec{p}) \bar{v}_b^s(\vec{p})}_{\hat{\Lambda}_-(\vec{p})} e^{-ip(\vec{x}'-\vec{x})} \theta(t' - t) \right] \quad (8.4.6)$$

$$= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \left[ (i\partial_x + m)_{ab} e^{-ip(x-x')} - (i\partial_x + m)_{ab} e^{-ip(x'-x)} \right]. \quad (8.4.7)$$

I due termini in  $S_F(x-y)$  coincidono esattamente con quello che si ottiene calcolando i valori di aspettazione sul vuoto del prodotto time-ordered dei campi  $\psi$  e  $\bar{\psi}$ :

$$\begin{cases} \langle 0 | \hat{\psi}_a(x) \hat{\bar{\psi}}_b(x') | 0 \rangle & t > t' \\ \langle 0 | \hat{\bar{\psi}}_b(x') \hat{\psi}_a(x) | 0 \rangle & t' > t. \end{cases} \quad (8.4.8)$$

La definizione sembra un po' ambigua. Quando facciamo  $\bar{\psi}\psi$  stiamo facendo la moltiplicazione di un vettore riga per uno colonna e otteniamo uno scalare, invece, quando facciamo  $\psi\bar{\psi}$  facciamo vettore colonna per vettore riga e otteniamo una matrice 4x4, ossia un'operatore. In realtà, non c'è nessuna incongruenza tra i due prodotti, perché come succede nell'equazione di Dirac con il termine  $m$  che è in realtà  $m\mathbb{1}$ , anche qua dobbiamo intendere il prodotto  $\bar{\psi}\psi$  come  $\bar{\psi}\psi\mathbb{1}$ , mentre  $\psi\bar{\psi}$  è già di per sé una matrice.

Comunque, giungiamo al risultato finale:

$$iS_F(x-y)_{ab} = \langle 0 | T\hat{\psi}_a(x) \hat{\bar{\psi}}_b(x') | 0 \rangle. \quad (8.4.9)$$

che ovviamente si espande come:

$$iS_F(x-y) = \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | \hat{\psi}(x) \hat{\bar{\psi}}(y) | 0 \rangle - \theta(y^0 - x^0) \langle 0 | \hat{\bar{\psi}}(y) \hat{\psi}(x) | 0 \rangle \quad (8.4.10)$$

in cui il segno negativo tra i due prodotti T-ordinati viene dall'algebra anticommutativa che per scambio di due operatori fa cambiare segno.

#### 8.4.2 Calcoli esplicativi propagatore di Feynmann

Vediamo i calcoli esplicativi che dimostrano che  $S_F(x-y)$  è la funzione di Green dell'equazione di Dirac:

$$(i\partial_x - m) [S_F(x-y)\gamma^0] = -i \langle 0 | (i\partial_x - m) \left[ \hat{\psi}(x) \hat{\psi}^\dagger(y) \theta(x^0 - y^0) - \hat{\psi}^\dagger(y) \hat{\psi}(x) \theta(y^0 - x^0) \right] | 0 \rangle \quad (8.4.11)$$

aggiungiamo e sottraiamo il termine  $\hat{\psi}(x)\hat{\psi}^\dagger(y)\theta(y^0 - x^0)$ , con cui ricostruiamo l'anticommutatore  $\{\hat{\psi}(x), \hat{\psi}^\dagger(y)\}$  e il termine  $\hat{\psi}(x)\hat{\psi}^\dagger(y)$ . Quindi:

$$(i\partial_x - m) [S_F(x-y)\gamma^0] = -i \langle 0 | (i\partial_x - m) \left[ \hat{\psi}(x) \hat{\psi}^\dagger(y) - \theta(y^0 - x^0) \{\hat{\psi}(x), \hat{\psi}^\dagger(y)\} \right] | 0 \rangle \quad (8.4.12)$$

in cui possiamo riconoscere nel primo termine l'equazione di Dirac, per cui il primo pezzo è nullo, e otteniamo così:

$$(i\partial_x - m) [S_F(x-y)\gamma^0] = i \langle 0 | (i\partial_x - m) \left[ \theta(y^0 - x^0) \{\hat{\psi}(x), \hat{\psi}^\dagger(y)\} \right] | 0 \rangle. \quad (8.4.13)$$

A questo punto possiamo utilizzare un'importante relazione che lega il commutatore del campo scalare neutro (talvolta denominato funzione di Pauli-Jordan,  $\Delta_C(x-y)$ ) tale che  $i\Delta_C(x-y) \equiv [\hat{\psi}(x), \hat{\psi}(y)]$  con l'anticommutatore dei campi spinoriali  $\hat{\psi}$  e  $\hat{\psi}^\dagger$ , ossia:

$$(i\partial_x - m) [i\Delta_C(x-y)] \gamma^0 = \{ \hat{\psi}(x), \hat{\psi}^\dagger(y) \}. \quad (8.4.14)$$

La proprietà (8.4.14) si dimostra facilmente tenendo conto che:

$$i\Delta_C(x-y) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2\omega_p} \left\{ e^{-ip(x-y)} - e^{+ip(x-y)} \right\} \quad (8.4.15)$$

$$\{ \hat{\psi}_a(x), \hat{\psi}_b^\dagger(y) \} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2\omega_p} \left\{ (\not{p} + m)e^{-ip(x-y)} + (\not{p} - m)e^{+ip(x-y)} \right\} \gamma^0. \quad (8.4.16)$$

Torniamo a noi e sostituiamo la proprietà (8.4.14) in (8.4.13):

$$(i\partial_x - m) [S_F(x-y)\gamma^0] = i \langle 0 | (i\partial_x - m) [\theta(y^0 - x^0) (i\partial_x + m) [i\Delta_C(x-y)] \gamma^0] | 0 \rangle \quad (8.4.17)$$

$$= - \langle 0 | [i\partial_x \theta(y^0 - x^0)] [(i\partial_x + m) \Delta_C(x-y) \gamma^0] \gamma^0 | 0 \rangle + \\ + \langle 0 | [\theta(y^0 - x^0) (i\partial_x - m)] [(i\partial_x + m) \Delta_C(x-y) \gamma^0] \gamma^0 | 0 \rangle \quad (8.4.18)$$

possiamo notare che, dal momento che  $p^2 = m^2$ , abbiamo:

$$(i\partial_x - m) (i\partial_x + m) \Delta_C(x-y) = (-p^2 + m^2) \Delta_C(x-y) = 0 \quad (8.4.19)$$

e anche:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu) \theta(y^0 - x^0) = (i\gamma^0 \partial_0) \theta(y^0 - x^0) = -i\gamma^0 \delta(y^0 - x^0) \quad (8.4.20)$$

abbiamo per questi motivi:

$$(i\partial_x - m) [S_F(x-y)\gamma^0] = - \langle 0 | [-i\gamma^0 \delta(y^0 - x^0) (i\partial_x + m) \Delta_C(x-y) \gamma^0] | 0 \rangle \quad (8.4.21)$$

in cui la  $\delta(x^0 - y^0)$  impone che tutto sia calcolato a tempi uguali, cioè a  $x^0 = y^0$ . A tempi uguali abbiamo che vale:

$$\partial_x \Delta_C(x-y) \Big|_{x^0=y^0} = \left[ \partial_0 \Delta_C + \partial_i \Delta_C \right]_{x^0=y^0} = -\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) + 0 \quad (8.4.22)$$

e che  $\Delta_C(x-y) \Big|_{x^0=y^0} = 0$ . Dunque, il risultato finale è:

$$(i\partial_x - m) [S_F(x-y)\gamma^0] = \delta^4(x-y) \quad (8.4.23)$$

che conferma che  $S_F(x - y)\gamma^0$  è la funzione di Green dell'operatore di Dirac, così come  $\Delta_F(x - y)$  lo era per l'operatore di Klein-Gordon.

L'espressione esplicita del propagatore di Dirac possiamo ipotizzare essere:

$$S_F(x - y) = (i\cancel{D} + m) \Delta_F(x - y) \quad (8.4.24)$$

verificabile applicando l'operatore di Dirac  $(\cancel{D} - m)$  ad entrambi i membri:

$$(\cancel{D} - m)S_F(x - y) = (\cancel{D} - m)(\cancel{D} + m)\Delta_F(x - y) \quad (8.4.25)$$

$$\implies \delta^4(x - y) = -(\square + m^2)\Delta_F(x - y) \quad (8.4.26)$$

che è certamente corretta perché  $\Delta_F(x - y)$  è funzione di Green di  $(\square + m^2)$ .

Questo conferma l'ipotesi (8.4.24), che possiamo riscrivere, ricordando (8.2.96), come:

$$S_F(x - y) = (i\cancel{D} + m) \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p \frac{e^{-ipz}}{p^2 - m^2} \quad (8.4.27)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p e^{-ipz} \frac{\cancel{p} + m}{p^2 - m^2}. \quad (8.4.28)$$

Il propagatore della particella fermionica di spin 1/2 nello spazio degli impulsi sarà:

$$\tilde{S}_F(p) = \frac{\cancel{p} + m}{p^2 - m^2} \quad (8.4.29)$$

simile a quello di particella scalare, poiché hanno lo stesso denominatore, ma con diverso numeratore, più complesso, che evidenzia la maggior complessità del campo spinoriale.

## 8.5 Sommario risultati del propagatore libero

Riassumiamo per comodità tutti i risultati ottenuti per il propagatore di una teoria libera.

### Campo scalare neutro e carico

$$\Delta(x - y) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 (2E_p)} \left[ \theta(x^0 - y^0) e^{-ip(x-y)} + \theta(y^0 - x^0) e^{+ip(x-y)} \right] \quad (8.5.1)$$

$$\Delta(x - y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i e^{-ip(x-y)}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (8.5.2)$$

$$\tilde{\Delta}(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (8.5.3)$$

**Campo spinoriale**

$$S_F(x-y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (8.5.4)$$

$$\tilde{S}_F(p) = \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2}. \quad (8.5.5)$$



## Capitolo 9

# QED - Elettrodinamica quantistica

In questo capitolo vedremo come formulare l'elettrodinamica quantistica, ripassando le equazioni di Maxwell, passando per le teorie di gauge, tratteremo la teoria elettromagnetica massiva e quantizzeremo anch'essa, come fatto per i campi scalari e spinoriali e finiremo il capitolo trovando il propagatore per il campo fotonico. I riferimenti per questo capitolo sono il capitolo 4 del Peskin e Schroeder [7] e i capitoli 13, 14 del Lancaster e Blundell [6].

### 9.1 Le equazioni di Maxwell

Richiamiamo brevemente le equazioni di Maxwell, che sono le equazioni classiche che descrivono il campo  $A_\mu$ , ossia un campo vettoriale (spin 1) a massa nulla. Le equazioni sono:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho \quad (9.1.1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{j} \quad (9.1.2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (9.1.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (9.1.4)$$

$$(9.1.5)$$

in cui  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  sono campo elettrico e magnetico, che sono due trivettori che descrivono il campo elettromagnetico in termini di 6 gradi di libertà (3 componenti ciascuno). Come ben sappiamo le equazioni di Maxwell ci dicono: la quantità  $\rho$ , che compare in (9.1.1), è la sorgente del campo elettrico, ossia la densità di carica elettrica; la quantità  $\vec{j}$  è la corrente elettrica e l'equazione (9.1.2) rappresenta il flusso di carica; l'equazione (9.1.3) ci dice che non ci

sono sorgenti di campo magnetico e l'equazione (9.1.4) ci dice che non esiste una corrente magnetica. In EM classico abbiamo anche visto che la corrente elettrica rispetta l'equazione di continuità:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0. \quad (9.1.6)$$

Però con il corso di Fisica 3 e la Relatività Speciale sappiamo che grazie al fatto che il rotore del gradiente e la divergenza del rotore sono nulle entrambe, allora possiamo scrivere l'EM in modo covariante e sostituire a  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  (6 componenti indipendenti) le 4 componenti di un quadrivettore<sup>1</sup>  $A^\mu = (A^0, \vec{A})$  tale per cui:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} A^0 - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \implies E^i = -\partial^i A^0 - \partial^0 A^i \quad (9.1.7)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \implies B^i = \epsilon^{ijk} \partial_i A_k \quad (9.1.8)$$

$$(9.1.9)$$

quindi si ha  $A^\mu = (A^0, \vec{A}) = (\phi, \vec{A})$ , con  $\phi$  potenziale scalare e  $\vec{A}$  potenziale vettore. Facendo questo scriviamo appunto l'elettromagnetismo in una forma covariante utilizzando le quantità:

$$A^\mu = (A^0, \vec{A}) \quad , \quad j^\mu = (\rho, \vec{j}) \quad (9.1.10)$$

e per cui abbiamo l'equazione di continuità:

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad (9.1.11)$$

e le equazioni di Maxwell:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \quad (9.1.12)$$

in cui definiamo il *tensore elettromagnetico*:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu \quad (9.1.13)$$

che assume la forma:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & +B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (9.1.14)$$

Il tensore (9.1.13) è un tensore di rango 2, per cui sotto trasformazioni di Lorentz si trasforma come:

$$F_{\mu\nu} \xrightarrow{\text{T.L.}} \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta F^{\alpha\beta} \quad (9.1.15)$$

---

<sup>1</sup>Dal punto di vista di Lorentz esso è un vettore.

secondo la rappresentazione  $(1,0) \oplus (1,0)$  del gruppo di Lorentz, in quanto  $F^{\mu\nu}$  è antisimmetrico.

Possiamo anche notare l'identità:

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu [\partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho] = 0 \implies \partial_\mu [\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}] = 0 \quad (9.1.16)$$

che ci permette di definire il *tensore duale*:

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \quad (9.1.17)$$

rappresentato come:

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = F^{\mu\nu}(\vec{E} \rightarrow \vec{B}; \vec{B} \rightarrow -\vec{E}) = \begin{pmatrix} 0 & -B^1 & -B^2 & -B^3 \\ B^1 & 0 & E^3 & -E^2 \\ B^2 & -E^3 & 0 & E^1 \\ B^3 & E^2 & -E^1 & 0 \end{pmatrix} \quad (9.1.18)$$

il quale ci permette di scrivere:

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \quad (9.1.19)$$

che è equivalente a scrivere le equazioni di Maxwell omogenee (9.1.3) e (9.1.4).

Ovviamente il processo descritto nel capitolo §3 vale anche per l'elettromagnetismo. Possiamo scrivere la lagrangiana:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\vec{E}^2 - \vec{B}^2) \quad (9.1.20)$$

e applicare le equazioni di Eulero-Lagrange:

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A^\nu)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\nu} = 0. \quad (9.1.21)$$

In questo caso abbiamo:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\mu} = 0 \quad (9.1.22)$$

e anche (ricordando l'antisimmetria del tensore):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{\alpha\beta}} \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \quad (9.1.23)$$

$$= -\frac{1}{2} F^{\alpha\beta} \frac{\partial (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha)}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \quad (9.1.24)$$

$$= -\frac{1}{2} F^{\alpha\beta} (\delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu - \delta_\beta^\mu \delta_\alpha^\nu) \quad (9.1.25)$$

$$= -\frac{1}{2} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} F^{\nu\mu} \quad (9.1.26)$$

$$= -F^{\mu\nu}. \quad (9.1.27)$$

Dunque l'equazione di Eulero-Lagrange diventa:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \quad (9.1.28)$$

cioè le equazioni di Maxwell nel vuoto (9.1.1) e (9.1.2).

Notiamo ancora una piccola cosa. Le equazioni di Maxwell non descrivono campi di materia, bensì campi mass-less, che sono quelli che chiamiamo  $A^\mu$ ; per questo motivo le sorgenti sono "aggiunte" a mano dall'esterno e non sono contenute nella teoria per costruzione. Aggiungiamo le cariche all'elettromagnetismo solo nel momento in cui alla lagrangiana (9.1.20) aggiungiamo un termine che descriva delle particelle cariche, scalari o di Dirac che siano.

Inoltre, utilizzando il teorema di Noether possiamo calcolare il tensore energia-impulso:

$$T^\mu_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\lambda)} \partial_\nu A^\lambda - \mathcal{L} g^\mu_\nu \quad (9.1.29)$$

$$= -F^{\mu\nu} \partial_\nu A_\lambda + \frac{1}{4} g^\mu_\nu F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma}. \quad (9.1.30)$$

Vediamo bene che non è un tensore simmetrico, come dovrebbe, e questo implica che non c'è un momento angolare conservato. Inoltre non è gauge invariante poiché non è scritto in termini del solo campo  $F^{\mu\nu}$  (vedi la prossima sezione per vedere cosa vuol dire).

Però, il tensore energia-impulso non è una quantità misurabile (osservabile) e possiamo modificarlo con un termine aggiuntivo (corrisponde in Meccanica Analitica a fare una trasformazione canonica):

$$T^\mu_\nu \longrightarrow T^\mu_\nu + \partial_\lambda (F^{\mu\lambda} A_\nu) \quad (9.1.31)$$

$$= T^\mu_\nu + (\underbrace{\partial_\lambda F^{\mu\lambda}}_{=0 \text{ per Maxwell}}) A_\nu + F^{\mu\lambda} \partial_\lambda A_\nu \quad (9.1.32)$$

$$= F^{\mu\rho} F_{\nu\rho} + \frac{1}{4} g^\mu_\nu F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \quad (9.1.33)$$

e questo nuovo tensore, così definito, è simmetrico, invariante di Lorentz e invariante di gauge.

Inoltre, le cariche conservative associate al tensore energia-impulso sono:

$$T^{00} = \frac{1}{2} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) \quad (9.1.34)$$

$$T^{0i} = (\vec{E} \times \vec{B})^i \quad (9.1.35)$$

dove: (9.1.34) è la densità di energia, associata al campo, e (9.1.35) è il vettore di Pointing, a cui è legato il trasporto di energia.

## 9.2 Teorie di Gauge

Vediamo in questa sezione che cosa si intende con gauge, che cosa sono le trasformazioni di Gauge e come esse entrino in gioco nella nostra teoria Elettromagnetismo.

La lagrangiana del campo elettromagnetico (disaccoppiata dalle sorgenti) abbiamo detto essere:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}. \quad (9.2.1)$$

Possiamo notare che la teoria è invariante per trasformazioni locali del tipo:

$$\begin{cases} A^0 \rightarrow A^0 + \frac{\partial \chi}{\partial t} \\ \vec{A} \rightarrow \vec{A} - \vec{\nabla} \chi \end{cases} \implies A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \chi \quad (9.2.2)$$

dunque il quadripotenziale  $A^\mu$  è definito a meno del quadri-gradiante di una funzione scalare  $\chi(x)$  arbitraria. Infatti vediamo:

$$F^{\mu\nu} \rightarrow \partial^\mu(A^\nu + \partial^\nu \chi) - \partial^\nu(A^\mu + \partial^\mu \chi) \quad (9.2.3)$$

$$= (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) + \partial^\mu \partial^\nu \chi - \underbrace{\partial^\nu}_{\text{simm.}} \underbrace{\partial^\mu}_{\text{simm.}} \chi \quad (9.2.4)$$

$$= F^{\mu\nu}. \quad (9.2.5)$$

Trasformazioni di questo tipo, ossia che permettono il passaggio nella nostra teoria di campo tra diverse configurazioni dei campi che diano le stesse osservabili fisiche, si chiamano **trasformazioni di gauge** e l'invarianza associata si chiama **invarianza di gauge**. Ovviamente, non esiste una singola trasformazione di gauge possibile per i campi, ma diverse, e noi ne possiamo scegliere una specifica, che ci risultare comoda in determinate situazioni; questo si chiama *gauge fixing*. Notiamo la cosa importante che l'invarianza di gauge non è una simmetria del sistema, quindi le particelle non si portano dietro un'etichetta "gauge" che ci permette di trasformarle, ma l'invarianza è semplicemente data dal fatto che non siamo in grado di dare un'unica descrizione del sistema. Siamo tranquilli nel dire che non sono simmetrie del sistema poiché non comportano quantità conservative nel senso del teorema di Noether. Possiamo fare un semplice scema di quello che abbiamo detto:

$$\text{Simmetria} \longleftrightarrow \text{Trasformazioni} \longleftrightarrow \text{Gauge} \\ \text{di gauge} \qquad \qquad \text{di gauge} \qquad \qquad \text{fixing.}$$

Ad esempio: nella teoria elettrica classica avevamo il potenziale elettrico  $V$  definito a meno di una costante, che fissavamo, ossia sceglievamo un certo gauge, in modo che il potenziale all'infinito fosse nullo; in Meccanica Quantistica potevamo scegliere quale fosse lo zero delle fasi che mettavamo davanti le funzioni d'onda, e questa scelta (di gauge) non importava perché tanto

saevamo che le osservabili erano invarianti per trasformazioni di fase; ora in Elettromagnetismo abbiamo appena visto che il quadripotenziale è definito a meno di un quadri-gradiente di una funzione scalare, dunque possiamo scegliere un particolare gauge, quindi una particolare  $\chi$ , che ci modifica la forma di  $A^\mu$  senza cambiare la Fisica.

Però, dobbiamo stare attenti alle differenze di trasformazioni di gauge *locali* e *globali*. Infatti, i tre esempi che abbiamo visto, in realtà sono delle invarianze di gauge diverse. Possiamo ragionare sul fatto se le specifiche scelte che facciamo influenzino solo il nostro laboratorio (locali) o se invece l'intero universo (globali). Se noi scegiamo lo zero del potenziale elettrico in uno specifico punto del globo, esso sicuramente non cambierà se noi ci mettiamo a viaggiare e cambiamo pianeta, tanto fissato il riferimento quello è invariante nello spazio. Invece, quando noi scegliamo una specifica forma di  $A^\mu(x)$  lo facciamo tramite una funzione scalare  $\chi(x)$  che varia di punto in punto. Detto questo, chiamiamo **trasformazioni di gauge globali** trasformazioni del tipo:

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x) = e^{i\alpha} \psi(x) \quad (9.2.6)$$

con  $\alpha$  indipendente da  $x$ . Queste trasformazioni, oltre a notare che questa in particolare è una trasformazione del gruppo  $U(1)$ , deformano il campo nello stesso modo in tutti i punti dello spaziotempo. Teorie di campo scalari e spinoriali sono invarianti per trasformazioni di gauge globali.

Allo stesso tempo chiamiamo **trasformazioni di gauge locali** trasformazioni del tipo:

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x) = e^{i\alpha(x)} \psi(x) \quad (9.2.7)$$

in cui ora  $\alpha$  dipende da  $x$ . Per queste trasformazioni il campo è trasformato in modo diverso in ogni punto dello spaziotempo. Nessuna teoria di campo è invariante per queste trasformazioni (considerate singolarmente). Possiamo verificarlo brevemente. Abbiamo visto la lagrangiana del campo elettromagnetico libero (9.2.1), ma ovviamente per rendere le cose interessanti dobbiamo accoppiare il campo  $A^\mu$  con le cariche, di Dirac o scalari che siano, e lo possiamo fare aggiungendo termini di massa o cinetici a  $\mathcal{L}$ . Ci rendiamo subito conto che se facciamo una trasformazione di gauge locale, tipo una trasformazione di fase locale (9.2.7), i termini di massa, del tipo  $m\bar{\psi}\psi$  o  $m\phi^\dagger\phi$ , sono invarianti di gauge poiché le fasi si cancellano, anche se  $\alpha$  dipende da  $x$ . Così non è per i termini che contengono derivate, che non sono mai invarianti, infatti:

$$\partial_\mu \psi(x) \longrightarrow \partial_\mu (\psi(x) e^{i\alpha(x)}) \quad (9.2.8)$$

$$= e^{i\alpha(x)} \partial_\mu \psi(x) + [i\partial_\mu \alpha(x)] e^{i\alpha(x)} \psi(x) \quad (9.2.9)$$

$$= e^{i\alpha(x)} [\partial_\mu + i\partial_\mu \alpha(x)] \psi(x) \quad (9.2.10)$$

$$\partial_\mu \psi^\dagger(x) \longrightarrow e^{-i\alpha(x)} [\partial_\mu - i\partial_\mu \alpha(x)] \psi^\dagger(x) \quad (9.2.11)$$

per cui il termine cinetico diventa:

$$(\partial_\mu \psi^\dagger)(\partial^\mu \psi) - i(\partial^\mu \alpha)\psi^\dagger(\partial_\mu \psi) + i(\partial^\mu \psi^\dagger)(\partial_\mu \alpha)\psi + (\partial^\mu \alpha)(\partial_\mu \alpha)\psi^\dagger \psi \quad (9.2.12)$$

che è chiaramente diverso da  $\partial_\mu \psi^\dagger \partial^\mu \psi$ . Per questo motivo diciamo che tra le teorie che abbiamo studiato fin'ora nessuna teoria è invariante per trasformazioni di gauge locali.

Ricorda che stiamo ancora parlando in senso generale, dopo vedremo come l'EM centri in tutto questo. Abbiamo detto che quando facciamo trasformazioni di gauge, senza ancora aver fatto un gauge fixing, abbiamo simmetria della lagrangiana, ma solo se essa è nella sua forma di teoria libera, ossia (9.2.1); quando accoppiamo il campo Elettromagnetismo (nel nostro caso, ma in realtà è valido in generale quando accoppiamo il campo associato alla  $\mathcal{L}$  libera che abbiamo) aggiungendo termini di massa la situazione non cambia, ma aggiungendo termini cinetici, quindi termini con derivate, abbiamo visto (vedi la relazione (9.2.12)) che l'invarianza di gauge di  $\mathcal{L}$  si rompe. Facciamo un esempio concreto, prendiamo la lagrangiana di Dirac, facciamo una trasformazione di fase locale sul campo  $\psi$ :

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x) = e^{i\alpha(x)}\psi(x) \quad (9.2.13)$$

e ci chiediamo come trasformi  $\mathcal{L}_D$ :

$$\bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi \longrightarrow e^{-i\alpha(x)}\bar{\psi} \left[ i\gamma^\mu (\partial_\mu \psi) e^{i\alpha(x)} + i\gamma^\mu (i\partial_\mu \alpha) \psi e^{i\alpha(x)} - m\psi e^{i\alpha(x)} \right] \quad (9.2.14)$$

$$= \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi - (\partial_\mu \alpha)\bar{\psi}\gamma^\mu \psi \quad (9.2.15)$$

chiaramente vediamo che  $\mathcal{L}_D$  non è invariante, ma c'è un pezzetto in più che da fastidio. Però, possiamo creare una teoria invariante per trasformazioni locali sfruttando bene la simmetria di gauge del campo vettoriale. Ovviamamente non è gratis assicurarsi l'invarianza di gauge per trasformazioni locali, ma sarà una condizione valida solo se ammettiamo la presenza di un altro campo oltre ai campi di materia ( $\phi$  o  $\psi$ ) che ci piace tanto usare (nelle teorie di Klein-Gordon o di Dirac); dobbiamo quindi aggiungere alla teoria il campo di radiazione ( $A^\mu$ ), che entra a far parte della lagrangiana e quindi si accoppia (interagirà) con i campi  $\phi$  o  $\psi$ . Vedi la sezione §9.2.2 per capire un po' meglio. Infatti, possiamo inserire un campo ausiliario  $A^\mu$ , vettoriale, che si trasformi contestualmente, e simultaneamente, a  $\psi$  in modo da cancellare opportunamente il termine in più in (9.2.15), che possiamo notare essere proporzionale a  $\partial_\mu \alpha(x)$ . Possiamo prendere la trasformazione di gauge:

$$\begin{cases} \psi(x) & \longrightarrow \psi'(x) = e^{i\alpha(x)}\psi(x) \\ A^\mu(x) & \longrightarrow A'^\mu(x) = A^\mu(x) - \frac{1}{q}\partial_\mu \alpha(x) \end{cases} \quad (9.2.16)$$

e in questo modo ridefiniamo:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m - q\gamma^\mu A_\mu)\psi \quad (9.2.17)$$

$$= \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi \quad (9.2.18)$$

in cui abbiamo definito:

$$D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu(x) \quad (9.2.19)$$

che chiamiamo **derivata covariante**. È facile verificare che (9.2.18) è invariante per (9.2.16):

$$\bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi \longrightarrow \bar{\psi}'(i\gamma^\mu D'_\mu - m)\psi' \quad (9.2.20)$$

$$= e^{-i\alpha}\bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - q\gamma^\mu A'_\mu - m)e^{i\alpha}\psi \quad (9.2.21)$$

$$= e^{-i\alpha}\bar{\psi}(-\gamma^\mu \partial_\mu \alpha - q\gamma^\mu A'_\mu - m)e^{i\alpha}\psi + \quad (9.2.22)$$

$$+ e^{-i\alpha}\bar{\psi}(i\gamma^\mu e^{i\alpha} \partial_\mu \psi) \quad (9.2.23)$$

$$= e^{-i\alpha}\bar{\psi}(-\gamma^\mu \partial_\mu \alpha - q\gamma^\mu A_\mu + \gamma^\mu \partial_\mu \alpha - \quad (9.2.24)$$

$$- m)e^{i\alpha}\psi + e^{-i\alpha}\bar{\psi}(i\gamma^\mu e^{i\alpha} \partial_\mu \psi) \quad (9.2.24)$$

$$= e^{-i\alpha}\bar{\psi}(-q\gamma^\mu A_\mu - m)e^{i\alpha}\psi + \quad (9.2.25)$$

$$+ e^{-i\alpha}\bar{\psi}(i\gamma^\mu e^{i\alpha} \partial_\mu \psi) \quad (9.2.25)$$

$$= \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - q\gamma^\mu A_\mu - m)\psi \quad (9.2.25)$$

$$= \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi. \quad (9.2.26)$$

La quantità  $q$  è una costante, è la **costante di accoppiamento** e ci dà l'intensità con cui il campo  $A^\mu$  interagisce con l'altro campo della teoria (in questo esempio che abbiamo visto  $\psi$ ). Noi sceglieremo in QED la costante di accoppiamento essere proprio la carica elettromagnetica, perché è una quantità conservata in senso stretto (in modo assoluto), come ci garantisce il teorema di Noether. L'interazione Elettromagnetismo avviene tra cariche  $q$  e non mescola settori di carica diversa.

Una teoria in cui il campo vettoriale  $A^\mu$  è introdotto per generare un'invarianza (di fase) locale è detta **teoria di gauge** e il campo  $A^\mu$  è detto **campo di gauge**.

Per scrupolo verifichiamo anche che con la definizione (9.2.19) il termine cinetico diventa invariante per trasformazioni (9.2.16):

$$D_\mu \psi \longrightarrow D'_\mu \psi' = \left[ \partial_\mu + iqA_\mu - i\partial\alpha(x) \right] (e^{i\alpha(x)}\psi(x)) \quad (9.2.27)$$

$$= i(\partial_\mu \alpha)e^{i\alpha}\psi + e^{i\alpha}\partial_\mu \psi + iqA_\mu e^{i\alpha}\psi - i(\partial_\mu \alpha)e^{i\alpha}\psi \quad (9.2.28)$$

$$= e^{i\alpha}\partial_\mu \psi + e^{i\alpha}(iqA_\mu)\psi \quad (9.2.29)$$

$$= e^{i\alpha}(\partial_\mu + iqA_\mu)\psi \quad (9.2.30)$$

$$= e^{i\alpha}D_\mu \psi \quad (9.2.31)$$

da cui:

$$D_\mu^\dagger \psi^\dagger D_\mu \psi \longrightarrow e^{-i\alpha} D_\mu^\dagger \psi^\dagger e^{i\alpha} D_\mu \psi \quad (9.2.32)$$

$$= D_\mu^\dagger \psi^\dagger D_\mu \psi \quad (9.2.33)$$

quindi si, la derivata covariante ha ristabilito l'invarianza purché  $A^\mu$  trasformi contemporaneamente come detto in (9.2.16).

### 9.2.1 Perché la teoria di gauge

Elenchiamo un attimo alcuni dei motivi per cui l'invarianza di gauge è importantissima:

- L'invarianza di gauge ci fornisce una guida nel calcolo delle proprietà fisiche della teoria in esame.
- Quando studieremo il processo di rinormalizzazione (quindi rimuoveremo le divergenze in ogni ordine degli sviluppi perturbativi) allora ci renderemo conto che essi dipendono in modo cruciale dall'invarianza di gauge.
- L'unitarietà della teoria (che ci assicura che non ci siano "ghost" nella teoria, cioè stati a norma negativa) dipende in modo cruciale dall'invarianza di gauge (i modi vibrazionali longitudinali del campo di Maxwell corrispondono a stati a norma negativa ed essi vengono eliminati scegliendo un gauge appropriato, ossia il gauge di Coulomb ( $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ ). Notiamo però che c'è un caso particolare, ovvero la quantizzazione di Gupta-Bleuler, in cui noi chiediamo di non rompere mai l'invarianza di Lorentz (come faremo noi nel corso del capitolo), e ci riusciamo, ma all'alto pezzo di ottenere i "ghost" nella teoria che si propagano e che dovremo rimuovere a mano.
- La prova che la teoria rimane Lorentz invariante anche dopo aver fissato un gauge *non* Lorentz invariante richiede l'utilizzo della simmetria di gauge, come vedremo.

### 9.2.2 Teorie di gauge in Elettromagnetismo

Torniamo al nostro amato Elettromagnetismo e all'invarianza che avevamo trovato per il nostro campo:

$$A^\mu(x) \longrightarrow A^\mu(x) + \partial^\mu \chi(x) \quad (9.2.34)$$

notiamo facilmente che se applichiamo più trasformazioni di gauge in successione, troviamo che esse formano gruppo, sotto la semplice legge additiva:

$$\chi_3 = \chi_1 + \chi_2 \quad (9.2.35)$$

che è la legge tipica del gruppo  $U(1)$ .

Abbiamo visto che per trasformazioni di gauge il tensore  $F^{\mu\nu}$  è invariante, ma se  $F^{\mu\nu}$  è invariante, nel senso che  $\delta F^{\mu\nu} = 0$ , allora lo è anche la lagrangiana (attenzione, è invariante quella libera, ossia (9.2.1)), sempre nel senso  $\delta\mathcal{L} = 0$ . L'invarianza di gauge delle equazioni di Maxwell e di  $\mathcal{L}$  implica che ci sia una rindondanza nella nostra teoria, nel senso che: è vero che abbiamo già ridotto i gradi di libertà da 6, quando usavamo  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ , a 4, ora che utilizziamo  $A^\mu$ , però avendo ancora l'invarianza di gauge possiamo utilizzarla in modo furbo, o conveniente, per ridurre ulteriormente i gradi di libertà fino a due. Con il gauge fixing passiamo da avere una classe di soluzioni ad una sola soluzione, con due gradi di libertà.

Infatti, se prendiamo l'equazione di Maxwell non omogenea:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \quad (9.2.36)$$

ricaviamo:

$$\partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = j^\nu \implies \square A^\nu - \partial_\mu \partial^\nu A^\mu = j^\nu \quad (9.2.37)$$

$$\implies \square A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = j^\nu \quad (9.2.38)$$

e siccome la funzione  $\chi(x)$  è una funzione scalare arbitraria, la possiamo fissare:

$$\chi(x) / \partial_\mu A^\mu = 0 \quad (9.2.39)$$

che corrisponde a mettersi nel particolare gauge chiamato **gauge di Lorenz**<sup>2</sup>, ci piace perché è Lorentz invariante e in cui le equazioni di Maxwell diventano:

$$\begin{cases} \square A^\mu = j^\mu & \text{in presenza di sorgenti} \\ \square A^\mu = 0 & \text{nel vuoto.} \end{cases} \quad (9.2.40)$$

Ovviamente esistono anche altri gauge significativi che vengono utilizzati per rimuovere l'ambiguità di  $A^\mu$ , dato che le sue 4 componenti sono tutte fisicamente rilevanti, e alcuni esempi sono:

$$A^0 = 0 \quad \text{gauge temporale} \quad (9.2.41)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad \text{gauge di Coulomb.} \quad (9.2.42)$$

Capito cosa vuol dire gauge fixing, possiamo fare un passo indietro e ripensare all'invarianza di gauge:

$$A^\mu(x) \longrightarrow A^\mu(x) + \partial^\mu \chi(x) \quad (9.2.43)$$

e possiamo renderci conto non essere tanto diversa dell'espressione della trasformazione di gauge (9.2.16) che abbiamo utilizzato, oltre che a definire

---

<sup>2</sup>Non è un errore nel nome, il nome si riferisce a Ludwing Lorenz e non a Hendrik Lorentz, a cui siamo abituati.

la derivata covariante (9.2.19), per rendere la lagrangiana accoppiata con i campi di materia invariante. Infatti basta porre:

$$\partial^\mu \chi(x) = -\frac{1}{q} \partial_\mu \alpha(x) \quad (9.2.44)$$

e le due espressioni coincidono. Conseguentemente, fare il gauge fixing ora si traduce nello scegliere una condizione non più su  $\chi(x)$ , ma su  $\alpha(x)$ . Diciamo per questo che l'Elettromagnetismo è una teoria di gauge e  $A^\mu$  è un campo di gauge. Per osservare gli effetti dell'EM, il campo  $A^\mu$  dev'essere accoppiato ad un campo di materia (possiamo scegliere campi scalari carichi  $\phi^{(\dagger)}$  o campi di Dirac  $\psi^{(\dagger)}$ ) e la prescrizione per ottenere la teoria di interazione tra campo EM e campo di materia più semplice possibile prevede la sostituzione, nella lagrangiana, di  $\partial_\mu$  con  $D_\mu$ . Questa prescrizione è detta di **accoppiamento minimale**.

Vedremo sia l'accoppiamento con il campo scalare che con il campo spinoriale e vedremo l'applicazione del **principio di gauge**:

*Il campo di gauge  $A^\mu$  introdotto per garantire l'invarianza per trasformazioni locali, determina la forma dell'accoppiamento, o meglio delle sue interazioni con il campo di materia.*

Partiamo con il campo scalare carico. Partiamo da:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_\phi + \mathcal{L}_{EM} = (\partial_\mu \phi)^\dagger (\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^\dagger \phi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (9.2.45)$$

utilizziamo la prescrizione di accoppiamento minimale:

$$\mathcal{L} = (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) - m^2 \phi^\dagger \phi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (9.2.46)$$

$$= (\partial_\mu \phi^\dagger - iq A_\mu \phi^\dagger) (\partial^\mu \phi + iq A^\mu \phi) - m^2 \phi^\dagger \phi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (9.2.47)$$

$$= \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \\ - \underbrace{iq A_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi + iq \partial_\mu \phi^\dagger A^\mu \phi + q^2 A_\mu A^\mu \phi^\dagger \phi}_{(9.2.48)}$$

gli ultimi tre termini (sottolineati) sono quelli che determinano come il campo  $\phi$  di materia si accoppia con il campo di gauge  $A^\mu$ , sono termini chiamati per l'appunto di **accoppiamento**, e la costante di accoppiamento è la carica elettrica. Notiamo che la forma della lagrangiana è del tipo:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{KG} + \mathcal{L}_{EM} + \mathcal{L}_{int}. \quad (9.2.49)$$

Ovviamente, il nostro grande interesse è quello di costruire una teoria di gauge che accoppi il campo elettromagnetico con i fermioni di Dirac (gli

elettroni). Vediamo:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_D + \mathcal{L}_{EM} \quad (9.2.50)$$

$$= \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (9.2.51)$$

essa è per costruzione (per come abbiamo definito  $D_\mu$  e il tesore  $F_{\mu\nu}$ ) invariante per trasformazioni di gauge. Utilizzando la prescrizione di accoppiamento minimale troviamo una scrittura analoga a (9.2.48).

In questo corso non utilizzeremo quello imparato per costruire una teoria invariante per trasformazioni locali, ci concentreremo solo sull'Elettromagnetismo, e costruiremo una teoria quantistica dell'elettromagnetismo. Quello scritto nella sezione appena conclusa sarà utile quando svilupperemo formalmente la QED (la cui lagrangiana è proprio (9.2.50)), i cui quanti saranno  $e^\pm$  (e non i fotoni come nella teoria che vedremo noi) nei corsi successivi e vedremo i suoi diagrammi di Feynmann. Quello che vorremo fare sarà mantenere la simmetria per trasformazioni di  $U(1)$  della teoria di Dirac, anche quando consideriamo una teoria interagente, tra  $e^\pm$  e fotoni, che si perde in modo immediato (9.2.15). Il principio di gauge ci permetterà di mantenere l'invarianza di  $U(1)$  nella teoria.

### 9.2.3 Gradi di libertà della teoria elettromagnetica

Vediamo in questa rapida sezione perché siamo sicuri nel dire che i fotoni, e il loro campo associato, hanno solo due gradi di libertà e quindi solo due stati di polarizzazione possibili.

Abbiamo visto qual è il *gauge di Lorenz*, che ci fa scegliere  $\chi(x)$  in modo che si abbia:

$$\chi(x) / \partial_\mu A^\mu = 0 \quad (9.2.52)$$

il che si traduce nel scegliere:

$$A^\mu \longrightarrow A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu \chi \quad (9.2.53)$$

$$\partial_\mu A^\mu \longrightarrow \partial_\mu A'^\mu = \partial_\mu A^\mu + \partial_\mu \partial^\mu \chi \quad (9.2.54)$$

e possiamo ottenere  $\partial_\mu A'^\mu = 0$  selezionando:

$$\partial^2 \chi = \partial_\mu A^\mu. \quad (9.2.55)$$

Messi in questo gauge abbiamo visto che le equazioni di Maxwell, in assenza di cariche, diventano:

$$\partial^2 A'^\mu = 0 \quad (9.2.56)$$

le cui soluzioni sono proprio onde piane, normalizzate con dei quadrivettori che chiamiamo  $\epsilon^\mu(p)$ :

$$A^\mu = \epsilon^\mu(p) e^{-ipx} \quad (9.2.57)$$

con sempre valida  $E_p = |\vec{p}|$ . Come vedremo nella sezione §9.3, la condizione (9.2.52) è a vista identica alla condizione (9.3.3) che esce fuori dall'equazione di Proca in modo naturale; la differenza tra le due scritture è che (9.2.52) è una condizione scelta nel gauge fixing, mentre (9.2.52) è intrinseca nella teoria. Ad ogni modo però hanno entrambe il risultato di ridurre i gradi di libertà da 4 a 3 del campo elettromagnetico.

Però, possiamo fare ancora una cosa, perché l' $A'^\mu$  che abbiamo definito, non è ancora unico, infatti possiamo definire:

$$A'_\mu \longrightarrow A''_\mu = A'_\mu - \partial_\mu \xi \quad (9.2.58)$$

con la condizione  $\partial^2 \xi = 0$ , e le equazioni di Maxwell non cambiano. Notiamo che sia  $A'^\mu$  che  $A''^\mu$  sono scritti nel gauge di Lorenz.

Però, affinché  $A''^\mu$  sia unico dobbiamo scegliere:

$$\partial_0 \xi = A'_0 \quad (9.2.59)$$

il che implica  $A''_0 = 0$ . Con quest'ulteriore passaggio, la condizione di Lorenz si riduce a:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}'' = 0 \quad (9.2.60)$$

che è noto come *gauge di Coulomb* e che riduce ancora di 1 i gradi di libertà del campo.

Quindi in conclusione, siamo partiti con  $A^\mu$  che ha 4 componenti, ma ci siamo resi conto che eliminando le rindondanze ci rendiamo conto che solamente 2 (indipendenti) hanno significato fisico.

Detto questo, perché diciamo che i due gradi di libertà che rimangono sono ortogonali alla direzione del moto?

Partiamo dall'equazione del moto (di Maxwell)  $\partial^2 A^\mu = 0$ , conosciamo la condizione  $A^0 = 0$ , dunque le soluzioni sono onde piane del tipo:

$$\vec{A} = \vec{\epsilon} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}. \quad (9.2.61)$$

Inserendo le soluzioni dentro la condizione di gauge di Coulomb  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ , otteniamo la condizione:

$$\vec{p} \cdot \vec{A} = \vec{p} \cdot \vec{\epsilon} = 0 \quad (9.2.62)$$

la quale ci dice che la direzione di propagazione dell'onda (data da  $\vec{p}$ ) è perpendicolare alla polarizzazione (identificata con  $\vec{\epsilon}$ ).

Ad esempio, se abbiamo propagazione lungo l'asse  $z$  con impulso  $q^\mu = (|\vec{q}|, 0, 0, |\vec{q}|)$ , allora possiamo avere:

$$\vec{\epsilon}_1(q) = (1 \ 0 \ 0), \quad \vec{\epsilon}_2(q) = (0 \ 1 \ 0) \quad (9.2.63)$$

che corrispondono ad una polarizzazione lineare. Potremmo anche scegliere una polarizzazione circolare e avere:

$$\vec{\epsilon}_R^*(q) = -\frac{1}{\sqrt{2}} (1 \ i \ 0), \quad \vec{\epsilon}_L^*(q) = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 \ -i \ 0). \quad (9.2.64)$$

### 9.3 Elettromagnetismo massivo

Prima di addentrarci nella teoria del campo elettromagnetico, che è mass-less, i cui quanti sono i fotoni, studiamo il caso di una teoria, simile all'EM<sup>3</sup>, ma con un campo vettoriale massivo, che rappresenta un fotone, ma dotato di massa. Questa teoria va sotto il nome di **teoria di Proca** e sarà utile per poi il campo mass-less.

Seguiamo la procedura di quantizzazione canonica, prendendo la lagrangiana:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2A_\mu A^\mu \quad (9.3.1)$$

in cui abbiamo aggiunto, oltre la lagrangiana EM (9.2.1), un termine di massa tipo Klein-Gordon. Le equazioni di Eulero-Lagrange ci danno:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = 0 \quad (9.3.2)$$

che va sotto il nome di **equazione di proca**. Notiamo anche che, scritta così l'equazione di Proca non è gauge invariante, poiché come ben sappiamo l'invarianza di gauge non è compatibile con  $m \neq 0$  (a meno che non costruiamo una teoria di gauge, ma per il momento lasciamo stare). Se prendiamo la divergenza dell'equazione trovata abbiamo:

$$\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 \partial_\nu A^\nu = 0 \implies \partial_\nu A^\nu = 0 \quad (9.3.3)$$

in cui abbiamo messo  $\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$  poiché  $F^{\mu\nu}$  è antisimmetrico, mentre  $\partial_\nu \partial_\mu$  è simmetrico. La relazione (9.3.3) è una condizione aggiuntiva che discende direttamente dall'equazione di Proca e che possiamo utilizzare per riscrivere (9.3.2):

$$\partial_\mu(\partial^\mu A^\nu) - \partial_\mu(\partial^\nu A^\mu) + m^2 A^\nu = 0 \implies \partial_\mu(\partial^\mu A^\nu) - \underbrace{\partial^\nu(\partial_\mu A^\mu)}_{=0} + m^2 A^\nu = 0 \quad (9.3.4)$$

$$\implies (\partial_\mu \partial^\mu + m^2) A^\nu = 0 \quad (9.3.5)$$

$$\implies (\square + m^2) A^\nu = 0 \quad (9.3.6)$$

che ha la stessa forma dell'equazione di Klein-Gordon per ciascuna componente di  $A^\nu$ .

Facciamo attenzione che la condizione (9.3.3) non è una condizione di gauge fixing (nonostante ha la stessa forma del gauge di Lorentz per il campo mass-less), ma segue dall'equazione (9.3.2), dunque, ci permette di dare una condizione sulle componenti di  $A^\mu$  e avere che non tutte sono indipendenti, ma solamente 3 su 4. Quindi  $A^\mu$ , nel caso massivo, descrive una

---

<sup>3</sup>Facciamo attenzione che parliamo di EM massivo, fotoni, campi elettrici etc. ma la teoria che sviluppiamo non è l'Elettromagnetismo a cui siamo abituati.

particella con 3 gradi di libertà, ovvero una particella con spin 1 (rispettano Klein-Gordon).

Determiniamo i momenti coniugati:

$$\Pi^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_0)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_0} = F^{00} = 0 \quad (9.3.7)$$

$$\Pi^i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_i)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_i} = -F^{0i} = E^i = \partial^i A^0 - \partial^0 A^i. \quad (9.3.8)$$

in cui vediamo  $\vec{E} = -\vec{\nabla} A^0 - \dot{\vec{A}}$ . Notiamo anche che vale:

$$(9.3.2) \implies \partial_\mu F^{\mu 0} + m^2 A^\nu = 0 \quad (9.3.9)$$

$$\implies A^0 = -\frac{1}{m^2} (\partial_i F^{i0}) \quad (9.3.10)$$

$$\implies A^0 = -\frac{1}{m^2} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}. \quad (9.3.11)$$

Possiamo anche determinare l'hamiltoniana:

$$\mathcal{H} = \Pi^i \dot{A}_i - \mathcal{L} \quad (9.3.12)$$

$$= -\vec{E} \cdot \dot{\vec{A}} - \frac{1}{2} (\vec{E}^2 - \vec{B}^2) - \frac{m^2}{2} [(A^0)^2 - \vec{A}^2] \quad (9.3.13)$$

$$= -\vec{E} \cdot (-\vec{\nabla} A^0 - \vec{E}) - \frac{1}{2} (\vec{E}^2 - \vec{B}^2) - \frac{m^2}{2} \left[ \frac{1}{m^4} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})^2 - \vec{A}^2 \right] \quad (9.3.14)$$

$$= \vec{E} \cdot \vec{\nabla} A^0 + \vec{E}^2 - \frac{1}{2} (\vec{E}^2 - \vec{B}^2) - \frac{1}{2m^2} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})^2 + \frac{m^2}{2} \vec{A}^2 \quad (9.3.15)$$

$$= \underbrace{\left[ \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} A^0) - A^0 (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \right]}_{\rightarrow 0} + \frac{1}{2} (\vec{E}^2 - \vec{B}^2) - \frac{1}{2m^2} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})^2 + \frac{m^2}{2} \vec{A}^2 \quad (9.3.16)$$

$$= \frac{1}{m^2} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})^2 + \frac{1}{2} (\vec{E}^2 - \vec{B}^2) - \frac{1}{2m^2} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})^2 + \frac{m^2}{2} \vec{A}^2 \quad (9.3.17)$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left[ \vec{E}^2 - \vec{B}^2 + m^2 \vec{A}^2 + \frac{1}{m^2} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})^2 \right] \quad (9.3.18)$$

in cui abbiamo utilizzato la condizione, imposta da noi, che tutti i campi vadano a 0 all' $\infty$ . Dall'espressione di  $\mathcal{H}$  ci rendiamo conto che l'Elettromagnetismo mass-less non è semplicemente il limite  $m \rightarrow 0$  del caso massivo poiché porterebbe ad energie divergenti, ma qualcosa di più complesso. Questa cosa potevamo già intuirlo dal fatto che le simmetrie delle due teorie erano diverse (la teoria massiva non è invariante di gauge).

Il passo successivo della quantizzazione è promuovere i campi al ruolo di operatore e imporre le regole di commutazione a tempi uguali:

$$[A^\mu(t, \vec{x}), A^\nu(t, \vec{y})] = 0 \quad , \quad [\Pi^i(t, \vec{x}), \Pi^j(t, \vec{y})] = 0 \quad (9.3.19)$$

$$[\Pi^i(t, \vec{x}), A^0(t, \vec{y})] = 0 \quad , \quad [\Pi^i(t, \vec{x}), A^j(t, \vec{y})] = -i\delta^{ij}\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad (9.3.20)$$

notando che avendo  $\Pi^0 = 0$  allora possiamo dire che  $A^0$  commuta con tutto ed è dunque un c-numero (non necessariamente nullo).

Come già detto, la condizione  $\partial_\mu A^\mu = 0$  ci dice che solo 3 sono le componenti di  $A^\mu$  indipendenti, poiché, nello spazio degli impulsi esso diventa:

$$p_\mu A^\mu = 0 \quad (9.3.21)$$

e cioè:

$$\partial_0 A^0 = -\vec{\nabla} \cdot \vec{A} \quad (9.3.22)$$

che fissa una condizione su  $A^0$  (scegliamo di fissare  $A^0$  in modo arbitrario, avremmo potuto benissimo fissare un'altra delle 3 componenti), la quale a sua volta elimina 1 grado di libertà e li fa passare da 4 a 3. Questa condizione e il fatto di ritrovarsi con solo 3 gradi di libertà indipendenti giustifica il risultato (9.3.18) di  $\mathcal{H}$ , in cui non compariva  $A^0$ . I tre gradi di libertà li vediamo come 3 possibili stati di polarizzazione indipendenti. Il vettore di polarizzazione di una particella contiene l'informazione sul suo momento angolare di spin, e abbiamo trovato che particelle vettoriali hanno spin 1 e tre gradi di libertà dati dai 3 valori della sua terza componente  $S_z = \pm 1, 0$ .

A questo punto del processo di quantizzazione dovremmo sviluppare con Fourier il campo. Dobbiamo quindi introdurre gli operatori di creazione e distruzione  $\hat{a}^\dagger(\vec{p})$  e  $\hat{a}(\vec{p})$  e associarli alle onde piane  $e^{-ipx}$  e  $e^{-ipx}$ , come per gli altri campi<sup>4</sup>. I fattori di normalizzazione possiamo riciclarli dai conti per il campo scalare e darli per noti. Però avremo anche bisogno di oggetti che converiscano una natura quadrivettoriale al campo (proprio come  $u$  e  $v$  davano natura spinoriale a  $\hat{\psi}$ ). Gli oggetti che utilizzeremo per il campo  $\hat{A}^\mu$  saranno i **vettori di polarizzazione**, che avranno un indice  $\mu$  di Lorentz, che da una natura quadrivettoriale (quindi è un oggetto che vive nello spazio di Minkowski), avranno un quadri-impulso  $p$  associato che rispetta la relazione di mass-shell e avranno un'etichetta, che chiamiamo  $\lambda$ , che indica lo stato di polarizzazione e che potrà assumere valori  $\lambda = 1, 2, 3$ .<sup>5</sup> Indichiamo

<sup>4</sup>Notiamo che non distinguiamo particelle e antiparticelle poiché sappiamo che il campo Elettromagnetismo è neutro e non porta carica.

<sup>5</sup>Notiamo che lo stato di polarizzazione 0 non c'è, poiché nel sistema di riferimento di riposo della particella il campo è ortogonale alla direzione 0 (la scelta della componente 0, piuttosto che 2 è completamente arbitraria) e non esiste il vettore:

$$\epsilon_0^\mu(m, \vec{p}) = (1, 0, 0, 0) \quad (9.3.23)$$

nella base dei vettori di polarizzazione.

il vettore di polarizzazione come:

$$\epsilon_\lambda^\mu(p). \quad (9.3.24)$$

Possiamo scegliere una base, in un modo che ci viene comodo, per cui lo facciamo come abbiamo fatto per  $u$  e  $v$ , ossia ci mettiamo nel sistema di riposo, fissiamo i vettori, e poi in un secondo momento facciamo un boost e ci poniamo in un sistema di riferimento in cui  $\vec{p} \neq 0$ . Prendiamo:

$$\epsilon_1(m, \vec{p}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon_2(m, \vec{p}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon_3(m, \vec{p}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (9.3.25)$$

che possiamo verificare essere ortonormali (per costruzione):

$$\epsilon_\lambda^*(p) \cdot \epsilon_{\lambda'}(p) = g_{\mu\nu} \epsilon_\lambda^\mu \epsilon_{\lambda'}^\nu = -\delta_{\lambda\lambda'} \quad (9.3.26)$$

e dove vale la relazione:

$$p^\mu \epsilon_{\mu\lambda}(p) = 0 \quad \forall \lambda \quad (9.3.27)$$

che ci dice come la polarizzazione del campo sia legata all'impulso  $p^\mu$ , ovvero, la direzione di polarizzazione è sempre ortogonale alla direzione di  $\vec{p}$ .

Ovviamente, come detto, scelta la base (9.3.25) possiamo fare un boost e spostarci in un sistema di riferimento in cui abbiamo  $\vec{p} \neq 0$ . Ad esempio, potremmo prendere una particella con impulso solo lungo  $z$ , con  $p_z = |\vec{p}|$ , dunque con  $p^\mu = (E_p, 0, 0, |\vec{p}|)$ , allora avremmo la matrice di boost:

$$\Lambda^\mu_\nu(p) = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} E_p & 0 & 0 & |\vec{p}| \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ |\vec{p}| & 0 & 0 & E_p \end{pmatrix} \quad (9.3.28)$$

la quale porta ai vettori:

$$\epsilon_1(E_p, 0, 0, |\vec{p}|) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon_2(E_p, 0, 0, |\vec{p}|) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon_3(E_p, 0, 0, |\vec{p}|) = \begin{pmatrix} |\vec{p}|/m \\ 0 \\ 0 \\ E_p/m \end{pmatrix}. \quad (9.3.29)$$

Possiamo scrivere lo sviluppo di Fourier del campo  $\hat{A}^\mu$ , promosso ad operatore:

$$\hat{A}^\mu(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda=1}^3 \left[ \epsilon_\lambda^\mu(p) \hat{a}_\lambda(\vec{p}) e^{-ipx} + \epsilon_\lambda^{\mu*}(p) \hat{a}_\lambda^\dagger(\vec{p}) e^{ipx} \right] \quad (9.3.30)$$

sempre tenendo a mente la condizione:

$$p_\mu \epsilon_\lambda^\mu(p) = 0. \quad (9.3.31)$$

L'ultimo passo è quello di diagonalizzare l'hamiltoniana:<sup>6</sup>

$$:\hat{H}:=\int d^3p E_p \sum_{\lambda=1}^3 \hat{a}_\lambda^\dagger(\vec{p}) \hat{a}_\lambda(\vec{p}) \quad (9.3.32)$$

che ci fa vedere che l'energia totale del sistema è la somma dell'energia di tutte le particelle in tutti i possibili stati di polarizzazione.

## 9.4 Quantizzazione del campo elettromagnetico

Vediamo finalmente il caso che ci interessa, ossia la quantizzazione del campo elettromagnetico  $A^\mu$  mass-less. Desideriamo sviluppare una teoria per i foton, che possiamo pensare di descrivere con un campo vettoriale  $A^\mu$ . (i cappellini sopra gli operatori sono stati ignorati, ma arrivato a questo punto dovresti aver capito quando un campo ha ruolo operatoriale o no).

Procediamo con la quantizzazione canonica come al solito. Abbiamo la lagrangiana Elettromagnetismo:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) \quad (9.4.1)$$

con al solito:

$$F^{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad , \quad \begin{cases} E^i = F^{i0} = -F^{i0} \\ B^i = -\frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} F_{jk} \end{cases} \quad (9.4.2)$$

e ricordando anche:

$$A^\mu = (\varphi, \vec{A}) \quad , \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2} (\vec{E}^2 - \vec{B}^2) \quad , \quad \begin{cases} \vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi - \dot{\vec{A}} \\ \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \end{cases} \quad (9.4.3)$$

Definiamo, come fatto per il caso massivo, i momenti coniugati:

$$\Pi^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_0} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 A_0)} = F^{00} = 0 \quad (9.4.4)$$

$$\Pi^i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i A_i)} = -F^{0i} = E^i. \quad (9.4.5)$$

Abbiamo già visto nel caso massivo che una lagrangiana (9.4.1) sembra descrivere un campo con 4 gradi di libertà; ma abbiamo anche imparato che, con  $m \neq 0$ , i gradi di libertà (polarizzazione) scendono a 3: due stati di polarizzazione ortogonali alla direzione del moto e uno longitudinale. Nel caso della luce, però già sappiamo che gli stati di polarizzazione saranno solamente 2 (vedi la sezione §9.4.1), quelli trasversi. Infatti, lo spin non è un

---

<sup>6</sup>Il Lancaster e Blundell definiscono il calcolo un po' tedioso (vedi capitolo 13.2).

buon numero quantico per il fotone, che è appunto mass-less. Però, come vedremo, il fatto che solo 2 componenti di  $A^\mu$  saranno fisiche, sarà un problema nel processo di quantizzazione, ma vedremo anche come fare.

Possiamo promovere ad operatori i campi ed imporre le regole di commutazione a tempi uguali:

$$[A^\mu(t, \vec{x}), A^\nu(t, \vec{y})] = 0 \quad , \quad [\Pi^i(t, \vec{x}), \Pi^j(t, \vec{y})] = 0 \quad (9.4.6)$$

$$[\Pi^i(t, \vec{x}), A^0(t, \vec{y})] = 0 \quad , \quad [\Pi^i(t, \vec{x}), A^j(t, \vec{y})] = -i\delta^{ij}\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad (9.4.7)$$

in cui, anche in questo caso, avendo  $\Pi^0 = 0$ , l'unico altro commutatore che poteva essere non nullo, cioè  $[\Pi^0(t, \vec{x}), A^0(t, \vec{y})]$  è nullo. Per questo possiamo dire che  $A^0$  commuta con tutti gli altri campi e per ciò è un c-numero.

Fissare le regole di commutazione (9.4.6) e (9.4.7), dobbiamo verificare che siano consistenti con la teoria di Maxwell. Sappiamo che in assenza di cariche, che è la situazione in cui siamo avendo preso la lagrangiana (9.4.1), vale:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0. \quad (9.4.8)$$

Deriviamo rispetto a  $x_i$  il commutatore  $[\Pi^i, A^j]$  (notando che  $A^j$  dipende da  $y^i$  e non  $x^i$ ):

$$\frac{\partial}{\partial x^i} [\Pi^i(t, \vec{x}), A^j(t, \vec{y})] = [\partial_i \Pi^i(t, \vec{x}), A^j(t, \vec{y})] \quad (9.4.9)$$

$$= \left[ \underbrace{\partial_i E^i(t, \vec{x})}_{=0}, A^j(t, \vec{y}) \right] \quad (9.4.10)$$

$$= 0. \quad (9.4.11)$$

Ora, deriviamo rispetto a  $x^i$  anche il secondo membro di  $[\Pi^i(t, \vec{x}), A^j(t, \vec{y})]$ , ossia  $-i\delta^{ij}\delta^3(\vec{x} - \vec{y})$ :

$$-i \frac{\partial}{\partial x^i} \left\{ \delta^{ij} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 k e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \right\} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 k k^j e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \neq 0. \quad (9.4.12)$$

Dunque, tra (9.4.11) e (9.4.12) abbiamo trovato un'inconsistenza, poiché il primo membro si annulla e il secondo no. Questa incongruenza è dovuta al fatto che stiamo tenendo tutte e 4 le componenti di  $A^\mu$ , mentre abbiamo già osservato che solo due sono fisiche. Dobbiamo trovare il modo di disfarcirci delle componenti rindondanti (dobbiamo proiettarle via) e ridefinire il commutatore in modo consistente.

Introduciamo una  $\delta$  "trasversale" definita come:

$$\delta_T^{ij}(\vec{x} - \vec{y}) \equiv \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 k e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \left( \delta^{ij} - \frac{k^i k^j}{|\vec{k}|^2} \right) \quad (9.4.13)$$

in cui la quantità  $\left(\delta^{ij} - \frac{k^i k^j}{|\vec{k}|^2}\right)$  è il proiettore sulle componenti trasverse<sup>7</sup>. Se ora deriviamo (9.4.13) rispetto  $x^i$  abbiamo:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \delta_T^{ij}(\vec{x} - \vec{y}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \left\{ e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} i k_i \left( \delta^{ij} - \frac{k^i k^j}{|\vec{k}|^2} \right) \right\} \quad (9.4.15)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \left\{ i e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \left( k^j - \frac{k^i k^j k_i}{|\vec{k}|^2} \right) \right\} \quad (9.4.16)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \left\{ i e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} (k^j - k^j) \right\} = 0. \quad (9.4.17)$$

Possiamo quindi postulare:

$$[\Pi^i(t, \vec{x}), A^j(t, \vec{y})] = -i \delta_T^{ij}(\vec{x} - \vec{y}). \quad (9.4.18)$$

in questa definizione c'è perfetta simmetria tra  $\vec{x}$  e  $\vec{y}$ , quindi anche la derivata rispetto  $y^i$  di ambo i membri deve dare 0 e restituire:

$$[\Pi^i(t, \vec{x}), \partial_i A^j(t, \vec{y})] = 0. \quad (9.4.19)$$

Quindi, guardando (9.4.19), non abbiamo solo la condizione che  $A^0$  è un c-numero, ma anche  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$  lo è, poiché commuta con tutti i campi.

Quest'ultima osservazione elimina 2 gradi di libertà, lasciandone solo 2, che sono gli unici con significato fisico. Possiamo quindi dire che non ci sono fotoni scalari (non c'è  $A^0$ ) e ci sono solo 2 stati di polarizzazione trasversali alla direzione del moto (non c'è una polarizzazione longitudinale).

Ci potremmo ritenere soddisfatti dei risultati ottenuti, se non fosse che quello che abbiamo definito ci rovina la covarianza a vista. Potremmo giocarci ancora una carta. Possiamo ricordare che il campo  $A^\mu$  gode di una simmetria di gauge:

$$A_\mu \longrightarrow A_\mu(x) - \partial_\mu \chi(x) \quad (9.4.20)$$

con  $\chi(x)$  funzione arbitraria. Potremmo sfruttare la simmetria e definire:

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu \int_0^t d\tau A_0(\tau, \vec{x}) \quad (9.4.21)$$

in modo che si abbia  $A'_0(x) = 0$ . Prendiamo poi:

$$\vec{A}'' = \vec{A}' - \vec{\nabla} \chi \quad (9.4.22)$$

---

<sup>7</sup>Puoi vedere il capitolo 13.3 del Lancaster e Blundell [6], in cui definisce bene i proiettori longitudinali e trasversali (in 3 dimensioni):

$$P_L^{ij} = \frac{p^i p^j}{|\vec{p}|^2} \quad , \quad P_T^{ij} = \delta^{\mu\nu} - \frac{p^i p^j}{|\vec{p}|^2}. \quad (9.4.14)$$

e assumiamo che valga:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}'' = \vec{\nabla} \cdot (\vec{A}' - \vec{\nabla}\chi) = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}' - \Delta\chi = 0. \quad (9.4.23)$$

In questo modo abbiamo un nuovo campo  $A'_\mu(x)$ , che descrive la stessa fisica di  $A^\mu$  e soddisfa le stesse equazioni (e stessa  $\mathcal{L}$ ), tale per cui:

$$\begin{cases} A'_0 = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{A}' = \Delta\chi. \end{cases} \quad (9.4.24)$$

Le condizioni (9.4.24) si chiamano **gauge di radiazione**.

Dette tutte queste cose, possiamo procedere allo sviluppo di Fourier del campo elettromagnetico, con gli operatori di creazione  $\hat{a}^\dagger$  e di distruzione  $\hat{a}$ :

$$\hat{A}^\mu(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2E_k}} \sum_{\lambda=1}^2 \left( \epsilon_\lambda^\mu(k) \hat{a}_\lambda(\vec{k}) e^{-ikx} + \epsilon_\lambda^{\mu*}(k) \hat{a}_\lambda^\dagger(\vec{k}) e^{ikx} \right) \quad (9.4.25)$$

in cui notiamo che  $\lambda = 1, 2$ . I quanti del campo Elettromagnetismo, cioè le sue eccitazioni, sono i fotoni, particelle bosoniche di spin 1, a massa nulla e che possono avere 2 stati di polarizzazione trasversa. In base alle regole di commutazione (9.4.6), (9.4.7) e (9.4.18) gli operatori  $\hat{a}^\dagger$  e  $\hat{a}$  devono rispettare:

$$[\hat{a}_\lambda(\vec{k}), \hat{a}_\lambda^\dagger(\vec{k}')]=\delta_{\lambda\lambda'}\delta^3(\vec{k}-\vec{k}'). \quad (9.4.26)$$

L'hamiltoniana diagonalizzata risulta essere:

$$:\hat{H}:=\int d^3k \sum_{\lambda=1}^2 E_k \hat{a}_\lambda^\dagger(\vec{k}) \hat{a}_\lambda(\vec{k}) \quad (9.4.27)$$

dove, visto che  $m = 0$ , vale:

$$E_k = |\vec{k}|. \quad (9.4.28)$$

In analogia con l'hamiltoniana possiamo calcolare l'operatore impulso  $\vec{P}$  associato al campo EM:

$$:\vec{P}:=\int d^3x(:\vec{E}\times\vec{B}:)=\int d^3k \vec{k} \sum_{\lambda=1}^2 \hat{a}_\lambda^\dagger(\vec{k}) \hat{a}_\lambda(\vec{k}). \quad (9.4.29)$$

#### 9.4.1 Proprietà polarizzazione fotone

La prima cosa che possiamo vedere è che, dall'espressione del campo  $A^\mu$  (9.4.25), i fotoni si presentano in 2 tipologie:

$$\hat{a}_1^\dagger(\vec{k}) |0\rangle \quad (9.4.30)$$

$$\hat{a}_2^\dagger(\vec{k}) |0\rangle \quad (9.4.31)$$

che corrisponde alle 2 possibili polarizzazioni trasverse del campo Elettromagnetismo.

Possiamo trovare due proprietà sui vettori di polarizzazione  $\epsilon_\lambda^\mu(k)$  facendo la divergenza (di cui noi conosciamo già il risultato (9.3.3)) del campo  $\hat{A}^\mu(x)$ , usando il suo sviluppo in serie di Fourier:

$$\partial_\mu \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2E_k}} \sum_{\lambda=1}^2 \left( \epsilon_\lambda^\mu(k) \hat{a}_\lambda(\vec{k}) e^{-ikx} + \epsilon_\lambda^{\mu*}(k) \hat{a}_\lambda^\dagger(\vec{k}) e^{+ikx} \right) = 0 \quad (9.4.32)$$

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2E_k}} \frac{-ik_\mu}{\sqrt{2E_k}} \sum_{\lambda=1}^2 \left( \epsilon_\lambda^\mu(k) \hat{a}_\lambda(\vec{k}) e^{-ikx} - \epsilon_\lambda^{\mu*}(k) \hat{a}_\lambda^\dagger(\vec{k}) e^{+ikx} \right) = 0 \quad (9.4.33)$$

sapendo che  $A^0$  è un c-numero (quindi  $\partial_\mu A^0 = 0$ ) possiamo dire che  $\partial_\mu A^\mu = -\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$  e quindi:

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{i}{\sqrt{2E_k}} \sum_{\lambda=1}^2 \left( \vec{k} \cdot \vec{\epsilon}_\lambda \hat{a}_\lambda e^{-ikx} - \vec{k} \cdot \vec{\epsilon}_\lambda^* \hat{a}_\lambda^\dagger e^{+ikx} \right) = 0 \quad (9.4.34)$$

da cui ricaviamo:

$$\vec{k} \cdot \vec{\epsilon}_\lambda = 0 \quad (9.4.35)$$

$$\vec{\epsilon}_\lambda \cdot \vec{\epsilon}_{\lambda'} = \delta_{\lambda\lambda'}. \quad (9.4.36)$$

In particolare, la relazione (9.4.35) ci dice che la polarizzazione è sempre trasversa alla direzione di propagazione; la relazione (9.4.36) invece ci dice che i vettori di polarizzazione corrispondenti a  $\lambda = 1$  e  $\lambda = 2$  sono ortonormali.

In più, possiamo fare un'esempio delle espressioni che assumerebbero i vettori di polarizzazione in caso specifico. Consideriamo un fotone che si propaga lungo la direzione  $z$  con impulso  $k^\mu = (|\vec{k}|, 0, 0, |\vec{k}|)$ , che se lavoriamo nella base in cui la polarizzazione è circolare possiamo prendere:

$$\epsilon_{\lambda=R}^*(k) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, i, 0) \quad \longrightarrow \quad S_z = +1 \quad (9.4.37)$$

$$\epsilon_{\lambda=L}^*(k) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -i, 0) \quad \longrightarrow \quad S_z = -1 \quad (9.4.38)$$

e non ci sono fotoni con  $S_z = 0$ , perché questi corrisponderebbero ad uno stato di polarizzazione non fisico. Stati con  $S_z$  corrisponderebbero a  $\epsilon_{\lambda=3}^* = (0, 0, 0, 1)$  che è un quadri-vettore parallelo alla direzione del moto. Ovviamente con l'autovalore  $S_z$  intendiamo l'operatore di elicità (descritto nella sezione §5.7.2), che nel caso mass-less ci fornisce un'informazione sullo spin.

### 9.4.2 Propagatore del fotone

In analogia al propagatore di particella scalare e di fermione di Dirac, il propagatore del fotone è definito come:

$$i\Delta_F^{\text{Tr}}(x-y)_{\mu\nu} = \langle 0 | T[A_\mu(x)A_\nu(y)] | 0 \rangle. \quad (9.4.39)$$

Il calcolo di questo nuovo propagatore è del tutto analogo a quello già visto per la particella scalare, con le differenze che ora ci troveremo a denominatore il termine  $(k^2 + i\epsilon)$  visto che abbiamo  $m = 0$ , e a numeratore un termine generato dalla presenza dei vettori di polarizzazione che danno la corretta struttura vettoriale ad  $A^\mu$  (proprio come nel caso fermionico avevamo  $(\not{p} + m)$ ). Abbiamo:

$$i\Delta_F^{\text{Tr}}(x-y)_{\mu\nu} = i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2 + i\epsilon} \sum_{\lambda=1}^2 \epsilon_\mu^\lambda(k) \epsilon_\nu^{\lambda*}(k). \quad (9.4.40)$$

L'espressione (9.4.40) non è Lorentz invariante perché i vettori di polarizzazione sono solo trasversi<sup>8</sup>. Questo però non è un problema perché il propagatore, di per sé, non è un'osservabile, però, nei prossimi corsi, dovremo controllare che, una volta messo nei diagrammi di Feynmann, dia luogo a sezioni d'urto Lorentz invarianti (vedi le identità di Ward).

---

<sup>8</sup>Manca tra i vettori di base  $\epsilon^0 \propto (1, 0, 0, 0)$ .



## Capitolo 10

# Propagatori interagenti e teorie perturbative

Continuiamo quello che abbiamo cominciato a vedere nel capitolo §8, i cui risultati saranno chiaramente il punto di partenza ed essenziali per lo studio che faremo. Ciò che vedremo sarà l'inizio delle teorie interagenti, gli sviluppi perturbativi e come diventano i propagatori quando ci allontaniamo dalla teoria libera, vista in precedenza. Successivamente parleremo della matrice  $\hat{S}$  e di come si costruiscono e a cosa servono i diagrammi di Feynmann. I riferimenti per questa sezione sono la parte IV del Lancaster e Blundell [6] e il capitolo 4 del Peskin e Schroeder [7].

Le teorie quantistiche, ed in particolare la QFT, sono particolarmente difficili da risolvere quando si è in presenza di interazioni. Per questo ricorriamo alla teoria delle perturbazioni per ottenere dei risultati approssimati e in cui i propagatori e i diagrammi di Feynmann diventano gli strumenti fondamentali.

Abbiamo visto nel capitolo §8 come sono fatti i propagatori sia in Mecanica Quantistica non relativistica che in QFT, ed in particolare abbiamo visto come essi siano legati a funzioni di Green. Utile tenere a mente sia i risultati ottenuti in MQ, si veda la sezione §8.1.1, che quelli in QFT. Ovviamente noi abbiamo visto il caso libero, ma possiamo generalizzarli al caso di teoria interagente. Lo sche che seguiremo in questo capitolo sarà il seguente: introdurremo le interazioni (che descriveremo quantisticamente tramite la rappresentazione di interazione), arriveremo alla descrizione della matrice  $S$  di scattering ed enunceremo ed utilizzeremo il teorema di Wick; tutto questo per poi poter dare una rappresentazione diagrammatica e pittorica dei termini dello sviluppo perturbativo, che non sono altro che i diagrammi di Feynmann.

## 10.1 Teoria perturbativa in Meccanica Quantistica

Nella maggior parte dei casi non siamo in grado, o non siamo interessati, ad ottenere una soluzione esatta di un certo problema, per cui ripieghiamo sulla teoria delle perturbazioni. Generalmente abbiamo a che fare con un'hamiltoniana del tipo:

$$H = H_0 + V \quad (10.1.1)$$

in cui  $H_0$  è il termine che sappiamo risolvere esattamente, ovvero il caso libero, e  $V$  è il termine perturbativo (dunque vale  $V \ll H_0$ ), che può rappresentare un'interazione. Possiamo scrivere, utilizzando una notazione simbolica (attenzione che non è una cosa molto rigorosa scrivere in questo modo), l'equazione di Schrodinger:

$$H |\psi\rangle = E |\psi\rangle \implies (H - E) |\psi\rangle = 0 \quad (10.1.2)$$

ma conoscendo la funzione di Green dell'operatore di Schrodinger possiamo anche scrivere:

$$(H - E)G = -\mathbb{1} \quad (10.1.3)$$

in cui facciamo attenzione che  $\mathbb{1}$  rappresenta, in modo matriciale, la  $\delta^4$ . Sempre facendo molta attenzione possiamo invertire l'equazione ed ottenere il propagatore e trovare una serie perturbativa in termini del propagatore libero:

$$G = \frac{\mathbb{1}}{E - H} \quad (10.1.4)$$

$$= \frac{\mathbb{1}}{E - H_0 - V} \quad (10.1.5)$$

$$= \frac{\mathbb{1}}{(E - H_0) \left( \mathbb{1} - \frac{V}{E - H_0} \right)} \quad (10.1.6)$$

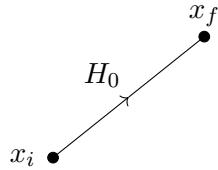
$$\sim \frac{\mathbb{1}}{E - H_0} \left( \mathbb{1} + \frac{V}{E - H_0} + \frac{V^2}{(E - H_0)^2} + \dots \right) \quad (10.1.7)$$

$$= \frac{\mathbb{1}}{E - H_0} + \frac{\mathbb{1}}{E - H_0} V \frac{\mathbb{1}}{E - H_0} + \frac{\mathbb{1}}{E - H_0} V \frac{\mathbb{1}}{E - H_0} V \frac{\mathbb{1}}{E - H_0} + \dots \quad (10.1.8)$$

e se riconosciamo che il **propagatore libero** è:

$$G_0 = \frac{\mathbb{1}}{E - H_0} \quad (10.1.9)$$

che possiamo rappresentare graficamente come una semplice linea che collega due punti dello spazio tempo, chiamati *vertici*, e rappresenta la propagazione di una particella libera da un punto iniziale ad uno finale. Vedi la figura 10.1.

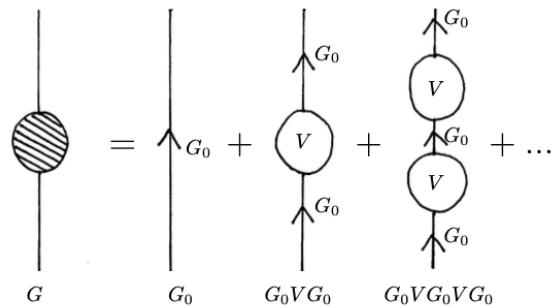


**Figura 10.1:** Rappresentazione pittorica del propagatore libero.

L'equazione (10.1.8) diventa:

$$G = G_0 + G_0 V G_0 + G_0 V G_0 V G_0 + \dots \quad (10.1.10)$$

che è quello che va sotto il nome di equazione o **serie di Dyson**. La serie (10.1.10) può essere rappresentata graficamente come mostrato in figura 10.2.



**Figura 10.2:** Rappresentazione pittorica della serie di Dyson.

Teniamo bene a mente che in tutto ciò l'unica parte risolvibile esattamente è il termine di propagatore libero  $G_0$  con  $H_0$ , mentre il pezzo con  $V$  è quello che viene associato al processo di interazione, cioè allo scattering, che altera o interrompe la propagazione. Chiamiamo:

$$G = \frac{1}{E - H_0 - V} \quad (10.1.11)$$

**full propagator** o propagatore d'interazione.

Notiamo che in figura 10.2 a sinistra dell'uguale la palla è piena, il che significa che al suo interno mettiamo tutta l'informazione riguardo l'interazione del sistema, mentre tutte le palle che si trovano a destra dell'uguale sono vuote, proprio a significare che non contengono tutta l'informazione di  $V$ , ma solamente una parte, ossia solo uno specifico termine dello sviluppo perturbativo. Prendiamo ad esempio il terzo termine della figura, che cosa ci sta dicendo? Semplice, ci dice che la particella si propaga liberamente descritta da  $G_0$ , incontra un'interazione  $V$ , continua la sua propagazione

con  $G_0$ , ricontra  $V$  e infine se ne va liberamente con il propagatore libero. Quindi, l'interpretazione che diamo allo sviluppo (10.1.10) è il seguente: l'ampiezza di probabilità che abbiamo che la particella si propaghi da un punto iniziale ad un punto finale, ossia  $G$ , è data dalla sovrapposizione lineare dell'ampiezza che la particella si sposti liberamente dal punto iniziale ad un punto intermedio, in cui incontra un'interazione, e che poi prosegua liberamente (ovvero il termine  $G_0 V G_0$ ), più l'ampiezza di probabilità che la propagazione sia interrotta da due termini di interazione ( $G_0 V G_0 V G_0$ ), e così via.

Dunque, l'algebra delle funzioni di Green ci permette, non solo di dare una descrizione visiva estremamente utile ed efficace del propagatore, in termini di sviluppo perturbativo, ma anche di avere una immediata visualizzazione del processo fisico.

Quello che abbiamo appena visto sta alla base di come verranno costruiti i diagrammi di Feynmann.

## 10.2 Propagatore in Teoria Quantistica dei Campi

Lo spazio di Fock visto nell'Appendice F, insieme agli operatori di campo, ci permettono di descrivere la realtà a partire dallo stato di vuoto, in cui, agendo con gli operatori  $\hat{a}$  e  $\hat{a}^\dagger$  possiamo creare e distruggere particella creando eccitazioni del campo stesso. Ovviamente possiamo creare e distruggere anche antiparticelle. Il problema che sorge quando passiamo dalla MQ alla QFT è che prima potevamo descrivere l'evoluzione delle particelle utilizzando la funzione d'onda, ma ora che le funzioni d'onda non sono più utilizzabili abbiamo bisogno di altri oggetti che contengano le informazioni sulle eccitazioni del sistema. Questi oggetti sono ampiezze di propagatori denotate dalla lettera  $G$ . Abbiamo visto che  $G$  è direttamente collegato con le funzioni di Green della teoria. I propagatori descrivono il destino delle particelle in una teoria di campo.

Le teorie libere, in cui  $V = 0$ , sono le più semplici da trattare e per esse utilizziamo la quantizzazione canonica, che ci permette di descrivere il sistema in termini di vuoto, ad esempio creiamo una particella di impulso fissato come:

$$\hat{a}(\vec{p}) |0\rangle = |\vec{p}\rangle . \quad (10.2.1)$$

Per le teorie interagenti, in cui  $V$  non è nullo, il tutto è leggermente più complicato poiché contengono termini in più, altamente non banali, che provengono dalla presenza di  $V$  e non permettono l'utilizzo della quantizzazione canonica. Per queste teorie, come vedremo, dovremo utilizzare gli integrali di cammino. In queste teorie lo stato fondamentale non è lo stato di vuoto  $|0\rangle$ , ma uno stato composito  $|\Omega\rangle$ . Però, a differenza di quanto succedeva con la teoria libera, in cui agendo con  $\hat{a}^\dagger$  sul vuoto creavamo uno stato di singola

particella con impulso fissato  $\vec{p}$ , ora, matematicamente funziona uguale:

$$\hat{a}(\vec{p}) |\Omega\rangle = |\vec{p}\rangle \quad (10.2.2)$$

ma sta volta lo stato  $|\vec{p}\rangle$  non è di singola particella, ma è generalmente una sovrapposizione di (infiniti) autostati dell'impulso, ossia una sovrapposizione di molte particelle, i cui impulsi sommano a  $\vec{p}$ .

Vista la difficoltà delle teorie interagenti, ricorriamo a metodi perturbativi proprio come facevamo in Meccanica Quantistica.

### 10.2.1 Propagatore per la teoria di campo interagente

Per costruire il propagatore nel caso interagente facciamo praticamente la stessa cosa che abbiamo fatto per il caso libero.

Consideriamo un campo generico, che scriviamo con  $\hat{\phi}$ , ma che non per forza scalare. Prendiamo lo stato fondamentale  $|\Omega\rangle$ , introduciamo una particella-test nel punto  $\vec{y}$  all'istante  $t_y$  ( $y^0$ ), la facciamo evolvere nel tempo ed interagire con il sistema (causando l'eccitazione del sistema e turbandolo anche in modo particolarmente complesso), al tempo  $t_x$  ( $x^0$ ) quando la particella si trova in  $\vec{x}$  la rimuoviamo, per finire ci possiamo chiedere quale sia l'ampiezza di probabilità che dopo aver fatto questo esperimento il sistema sia rimasto nello stato di partenza  $|\Omega\rangle$ . Scriviamo il propagatore come:

$$G^+(x, y) = \theta(x^0 - y^0) \langle \Omega | \hat{\phi}(x) \hat{\phi}^\dagger(y) | \Omega \rangle. \quad (10.2.3)$$

Naturalmente questa ampiezza di probabilità dipenderà dai complicati dettagli dell'interazione  $V$ . Ovviamente come abbiamo detto per il caso libero dobbiamo considerare anche il contributo di antiparticella e considerare dunque il prodotto T-ordinato. La definizione corretta, che considera sia il contributo di particelle che di antiparticelle, e che va sotto il nome di **propagatore di Feynmann** è:

$$G(x, y) = \langle \Omega | T \hat{\phi}(x) \hat{\phi}^\dagger(y) | \Omega \rangle \quad (10.2.4)$$

$$= \theta(x^0 - y^0) \langle \Omega | \hat{\phi}(x) \hat{\phi}^\dagger(y) | \Omega \rangle \pm \theta(y^0 - x^0) \langle \Omega | \hat{\phi}^\dagger(y) \hat{\phi}(x) | \Omega \rangle \quad (10.2.5)$$

in cui il segno + sarà per i bosoni e il - per i fermioni. Il segno  $T$  è il simbolo di ordinamento temporale (di Wick) e garantisce la causalità, ossia, garantisce che particelle e antiparticelle siano prima create e poi distrutte, ma mai il viceversa.

Infatti, ciascun termine del propagatore di Feynmann rappresenta uno dei due contributi. Il primo vale per  $x^0 > y^0$  e rappresenta la creazione e la successiva distruzione di una particella, poiché  $\hat{\phi}^\dagger \propto \hat{a}^\dagger e^{+ipx} + \hat{b} e^{-ipx}$  e quindi agendo su  $|\Omega\rangle$  crea una particella di stato  $|p\rangle$  mentre  $\hat{b} |\Omega\rangle = 0$ ,

successivamente agiamo con  $\hat{\phi}$  su  $|p\rangle$ , ma essendo  $\hat{\phi} \propto \hat{a}e^{ipx} + \hat{b}^\dagger e^{-ipx}$  avremo la distruzione della particella, ma anche la creazione di un'antiparticella  $|p\rangle_b$  che però chiudendo il panino con  $\langle\Omega|$  da 0 essendo ortogonali.

Seguendo lo stesso ragionamento, quindi vedendo come agisce  $\hat{\phi}^\dagger \hat{\phi}$  sullo stato fondamentale, vediamo che nel caso  $y^0 > x^0$  il propagatore corrisponde alla creazione e distruzione di un'antiparticella.

Spesso ci troveremo a lavorare con teorie che non coinvolgono solamente 2 particelle, ma molte, in generale  $n$ . Facciamo un attimo chiarezza sulla notazione.

Quando lavoriamo con una singola particella parliamo di *single particle propagator* oppure *two point Green's function* e indichiamo:

$$G^{(2)}(x, y) = \langle \Omega | T\hat{\phi}(x)\hat{\phi}^\dagger(y) | \Omega \rangle . \quad (10.2.6)$$

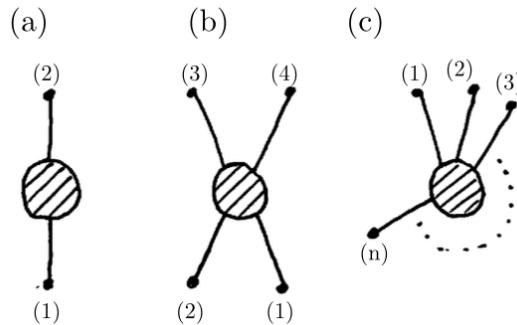
Il numero due sta a significare che abbiamo una singola particella che viene prima creata e poi annichilita, e due è la somma di "gambe" che entrano nel sistema (la palla) e che escono. Possiamo anche avere più punti (vertici) per il nostro propagatore. Ad esempio se abbiamo:

$$G^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \langle \Omega | T\hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2)\hat{\phi}^\dagger(x_3)\hat{\phi}^\dagger(x_4) | \Omega \rangle \quad (10.2.7)$$

parliamo di *four point propagator*, e se vediamo la figura 10.3 possiamo vedere che corrisponde ad una situazione in cui 2 particelle entrano nella regione di interazione e due escono.

Possiamo scrivere in generale l' *n-point propagator*:

$$G^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \langle \Omega | T\hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2)\dots\hat{\phi}^\dagger(x_n) | \Omega \rangle . \quad (10.2.8)$$



**Figura 10.3:** Raffigurazione propagatori ad  $n$  punti.

### 10.3 La matrice $S$

Lo studio e l'utilizzo della matrice di scattering  $S$  ci permette di studiare teorie interagenti, che non sono risolvibili esattamente, attraverso uno sviluppo perturbativo. La teoria che studieremo si rifà molto alla teoria perturbativa della MQ e ritroveremo lo sviluppo in serie di Dyson, ma sta volta in una veste consona alla QFT.

Partiamo, come al solito in una teoria interagente, con l'hamiltoniana del sistema fatta come:

$$H = H_0 + H' \quad (10.3.1)$$

in cui  $H_0$  è l'hamiltoniana libera, indipendente dal tempo e che sappiamo risolvere esattamente, mentre  $H'$  è l'hamiltoniana di interazione, eventualmente dipendente dal tempo e che agisce solo per un intervallo di tempo limitato. In un prototipo di un esperimento di scattering iniziamo con particelle ben separate e non interagenti. Ad un certo punto spariamo le particelle l'una contro l'altra e le facciamo interagire, anche in un modo complicato, ma sicuramente dall'Hamiltoniana del mondo reale  $H$ . Le particelle successivamente si allontaneranno l'una dall'altra e finiranno, nello stato finale per essere ben separate. La prima cosa da dire su questo è che le complicate interazioni del mondo reale rendono questo processo impossibile da analizzare. La seconda è che la teoria perturbativa, insieme al fatto che consideriamo le particelle prima dell'urto molto bene separate (quindi libere e governate da  $H_0$ ), permette di fare i conti e risolvere il problema.

Il nostro problema è che se proviamo a lavorare nella rappresentazione di Heisembreg non possiamo nemmeno scrivere espressioni semplici per gli operatori dipendenti dal tempo, figuriamoci calcolare un propagatore. La strada che dobbiamo percorrere è quella di metterci in una situazione in cui l'evoluzione temporale e la dipendenza da  $t$  non sono più un problema e dopodiché sviluppare in serie gli oggetti che avremo per le mani.

Cominciamo ad immaginare un mondo senza interazioni complicate. Cioè, cominciamo a considerare la parte di  $H$ , meno complicata, ossia  $H_0$  che descrive un mondo semplice di particelle non interagenti, e lasciamo un secondo  $H'$ , che descrive le complicate interazioni, fuori dalla discussione. Definiamo degli stati talmente lontani nel tempo che non vedono l'interazione e che sono governati solo da  $H_0$  (motivo per cui non evolvono nel tempo):

$$|\psi\rangle_{\text{in}}^{\text{non int}} = |p_1 p_2\rangle_{\text{in}} \quad (10.3.2)$$

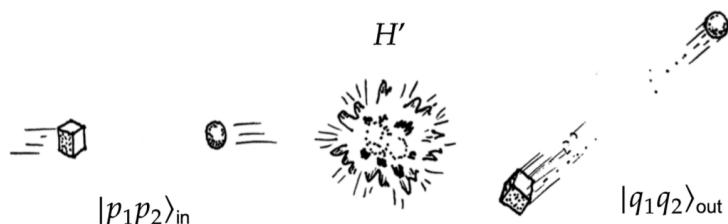
$$|\psi\rangle_{\text{out}}^{\text{non int}} = |q_1 q_2\rangle_{\text{out}} \quad (10.3.3)$$

in cui (10.3.2) sono gli autostati di  $H_0$  a  $t = -\infty$  e (10.3.3) gli autostati a  $t = +\infty$ . Possiamo a questo punto definire l'ampiezza di scattering del processo come:

$$\mathcal{A} = \langle q_1 q_2 | \hat{S} | p_1 p_2 \rangle_{\text{in}}^{\text{non int}} \quad (10.3.4)$$

in cui consideriamo gli stati iniziali e finali molto lontani dall'interazione, quindi liberi, e mettiamo tutta l'informazione sull'hamiltoniana del mondo reale  $H$  in  $\hat{S}$ . Dunque,  $\hat{S}$  gioca il ruolo di un operatore di evoluzione temporale (poiché contiene l'informazione dell'interazione) e ci dice come evolve il sistema da un certo stato *in* in uno *out*.

Possiamo rappresentare graficamente tutto ciò che abbiamo detto grazie alla figura 10.4.



**Figura 10.4:** Raffigurazione scattering di due particelle.

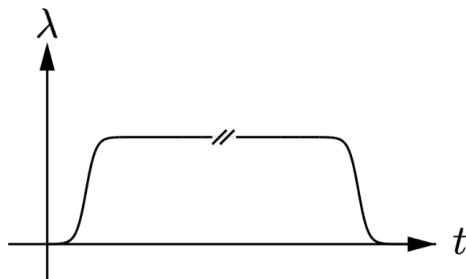
### 10.3.1 Definizione della matrice $S$

Ovviamente, come abbiamo già spoilerato, esiste un modo per sviluppare in modo perturbativo l'espressione (10.3.4), ma per farlo abbiamo bisogno di rinfrescare la memoria sul tipo di rappresentazione più conveniente da utilizzare in QFT, ovvero la rappresentazione di interazione. Ho scritto l'Appendice H in proposito, quindi prima di continuare questo capitolo vai a ripassare quella parte.

Chiaramente per poter sviluppare un oggetto prima dobbiamo definirlo decentemente. Per poter definire la matrice  $S$  dobbiamo capire perché abbiamo detto che la rappresentazione di interazione è molto importante per la QFT. Il punto importante è che la parte di interazione dell'hamiltoniana è zero all'inizio e alla fine del problema, visto che ci mettiamo in autostati di  $H_0$ , ovvero (10.3.2) e (10.3.3). Infatti, immaginiamo che la parte di interazione dell'hamiltoniana  $H'$  si accenda e si spenga lentamente e senza intoppi, come raffigurato in figura 10.5. Ricordiamo che  $H'$  evolve nel tempo e la sua evoluzione temporale la abbiamo chiamata  $H_I$ . Quando  $H_I = 0$  (poiché  $H' = 0$ ) abbiamo solo la rappresentazione di Heisenberg per la parte libera dell'hamiltoniana  $H_0$  e proprio perché abbiamo autostati di  $H_0$  possiamo costruirli a partire dallo stato di vuoto  $|0\rangle$  applicando gli operatori di creazione (o distruzione), cosa che ci viene particolarmente comodo e ci piace.

Possiamo dare una rappresentazione funzionale dell'hamiltoniana di interazione come:

$$\hat{H}_I(t) = \lambda(t)\hat{H}'. \quad (10.3.5)$$



**Figura 10.5:** Rappresentazione funzionale di  $H_I$ .

Detto in altre parole, gli stati evolvono nel tempo solo durante il periodo in cui avviene l'interazione, cioè quando  $H_I \neq 0$ ; al di fuori di questo intervallo di tempo gli stati rimangono "congelati" (sono stati descritti con Heisenberg, dunque non evolvono nel tempo se non con  $H_I$ ). Gli operatori (come i campi  $\phi$ ) evolvono sempre solo con  $H_0$  (anche quando  $H' \neq 0$ ). Dunque, ricordando l'equivalenza di tutte le rappresentazioni scriviamo:

$$\mathcal{A} = \underset{\text{out}}{\text{non int}} \langle q_1, q_2 | \hat{S} | p_1 p_2 \rangle_{\text{in}}^{\text{non int}} \quad (10.3.6)$$

$$= \underset{\text{real world}}{\text{out}} \langle \phi | \hat{S} | \psi \rangle_{\text{real world}}^{\text{in}} \quad (10.3.7)$$

$$= \underset{\text{real world}}{\text{out}} \langle \phi | \psi \rangle_{\text{real world}}^{\text{in}} \quad (10.3.8)$$

$$= \langle \phi_I(0) | \psi_I(0) \rangle \quad (10.3.9)$$

$$= \langle \phi_I(+\infty) | \hat{U}_I(+\infty, 0) \hat{U}_I(0, -\infty) | \psi_I(-\infty) \rangle \quad (10.3.10)$$

$$= \langle \phi_I(+\infty) | \hat{U}_I(+\infty, -\infty) | \psi_I(-\infty) \rangle \quad (10.3.11)$$

$$= \underset{\text{real world}}{\text{out}} \langle \phi | \hat{U}_I(+\infty, -\infty) | \psi \rangle_{\text{real world}}^{\text{in}} \quad (10.3.12)$$

dunque, deduciamo che:

$$\hat{S} = \hat{U}_I(t, -t) \quad , \quad \text{con } t \rightarrow +\infty \quad (10.3.13)$$

ossia,  $\hat{S}$  è l'operatore di evoluzione temporale, nella rappresentazione di interazione, che lega gli istanti  $t = -\infty$  e  $t = +\infty$ .

### 10.3.2 Sviluppo perturbativo della matrice $S$

Discorsi riguardanti l'operatore di evoluzione temporale vengono fatti anche nella sezione §10.6.4, conviene per completezza vedere anche quella. L'operatore di evoluzione temporale, che per necessità di conservazione della probabilità dev'essere unitario  $\hat{U}(t, t) = \mathbb{1}$ , sappiamo evolvere secondo l'equazione

di Schrodinger:<sup>1</sup>

$$i \frac{d}{dt_2} \hat{U}(t_2, t_1) = \hat{H}_I \hat{U}(t_2, t_1). \quad (10.3.16)$$

Però attenzione, ci sono due problemi non tanto banali. Il primo è che  $\hat{H}_I(t)$  non è un semplice numero e non possiamo scrivere la soluzione di (10.3.16) come:

$$e^{-i \int_{t_1}^{t_2} dt H_I(t)}. \quad (10.3.17)$$

Il secondo problema che abbiamo è che  $\hat{H}_I(t)$  non commuta con se stessa a tempi diversi:

$$[\hat{H}_I(t_1), \hat{H}_I(t_2)] \neq 0 \quad (10.3.18)$$

dipendendo dal tempo in modo non banale. La soluzione a questi nostri problemi viene dall'introduzione dell'operatore di ordinamento temporale  $T$ , infatti, all'interno di un prodotto T-ordinato tutti gli operatori commutano, così come succede con il normal ordering. Definiamo quindi:

$$\hat{U}_I(t_2, t_1) = T \left[ e^{-i \int_{t_1}^{t_2} dt H_I(t)} \right] \quad (10.3.19)$$

che va sotto il nome di *sviluppo di Dyson dell'operatore di evoluzione temporale*, nella rappresentazione di interazione. Se ora reintroduciamo la densità hamiltoniana possiamo scrivere:

$$\hat{H}_I(t) = \int d^3x \hat{\mathcal{H}}_I(\vec{x}) \implies \int_{-\infty}^{+\infty} dt \hat{H}_I(t) = \int d^4x \hat{\mathcal{H}}_I(x^\mu) \quad (10.3.20)$$

che messa insieme al ricordo che la matrice  $\hat{S}$  è l'operatore  $\hat{U}(+\infty, -\infty)$ , allora possiamo ottenere:

$$\hat{S} = T \left[ e^{-i \int d^4x \hat{\mathcal{H}}_I(x)} \right] \quad (10.3.21)$$

che va sotto il nome di **sviluppo di Dyson della matrice  $S$** . L'espressione (10.3.21) è una scrittura simbolica particolarmente bella esteticamente, ma poco utile da punto di vista pratico. La relazione (10.3.21) diventa utile nel momento in cui la sviluppiamo in serie (come per tutti gli operatori definiti tramite esponenziali):

$$\hat{S} = T \left[ \mathbb{1} - i \int d^4z \hat{\mathcal{H}}_I(z) + \frac{(-i)^2}{2!} \int d^4y d^4w \hat{\mathcal{H}}_I(y) \hat{\mathcal{H}}_I(w) + \dots \right] \quad (10.3.22)$$

---

<sup>1</sup>Facilmente dimostrabile mettendosi nella rappresentazione di interazione:

$$i \frac{d}{dt_2} |\psi_I(t_2)\rangle = \hat{H}_I |\psi_I(t_2)\rangle \implies i \frac{d}{dt_2} \hat{U}(t_2, t_1) |\psi(t_1)\rangle = \hat{H}_I \hat{U}(t_2, t_1) |\psi(t_1)\rangle \quad (10.3.14)$$

$$\implies i \frac{d}{dt_2} \hat{U}(t_2, t_1) = \hat{H}_I \hat{U}(t_2, t_1). \quad (10.3.15)$$

che però attenzione è uno sviluppo valido solamente quando il termine  $\hat{\mathcal{H}}_I$  è piccolo rispetto l'hamiltoniana totale  $\hat{\mathcal{H}}$ , e solo se  $\hat{\mathcal{H}}_I(x)$  è non nulla solo su un piccolo range.

Notiamo che nei termini in cui compare  $\hat{\mathcal{H}}$  più volte, abbiamo un integrale sulle corrispondenti coordinate di ciascuna densità. Per questo, visto che  $\hat{\mathcal{H}}_I$  è un'interazione attiva solo su piccoli intervalli, è ragionevole pensare che i termini con un numero elevato di ricorrenze di  $\hat{\mathcal{H}}_I$  siano soppressi rispetto ai termini in cui  $\hat{\mathcal{H}}_I$  compare solo una volta, o due etc.

### 10.3.3 Teorema di Wick

Vediamo ora uno dei teoremi fondamentali che ci permettono di fare effettivamente i calcoli e ci permette di arrivare ai diagrammi di Feynmann. Dal momento che gli stati iniziali e finali, nella rappresentazione di interazione, sono autostati di  $H_0$ , possono essere costruiti agendo con gli operatori di creazione e distruzione sullo stato di vuoto  $|0\rangle$ . Allora, per calcolare le ampiezze di scattering  ${}_{\text{out}}^{\text{non int}} \langle \phi | \psi \rangle_{\text{in}}^{\text{non int}}$  ci aspettiamo di dover calcolare, in generale, oggetti del tipo:

$$\langle 0 | T[\hat{A}\hat{B}\hat{C} \dots \hat{Z}] | 0 \rangle \quad (10.3.23)$$

cioè, oggetti che sono valori di aspettazione sul vuoto del prodotto temporalmente ordinato di una catena di operatori  $(\hat{A}\hat{B}\hat{C} \dots \hat{Z})$ , che non saranno altro che operatori  $\hat{a}$  e  $\hat{a}^\dagger$ . Siamo certi di questo poiché in  $\hat{S}$  è contenuta l'interazione  $\hat{\mathcal{H}}_I$ , che è data dal prodotto di campi, che possiamo individuare dai diagrammi di Feynmann. Conti tipo (10.3.23) sono estremamente complicati, ma il teorema di Wick ci viene in aiuto mettendo in relazione il VEV (vacuum expectation value) del prodotto T-ordinato con quello del prodotto normal ordered, il quale è più semplice da trattare in quanto è sempre nullo.<sup>2</sup>

Prima di enunciare il teorema dobbiamo capire di cosa si occupa e che oggetti utilizza. Per prima cosa rendiamoci conto che possiamo espandere un qualsiasi operatore di campo nella sua parte di creazione e di distruzione:

$$\hat{\phi} = \hat{\phi}^- + \hat{\phi}^+ \quad , \quad \hat{\phi}^- |0\rangle = 0 \quad \langle 0 | \hat{\phi}^+ = 0. \quad (10.3.24)$$

Il teorema di Wick utilizza delle quantità che chiamiamo contrazioni, per capire cosa sono facciamo un esempio. Prendiamo due operatori di campo, che chiamiamo  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$ , e facciamone il prodotto:

$$\hat{A}\hat{B} = (\hat{A}^+ + \hat{A}^-)(\hat{B}^+ + \hat{B}^-) = \hat{A}^+\hat{B}^+ + \hat{A}^-\hat{B}^- + \hat{A}^+\hat{B}^- + \hat{A}^-\hat{B}^+ \quad (10.3.25)$$

e possiamo anche calcolare il prodotto normal-ordered dei due operatori:

$$N[\hat{A}\hat{B}] = \hat{A}^+\hat{B}^+ + \hat{A}^-\hat{B}^- + \hat{A}^+\hat{B}^- + \hat{B}^+\hat{A}^-. \quad (10.3.26)$$

---

<sup>2</sup>Ricorda che l'ordinamento normale pone gli operatori di annichilazione a destra e gli operatori di creazione a sinistra, e quindi questo VEV è identicamente zero poiché  $\hat{a}|0\rangle = 0$ .

Possiamo facilmente notare che l'unica differenza tra (10.3.25) e (10.3.26) è solo l'ordine degli ultimi due operatori nella somma, per questo motivo la loro differenza da:

$$\hat{A}\hat{B} - N[\hat{A}\hat{B}] = [\hat{A}^-, \hat{B}^+]. \quad (10.3.27)$$

Però, presi due campi  $\hat{A}(x)$  e  $\hat{B}(y)$ , noi possiamo sempre scriverci il loro prodotto T-ordinato:

$$T[\hat{A}(x)\hat{B}(y)] = \begin{cases} \hat{A}(x)\hat{B}(y) & x^0 > y^0 \\ \hat{B}(y)\hat{A}(x) & x^0 < y^0 \end{cases} \quad (10.3.28)$$

e possiamo notare la quantità:

$$T[\hat{A}(x)\hat{B}(y)] - N[\hat{A}(x)\hat{B}(y)] = \begin{cases} [\hat{A}^-(x), \hat{B}^+(y)] & x^0 > y^0 \\ [\hat{B}^-(y), \hat{A}^+(x)] & x^0 < y^0. \end{cases} \quad (10.3.29)$$

Il punto del discorso è che il valore di aspettazione sul vuoto di (10.3.29) si riduce semplicemente al valore di aspettazione del prodotto T-ordinato, visto che il VEV di un prodotto normal-ordered è nullo, dunque, possiamo scrivere in modo del tutto generale (e soprattutto giustificato):

$$\begin{aligned} \langle 0 | (T[\hat{A}(x)\hat{B}(y)] - N[\hat{A}(x)\hat{B}(y)]) | 0 \rangle &= \langle 0 | T[\hat{A}(x)\hat{B}(y)] | 0 \rangle \\ &= \begin{cases} \langle 0 | [\hat{A}^-(x), \hat{B}^+(y)] | 0 \rangle & x^0 > y^0 \\ \langle 0 | [\hat{B}^-(y), \hat{A}^+(x)] | 0 \rangle & x^0 < y^0. \end{cases} \end{aligned} \quad (10.3.30)$$

Possiamo definire, in modo generico, la quantità (10.3.29) come una **contrazione**, che indichiamo con:

$$\overline{\hat{A}\hat{B}} = T[\hat{A}\hat{B}] - N[\hat{A}\hat{B}] \quad (10.3.31)$$

che è semplicemente un numero (in realtà un c-numero), dal momento che con la relazione (10.3.29) abbiamo visto essere semplicemente un commutatore, che avendo a che fare solo con operatori di creazione e distruzione è al più una  $\delta$  di Kronecker. Possiamo scrivere:

$$\overline{\hat{A}\hat{B}} = \overline{\hat{A}\hat{B}} \langle 0 | 0 \rangle = \langle 0 | \overline{\hat{A}\hat{B}} | 0 \rangle = \langle 0 | T[\hat{A}\hat{B}] | 0 \rangle. \quad (10.3.32)$$

Utilizzando la relazione (10.3.31) possiamo scrivere:

$$T[\hat{A}\hat{B}] = N[\hat{A}\hat{B}] + \overline{\hat{A}\hat{B}} = N[\hat{A}\hat{B} + \overline{\hat{A}\hat{B}}] \quad (10.3.33)$$

che è una versione a due operatori del teorema di Wick. Possiamo enunciare:

**Teorema 3 (di Wick).** Vale, per una generica stringa di operatori, la relazione:

$$T[\hat{A}\hat{B}\hat{C}\dots\hat{Z}] = N[\hat{A}\hat{B}\hat{C}\dots\hat{Z}] + N[\hat{A}\hat{B}\hat{C}\dots\hat{Z} + \dots] \quad (10.3.34)$$

$$= N\left[\hat{A}\hat{B}\hat{C}\dots\hat{Z} + \underset{\text{contrazioni di } \hat{A}\hat{B}\hat{C}\dots\hat{Z}}{\text{tutte le possibili}}\right]. \quad (10.3.35)$$

Dalla relazione (10.3.35) cominciamo già a vedere che se facciamo il valore di aspettazione sul vuoto del prodotto T-ordinato, allora sopravvivono solo i termini con tutti i campi contratti (in tutti i modi possibili), poiché altrimenti avremmo i valori di aspettazione di una cosa tipo:

$$N[\hat{A}\hat{B}\hat{C}\hat{D}] = \hat{A}\hat{B} N[\hat{C}\hat{D}] \quad (10.3.36)$$

e come sappiamo il valore di aspettazione di un prodotto normal-ordered da zero. Conseguenza di ciò è che sono non nulli solamente i VEV dei prodotti T-ordinati di un numero pari di operatori.

Proviamo a vedere l'applicazione del teorema di Wick per 4 campi:

$$\begin{aligned} T[\hat{A}\hat{B}\hat{C}\hat{D}] &= N[\hat{A}\hat{B}\hat{C}\hat{D}] + N[\hat{A}\hat{B}\hat{C}\hat{D}] + N[\hat{A}\hat{B}\hat{C}\hat{D}] + N[\hat{A}\hat{B}\hat{C}\hat{D}] + \\ &\quad + N[\hat{A}\hat{B}\hat{C}\hat{D}] + N[\hat{A}\hat{B}\hat{C}\hat{D}] + N[\hat{A}\hat{B}\hat{C}\hat{D}] + N[\hat{A}\hat{B}\hat{C}\hat{D}] + \\ &\quad + N[\hat{A}\hat{B}\hat{C}\hat{D}] + N[\hat{A}\hat{B}\hat{C}\hat{D}] \quad (10.3.37) \end{aligned}$$

calcoliamo il valore di aspettazione sul vuoto:

$$\begin{aligned} \langle 0 | T[\hat{A}\hat{B}\hat{C}\hat{D}] | 0 \rangle &= \langle 0 | N[\hat{A}\hat{B}\hat{C}\hat{D}] | 0 \rangle + \\ &\quad + \langle 0 | N[\hat{A}\hat{B}\hat{C}\hat{D}] | 0 \rangle + \langle 0 | N[\hat{A}\hat{B}\hat{C}\hat{D}] | 0 \rangle \quad (10.3.38) \end{aligned}$$

utilizzando la definizione di contrazione (10.3.31):

$$\begin{aligned} \langle 0 | T[\hat{A}\hat{B}\hat{C}\hat{D}] | 0 \rangle &= \langle 0 | T[\hat{A}\hat{B}\hat{C}\hat{D}] | 0 \rangle + \\ &\quad + \langle 0 | T[\hat{A}\hat{B}\hat{C}\hat{D}] | 0 \rangle + \langle 0 | T[\hat{A}\hat{B}\hat{C}\hat{D}] | 0 \rangle \quad (10.3.39) \end{aligned}$$

che possiamo anche riscrivere, utilizzando il teorema di Wick, come:

$$\begin{aligned} \langle 0 | T[\hat{A}\hat{B}\hat{C}\hat{D}] | 0 \rangle &= \langle 0 | T[\hat{A}\hat{B}] | 0 \rangle \langle 0 | T[\hat{C}\hat{D}] | 0 \rangle + \\ &\quad + \langle 0 | T[\hat{A}\hat{C}] | 0 \rangle \langle 0 | T[\hat{B}\hat{D}] | 0 \rangle + \langle 0 | T[\hat{A}\hat{D}] | 0 \rangle \langle 0 | T[\hat{B}\hat{C}] | 0 \rangle. \quad (10.3.40) \end{aligned}$$

Possiamo notare una cosa molto interessante, se al posto di prendere 4 operatori generici, prendiamo 4 campi scalari  $\hat{\phi}$  allora otteniamo:

$$\begin{aligned} \langle 0 | T[\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)\hat{\phi}(z)\hat{\phi}(w)] | 0 \rangle &= \langle 0 | T[\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)] | 0 \rangle \langle 0 | T[\hat{\phi}(z)\hat{\phi}(w)] | 0 \rangle + \\ &+ \langle 0 | T[\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(z)] | 0 \rangle \langle 0 | T[\hat{\phi}(y)\hat{\phi}(w)] | 0 \rangle + \\ &+ \langle 0 | T[\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(w)] | 0 \rangle \langle 0 | T[\hat{\phi}(y)\hat{\phi}(z)] | 0 \rangle \quad (10.3.41) \end{aligned}$$

che, ricordando le definizioni di propagatore di Feynmann per campo scalare (8.2.33), diventa:

$$\begin{aligned} \langle 0 | T[\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)\hat{\phi}(z)\hat{\phi}(w)] | 0 \rangle &= \Delta(x-y)\Delta(z-w) + \\ &+ \Delta(x-z)\Delta(y-w) + \Delta(x-w)\Delta(y-z) \quad (10.3.42) \end{aligned}$$

in cui vediamo bene che tutto il formalismo che stiamo analizzando tramite il teorema costruisce in automatico un qualcosa di quantistico, poiché dando come risultati dei propagatori, ci sta semplicemente dicendo che il nostro sistema si propaga in tutti i modi possibili, essendo una combinazione lineare di tutti i possibili propagatori.

Per concludere possiamo scrivere l'espressione del teorema di Wick in modo più generico possibile per una stringa arbitraria di operatori:

$$\begin{aligned} \langle 0 | T[\hat{A}\hat{B}\hat{C}\dots\hat{Z}] | 0 \rangle &= \langle 0 | T[\hat{A}\hat{B}] | 0 \rangle \langle 0 | T[\hat{C}\hat{D}] | 0 \rangle \dots \langle 0 | T[\hat{Y}\hat{Z}] | 0 \rangle + \\ &+ \langle 0 | T[\hat{A}\hat{C}] | 0 \rangle \langle 0 | T[\hat{B}\hat{D}] | 0 \rangle \dots \langle 0 | T[\hat{Y}\hat{Z}] | 0 \rangle + \\ &+ \text{tutte le possibili combinazioni.} \quad (10.3.43) \end{aligned}$$

che detto a parole è: il valore di aspettazione sul vuoto di un prodotto di  $n$  operatori è dato dalla somma dei prodotti dei VEV di tutti i possibili prodotti T-ordinati di coppie di operatori.

## 10.4 Diagrammi di Feynmann

Come avremo modo di verificare, il teorema di Wick, che abbiamo studiato, sarà uno strumento essenziale, non solo per espandere la matrice  $\hat{S}$  nella teoria delle perturbazioni, ma anche, di conseguenza, nella formulazione e studio dei diagrammi di Feynmann.

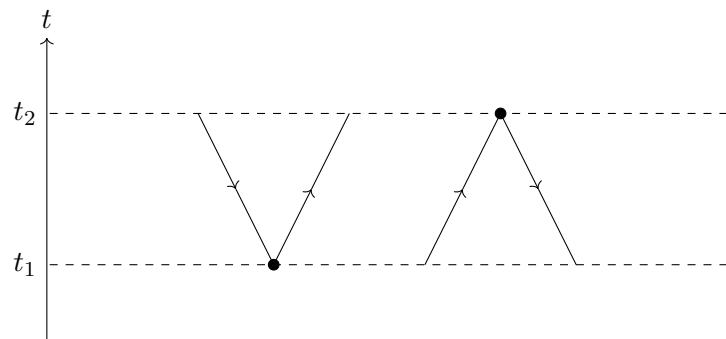
Uno dei più grandi successi di Richard Feynman fu la sua invenzione di (quelli che ora vengono chiamati) **diagrammi di Feynman**. Si tratta di disegni che rappresentano i termini nell'espansione perturbativa della matrice  $\hat{S}$ . Avremo modo di vedere, che i diagrammi di Feynman esistono in diverse forme correlate, ma le più semplici di queste sono semplicemente diagrammi

dello spazio-tempo che descrivono la traiettoria<sup>3</sup> delle particelle. Immaginiamo di mettere l'asse del tempo verso in alto e rappresentiamo le particelle mediante linee con una freccia che va nella direzione del tempo, mentre le antiparticelle sono rappresentate da linee con frecce che vanno nella direzione opposta, ossia, indietro nel tempo. Possiamo guardare la figura 10.6.



**Figura 10.6**

Possiamo disegnare coppie di particelle e antiparticelle create in un dato momento o distrutto in un altro momento. Vedi la figura 10.7.



**Figura 10.7**

Le cose ovviamente le possiamo complicare a piacere, ad esempio, nella figura 10.8 arriviamo con una particella, in un certo istante  $t_1$  creiamo una coppia particella-antiparticella ed in un'istante successivo  $t_2$  la prima particella viene annichilita dall'antiparticella ed in un'uscita abbiamo solo la seconda particella.

Come abbiamo già detto le interazioni tra le particelle le descriviamo tramite lo sviluppo di Dyson della matrice di scattering  $\hat{S}$ , ovvero:

$$\hat{S} = T \left[ e^{-i \int d^4z \mathcal{H}_I(z)} \right] \quad (10.4.1)$$

in cui è vero che compare  $\mathcal{H}_I(z)$  che rappresenta l'interazione in un punto  $z$  preciso dello spazio-tempo, ma è altrettanto vero che è integrata in  $d^4z$ , dunque l'ampiezza in realtà tiene conto del fatto che l'interazione possa avvenire in qualunque punto dello spazio e del tempo.

---

<sup>3</sup>Ricorda sempre che parlare di traiettorie in teorie quantistiche è un po' rischioso, quello che intendiamo dire qua è che possiamo pensare alle linee dei diagrammi come le evoluzioni temporali delle particelle, ma comunque resta valido il fatto che non conosciamo una legge oraria  $\vec{x}(t)$  in senso classico.

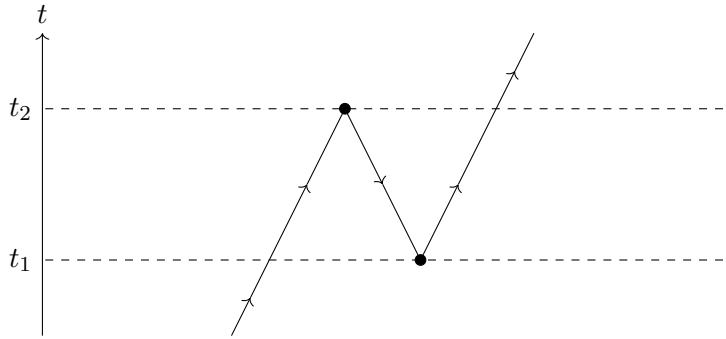


Figura 10.8

Tutto questo è molto bello, ma non abbiamo detto nulla sostanzialmente, abbiamo solo fatto dei disegni molto poco giustificati; vediamo un esempio specifico, che in realtà non rappresenta una vera e propria teoria fisica, ma è un ottimo allenamento, per capire che cosa Feynmann abbia effettivamente inventato.

## 10.5 Teoria $\hat{\phi}^4$

Eseguiremo ora l'intera procedura di calcolo di un elemento di matrice  $\hat{S}$  per il caso semplice (poiché come vedremo in un corso successivo, sarà una delle poche teorie rinormalizzabili, infatti, si potrebbe pensare che la teoria  $\hat{\phi}^3$  sia più semplice, ma in realtà è una teoria che ha energie non definite positive, a meno che non consideriamo anche potenze più alte di  $\hat{\phi}$ )<sup>4</sup> della teoria  $\hat{\phi}^4$ . La densità lagrangiana che descrive la teoria interagente è data da:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}[\partial_\mu \phi(x)]^2 - \frac{m}{2}\phi^2(x) - \frac{\lambda}{4!}\phi^4(x) \quad (10.5.1)$$

in cui  $\lambda$  è un termine di accoppiamento, su cui faremo il nostro sviluppo della matrice  $\hat{S}$ . La cui parte libera di  $\mathcal{L}$  è:

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}[\partial_\mu \phi(x)]^2 - \frac{m}{2}\phi^2(x) \quad (10.5.2)$$

che ci da, tramite la quantizzazione canonica, la densità hamiltoniana libera:

$$\hat{\mathcal{H}}_0 = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} \right)^2 + (\vec{\nabla} \hat{\phi})^2 + m^2 \hat{\phi}^2 \right]. \quad (10.5.3)$$

<sup>4</sup>Anche considerare potenze più grandi però non è molto semplice, poiché è facile che la teoria non sia rinormalizzabile, vedi  $\hat{\phi}^6$ , e quindi sia senza potere predittivo. Ovviamente discorsi analoghi a quelli fatti per  $\phi$  si possono fare per i campi spinoriali.

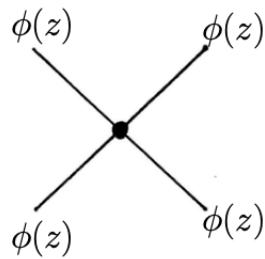
La parte di  $\mathcal{L}$  interagente è chiaramente:

$$\mathcal{L}_I = -\frac{\lambda}{4!}\phi^4(x) \quad (10.5.4)$$

che ci dà la densità hamiltoniana:

$$\hat{\mathcal{H}}_I(z) = \frac{\lambda}{4!}\hat{\phi}^4(z). \quad (10.5.5)$$

L'interazione è data dall'incontro di 4 campi scalari in un punto dello spazio tempo  $z$ . Il diagramma lo possiamo disegnare come 4 linee (senza freccia perché possono descrivere sia particelle che antiparticelle essendo campi scalari) che si incontrano in un punto, come mostrato in figura 10.9.



**Figura 10.9:** Rappresentazione vertice della teoria  $\phi^4(z)$ .

Per calcolare lo sviluppo di Dyson della matrice  $\hat{S}$  procediamo per passi successivi. Uno schema di quello che andremo a fare è in figura 10.10.

Prima di cominciare la nostra ricetta per trovare l'ampiezza di transizione facciamo un appunto. Noi non discuteremo mai il conto effettivo degli integrali che troveremo. Questo non per via della semplicità o banalità di conto, ma perché molto spesso integrali tipo quelli che troveremo divergono e danno luogo ad infiniti non banali<sup>5</sup>, e per i quali sarà necessario studiare la teoria delle rinormalizzazioni (non oggetto di questo corso).

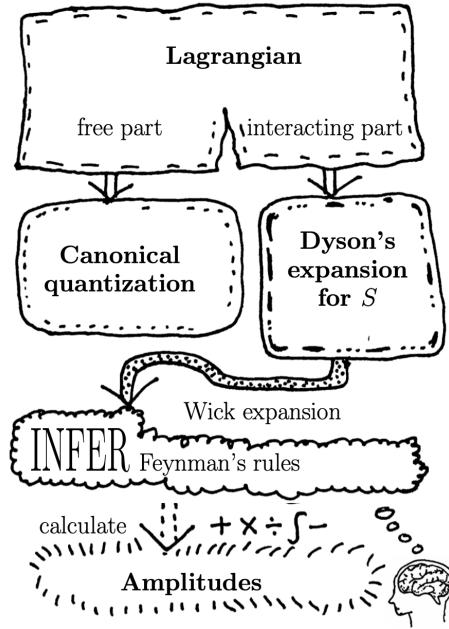
**1.** Innanzitutto decidiamo che cosa vogliamo studiare e scriviamo l'espressione di ampiezza di probabilità. Prendiamo il caso di particella libera, per cui:

$$\mathcal{A} = \underset{\text{out}}{\text{real world}} \langle q | p \rangle_{\text{in}}^{\text{real world}} =_{\text{out}}^{\text{non int}} \langle q | \hat{S} | p \rangle_{\text{in}}^{\text{non int}} \quad (10.5.6)$$

$$= (2\pi)^3 \sqrt{2E_p} \sqrt{2E_q} \langle 0 | \hat{a}_q \hat{S} \hat{a}_p^\dagger | 0 \rangle \quad (10.5.7)$$

in cui abbiamo fissato le normalizzazioni degli stati arbitrariamente utilizzando i termini di normalizzazione degli operatori di creazione e distruzione.

<sup>5</sup>Questa era l'argomentazione, a suo tempo, di Dirac per portare avanti la sua idea che la Teoria Quantistica dei Campi non sarebbe stata la ricercata "teoria del tutto". Da notare anche che inizialmente Dirac formulò per primo la QFT e successivamente fù lui stesso ad andarci conto quando la QED (dopo Feynmann etc.) diede i primi risultati sperimentali soddisfacenti.



**Figura 10.10:** Schema del processo per derivare le regole di Feynmann.

2. Possiamo espandere la matrice  $\hat{S}$  come ci dice il teorema di Wick ed inserire la nostra forma di  $\hat{\mathcal{H}}_I$ :

$$\hat{S} = T \left[ e^{-i \int d^4x \hat{\mathcal{H}}_I(x)} \right] \quad (10.5.8)$$

$$= T \left[ \mathbb{1} - i \int d^4z \hat{\mathcal{H}}_I(z) + \frac{(-i)^2}{2!} \int d^4y d^4w \hat{\mathcal{H}}_I(y) \hat{\mathcal{H}}_I(w) + \dots \right] \quad (10.5.9)$$

$$= T \left[ \mathbb{1} - i \frac{\lambda}{4!} \int d^4z \hat{\phi}^4(z) + \frac{(-i)^2}{2!} \left( \frac{\lambda}{4!} \right)^2 \int d^4y d^4w \hat{\phi}^4(y) \hat{\phi}^4(w) + \dots \right]. \quad (10.5.10)$$

3. Possiamo inserire lo sviluppo (10.5.10) all'interno dell'espressione (10.5.7):

$$\mathcal{A} = (2\pi)^3 \sqrt{2E_p} \sqrt{2E_q} \langle 0 | \hat{a}_q \hat{S} \hat{a}_p^\dagger | 0 \rangle \quad (10.5.11)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A} = & T \left[ \langle 0 | \hat{a}_q \mathbb{1} \hat{a}_p^\dagger | 0 \rangle - i \frac{\lambda}{4!} \int d^4z \langle 0 | \hat{a}_q \hat{\phi}^4(z) \hat{a}_p^\dagger | 0 \rangle + \right. \\ & \left. + \frac{(-i)^2}{2!} \left( \frac{\lambda}{4!} \right)^2 \int d^4y d^4w \langle 0 | \hat{a}_q \hat{\phi}^4(y) \hat{a}_p^\dagger | 0 \rangle \langle 0 | \hat{a}_q \hat{\phi}^4(w) \hat{a}_p^\dagger | 0 \rangle + \dots \right]. \end{aligned} \quad (10.5.12)$$

L'espressione (10.5.12) la possiamo anche vedere come:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \dots \quad (10.5.13)$$

in cui ogni termine  $\mathcal{A}_i$  dello sviluppo è legato ad una potenza di  $\lambda$ , ad esempio  $\mathcal{A}_0 \propto \lambda^0$  oppure  $\mathcal{A}_2 \propto \lambda^2$ .

**4.** Utilizziamo i teorema di Wick per calcolarci i prodotti T-ordinati che compaiono in 10.5.12, che sono termini del tipo  $\langle 0 | \hat{a}_q \hat{\phi}^4 \hat{a}_p^\dagger | 0 \rangle$  e che saranno espressi in termini di contrazioni.

**5.** Disegnare i diagrammi di Feynmann relativi a tutti gli ordini a cui siamo interessati. Ciascun diagramma rappresenterà una tipologia di termini nello sviluppo di Dyson di  $\hat{S}$ .

Ovviamente, la parte complicata dei 5 punti elencati è il quarto e per semplicità possiamo trattare un termine per volta dello sviluppo (10.5.12). Cominciamo a trattare il primo termine non banale, ossia il primo ordine:

$$\langle 0 | \hat{a}_q \hat{\phi}^4(z) \hat{a}_p^\dagger | 0 \rangle = \langle 0 | \hat{a}_q \hat{\phi}(z) \hat{\phi}(z) \hat{\phi}(z) \hat{\phi}(z) \hat{a}_p^\dagger | 0 \rangle \quad (10.5.14)$$

in cui ci rendiamo presto conto che esistono solo due tipi di contrazioni che possiamo fare:

$$\langle 0 | \hat{a}_q \hat{\phi} \hat{\phi} \hat{\phi} \hat{\phi} \hat{a}_p^\dagger | 0 \rangle \quad (10.5.15)$$

$$\langle 0 | \hat{a}_q \hat{\phi} \hat{\phi} \hat{\phi} \hat{\phi} \hat{a}_p^\dagger | 0 \rangle \quad (10.5.16)$$

analizziamone uno per volta e vediamo come possiamo rappresentarli nei diagrammi di Feynmann.

In (10.5.15) stiamo contraendo gli operatori di creazione e distruzione e gli operatori  $\hat{\phi}$  separatamente ognuno per conto proprio. Ovviamente ci sono 3 tipi di contrazioni di questo tipo del tutto analoghe di significato, ovvero (a costo di risultar pedante le riporto, ma solo per questa teoria):

$$\langle 0 | \hat{a}_q \hat{\phi} \hat{\phi} \hat{\phi} \hat{\phi} \hat{a}_p^\dagger | 0 \rangle \quad (10.5.17)$$

$$\langle 0 | \hat{a}_q \hat{\phi} \hat{\phi} \hat{\phi} \hat{\phi} \hat{a}_p^\dagger | 0 \rangle \quad (10.5.18)$$

$$\langle 0 | \hat{a}_q \hat{\phi} \hat{\phi} \hat{\phi} \hat{\phi} \hat{a}_p^\dagger | 0 \rangle \quad (10.5.19)$$

questo fatto tornerà dopo, per ora teniamo a mente che c'è una certa molteplicità. Il teorema di Wick mi permette di riscrivere le contrazioni (10.5.15)

in termini di prodotti T-ordinati:

$$\langle 0 | \hat{a}_q \hat{\phi} \hat{\phi} \hat{\phi} \hat{\phi} \hat{a}_p^\dagger | 0 \rangle = \langle 0 | \hat{a}_q \hat{a}_p^\dagger | 0 \rangle \langle 0 | T[\hat{\phi}(z) \hat{\phi}(z)] | 0 \rangle \langle 0 | T[\hat{\phi}(z) \hat{\phi}(z)] | 0 \rangle \quad (10.5.20)$$

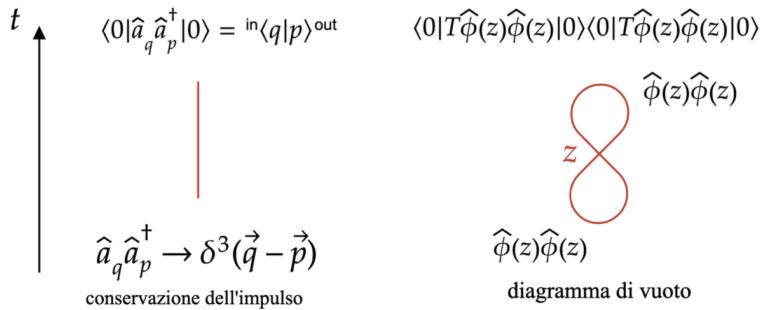
in cui non abbiamo messo il prodotto T-ordinato per gli operatori  $\hat{a}_q \hat{a}_p^\dagger$  poiché distruggono e creano particelle a  $t = -\infty$  e  $t = +\infty$  rispettivamente, per cui il tempo è ben ordinato.

Ora viene la parte leggermente complicata, perché dobbiamo interpretare i termini T-ordinati della moltiplicazione (10.5.20) nei diagrammi di Feynmann. Un riassunto grafico di quello che stiamo per vedere è in figura 10.11. Vediamo che abbiamo:

$$\langle 0 | \hat{a}_q \hat{a}_p^\dagger | 0 \rangle = \langle q | p \rangle = \delta^3(\vec{q} - \vec{p}) \quad (10.5.21)$$

rappresenta la conservazione dell'impulso e possiamo rappresentarla come una linea dritta senza vertice, non dipendendo da  $z$ .

Allo stesso tempo però vediamo che le contrazioni dei campi scalari  $\hat{\phi}$  non sono altro che due propagatori liberi, che rappresentano appunto una propagazione da un punzo  $z$  fino allo stesso punto  $z$ . Dunque, sono termini che possiamo rappresentare come delle curve che iniziano e finiscono nello stesso punto. Questi termini, secondo i diagrammi di Feynmann, vengono anche chiamati **diagrammi di vuoto** e contribuiscono all'ampiezza di transizione solo con una fase overall  $e^{i\phi}$ , per cui non hanno effetto. termini di questo tipo non sono influenti poiché non sono connessi con particelle entranti o uscenti.



**Figura 10.11:** Rappresentazione prima possibile contrazione del primo ordine dello sviluppo della teoria  $\phi^4(z)$ .

Questo tipo di diagrammi, formati da due diagrammi separati, si chiamano *disconnesso* e sono termini poco interessanti dal punto di vista fisico, proprio perché sono due pezzi separati e non possono influenzarsi a vicenda.

Analizziamo ora la seconda possibilità di contrazioni che possiamo fare, ossia (10.5.16), di cui possiamo notare esistere 12 modi per realizzarla.

Usando il teorema di Wick (10.5.16) diventa:

$$\langle 0 | \hat{a}_q \hat{\phi} \hat{\phi} \hat{\phi} \hat{\phi} \hat{a}_p^\dagger | 0 \rangle = \langle 0 | \hat{a}_q \hat{\phi}(z) | 0 \rangle \langle 0 | T[\hat{\phi}(z) \hat{\phi}(z)] | 0 \rangle \langle 0 | \hat{\phi}(z) \hat{a}_p^\dagger | 0 \rangle. \quad (10.5.22)$$

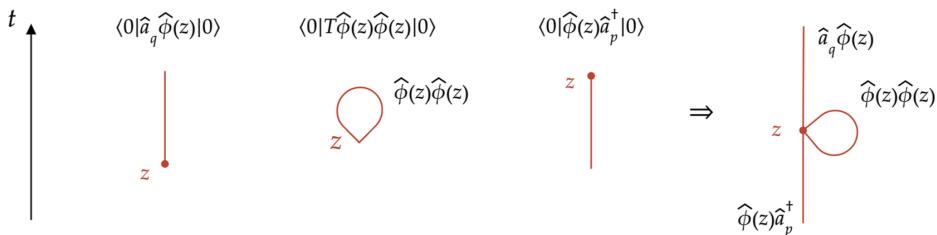
In questo caso le interpretazioni sono leggermente più complicate da vedere. Sicuramente riconosciamo un termine identico al primo caso che abbiamo analizzato, ossia il propagatore da  $z$  in  $z$ , ma i termini nuovi, e interessanti del prodotto sono il primo e il terzo. Vediamo il primo termine:<sup>6</sup>

$$\langle 0 | \hat{a}_q \hat{\phi}(z) | 0 \rangle = \langle 0 | \hat{a}_q \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_k}} e^{+ikz} |\vec{q}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2E_q}} e^{+iqz} \quad (10.5.23)$$

dunque è un termine che possiamo interpretare come una particella (ricorda che stiamo parlando di campo scalare) uscente dal punto  $z$ , la cui informazione è data dal campo  $\hat{\phi}$ , con impulso  $\vec{q}$ , la cui informazione è portata dall'operatore  $\hat{a}_p$ . Il terzo termine delle contrazioni lo analizziamo alla stessa maniera e vediamo che:

$$\langle 0 | \hat{\phi}(z) \hat{a}_p^\dagger | 0 \rangle = \langle 0 | \hat{\phi}(z) | \vec{p} \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} e^{-ipz} \quad (10.5.24)$$

dunque, questo è un termine interpretabile come una particella entrante nel punto  $z$  con un impulso  $\vec{p}$ . Questi discorsi sono rappresentati nei diagrammi di Feynmann di figura 10.12.



**Figura 10.12:** Rappresentazione seconda possibile contrazione del primo ordine dello sviluppo della teoria  $\phi^4(z)$ .

Questo secondo tipo di diagrammi non è disconnesso, si dice di contatto, e ha significato fisico.

---

<sup>6</sup>Utilizziamo l'espressione esplicita del campo scalare e ricordiamo la sua azione sul vuoto.

Facciamo un bel riassunto di quello che abbiamo imparato. Abbiamo visto che possiamo scrivere per il primo ordine di (10.5.12):

$$\mathcal{A}_1 = -i \frac{\lambda}{4!} \int d^4z \left[ 3 \langle 0 | \hat{a}_q \hat{a}_p^\dagger | 0 \rangle \langle 0 | T[\hat{\phi}(z) \hat{\phi}(z)] | 0 \rangle \langle 0 | T[\hat{\phi}(z) \hat{\phi}(z)] | 0 \rangle + 12 \langle 0 | \hat{a}_q \hat{\phi}(z) | 0 \rangle \langle 0 | T[\hat{\phi}(z) \hat{\phi}(z)] | 0 \rangle \langle 0 | \hat{\phi}(z) \hat{a}_p^\dagger | 0 \rangle \right] \quad (10.5.25)$$

in cui abbiamo tenuto conto della molteplicità di ciascun termine. Grazie ai diagrammi di Feynmann abbiamo visto che da  $\mathcal{A}_1$  riceviamo due tipi di contributi, uno dai diagrammi disconnessi (che sono 3), che non hanno senso fisico, e l'altro dai diagrammi connessi (sono 12) che sono la parte interessante. Riguardo la relazione tra lo sviluppo di  $\hat{S}$  e i diagrammi di Feynmann abbiamo imparato:

- In ogni diagramma ci sono un certo numero di punti in cui avvengono le interazioni, in particolare questi punti sono detti **vertici** e sono proprio il punto in cui le linee si uniscono. Una cosa importante da tenere a mente è che in ogni diagramma compaiono tanti vertici quanto è l'ordine perturbativo che stiamo considerando. In più, quando disegniamo un diagramma, inseriamo un termine  $(-i\lambda)$  per ogni vertice, detto coupling.
- In ogni vertice entrano, o escono, tante linee quanti sono i campi che compaiono nell'hamiltoniana  $\hat{\mathcal{H}}_I$  della nostra teoria. In questo caso abbiamo 4 gambe che convergono in ogni vertice (rivedi la figura 10.9).
- Il termine  $\overline{\phi(z)} \hat{a}_p^\dagger$  rappresenta un linea entrante nel vertice di interazione, mentre il termine  $\hat{a}_p \overline{\phi(\dagger)(z)}$  rappresenta una linea uscente. Ovvia-mente queste linee entranti ed uscenti, che chiamiamo **linee esterne**, come abbiamo visto, rappresentano delle particelle (o antiparticelle) on-shell che entrano ed escono dal processo. Queste linee hanno un estremo che non è attaccato a nulla, il che rappresenta la connessione con il mondo esterno. Notiamo che avendo scelto una convenzione per l'asse temporale disegniamo le linee entranti al di sotto dei vertici, mentre le linee uscenti al di sopra.
- Le contrazioni tra gli operatori di creazione e distruzione  $\hat{a}_q \hat{a}_p^\dagger$  rappre-sentano semplicemente delle  $\delta^3$  di conservazione.
- Le contrazioni tra due campi  $\overline{\phi(x)} \hat{\phi}(y) = \langle 0 | T[\hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y)] | 0 \rangle$  rappresen-ta un propagatore che connette i punti spazio temporali  $x$  e  $y$ , il quale corrisponde ad una linea che connette due vertici, che viene spesso chiamata **linea interna** e rappresenta particelle virtuali. Nel nostro caso il propagatore era un loop che connetteva  $z$  con se stesso.

### 10.5.1 Regole di Feynmann nello spazio delle configurazioni per la teoria $\hat{\phi}^4$

Fino ad ora i diagrammi di Feynmann non hanno rappresentato una semplificazione nei nostri conti, anzi, oltre a dover implementare i conti esplicativi dello sviluppo perturbativo ci siamo messi pure a disegnarli. In realtà, ovviamente, sono molto utili e utilizzati, proprio perché una volta capito il funzionamento di una teoria e a che disegno associare ciascun prodotto T-ordinato dello sviluppo perturbativo di  $\hat{S}$ , allora semplicemente guardando un diagramma di Feynmann, e senza scrivere null'altro riguardo l'espansione, siamo in grado di scrivere l'espressione dello specifico termine perturbativo rappresentato. Ad esempio, arriva un nostro collega e ci porta il quarto diagramma della figura 10.12, a quel punto noi solamente guardandolo, e ricordando quello che abbiamo capito della teoria  $\phi^4$ , siamo in grado di scrivere:

$$\mathcal{A}_1 \propto -i\lambda \int d^4z \langle 0 | \hat{a}_q \hat{\phi}(z) | 0 \rangle \langle 0 | T[\hat{\phi}(z)\hat{\phi}(z)] | 0 \rangle \langle 0 | \hat{\phi}(z) \hat{a}_p^\dagger | 0 \rangle = \quad (10.5.26)$$

$$= -i\lambda \int d^4z \frac{1}{\sqrt{2E_q}} e^{+iqz} \Delta(z-z) \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} e^{-ipz} \quad (10.5.27)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \frac{1}{\sqrt{2E_q}} \int d^4z e^{+i(q-p)z} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (10.5.28)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \frac{1}{\sqrt{2E_q}} \int d^4z \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{ie^{+i(q-p)z}}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (10.5.29)$$

Per poter automatizzare questo procedimento dobbiamo scrivere alcune regole, che saranno valide ad ogni ordine, ma solamente per una specifica teoria, infatti per ogni interazione saremo in grado di scrivere le relative regole di Feynmann. Le regole per  $\hat{\phi}^4$  sono:

- Ad ogni vertice associamo un termine  $(-i\lambda)$ , così che in base al numero di vertici, che sono collegati con l'ordine perturbativo, ricostruiamo la corretta potenza di  $\lambda$ .
- Ad ogni linea interna associamo un propagatore  $\Delta(x-y)$ .
- Ad ogni linea esterna associamo un termine  $e^{\pm ipx}$  a seconda che sia uscente o entrante.
- Integrare su tutte le possibili posizioni dei vertici dello spaziotempo.
- Dobbiamo anche diviere ciascun termine per il fattore di simmetria<sup>7</sup>, che chiamiamo  $D$ , in modo da ottenere il giusto coefficiente davanti a ciascun termine.

---

<sup>7</sup>Puoi vedere come calcolare i fattori di simmetria al capitolo 19.4 del Lancaster e Blundell [6].

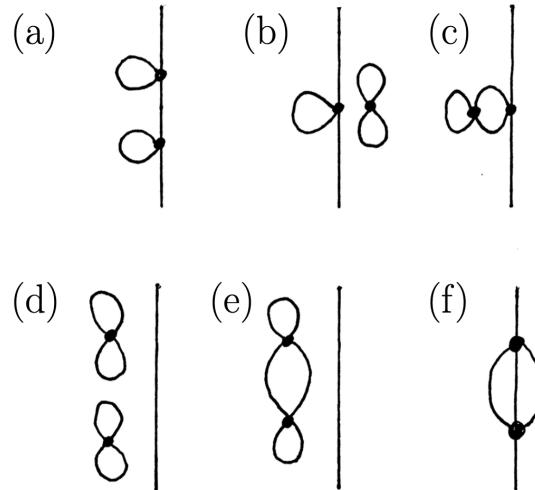
Infatti, se riprendiamo l'espressione (10.5.29) che avevamo scritto senza troppi pensieri e consideriamo tutte le regole, dunque inseriamo anche il fattore di simmetria (12), il termine di coupling e mettiamo le normalizzazioni degli stati ad impulso fissato che avevamo scelto in (10.5.11), allora otteniamo il corretto termine:

$$\mathcal{A}_1 = 12(2\pi)^3 \sqrt{2E_p} \sqrt{2E_q} \frac{(-i\lambda)}{4!} \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \frac{1}{\sqrt{2E_q}} \int d^4z \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{ie^{+i(q-p)z}}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (10.5.30)$$

$$= -i \frac{\lambda}{2} \int d^4z \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{ie^{+i(q-p)z}}{k^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (10.5.31)$$

### 10.5.2 Diagrammi di Feynmann nello spazio degli impulsi per la teoria $\hat{\phi}^4$

Già dall'espressione (10.5.31) ci possiamo rendere conto che, essendo due integrali, uno sullo spazio e uno sugli impulsi, potrebbe essere comodo toglierne uno dei due. Infatti, i calcoli risultano molto più semplici nello spazio degli impulsi. Vediamo questa semplicità attraverso un'esempio. Consideriamo il secondo ordine della teoria  $\hat{\phi}^4$  i cui possibili diagrammi sono in figura 10.13.



**Figura 10.13:** Rappresentazione tutti i possibili diagrammi del secondo ordine della teoria  $\phi^4(z)$ .

Quello interessante fisicamente e che vogliamo studiare è (f) e si chiama **diagramma di saturno**. Possiamo applicare le regole di Feynmann che abbiamo elencato in precedenza e ottenerne (con un fattore di simmetria  $D =$

6):

$$\mathcal{A}_2^{(S)} = (2\pi)^3 \sqrt{2E_p} \sqrt{2E_q} \frac{(-i\lambda)^2}{D} \int d^4y d^4w \times \quad (10.5.32)$$

$$\times \langle 0 | \hat{a}_q \hat{\phi}(y) \hat{\phi}(y) \hat{\phi}(y) \hat{\phi}(y) \hat{\phi}(w) \hat{\phi}(w) \hat{\phi}(w) \hat{\phi}(w) \hat{a}_p^\dagger \hat{\phi}(y) | 0 \rangle \quad (10.5.33)$$

$$= -\frac{\lambda}{6} \int d^4y d^4w e^{+iqy} \Delta(y-w) \Delta(y-w) \Delta(y-w) e^{-ipw} \quad (10.5.34)$$

ricordando l'espressione del propagatore (8.2.96) abbiamo:

$$\begin{aligned} A_2^{(S)} &= -\frac{\lambda}{6} \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4k_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4k_3}{(2\pi)^4} \frac{i}{k_1^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{k_2^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{k_3^2 - m^2 + i\epsilon} \times \\ &\quad \times \int d^4y d^4w e^{+iqy} e^{-ipw} e^{-ik_1(y-w)} e^{-ik_2(y-w)} e^{-ik_3(y-w)} \end{aligned} \quad (10.5.35)$$

$$\begin{aligned} A_2^{(S)} &= -\frac{\lambda}{6} \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4k_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4k_3}{(2\pi)^4} \frac{i}{k_1^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{k_2^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{k_3^2 - m^2 + i\epsilon} \times \\ &\quad \times \int d^4y d^4w e^{+iqy} e^{-ipw} e^{-i(k_1+k_2+k_3)y} e^{+i(k_1+k_2+k_3)w} \end{aligned} \quad (10.5.36)$$

possiamo notare che gli integrali su  $y$  e  $w$  sono proprio le rappresentazioni integrali della  $\delta$ :

$$\int d^4y e^{-i(k_1+k_2+k_3)y} = (2\pi)^4 \delta^4(p - k_1 - k_2 - k_3) \quad (10.5.37)$$

$$\int d^4w e^{i(k_1+k_2+k_3)w} = (2\pi)^4 \delta^4(q - (-k_1 - k_2 - k_3)) = (2\pi)^4 \delta^4(q + k_1 + k_2 + k_3) \quad (10.5.38)$$

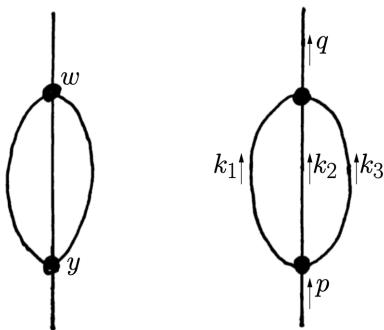
allora otteniamo:

$$\begin{aligned} A_2^{(S)} &= -\frac{\lambda}{6} \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4k_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4k_3}{(2\pi)^4} \frac{i}{k_1^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{k_2^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{k_3^2 - m^2 + i\epsilon} \times \\ &\quad \times (2\pi)^4 \delta^4(p - k_1 - k_2 - k_3) (2\pi)^4 \delta^4(q + k_1 + k_2 + k_3). \end{aligned} \quad (10.5.39)$$

Le  $\delta$  che compaiono in (10.5.39) ci dicono che in ogni vertice tutti i momenti si sommano a 0, dunque se abbiamo una particella in ingresso con impulso  $p$  e in uscita con impulso  $q$ , allora non solo possiamo dire che in ogni vertice l'impulso si conserva, ma anche globalmente. Le due delta le possiamo scrivere insieme come  $\delta(q-p)$ , ma solo dopo averne usata una per riscrivere  $k_1 = q - k_2 - k_3$  e fare l'integrale  $d^4k_1$ . Abbiamo in questo modo:

$$\begin{aligned} A_2^{(S)} &= -\frac{\lambda}{6} (2\pi)^4 \delta^4(q-p) \int \frac{d^4k_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4k_3}{(2\pi)^4} \frac{i}{(q - k_2 - k_3)^2 - m^2 + i\epsilon} \times \\ &\quad \times \frac{i}{k_2^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{k_3^2 - m^2 + i\epsilon}. \end{aligned} \quad (10.5.40)$$

Sebbene in (10.5.40) il numero di integrali da fare è comunque due, dunque sembra che non ci siamo messi in una posizione tanto migliore, in realtà è un'espressione più comoda di quella che avremmo nello spazio delle configurazioni. Infatti, abbiamo lasciato solo i pezzi relativi ai propagatori e abbiamo tolto di mezzo tutti i termini esponenziali (quindi i fattori di gambe esterne). Un confronto tra i diagrammi nello spazio delle configurazioni e degli impulsi è in figura 10.14.



**Figura 10.14:** Confronto diagrammi nello spazio delle configurazioni e degli impulsi della teoria  $\phi^4(z)$ .

### 10.5.3 Regole di Feynmann nello spazio degli impulsi per la teoria $\hat{\phi}^4$

Vediamo, in base a quello imparato poco fa, quali sono le regole di Feynmann nello spazio degli impulsi nello spazio degli impulsi:

- Ad ogni vertice associamo il coupling  $(-i\lambda)$ .
- Ad ogni linea interna associamo il quadri-impulso  $q$  ed il corrispondente propagatore (vedi la figura 10.15):

$$\frac{i}{q^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (10.5.41)$$

- In ogni vertice imponiamo la conservazione del quadri-impulso.
- Integriamo su tutti i quadri-impulsi con misura:

$$\frac{d^4 k}{(2\pi)^4}. \quad (10.5.42)$$

- Alle linee esterne associamo un fattore 1.
- Dobbiamo dividere per il fattore di simmetria  $D$ .

$$\begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} \rightarrow = \frac{i}{q^2 - m^2 + i\epsilon}$$

Figura 10.15

- Dobbiamo includere la  $\delta$  di conservazione del quadri-impulso totale ad ogni diagramma.

Un esempio di applicazione di queste regole può essere il diagramma in figura 10.16.

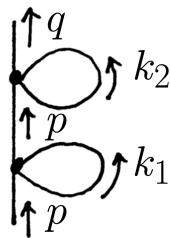


Figura 10.16

In questo caso l'ampiezza al secondo ordine, seguendo le regole di Feynmann, sarà:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_2 &= (2\pi)^4 \delta^4(q - p) \times \frac{(-i\lambda)^2}{6} \times \\ &\times \int \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_3}{(2\pi)^4} \frac{i}{k_1^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{k_2^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{(p - k_1 - k_2)^2 - m^2 + i\epsilon} \end{aligned} \quad (10.5.43)$$

in cui abbiamo utilizzato la conservazione del quadri-impulso per integrare su  $k_3$ .

#### 10.5.4 Scattering di due particelle

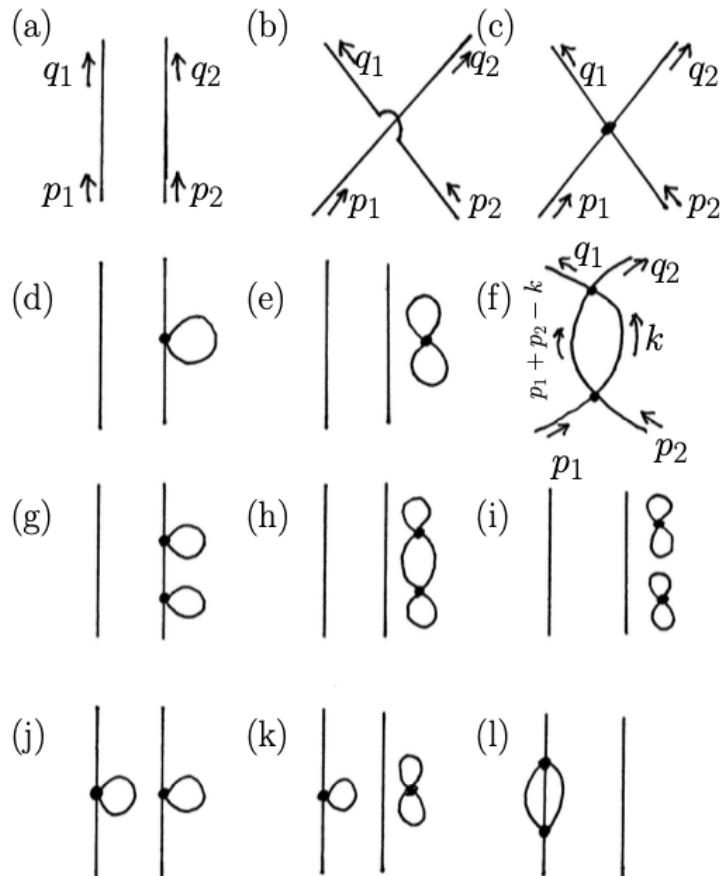
Abbiamo visto con la sezione §10.5 come trattare la teoria  $\hat{\phi}^4$  e tutte le regole di Feynmann relative ad essa, però, siamo ancora limitati alla trattazione di una singola particella che interagisce, vediamo brevemente in questa sezione un primo approccio alla teoria dello scattering. Questo argomento sarà ampiamente trattato nel corso successivo di QFT.

Se abbiamo due particelle che entrano nel diagramma di Feynmann, interagiscono con una qualche  $\mathcal{H}_I$  e poi ne escono, allora ci rendiamo subito

conto che l'ampiezza di transizione è:

$$\mathcal{A} = \langle q_1 q_2 | \hat{S} | p_2 p_1 \rangle = (2\pi)^6 \sqrt{16} E_{q_1} E_{q_2} E_{p_1} E_{p_2} \langle 0 | \hat{a}_{q_1} \hat{a}_{q_2} \hat{S} \hat{a}_{p_1}^\dagger \hat{a}_{p_2}^\dagger | 0 \rangle \quad (10.5.44)$$

e descrive due particelle che entrano nel sistema con impulso  $p_1$  e  $p_2$  che successivamente ne escono con impulso  $q_1$  e  $q_2$ . A questo punto si potrebbe scrivere un'espressione per  $\mathcal{H}_I$ , inserirla in  $\hat{S}$ , espanderla in serie e calcolare tutte le possibili contrazioni e contributi. Però noi abbiamo imparato che i diagrammi di Feynmann sono uno strumento potentissimo e ci permettono di non fare i conti a mano semplicemente guardando i disegni. Alcuni dei contributi alla matrice di scattering  $\hat{S}$  sono mostrati in figura 10.17.



**Figura 10.17:** Alcuni possibili diagrammi di Feynmann per la matrice  $\hat{S}$ , fino al secondo ordine.

I diagrammi (a) e (b), come si vede dall'assenza di vertici contribuitsono all'ordine 0 e il loro contributo sarà proporzionale semplicemente a delle  $\delta$

di conservazione:

$$\mathcal{A}_0^{(a)} = (2\pi)^6 \sqrt{16} E_{q_1} E_{q_2} E_{p_1} E_{p_2} \delta^3(\vec{q}_1 - \vec{p}_1) \delta^3(\vec{q}_2 - \vec{p}_2) \quad (10.5.45)$$

$$\mathcal{A}_0^{(a)} = (2\pi)^6 \sqrt{16} E_{q_1} E_{q_2} E_{p_1} E_{p_2} \delta^3(\vec{q}_1 - \vec{p}_2) \delta^3(\vec{q}_2 - \vec{p}_1) \quad (10.5.46)$$

che ovviamente rappresentano il fatto che essendo particelle identiche, non avendo differenziato gli operatori di creazione e distruzione (quando abbiamo a che fare con particelle diverse diversifichiamo i campi presenti in  $\mathcal{A}$ ), possiamo confonderele e non possiamo dire se la particella che entra con  $p_1$  esce con  $q_1$  o con  $q_2$  (idem per la particella  $p_2$ ), per cui consideriamo entrambi i diagrammi. Non essendoci interazioni non danno contributo allo scattering e non sono processi misurabili nell'esperimento. Le cose cominciano ad essere interessanti all'ordine 1, in cui abbiamo i diagrammi disconnessi, non interessanti (d) ed (e), ma anche il diagramma connesso (c), il quale sarà anch'esso proporzionale ad una delta di conservazione:

$$\mathcal{A}_1^{(c)} = (2\pi)^4 (-i\lambda) \delta^4(q_1 + q_2 - p_1 - p_2). \quad (10.5.47)$$

È interessante anche l'ordine due in cui il diagramma più rilevante è (f) il cui contributo sarà:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_2^{(f)} &= (2\pi)^4 \delta^4(q_1 + q_2 - p_1 - p_2) \frac{(-i\lambda)^2}{2} \times \\ &\times \int \frac{d^4}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{(p_1 + p_2 - k)^2 - m^2 + i\epsilon}. \end{aligned} \quad (10.5.48)$$

## 10.6 Teoria di Yukawa

Parliamo in questa sezione dell'idea alla base della teoria di Yukawa, che pur essendo precedente a Feynmann, permette di capire l'enorme importanza della teoria del propagatore.

Una delle cose più interessanti delle particelle è che interagiscono tra loro. L'idea di Yukawa è incentrata su una nozione chiave: le particelle interagiscono scambiandosi **quanti di forza**, cioè particelle virtuali che mediano la forza di interazione. Le *particelle virtuali* sono quelle particelle che non rispettano la condizione di mass-shell, cioè che violano la relazione che lega massa ed energia in relatività ristretta, per cui sono particelle tali da:

$$E^2 - \vec{p}^2 \neq m^2. \quad (10.6.1)$$

Com'è possibile che si possa non rispettare il mass-shell? La Meccanica Quantistica consente di violare questa dispersione classica, purché non lo facciamo per troppo tempo! Invocando l'incertezza energia-tempo, per cui:

$$\Delta E \Delta t \sim \hbar \quad (10.6.2)$$

possiamo dire che le particelle di energia  $E$  possono esistere purché lo facciano per un periodo abbastanza breve per cui si abbia  $\Delta t \leq \hbar/\Delta E$ . Le particelle virtuali, quindi, devono avere un raggio finito poiché: non possono vivere per sempre e devono viaggiare a velocità finite. Yukawa intuì che il potenziale mediato dalla particella virtuale avrebbe avuto la forma:

$$V(\vec{r}) \propto -\frac{e^{-|\vec{r}|/a}}{4\pi|\vec{r}|} \quad (10.6.3)$$

in cui  $a$  è un parametro la cui dimensione è una lunghezza. Yukawa notò che non era sufficiente un potenziale coulombiano, poiché vogliamo che l'azione di  $V(\vec{r})$  sia a corto range spaziale.

Se ricordiamo il corso di MQ2 possiamo notare che il potenziale (10.6.3) è molto simile (in realtà è lo stesso) alla funzione di Green dell'operatore  $(\nabla^2 + \vec{k}^2)$ , che è l'operatore dell'equazione di scattering della Meccanica Quantistica. Da questo, prendendo  $i|\vec{k}| = -m$ , otteniamo che il potenziale di Yukawa (10.6.3) è la funzione di Green dell'equazione:

$$(\nabla^2 - m^2)V(\vec{r}) = \delta^3(\vec{r}) \quad (10.6.4)$$

che è la parte spaziale dell'equazione di Klein-Gordon. Quello che impariamo è molto di più, infatti abbiamo visto che il potenziale di Yukawa, essendo una funzione di Green, è effettivamente un propagatore descrivente l'evoluzione di un campo (virtuale) scalare. Il prezzo che bisogna pagare nella teoria per avere particelle virtuali, ovvero che non rispettino il mass-shell, è quello che esse, oltre ad essere rappresentate da propagatori tipo (10.6.3) esse possono viaggiare su una distanza, finita e fissata dalla loro massa.

Possiamo anche dare una rappresentazione grafica della teoria di Yukawa. Facciamo riferimento alla figura 10.18. Abbiamo rappresentato l'asse temporale sulla sinistra rivolto verso l'alto; il primo diagramma lo possiamo interpretare come segue: possiamo immaginare processi spazio-temporali in cui all'istante  $y^0$  la particella, che chiamiamo  $A$ , emette un segnale, ovvero una particella virtuale  $Q$  con massa  $m_Q$ , dalla posizione  $y$  che si propaga fino al punto  $x$ , in cui arriva al tempo  $x^0$ , in tale punto dello spazio e del tempo collide con la particella  $B$  che si trova nello stesso punto  $x$ . Ovviamente, per via dell'emissione e dell'assorbimento della particella virtuale, le particelle iniziali  $A$  e  $B$  risulteranno diverse da quelle finali, che indichiamo  $A'$  e  $B'$ . Il bilancio energetico del processo lo possiamo scrivere come:

$$E_A = E_{A'} + E_Q \quad (10.6.5)$$

in cui la particella  $E_Q = \sqrt{p_Q^2 + m_Q^2}$  è l'energia che perde la particella  $A$  emettendo la particella virtuale ed è anche l'energia che guadagna  $B$ .

Però, la conservazione dell'energia e la simmetria dell'interazione dal punto di vista energetico sarebbero in guai seri se ci fermassimo solo al primo

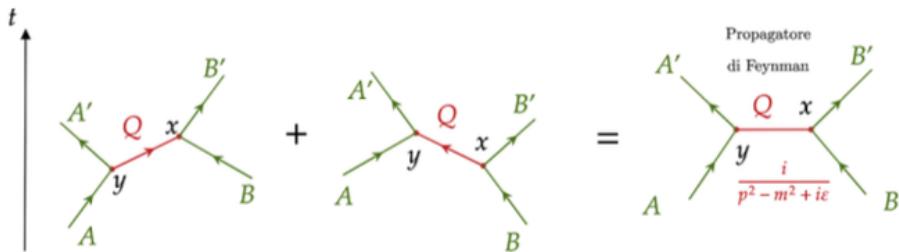
diagramma per descrivere l'interazione tra le particelle  $A$  e  $B$ . Infatti, considerando solo il primo, avremmo un trasferimento netto di energia da  $A$  a  $B$ .

Per mantenere la simmetria consideriamo anche il processo inverso, ossia, il processo in cui è  $B$  che emette una particella virtuale ed  $A$  che la assorbe. Nel secondo diagramma vediamo per l'appunto la particella  $B$  che all'istante  $x^0$  emette una particella virtuale  $Q$ , identica a quella del primo diagramma, nel punto  $x$ , essa si propaga, al tempo  $y^0$  e nella posizione  $y$  incontra la particella  $A$ , a cui restituisce la stessa quantità di energia che nel primo diagramma le aveva sottratto. Il bilancio energetico sta volta è:

$$E_B = E_{B'} + E_Q \quad (10.6.6)$$

in cui  $E_Q$  è l'energia che perde la particella  $B$  e che acquista  $A$ .

Entrambi i processi sono necessari affinché si conservi l'energia e la loro somma dà esattamente il propagatore di Feynmann, raffigurato nel terzo diagramma.



**Figura 10.18:** Raffigurazione scambio di particelle della teoria di Yukawa.

Infatti, quello che descrive un propagatore di Feynmann è lo scambio di una particella virtuale, ossia off-shell. Ricordiamoci il denominatore dei propagatori, ad esempio (8.2.96), che avevano poli in  $p^2 = m^2$ , ossia nelle condizioni di mass-shell e il messaggio, chiaro, è che le funzioni di Green (o propagatori di Feynmann liberi) descrivono la propagazione di tutte le particelle, meno quelle on-shell, dunque descrivono la propagazione di particelle virtuali. In più, le linee rosse dei propagatori nella figura 8.5 non sono molto diverse alla vista dalle linee della figura 10.18, e questo non a caso. Infatti, come vedremo più avanti l'ampiezza di probabilità di un processo di scattering a due particelle contiene proprio il termine:

$$\frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (10.6.7)$$

che non è altro che il propagatore di Feynmann nello spazio degli impulsi (8.3.10). Questo lo possiamo rapidamente verificare in MQ non relativistica servendoci dell'approssimazione di Born, che prevede che l'ampiezza di

scattering  $f$  sia data dalla trasformata di Fourier del potenziale:

$$f \propto \tilde{V}(\vec{p}) = \int d^3r V(\vec{r}) e^{-i\vec{p}\cdot\vec{r}} \quad (10.6.8)$$

in cui  $\vec{p}$  è l'impulso dell'onda trasmessa, e nel nostro caso  $\vec{p}$  è l'impulso trasferito, cioè l'impulso della particella virtuale scambiata mediatrice della forza di Yukawa. Se nell'espressione di  $f$  sostituiamo (10.6.3) e facciamo la trasformata, otteniamo proprio:

$$f \propto \frac{1}{-|\vec{p}|^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (10.6.9)$$

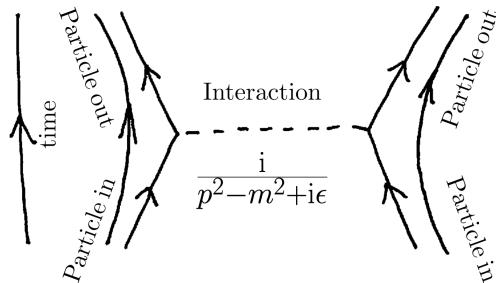
che è la parte spaziale del propagatore (10.6.7), ovvero la funzione di Green dell'equazione di Klein-Gordon.

Notiamo un'ultima cosa. La particella mediatrice scambiata tra  $A$  e  $B$  dev'essere perfora virtuale per ragioni di conservazione dell'energia e dell'impulso. Infatti, se ci pensiamo un attimo, il processo di sola emissione di un quanto  $Q$ :

$$A \longrightarrow A' + Q \quad (10.6.10)$$

non può avvenire. Immaginiamo di porci, ad esempio, nel sistema di riposo di  $A$ , in cui  $E_A = m_A^2 c^2$  (ricordiamoci che stiamo trattando una teoria relativistica, per cui possiamo studiarla in qualsiasi sistema di riferimento inerziale). In questo caso, nello stato finale dobbiamo avere energia sufficiente per emettere una nuova particella  $Q$  e per conferire il necessario "rinculo" ad  $A'$ . Com'è chiaro rendersi conto, la sola energia di riposo  $A$  non è sufficiente né per l'una né per l'altra cosa.

Un diagramma di Feynmann per lo scattering di 2 particelle lo rappresentiamo meglio in figura 10.19.



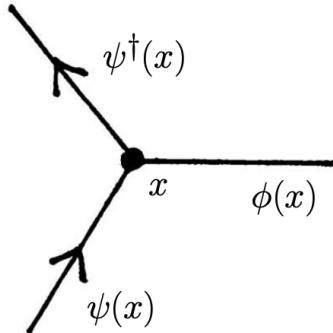
**Figura 10.19:** Raffigurazione scattering di due particelle della teoria di Yukawa.

### 10.6.1 La teoria $\hat{\psi}^\dagger \hat{\psi} \hat{\phi}$

Nel corso di questo capitolo abbiamo detto che alcuni integrali che troviamo dai diagrammi di Feynmann divergono e danno luogo a degli infiniti, una delle poche teorie con diagrammi non divergenti è quella che analizzeremo in questa sezione. La teoria di Yukawa  $\hat{\psi}^\dagger \hat{\psi} \hat{\phi}$  descrive l'interazione di un campo scalare carico, che indichiamo con non poca ambiguità con  $\hat{\psi}$ , ed un campo  $\hat{\phi}$ . Il riferimento per questa teoria è il capitolo 20 del Lancaster e Blundell [6]. Questa teoria è importante perché la ritroveremo nello studio della QED. Infatti, è una teoria molto simile alla elettrodinamica quantistica, ma con la differenza che i quanti di energia non sono scambiati per mezzo di un fotone, ma grazie ad una particella scalare  $\hat{\phi}$ . Le lagrangiane di interazione sono leggermente diverse:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}_{\text{QED}} = \mathcal{L}_{\text{Dirac}} + \mathcal{L}_{\text{EM}} + \mathcal{L}_{\text{int}} \\ = \mathcal{L}_{\text{Dirac}} + \mathcal{L}_{\text{EM}} - e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu \end{array} \right., \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = \mathcal{L}_{\text{Dirac}} + \mathcal{L}_{\text{KG}} + \mathcal{L}_{\text{int}} \\ = \mathcal{L}_{\text{Dirac}} + \mathcal{L}_{\text{KG}} - g \bar{\psi} \psi \phi. \end{array} \right.$$

Il vertice della teoria è raffigurato in figura 10.20, che notiamo bene non essere un vertice realizzabile in natura, ma è solo un pezzo, infatti di solito c'è un altro vertice analogo attaccato tramite lo stesso campo  $\hat{\phi}$ .



**Figura 10.20:** Raffigurazione vertice della teoria di Yukawa.

La lagrangiana è:

$$\mathcal{L} = \partial^\mu \psi^\dagger \partial_\mu \psi - m^2 \psi^\dagger \psi + \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 - g \psi^\dagger \psi \phi \quad (10.6.11)$$

in cui si può riconoscere la lagrangiana di interazione:

$$\mathcal{L}_I = -g \psi^\dagger \psi \phi \quad (10.6.12)$$

in cui  $g$  è la costante di accoppiamento. Ovviamente dobbiamo ricordarci le espressioni dei campi scalari carichi (6.4.14) e (6.4.13), ma anche del campo

scalare neutro (6.3.52). Dalla lagrangiana (10.6.11) troviamo l'hamiltoniana di interazione:<sup>8</sup>

$$\hat{\mathcal{H}}_I = g\hat{\psi}^\dagger \hat{\psi} \hat{\phi} \quad (10.6.13)$$

che possiamo utilizzare per il conto dell'ampiezza di transizione espandendo la matrice  $\hat{S}$ . Implementiamo i conti:

$$\mathcal{A} = \langle q | \hat{S} | p \rangle = (2\pi)^3 \sqrt{2E_p} \sqrt{2E_q} \langle 0 | \hat{a}_q \hat{S} \hat{a}_p | 0 \rangle \quad (10.6.14)$$

espandiamo la matrice  $\hat{S}$  tramite la serie di Dyson:

$$\begin{aligned} \hat{S} = T & \left[ \mathbb{1} + (-ig) \int d^4z \hat{\psi}^\dagger(z) \hat{\psi}(z) \hat{\phi}(z) + \right. \\ & \left. + \frac{(-ig)^2}{2!} \int d^4y d^4w \left[ \hat{\psi}^\dagger(y) \hat{\psi}(y) \hat{\phi}(y) \right] \left[ \hat{\psi}^\dagger(w) \hat{\psi}(w) \hat{\phi}(w) \right] + \dots \right] \end{aligned} \quad (10.6.15)$$

inseriamolo l'ampiezza:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} = & (2\pi)^3 \sqrt{2E_p} \sqrt{2E_q} \langle 0 | \hat{a}_q \mathbb{1} \hat{a}_p | 0 \rangle + \\ & + (2\pi)^3 \sqrt{2E_p} \sqrt{2E_q} (-ig) \int d^4z \langle 0 | T \left[ \hat{a}_q \hat{\psi}^\dagger(z) \hat{\psi}(z) \hat{\phi}(z) \hat{a}_p \right] | 0 \rangle + \\ & + (2\pi)^3 \sqrt{2E_p} \sqrt{2E_q} \frac{(-ig)^2}{2!} \int d^4y d^4w \langle 0 | \left[ \hat{a}_q \hat{\psi}^\dagger(y) \hat{\psi}(y) \hat{\phi}(y) \hat{\psi}^\dagger(w) \hat{\psi}(w) \hat{\phi}(w) \hat{a}_p \right] | 0 \rangle \end{aligned} \quad (10.6.16)$$

e notiamo subito che: all'ordine 0 non otteniamo nulla di interessante, ma semplicemente una delta di conservazione; al primo ordine troviamo proprio 0, visto che abbiamo imparato con il teorema di Wick che la contrazione di un numero dispari di campi da un valore di aspettazione sul vuoto nullo. L'unico termine interessante è il secondo ordine. Dobbiamo capire a cosa corrispondono le varie contrazioni che otteniamo con il teorema di Wick; le possibili contrazioni (non nulle) sono (indicando con  $\hat{a}$ ,  $\hat{b}$  gli operatori di particella e antiparticella per il campo carico e con  $\hat{c}$  gli operatori per il campo neutro):

$$\overline{\hat{\psi}(x)} \overline{\hat{\psi}^\dagger(y)} \quad , \quad \overline{\hat{\phi}(x)} \overline{\hat{\phi}(y)} \quad (10.6.17)$$

$$\overline{\hat{a}_p} \overline{\hat{\psi}^\dagger(x)} \quad , \quad \overline{\hat{\psi}(x)} \overline{\hat{a}_p^\dagger} \quad (10.6.18)$$

$$\overline{\hat{b}_p} \overline{\hat{\psi}(x)} \quad , \quad \overline{\hat{\psi}^\dagger(x)} \overline{\hat{b}_p^\dagger} \quad (10.6.19)$$

$$\overline{\hat{c}_q} \overline{\hat{\phi}(x)} \quad , \quad \overline{\hat{\phi}(x)} \overline{\hat{c}_q^\dagger}. \quad (10.6.20)$$

Ora, dobbiamo interpretarli. Sappiamo bene che la contrazione diventa un prodotto T-ordinato e vediamo subito che i primi due (10.6.17) sono due

---

<sup>8</sup>Ricordando che  $\mathcal{H}_I = -\mathcal{L}_I$ .

propagatori. Le altre contrazioni le possiamo vedere con i calcoli esplicativi pinzando la contrazione tra due vettori di vuoto, vediamo (indichiamo con  $m$  la massa dei campi carichi e con  $\mu$  quella del campo neutro):

$$\hat{\psi}(x)\hat{\psi}^\dagger(y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{ie^{-ip(x-y)}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} , \quad \hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{ie^{-iq(x-y)}}{q^2 - \mu^2 + i\epsilon} \quad (10.6.21)$$

$$\hat{a}_p\hat{\psi}^\dagger(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} , \quad \hat{\psi}(x)\hat{a}_p^\dagger = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \quad (10.6.22)$$

$$\hat{b}_p\hat{\psi}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} , \quad \hat{\psi}^\dagger(x)\hat{b}_p^\dagger = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \quad (10.6.23)$$

$$\hat{c}_q\hat{\phi}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_q}} e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} , \quad \hat{\phi}(x)\hat{c}_q^\dagger = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_q}} e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}}. \quad (10.6.24)$$

Prima di vedere nel dettaglio ciascun termine cosa rappresenta notiamo che i diagrammi di Feynmann in questa teoria saranno leggermente diversi da quelli disegnati per  $\hat{\phi}^4$ , dal momento che abbiamo campi carichi e dobbiamo distinguere i termini di particella e antiparticella, e per cui dovremo disegnare le linee con delle frecce proprio a mostrare se si sta andando avanti nel tempo, quindi si ha una particella, o indietro nel tempo, e quindi si ha un'antiparticella. Attenzione che le frecce non rappresentano la direzione dell'impulso. Vediamo i vari contributi cosa rappresentano:

$$\hat{\psi}(x)\hat{\psi}^\dagger(y) = \text{propagatore campo carico da } x \text{ a } y \quad (10.6.25)$$

$$\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y) = \text{propagatore campo neutro da } x \text{ a } y \quad (10.6.26)$$

$$\hat{a}_p\hat{\psi}^\dagger(x) = \text{particella uscente dal vertice } x \text{ con impulso } \vec{p} \quad (10.6.27)$$

$$\hat{\psi}(x)\hat{a}_p^\dagger = \text{particella entrante nel vertice } x \text{ con impulso } \vec{p} \quad (10.6.28)$$

$$\hat{b}_p\hat{\psi}(x) = \text{antiparticella uscente dal vertice } x \text{ con impulso } \vec{p} \quad (10.6.29)$$

$$\hat{\psi}^\dagger(x)\hat{b}_p^\dagger = \text{antiparticella entrante nel vertice } x \text{ con impulso } \vec{p} \quad (10.6.30)$$

$$\hat{c}_q\hat{\phi}(x) = \text{antiparticella uscente dal vertice } x \text{ con impulso } \vec{q} \quad (10.6.31)$$

$$\hat{\phi}(x)\hat{c}_q^\dagger = \text{particella entrante nel vertice } x \text{ con impulso } \vec{q}. \quad (10.6.32)$$

Vediamo ora, prima le regole di Feynmann per questa teoria e poi come possiamo vedere processi di scattering.

### 10.6.2 Regola di Feynmann per la teoria $\hat{\psi}^\dagger \hat{\psi} \hat{\phi}$

Elenchiamo le regole di Feynmann per la teoria  $\hat{\psi}^\dagger \hat{\psi} \hat{\phi}$ :

- Ad ogni vertice associamo un fattore  $(-ig)$ .
- Per ogni linea interna relativa al campi  $\hat{\phi}$  includiamo un propagatore:

$$\frac{i}{q^2 - \mu^2 + i\epsilon}. \quad (10.6.33)$$

Per ogni linea interna del campo  $\hat{\psi}$  includiamo il propagatore:

$$\frac{i}{q^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (10.6.34)$$

- Integriamo su tutti i quadri-impulsi non fissati.
- Includiamo le delta di conservazione del quadri-impulso totale.
- A tutte le linee esterne associamo un fattore 1
- I coefficienti di simmetria sono tutti  $D = 1$ .

### 10.6.3 Scattering di due particelle per la teoria $\hat{\psi}^\dagger \hat{\psi} \hat{\phi}$

Consideriamo, come fatto per la teoria  $\hat{\phi}^4$ , un processo di scattering per due particelle, dunque un processo in cui abbiamo due particelle in ingresso e due in uscita. Come sappiamo dobbiamo calcolare la quantità:

$$\mathcal{A} = \langle q_1 q_2 | \hat{S} | p_2 p_1 \rangle = (2\pi)^6 \sqrt{16} E_{q_1} E_{q_2} E_{p_1} E_{p_2} \langle 0 | \hat{a}_{q_1} \hat{a}_{q_2} \hat{S} \hat{a}_{p_1}^\dagger \hat{a}_{p_2}^\dagger | 0 \rangle \quad (10.6.35)$$

in cui dobbiamo inserire lo sviluppo di Dyson della matrice  $\hat{S}$  con all'interno l'espressione di  $\mathcal{H}_I$ .

Come succedeva per la teoria  $\hat{\phi}^4$  anche ora abbiamo l'ordine 0 che non dà nessun contributo rilevante, se non delle delta di conservazione, e l'ordine 1, come visto nel caso ad una particella, che è nullo per via del fatto di avere un numero dispari di campi. Il contributo interessante viene dal secondo ordine dello sviluppo di  $\hat{S}$ , per cui si ha:

$$\mathcal{A}_2 \propto \langle 0 | \hat{a}_{q_1} \hat{a}_{q_2} \hat{\psi}^\dagger(y) \hat{\psi}(y) \hat{\phi}(y) \hat{\psi}^\dagger(w) \hat{\psi}(w) \hat{\phi}(w) \hat{a}_{p_2}^\dagger \hat{a}_{p_1}^\dagger | 0 \rangle. \quad (10.6.36)$$

Dell'ampiezza (10.6.36) possiamo avere 3 contrazioni non banali, che sono:

$$\langle 0 | \hat{a}_{q_1} \hat{a}_{q_2} \hat{\psi}^\dagger(y) \hat{\psi}(y) \hat{\phi}(y) \hat{\psi}^\dagger(w) \hat{\psi}(w) \hat{\phi}(w) \hat{a}_{p_2}^\dagger \hat{a}_{p_1}^\dagger | 0 \rangle \quad (10.6.37)$$

$$\langle 0 | \hat{a}_{q_1} \hat{a}_{q_2} \hat{\psi}^\dagger(y) \hat{\psi}(y) \hat{\phi}(y) \hat{\psi}^\dagger(w) \hat{\psi}(w) \hat{\phi}(w) \hat{a}_{p_2}^\dagger \hat{a}_{p_1}^\dagger | 0 \rangle \quad (10.6.38)$$

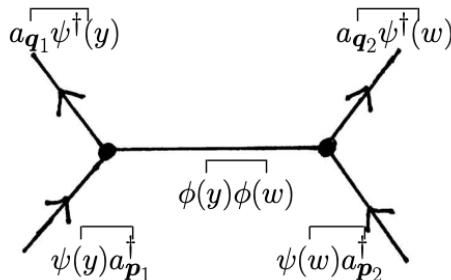
$$\langle 0 | \hat{b}_{q_1} \hat{a}_{q_2} \hat{\psi}^\dagger(y) \hat{\psi}(y) \hat{\phi}(y) \hat{\psi}^\dagger(w) \hat{\psi}(w) \hat{\phi}(w) \hat{a}_{p_2}^\dagger \hat{b}_{p_1}^\dagger | 0 \rangle. \quad (10.6.39)$$

I tre diagrammi associati ai tre valori di aspettazione sono riportati nelle figure 10.21, 10.22 ed 10.23 rispettivamente.

Il diagramma associato a (10.6.37) rappresenta una particella entrante ( $\hat{\psi}(y)\hat{a}_{p_1}^\dagger$ ), che emette una particella mediatrice ( $\hat{\phi}(y)\hat{\phi}(w)$ ) che viaggia da  $w$  a  $y$  e collide con una seconda particella ( $\hat{\psi}(w)\hat{a}_{p_2}^\dagger$ ); ovviamente, dopo lo scambio della particella messaggera, le particelle proseguono il loro moto ( $\hat{a}_{q_1}\hat{\psi}^\dagger(y)$  e  $\hat{a}_{q_2}\hat{\psi}^\dagger(w)$ ). Questo diagramma è anche noto come **canale t**, per via della variabile di Mandelstam<sup>9</sup>  $t = (p_1 - q_1)$ , che è l'impulso conservato (e trasportato dalla particella virtuale).

Il diagramma (10.6.38) è sostanzialmente identico a (10.6.37), poiché nessuno dei due considera antiparticelle ed entrambi hanno due particelle in ingresso e due particelle in uscita; l'unica loro differenza è l'impulso delle particelle in uscita, che ovviamente, trattando particelle identiche non possiamo sapere chi è chi e consideriamo tutte le possibilità. Il diagramma (10.6.38) è chiamato **canale u**, per via della variabile di Mandelstam  $u = (p_1 - q_2)$ .

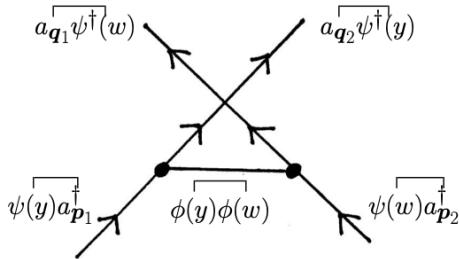
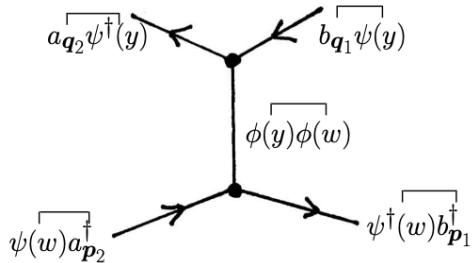
Il diagramma (10.6.39) è l'unico dei tre che considera i contributi sia di particella che di antiparticella. Questo diagramma ci mostra una particella entrante ( $\hat{\psi}(w)\hat{a}_{p_2}^\dagger$ ) e un'antiparticella entrante ( $\hat{\psi}^\dagger(w)\hat{b}_{p_1}^\dagger$ ), che annichiliscono nel punto  $w$  emettendo una particella virtuale ( $\hat{\phi}(y)\hat{\phi}(w)$ ), la quale nel punto  $y$  emette la coppia di particella ( $\hat{a}_{q_2}\hat{\psi}^\dagger(y)$ ) e antiparticella ( $\hat{b}_{q_1}\hat{\psi}(y)$ ).



**Figura 10.21:** Raffigurazione canale  $t$

Ovviamente possiamo raffigurare i diagrammi di Feynmann nello spazio degli impulsi, come possiamo vedere nelle figure 10.24, 10.25 ed 10.26, le cui

<sup>9</sup>Le variabili di Mandelstam  $t$ ,  $u$  ed  $s$  sono degli invarianti di Lorentz e si utilizzano per nominare questo tipo di diagrammi per via dei vari impulsi conservati in ciascuno.

Figura 10.22: Raffigurazione canale  $u$ Figura 10.23: Raffigurazione canale  $s$ 

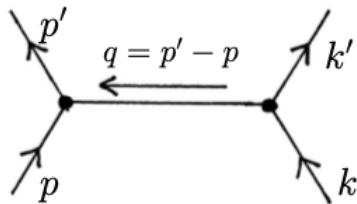
ampiezze di probabilità sono:

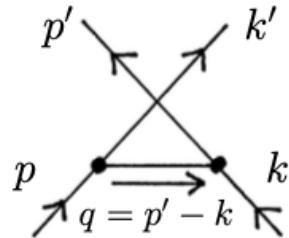
$$\mathcal{A}_t^{(2)} \propto (-ig)^2 \frac{i}{t - \mu^2 + i\epsilon} (2\pi)^4 \delta^4(p' + k' - p - k) \quad (10.6.40)$$

$$\mathcal{A}_u^{(2)} \propto (-ig)^2 \frac{i}{u - \mu^2 + i\epsilon} (2\pi)^4 \delta^4(p' + k' - p - k) \quad (10.6.41)$$

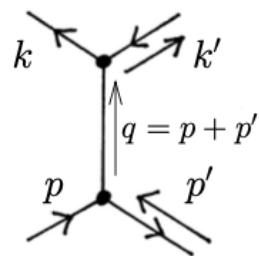
$$\mathcal{A}_s^{(2)} \propto (-ig)^2 \frac{i}{s - \mu^2 + i\epsilon} (2\pi)^4 \delta^4(k + k' - p - p'). \quad (10.6.42)$$

$$(10.6.43)$$

Figura 10.24: Raffigurazione canale  $t$  nello spazio degli impulsi



**Figura 10.25:** Raffigurazione canale  $u$  nello spazio degli impulsi



**Figura 10.26:** Raffigurazione canale  $s$  nello spazio degli impulsi

#### 10.6.4 Gell-Mann low theorem

Vediamo in questa rapida sezione un teorema molto importante per determinare uno sviluppo perturbativo del propagatore in una teoria interagente. Potrei aver dimenticato, molti, cappellini agli operatori, quindi ricordiamo che le hamiltoniane e gli operatori di evoluzione temporale hanno ruolo operatore. Il riferimento è il capitolo §4.2 del Peskin e Schroeder [7].

Quando la teoria che studiamo è una teoria interagente, abbiamo visto che il propagatore è definito come valore di aspettazione sullo stato fondamentale  $|\Omega\rangle$ , ricorda la definizione (10.2.4), che *non* coincide con lo stato di vuoto  $|0\rangle$ . Ricordiamo anche che: il propagatore che abbiamo visto è la funzione di Green a due punti  $G^{(2)}$ , rappresenta l'ampiezza di probabilità che una particella (eccitazione del campo) si propaghi da  $y^\mu$  a  $x^\mu$  dello spaziotempo e ci permette di studiare l'evoluzione spaziotemporale del sistema; e che essendo  $|\Omega\rangle$  lo stato fondamentale, allora è definito da:

$$H |\Omega\rangle = E_0 |0\rangle . \quad (10.6.44)$$

Il punto di questa sezione è che il propagatore, in teoria interagente, non può essere calcolato esattamente (come fatto per la teoria libera), ma solo in modo approssimato utilizzando la teoria perturbativa. Per fare questo tipo di conti dovremo avere un'hamiltoniana del tipo:

$$H = H_0 + H' \quad (10.6.45)$$

con  $H_0$  hamiltoniana di teoria libera (non interagente), che sappiamo risolvere esattamente, e  $H'$  perturbazione che dev'essere piccola rispetto  $H_0$  e breve nel tempo.

L'obiettivo che ci poniamo a questo punto è quello di esprimere il propagatore della teoria interagente:

$$\langle \Omega | T[\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)] | \Omega \rangle \quad (10.6.46)$$

in funzione dello stato di vuoto  $|0\rangle$  e dei campi  $\hat{\phi}$  scritti in rappresentazione di interazione, dunque che evolvono alla Heisemberg con  $H_0$ . È utile rivedere l'Appendice H. Dobbiamo quindi:

1. Trovare la relazione che lega lo stato fondamentale  $|\Omega\rangle$  della teoria interagente, con  $|0\rangle$ , lo stato di vuoto, nonché lo stato fondamentale della teoria libera, quindi l'autostato di  $H_0$  corrispondente all'energia più bassa dello spettro ( $E = 0$ ).
2. Esprimere i campi  $\hat{\phi}$  in funzione dei corrispondenti operatori di campo  $\hat{\phi}_I$ , scritti in rappresentazione di interazione.

Cominciamo ad analizzare e a studiare il punto 2. Ricordando l'evoluzione temporale degli operatori in rappresentazione di interazione possiamo scrivere:

$$\hat{\phi}_I(t, \vec{x}) \equiv e^{i\hat{H}_0(t-t_0)} \hat{\phi}(t_0, \vec{x}) e^{-i\hat{H}_0(t-t_0)} \quad (10.6.47)$$

che invertendola ci da:

$$\hat{\phi}(t_0, \vec{x}) = e^{-i\hat{H}_0(t-t_0)} \hat{\phi}_I(t, \vec{x}) e^{+i\hat{H}_0(t-t_0)} \quad (10.6.48)$$

in cui  $\hat{\phi}(t_0, \vec{x})$  è l'operatore di campo ad un'istante  $t_0$  fissato. Ovviamen-  
te però a noi non interessa il campo  $\hat{\phi}(t_0, \vec{x})$ , bensì siamo interessati ad  
un'espressione per il campo  $\hat{\phi}(t, \vec{x})$ , che possiamo ottenere facendo evolare  
 $\hat{\phi}(t_0, \vec{x})$  da  $t_0$  fino  $t$ :

$$\hat{\phi}(t, \vec{x}) = e^{iH(t-t_0)} \hat{\phi}(t_0, \vec{x}) e^{-iH(t-t_0)} \quad (10.6.49)$$

$$= e^{iH(t-t_0)} e^{-i\hat{H}_0(t-t_0)} \hat{\phi}_I(t, \vec{x}) \underbrace{e^{+i\hat{H}_0(t-t_0)} e^{-iH(t-t_0)}}_{\hat{U}_I(t, t_0)} \quad (10.6.50)$$

$$= \hat{U}_I^\dagger(t, t_0) \hat{\phi}_I(t, \vec{x}) \hat{U}_I(t, t_0) \quad (10.6.51)$$

avendo definito l'operatore di evoluzione temporale nella rappresentazione di interazione come:

$$\hat{U}_I(t, t_0) = e^{+i\hat{H}_0(t-t_0)} e^{-iH(t-t_0)}. \quad (10.6.52)$$

L'espressione (10.6.51) ci permette di esprimere il campo (completo e generico)  $\hat{\phi}(x^\mu)$  in funzione di  $\hat{\phi}_I$ , per il quale conosciamo l'espressione in

termini di operatori di scala  $\hat{a}$  e  $\hat{a}^\dagger$  (visto che evolve secondo  $H_0$  e quindi che sappiamo diagonalizzare).

Siamo quindi risciti ad ottenere il punto 2, ma parliamo un'attimo della definizione dell'operatore di evoluzione temporale. Ovviamente la condizione di unitarietà:

$$\hat{U}_I(t_0, t_0) = \mathbb{1} \quad (10.6.53)$$

è soddisfatta, ma anche l'evoluzione temporale è quella che ci si aspetta nella rappresentazione di interazione, come si può verificare facendo la derivata temporale:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \hat{U}_I(t, t_0) = e^{i\hat{H}_0(t-t_0)} (\hat{H} - \hat{H}_0) e^{-i\hat{H}(t-t_0)} \quad (10.6.54)$$

$$= e^{i\hat{H}_0(t-t_0)} \hat{H}' \underbrace{e^{-i\hat{H}_0(t-t_0)}}_1 \times e^{i\hat{H}_0(t-t_0)} e^{-i\hat{H}(t-t_0)} \quad (10.6.55)$$

$$= \underbrace{e^{i\hat{H}_0(t-t_0)} \hat{H}' e^{-i\hat{H}_0(t-t_0)}}_{\equiv \hat{H}_I(t)} \times \underbrace{e^{i\hat{H}_0(t-t_0)} e^{-i\hat{H}(t-t_0)}}_{\equiv \hat{U}_I(t, t_0)} \quad (10.6.56)$$

$$i \frac{\partial}{\partial t} \hat{U}_I(t, t_0) = \hat{H}_I(t) \hat{U}_I(t, t_0). \quad (10.6.57)$$

Notiamo anche che se  $\hat{H}_I(t)$  fosse un numero e non un'operatore, oltretutto dipendente dal tempo, allora la soluzione all'equazione differenziale (10.6.57) sarebbe semplicemente:

$$\hat{U}_I(t, t_0) = e^{-i \int_{t_0}^t dt' H_I(t')} \quad (10.6.58)$$

come ben sappiamo. Però come abbiamo visto dobbiamo essere cauti vista la natura operatoriale di  $\hat{H}_I$ , infatti la notazione esponenziale di  $\hat{U}_I(t, t_0)$  è solamente simbolica e la utilizziamo per sottointendere che essa esprime l'intero sviluppo in serie (che ha senso solo se  $H_I$  è piccolo e dunque se  $H'$  lo è). Inoltre, la dipendenza dal tempo di  $\hat{H}_I(t)$  non è banale, il che è il motivo per cui possiamo dire che  $\hat{H}_I(t_1)$  non commuta con  $\hat{H}_I(t_2)$ , e nei termini dello sviluppo in serie (di ordine maggiore di 2) dobbiamo stare attenti all'ordinamento dei prodotti. Nei propagatori, per rispettare la causalità, abbiamo bisogno che i tempi siano ordinati da destra a sinistra in modo crescente, motivo per cui modifichiamo leggermente la definizione esponenziale di  $\hat{U}_I(t, t_0)$  e scriviamo:

$$\hat{U}_I(t, t_0) \equiv T \left[ \exp \left\{ -i \int_{t_0}^t dt' \hat{H}_I(t') \right\} \right] \quad (10.6.59)$$

$$= \mathbb{1} + (-i) \int_{t_0}^t dt_1 \hat{H}_I(t_1) + \frac{(-i)^2}{2!} \int_{t_0}^t dt_2 dt_3 T[\hat{H}_I(t_2)] + \dots \quad (10.6.60)$$

che non è altro che lo sviluppo di Dyson (sviluppo perturbativo).

Concentriamoci ora sul punto 1 e quindi nel cercare una relazione tra  $|\Omega\rangle$  e  $|0\rangle$ .

Abbiamo già detto che  $|0\rangle$  è lo stato fondamentale dell'hamiltoniana libera  $H_0$ , ossia l'autostato corrispondente all'energia minima, dunque a  $E = 0$ , e per cui vale:

$$\hat{H}_0 |0\rangle = 0. \quad (10.6.61)$$

Chiamiamo  $\{|n\rangle\}$  gli autostati di  $H$  (intesa come somma di parte libera e di interazione), essi formano un set completo per cui vale:

$$\sum_n |n\rangle \langle n| = \mathbb{1}. \quad (10.6.62)$$

Lo stato  $|\Omega\rangle$  è lo stato fondamentale della teoria interagente, è autostato di  $H$  e corrisponde all'energia  $E_0$ :

$$\hat{H} |\Omega\rangle = E_0 |\Omega\rangle \quad E_0 = \langle \Omega | \hat{H} | \Omega \rangle. \quad (10.6.63)$$

Partiamo dallo stato  $|\Omega\rangle$ , che sarà una sovrapposizione lineare di (infiniti) autostati di  $H_0$  (e dell'impulso), uno dei quali sarà  $|0\rangle$ . Dal momento che  $\hat{H}'$  è piccola, lo stato  $|\Omega\rangle$  avrà sicuramente un overlap con  $|0\rangle$ , e quindi siamo sereni nel dire che:

$$\langle \Omega | 0 \rangle \neq 0. \quad (10.6.64)$$

Possiamo partire da  $|0\rangle$ , e farlo evolvere nel tempo con  $H$  ottenendo la serie:

$$\sum_n e^{-iE_n T} \langle n | 0 \rangle |n\rangle \quad (10.6.65)$$

sfruttando proprio l'overlap tra  $|\Omega\rangle$  e  $|0\rangle$ , possiamo separare la serie nel suo termine ad energia più basso, ovvero  $E_0$  corrispondente a  $|n=0\rangle = |\Omega\rangle$ , e tutti gli altri:

$$e^{-iHT} |0\rangle = e^{-iE_0 T} |\Omega\rangle \langle \Omega | 0 \rangle + \sum_{n \neq 0} e^{-iE_n T} |n\rangle \langle n | 0 \rangle \quad (10.6.66)$$

che possiamo notare, siccome  $E_0 < E_n \forall n \geq 1$ , se mandiamo  $T \rightarrow \infty$ , in una direzione immaginaria generica, allora possiamo trascurare tutti i termini con  $n \neq 0$ . Invertendo la relazione (10.6.66) troviamo:

$$|\Omega\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} (e^{-iE_0 T} \langle \Omega | 0 \rangle)^{-1} e^{-iHT} |0\rangle. \quad (10.6.67)$$

Però, dal momento in cui stiamo facendo il limite per  $T$  molto grande, se lo shiftassimo di una quantità  $t_0$  finita, non altereremmo il risultato:

$$|\Omega\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} (e^{-iE_0(T+t_0)} \langle \Omega | 0 \rangle)^{-1} e^{-iH(T+t_0)} |0\rangle. \quad (10.6.68)$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} (e^{-iE_0(T+t_0)} \langle \Omega | 0 \rangle)^{-1} \underbrace{e^{-iH(t_0-(-T))} e^{+iH_0(t_0-(-T))}}_{\hat{U}_I(t_0, -T)} |0\rangle \quad (10.6.69)$$

$$|\Omega\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} (e^{-iE_0(T+t_0)} \langle \Omega | 0 \rangle)^{-1} \hat{U}_I(t_0, -T) |0\rangle \quad (10.6.70)$$

in cui nel passaggio (10.6.69) abbiamo aggiunto l'esponenziale  $e^{+iH_0(t_0-(-T))}$ , in modo lecito, poiché tanto  $e^{+iH_0(t_0-(-T))} |0\rangle \sim \mathbb{1} |0\rangle$  nel limite di grandi  $T$  visto che  $\hat{H}_0 |0\rangle$ .

L'equazione (10.6.70) ci dice che possiamo ottenere  $|\Omega\rangle$  semplicemente evolvendo lo stato di vuoto  $|0\rangle$  da un tempo  $-T$  molto grande, fino al tempo  $t_0$  (finito) tramite l'operatore di evoluzione temporale  $\hat{U}_I(t_0, -T)$ . In modo analogo possiamo scrivere:

$$\langle \Omega | = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \langle 0 | \hat{U}_I(T, t_0) (e^{-iE_0(T-t_0)} \langle 0 | \Omega \rangle)^{-1} \quad (10.6.71)$$

facendo attenzione al fatto che in questo caso l'evoluzione porta  $|0\rangle$  da  $t_0$  a  $T$ .

Possiamo finalmente mettere insieme tutti e due i risultati ottenuti e scrivere il propagatore:

$$\langle \Omega | \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y) | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} (| \langle 0 | \Omega \rangle |^2 e^{-iE_0 2T})^{-1} \langle 0 | \hat{U}_I(T, t_0) [\hat{U}_I(x^0, t_0)]^\dagger \hat{\phi}_I(x) \hat{U}_I(x^0, t_0) \times \quad (10.6.72)$$

$$[\hat{U}_I(y^0, t_0)]^\dagger \hat{\phi}_I(y) \hat{U}_I(y^0, t_0) \hat{U}(t_0, -T) |0\rangle \quad (10.6.73)$$

$$\langle \Omega | \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y) | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} (| \langle 0 | \Omega \rangle |^2 e^{-iE_0 2T})^{-1} \langle 0 | \hat{U}_I(T, t_0) \hat{\phi}_I(x) \hat{U}(x^0, y^0) \hat{\phi}_I(y) \hat{U}_I(y^0, -T) |0\rangle. \quad (10.6.74)$$

Il fattore di normalizzazione si può riscrivere, sfruttando il fatto che gli auto-stati di  $\hat{H}$  (e  $|\Omega\rangle$  in particolare) sono ortonormali (usa l'equazione (10.6.70) insieme a (10.6.71)):

$$1 = \langle \Omega | \Omega \rangle = (| \langle 0 | \Omega \rangle |^2 e^{-iE_0 2T})^{-1} \langle 0 | \hat{U}(T, t_0) \hat{U}(t_0, -T) |0\rangle \quad (10.6.75)$$

ricaviamo essere:

$$(| \langle 0 | \Omega \rangle |^2 e^{-iE_0 2T})^{-1} = \frac{1}{\langle 0 | \hat{U}(T, t_0) \hat{U}(t_0, -T) |0\rangle}. \quad (10.6.76)$$

Possiamo quindi scrivere (10.6.74) come:

$$\langle \Omega | \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y) | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{\langle 0 | \hat{U}_I(T, t_0) \hat{\phi}_I(x) \hat{U}(x^0, y^0) \hat{\phi}_I(y) \hat{U}_I(y^0, -T) | 0 \rangle}{\langle 0 | \hat{U}(T, -T) | 0 \rangle} \quad (10.6.77)$$

in cui possiamo notare che i campi in ambo i membri sono temporalmente ordinati, rispettando l'assunzione  $y^0 > x^0$ . Per generalizzare a qualsiasi  $x^0$  ed  $y^0$  possiamo scrivere:

$$\langle \Omega | T[\hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y)] | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{\langle 0 | \hat{\phi}_I(x) \hat{\phi}_I(y) T \left[ e^{-i \int_{-T}^{+T} dt \hat{H}_I(t)} \right] | 0 \rangle}{\langle 0 | T \left[ e^{-i \int_{-T}^{+T} dt \hat{H}_I(t)} \right] | 0 \rangle} \quad (10.6.78)$$

che va sotto il nome di **Gell-Mann Low theorem** o *reduction formula*.

Il teorema (10.6.78) può anche essere riscritto in modo elegante utilizzando la matrice di scattering  $\hat{S}$ :

$$\hat{S} \equiv \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} T \left[ e^{-i \int_{-T}^{+T} dt \hat{H}_I(t)} \right] \quad (10.6.79)$$

con cui assume la forma:

$$\langle \Omega | T[\hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y)] | \Omega \rangle = \frac{\langle 0 | T[\hat{\phi}_I(x) \hat{\phi}_I(y) \hat{S}] | 0 \rangle}{\langle 0 | \hat{S} | 0 \rangle}. \quad (10.6.80)$$

# Appendici

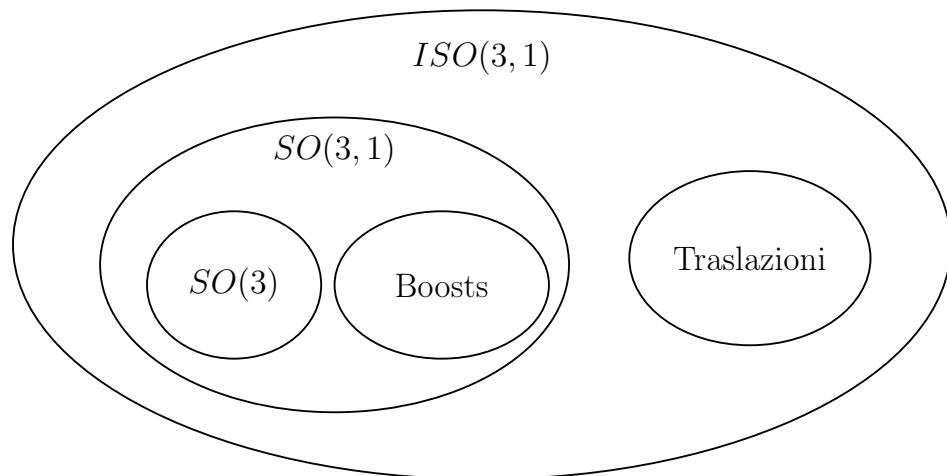


## Appendice A

### Riepilogo risultati

Elenco in questa appendice tutti i risultati trovati durante il corso.

#### Teoria dei gruppi



**Figura A.1:** Schema riassuntivo gruppi.

### Meccanica Analitica

$S(\tau_1, \tau_2, [\phi]) \equiv \int_{\tau_1}^{\tau_2} d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$	Azione
$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_\mu \phi]} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$	Equazione di Eulero-Lagrange
$j^\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_\mu \phi]} \delta \phi + \mathcal{L} \delta x^\mu$	Corrente di Noether
$Q_a \equiv \int d^3x j_a^0(\vec{x}, t)$	Carica di Noether
$: \hat{H} :$	Hamiltoniana normal-ordered.

### Operatori di creazione e distruzione

$$\begin{aligned}
 [\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}] &= 0 \\
 \left[ \hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^\dagger \right] &= \left[ \hat{b}_k, \hat{b}_{k'}^\dagger \right] = \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \\
 \left[ \hat{a}_k^\dagger, \hat{a}_{k'}^\dagger \right] &= 0 \\
 \left\{ \hat{a}_s(\vec{p}), \hat{a}_r^\dagger(\vec{p}') \right\} &= \left\{ \hat{b}_s(\vec{p}), \hat{b}_r^\dagger(\vec{p}') \right\} = \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \delta_{sr} \\
 \left\{ \hat{a}_s(\vec{p}), \hat{a}_r(\vec{p}') \right\} &= \left\{ \hat{a}_s^\dagger(\vec{p}), \hat{a}_r^\dagger(\vec{p}') \right\} = 0 \quad \forall s, r \\
 \left\{ \hat{b}_s(\vec{p}), \hat{b}_r(\vec{p}') \right\} &= \left\{ \hat{b}_s^\dagger(\vec{p}), \hat{b}_r^\dagger(\vec{p}') \right\} = 0 \quad \forall s, r.
 \end{aligned}$$

### Campo Scalare neutro

$$\begin{aligned}
 (\square + m^2) \phi &= 0 \\
 \hat{\phi}(x) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega_k}} \left[ \hat{a}_k e^{-ikx} + \hat{a}_k^\dagger e^{ikx} \right] \\
 \hat{\Pi}(x) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega_k}} i\omega_k \left[ -\hat{a}_k e^{-ikx} + \hat{a}_k^\dagger e^{ikx} \right] \\
 \left\{ \begin{array}{l} \left[ \hat{\phi}(\vec{x}, t), \hat{\Pi}(\vec{y}, t) \right] = i\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \\ \left[ \hat{\phi}(\vec{x}, t), \hat{\phi}(\vec{y}, t) \right] = 0 \\ \left[ \hat{\Pi}(\vec{x}, t), \hat{\Pi}(\vec{y}, t) \right] = 0 \end{array} \right. \\
 : \hat{H} : &= \int d^3k \omega_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k = \int d^3x \omega_k \hat{n}_k \\
 : P^i : &= \int d^3k k^i \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k = \int d^3k k^i \hat{n}_k.
 \end{aligned}$$

### Campo scalare carico

$$\begin{aligned}
\hat{\phi}(x) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_k}} \left[ \hat{a}_k e^{-ikx} + \hat{b}_k^\dagger e^{+ikx} \right] \\
\hat{\phi}^\dagger(x) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_k}} \left[ \hat{a}_k^\dagger e^{+ikx} + \hat{b}_k e^{-ikx} \right] \\
&\left\{ \begin{array}{l} \left[ \hat{\phi}(\vec{x}, t), \hat{\Pi}_\phi(\vec{y}, t) \right] = i\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \\ \left[ \hat{\phi}^\dagger(\vec{x}, t), \hat{\Pi}_{\phi^\dagger}(\vec{y}, t) \right] = i\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \\ \text{Altri} = 0 \end{array} \right. \\
&: \hat{H} := \int d^3k \omega_k \left( \hat{n}_k^a + \hat{n}_k^b \right) \\
&: \hat{Q} := \int d^3k \left( \hat{n}_k^b - \hat{n}_k^a \right).
\end{aligned}$$

### Campo Spinoriale

$$\begin{aligned}
&(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0 \\
&\begin{cases} i\left(\partial_0 + \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}\right)\psi_R(x) = 0 \\ i\left(\partial_0 - \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}\right)\psi_L(x) = 0 \end{cases} \quad \text{Equazioni di Weyl} \\
&h = \frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} \quad \text{Operatore di elicità} \\
&\vec{\Sigma} = \frac{2}{m}\vec{W} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \quad \text{Operatore di spin} \\
&\hat{\psi}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2E_p}} \sum_{s=1}^2 \left( u_s(\vec{p})\hat{a}_s(\vec{p})e^{-ipx} + v_s(\vec{p})\hat{b}_s^\dagger(\vec{p})e^{+ipx} \right) \\
&\hat{\bar{\psi}}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2E_p}} \sum_{s=1}^2 \left( \bar{u}_s(\vec{p})\hat{a}_s^\dagger(\vec{p})e^{+ipx} + \bar{v}_s(\vec{p})\hat{b}_s(\vec{p})e^{-ipx} \right) \\
&\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \psi_s(\vec{x}, t), \psi_{s'}^\dagger(\vec{y}, t) \right\} = \delta^3(\vec{x} - \vec{y})\delta_{ss'} \\ \left\{ \psi_s(\vec{x}, t), \psi_{s'}(\vec{y}, t) \right\} = \left\{ \psi_s^\dagger(\vec{x}, t), \psi_{s'}^\dagger(\vec{y}, t) \right\} = 0 \end{array} \right. \\
&: \hat{H} := \int d^3p \sum_{s=1}^2 E_p \left( \hat{n}_{sp}^a + \hat{n}_{sp}^b \right) \\
&: \vec{P} := \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \sum_s \vec{p} \left( \hat{n}_{sp}^a + \hat{n}_{sp}^b \right) \\
&: Q := \int d^3p \sum_s \left( \hat{n}_{sp}^a - \hat{n}_{sp}^b \right).
\end{aligned}$$

## Campo vettoriale

### Elettromagnetismo massivo

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2A_\mu A^\mu \\
(\square + m^2)A^\nu &= 0 \\
\begin{cases} \Pi^0 = 0 \\ \Pi^i = -F^{0i} = E^i = \partial^i A^0 - \partial^0 A^i \end{cases} \\
\hat{A}^\mu(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda=1}^3 \left[ \epsilon_\lambda^\mu(p)\hat{a}_\lambda(\vec{p})e^{-ipx} + \epsilon_\lambda^{\mu*}(p)\hat{a}_\lambda^\dagger(\vec{p})e^{ipx} \right] \\
p_\mu \epsilon_\lambda^\mu(p) &= 0 \quad \text{Condizione polarizzazione} \\
:\hat{H}: &= \int d^3p E_p \sum_{\lambda=1}^3 \hat{a}_\lambda^\dagger(\vec{p})\hat{a}_\lambda(\vec{p}).
\end{aligned}$$

### Elettromagnetismo mass-less

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) \\
\begin{cases} \Pi^0 = 0 \\ \Pi^i = -F^{0i} = E^i = \partial^i A^0 - \partial^0 A^i \end{cases} \\
\hat{A}^\mu(x) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2E_k}} \sum_{\lambda=1}^2 \left( \epsilon_\lambda^\mu(k)\hat{a}_\lambda(\vec{k})e^{-ikx} + \epsilon_\lambda^{\mu*}(k)\hat{a}_\lambda^\dagger(\vec{k})e^{ikx} \right) \\
[A^\mu(t, \vec{x}), A^\nu(t, \vec{y})] &= 0 \\
[\Pi^i(t, \vec{x}), \Pi^j(t, \vec{y})] &= 0 \\
[\Pi^i(t, \vec{x}), A^0(t, \vec{y})] &= 0 \\
[\Pi^i(t, \vec{x}), A^j(t, \vec{y})] &= -i\delta_T^{ij}(\vec{x} - \vec{y}) \\
\left[ \hat{a}_\lambda(\vec{k}), \hat{a}_\lambda^\dagger(\vec{k}') \right] &= \delta_{\lambda\lambda'}\delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \\
:\hat{H}: &= \int d^3k \sum_{\lambda=1}^2 E_k \hat{a}_\lambda^\dagger(\vec{k})\hat{a}_\lambda(\vec{k}) \\
:\vec{P}: &= \int d^3x (\vec{E} \times \vec{B}) = \int d^3k \vec{k} \sum_{\lambda=1}^2 \hat{a}_\lambda^\dagger(\vec{k})\hat{a}_\lambda(\vec{k}) \\
i\Delta_F^{\text{Tr}}(x - y)_{\mu\nu} &= i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2 + i\epsilon} \sum_{\lambda=1}^2 \epsilon_\mu^\lambda(k)\epsilon_\nu^{\lambda*}(k).
\end{aligned}$$

## Propagatori liberi

### Campo scalare neutro e carico

$$\begin{aligned}\Delta(x-y) &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 (2E_p)} \left[ \theta(x^0 - y^0) e^{-ip(x-y)} + \theta(y^0 - x^0) e^{+ip(x-y)} \right] \\ \Delta(x-y) &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i e^{-ip(x-y)}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \\ \tilde{\Delta}(p) &= \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}.\end{aligned}$$

### Campo spinoriale

$$\begin{aligned}S_F(x-y) &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \\ \tilde{S}_F(p) &= \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2}.\end{aligned}$$

## Teoria perturbativa

Propagatore:

$$G(x, y) = \langle \Omega | T\hat{\phi}(x)\hat{\phi}^\dagger(y) | \Omega \rangle$$

Aampiezza di transizione:

$$\mathcal{A} = \underset{\text{out}}{\text{non int}} \langle q_1, q_2 | \hat{S} | p_1 p_2 \rangle_{\text{in}}^{\text{non int}}$$

Matrice di scattering:

$$\hat{S} = \hat{U}_I(t, -t) \quad , \quad \text{con } t \rightarrow +\infty$$

Sviluppo di Dyson:

$$\hat{S} = T \left[ e^{-i \int d^4 x \hat{\mathcal{H}}_I(x)} \right]$$

Teorema di Wick:

$$T[\hat{A}\hat{B}\hat{C} \dots \hat{Z}] = N \left[ \hat{A}\hat{B}\hat{C} \dots \hat{Z} + \sum_{\substack{\text{tutte le possibili} \\ \text{contrazioni di}}} \hat{A}\hat{B}\hat{C} \dots \hat{Z} \right]$$

Teorema di Gell-Mann Low:

$$\langle \Omega | T[\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)] | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{\langle 0 | \hat{\phi}_I(x)\hat{\phi}_I(y) T \left[ e^{-i \int_{-T}^{+T} dt \hat{H}_I(t)} \right] | 0 \rangle}{\langle 0 | T \left[ e^{-i \int_{-T}^{+T} dt \hat{H}_I(t)} \right] | 0 \rangle}.$$



# Appendice B

## Unità naturali

Studiamo in questa sezione cosa si intende con unità naturali. In Fisica è molto comune utilizzare le *God given units*, ossia, le cosiddette unità naturali. I tipi indipendenti di grandezze sono la lunghezza [ $L$ ], il tempo [ $T$ ], la massa [ $M$ ] e - se consideriamo anche la termodinamica e la meccanica statistica - la temperatura [ $T$ ]. In natura esistono delle costanti dimensionali universali, quali la velocità della luce  $c$ , la costante di Plank ridotta  $\hbar$ , la costante gravitazionale di Newton  $G_N$  e la costante di Boltzmann  $k$ . Usualmente vengono definite come unità naturali quelle in cui si pone:

$$\hbar = c = 1 \quad (\text{B.0.1})$$

e di conseguenza quando si modificano le quantità (in unità standard):

$$\begin{cases} \hbar = 6.66 \cdot 10^{-22} \text{ MeV} \cdot \text{s} \\ c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \\ \hbar c \sim 200 \text{ MeV} \cdot \text{fm} \end{cases} \implies \begin{cases} \hbar = 1 \\ c = 1 \\ \hbar c = 1. \end{cases}$$

Dire che la velocità della luce è una grandezza unitaria adimensionale implica che le unità di lunghezza e tempo sono equivalenti:

$$[L] = [T] \quad (\text{B.0.2})$$

di conseguenza anche:<sup>1</sup>

$$[E] = [\vec{p}] = [M] \quad (\text{B.0.4})$$

Per una forza  $F$  si ha:

$$[F] = [EL^{-1}] = [ML^{-1}] \quad (\text{B.0.5})$$

---

<sup>1</sup>Come conseguenza della relazione tra massa ed energia della Relatività Speciale:

$$E^2 = p^2 + m^2 \quad (\text{B.0.3})$$

per cui una quantità, tipo  $\hbar$ , che ha le dimensioni di un'azione, ovvero  $[ET]$ , in unità naturali è:

$$[\hbar] = [ET] = [ML] = 1 \implies [M] = [L^{-1}]. \quad (\text{B.0.6})$$

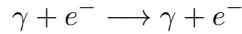
Dalle relazioni viste tra le grandezze si ha solo una di esse realmente indipendente. Scegliendo la lunghezza come indipendente vale:

$$[L] = [T] , [E] = [\vec{p}] = [M] = [L^{-1}] , [F] = [L^{-2}]. \quad (\text{B.0.7})$$

Tipicamente, in QFT, le sezioni d'urto sono espresse in unità naturali, ma ciò non è molto comodo da utilizzare nel mondo fisico, poiché a noi servono unità standard. In generale (non solo per le sezioni d'urto), ricordando quali siano le unità di misura di  $\hbar$  e  $c$  è possibile passare dall'espressione di una grandezza in unità naturali in una sua espressione in unità del S.I. moltiplicando opportune potenze di  $\hbar$  e  $c$ . Si ha:

$$[\hbar] = ML^2T^{-1} ; [c] = LT^{-1}.$$

Vediamo un esempio. Prendiamo la sezione d'urto di Thomson in unità naturali e rendiamola in unità standard. Abbiamo il processo:



con l' $e^-$  libero e la sezione d'urto:

$$\sigma_T = \frac{8}{3}\pi \frac{\alpha^2}{m_e^2} \quad (\text{B.0.8})$$

che riscriviamo come:

$$\sigma_T = \frac{8}{3}\pi \frac{\alpha^2}{m_e^2} \hbar^x c^y \quad (\text{B.0.9})$$

di cui analizzando le dimensioni:

$$\begin{aligned} L^2 &= M^{-2} (ML^2T^{-1})^x (LT^{-1})^y \\ L^2 &= M^{x-2} L^{2x+y} T^{-x-y}. \end{aligned}$$

Dobbiamo quindi risolvere il sistema:

$$\begin{cases} L : 2 = 2x + y \\ M : 0 = x - 2 \\ T : 0 = -x - y \end{cases} \implies \begin{cases} x = -y \\ x = 2 \\ y = -2. \end{cases}$$

Dunque la sezione d'urto è:

$$\sigma_T = \frac{8}{3}\pi \frac{\alpha^2}{m_e^2} \left(\frac{\hbar}{c}\right)^2 = \frac{8\pi}{3} \frac{\alpha^2}{(m_e c^2)^2} (\hbar c)^2 \sim 64 \text{ fm}^2 = 64 \cdot 10^{-2} \text{ b.} \quad (\text{B.0.10})$$

## Appendice C

# Nozioni gruppi

Raccolgo in questa appendice una brevissima parte riguardo nozioni base riguardo la teoria dei gruppi.

### C.1 Notazioni

- **G** : generale.
- **S** : speciale, ovvero, un gruppo in cui il determinante della rappresentazione matriciale di un generico elemento è uguale a 1.
- **L** : lineare, ovvero, il generico elemento agisce su uno spazio lineare.
- **O** : ortogonale, ovvero,  $G^T G = \mathbb{1}$ , e sono gruppi che garantiscono la conservazione del prodotto scalare.
- **R** : nella rappresentazione matriciale di un generico elemento ci sono solo numeri reali.
- **C** : nella rappresentazione matriciale di un generico elemento vi sono soltanto numeri complessi.
- **U** : il generico elemento è unitario, ovvero,  $G^\dagger G = \mathbb{1}$ .
- **(n)** : indica la dimensione dello spazio  $\mathbb{R}^n$ , su cui agisce la rappresentazione fondamentale. Per spazi a metrica non definita si ha la notazione **(m,n)**, dove nella metrica avremo  $m$  segni negativi ed  $n$  positivi (o viceversa a seconda della convenzione).

### C.2 Gruppo $\mathbb{Z}_2$

Viene chiamato **gruppo degli interi modulo 2** i cui elementi sono:

$$\mathbb{Z}_2 = \{-1, 1\} \quad (\text{C.2.1})$$

ed è un gruppo abeliano.

L'utilità del gruppo  $\mathbb{Z}_2$  risiede anche nella trattazione dei gruppi di Lie. L'omeomorfismo:

$$SL(2, \mathbb{C}) \longrightarrow SO(3, 1) \quad (\text{C.2.2})$$

è due ad 1, ovvero, ogni elemento di  $SO(3, 1)$  ha due preimmagini in  $SL(2, \mathbb{C})$ . Il nucleo dell'omeomorfismo è isomorfo a  $\mathbb{Z}_2$ , ed è generato dall'elemento  $-\mathbb{1} \in SL(2, \mathbb{C})$ , poiché:

$$(-\mathbb{1}) \cdot (-\mathbb{1}) = \mathbb{1} \quad \text{e} \quad (-\mathbb{1}) \rightarrow \text{identità in } SO(3, 1). \quad (\text{C.2.3})$$

Quindi diciamo:

$$SO(3, 1) \cong \frac{SL(2, \mathbb{C})}{\mathbb{Z}_2}. \quad (\text{C.2.4})$$

Similmente, sappiamo che  $SU(2)$  è un doppio ricoprimento di  $SO(3)$ :

$$SO(3) \cong \frac{SU(2)}{\mathbb{Z}_2}. \quad (\text{C.2.5})$$

in cui anche qua il nucleo è  $\mathbb{Z}_2$  generato da  $(-\mathbb{1})$ .

Nella teoria delle rappresentazioni,  $\mathbb{Z}_2$  spesso indica una simmetria discreta, come parità o cambio di segno, o anche lo spin half (dove ruotare di  $2\pi$  cambia il segno dello spinore, vedi la sezione §2.3).

## Appendice D

# Complementi di Relatività Speciale

### D.1 Legame tra rapidità, massa di riposo ed energia di un sistema

In questa breve appendice vedremo come sono legate tra loro la rapidità  $\eta$ , la massa a risposo di un sistema  $m$  e la sua energia. Tutto ciò ci è utile per il capitolo §5.

Ricordiamo che gli elementi della matrice che opera un boost si esprimono in termini della rapidità  $\eta$ , ricordiamo ciò che abbiamo visto nella sezione §2.4.1, come segue:

$$\cosh \eta = \gamma \quad , \quad \sinh \eta = \beta \gamma \quad , \quad \tanh \eta = \beta \quad (\text{D.1.1})$$

con:

$$\beta = \frac{v}{c} \quad , \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (\text{D.1.2})$$

e abbiamo le matrici di boost che si possono scrivere, ad esempio con un boost lungo  $x$ , come:

$$\Lambda_{B_x} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \eta & -\sinh \eta & 0 & 0 \\ -\sinh \eta & \cosh \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{D.1.3})$$

Utilizzando la cinematica relativistica abbiamo la relazione:

$$E = \gamma m c^2 \quad , \quad |\vec{v}| = \frac{|\vec{p}|}{\gamma m} \quad , \quad \vec{p} = \gamma m \vec{v} \quad (\text{D.1.4})$$

esse ci permettono di trovare:

$$\cosh^2\left(\frac{\eta}{2}\right) = \frac{1}{2}(1 + \gamma) = \frac{1}{2}\frac{mc^2}{mc^2}(1 + \gamma) = \frac{1}{2}\frac{mc^2 + \gamma mc^2}{mc^2} \quad (\text{D.1.5})$$

$$= \frac{1}{2}\frac{E + mc^2}{mc^2} \quad (\text{D.1.6})$$

o in unità naturali:

$$\cosh\left(\frac{\eta}{2}\right) = \sqrt{\frac{E + m}{2m}}. \quad (\text{D.1.7})$$

Analogamente:

$$\sinh^2\left(\frac{\eta}{2}\right) = \frac{1}{2}(\gamma - 1) = \frac{1}{2}\frac{mc^2\gamma - mc^2}{mc^2} \quad (\text{D.1.8})$$

$$= \frac{1}{2}\frac{E - mc^2}{mc^2} \quad (\text{D.1.9})$$

e:

$$\sinh\left(\frac{\eta}{2}\right) = \sqrt{\frac{E - m}{2m}}. \quad (\text{D.1.10})$$

Possiamo ancora vedere:

$$\tanh\left(\frac{\eta}{2}\right) = \sqrt{\frac{E - m}{E + m}} = \frac{\sqrt{E^2 - m^2}}{E + m} = \frac{|\vec{p}|}{E + m}. \quad (\text{D.1.11})$$

## D.2 Generatori del gruppo di Lorentz

Verifichiamo brevemente che i generatori:

$$J_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}M^{jk} \quad , \quad K^i = M^{0i} = -M^{i0} \quad (\text{D.2.1})$$

siano i momenti angolari e i boost. Dovremo utilizzare la relazione:

$$(M^{\rho\sigma})^\mu_\nu = -i(g^{\mu\rho}g^\sigma_\nu - g^{\mu\sigma}g^\rho_\nu) \quad (\text{D.2.2})$$

e il fatto che  $g^\mu_\nu = g^{\mu\lambda}g_{\lambda\nu} = \delta^\mu_\nu$ . Calcoliamo, ad esempio,  $J_z$ , così da poterlo confrontare con la matrice trovata nella sezione §2.3, gli altri si calcolano in

modo analogo:

$$(J_z)^\mu_\nu = \frac{1}{2}(\varepsilon_{3jk}M^{jk})^\mu_\nu = \frac{1}{2}(\underbrace{\varepsilon_{312}}_{+1} M^{12} + \underbrace{\varepsilon_{321}}_{-1} \underbrace{M^{21}}_{-M^{12}})^\mu_\nu = (M^{12})^\mu_\nu \quad (\text{D.2.3})$$

$$= -i(g^{\mu 1}g^2_\nu - g^{\mu 2}g^1_\nu) \quad (\text{D.2.4})$$

$$= -i \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (0 \ 0 \ 1 \ 0) + i \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} (0 \ 1 \ 0 \ 0) \quad (\text{D.2.5})$$

$$= -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{D.2.6})$$

che possiamo vedere essere una matrice 4x4 in cui nella parte spaziale compare la matrice di rotazione attorno l'asse  $z$ . Analogamente:

$$(K^x)^\mu_\nu = (M^{01})^\mu_\nu \quad (\text{D.2.7})$$

$$= -i(g^{\mu 0}g^1_\nu - g^{\mu 1}g^0_\nu) \quad (\text{D.2.8})$$

$$= -i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (0 \ 1 \ 0 \ 0) + i \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (1 \ 0 \ 0 \ 0) \quad (\text{D.2.9})$$

$$= -i \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{D.2.10})$$

che possiamo vedere essere il generatore di un boost lungo l'asse  $x$ .

Determinate le espressioni matriciali si può verificare l'algebra del gruppo di Lorentz.



## Appendice E

# Le matrici $\gamma^\mu$ di Dirac

Come abbiamo potuto vedere nei capitoli §3, 4 e 5 le matrici di Dirac  $\gamma^\mu$  sono essenziali per tutta la parte della teoria della Teoria Quantistica dei Campi che riguarda campi spinoriali. Abbiamo già accennato a qualcosa nel corso dei capitoli in base a quello che ci serviva, ma raccogliamo in questa appendice tutto (o per lo meno tutto ciò che ci interessa ai fini del corso) ciò che riguarda  $\gamma^\mu$  dalla loro introduzione fino le loro proprietà. Le proprietà e le relazioni per le matrici  $\gamma^\mu$  sono moltissime e di solito si indica con *gammalogia* la branca della matematica che studia queste matrici, noi impareremo alcune cose man mano che svilupperemo la Teoria Quantistica dei Campi e non tutto. In tutti i libri di Teoria Quantistica dei Campi è presente un capitolo o un'appendice con elencate tutte le proprietà e relazioni delle matrici  $\gamma$ ; si veda ad esempio il capitolo 47 di Srednicki [10], il capitolo 3 di Peskin e Schroeder [7] o il capitolo 36 di Lancaster e Blundell [6].

### E.1 Giustificazioni fisiche

I motivi per cui abbiamo introdotto le matrici  $\gamma^\mu$  li abbiamo visti nella sezione §3.3.3, ma sono molteplici gli utilizzi, anche piuttosto importanti, delle matrici  $\gamma^\mu$ . Uno dei motivi per cui si utilizzano le matrici (E.2.2) è compatteare l'equazione di Dirac (4.3.40), definendo, per un generico operatore  $a$ , l'operatore:

$$\not{a} = \gamma^\mu a_\mu \quad (\text{E.1.1})$$

che viene chiamato *a-slash*. Quella di  $\not{a}$  si chiama anche **notazione di Feynmann**. Nel caso della derivata l'operatore è:

$$\not{\partial} = \gamma^\mu \partial_\mu = \left( \gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} - \gamma^1 \frac{\partial}{\partial x} - \gamma^2 \frac{\partial}{\partial y} - \gamma^3 \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (\text{E.1.2})$$

il quale permette di riscrivere (4.3.40) come:

$$(i\not{\partial} - m) \psi = 0 \quad (\text{E.1.3})$$

raccogliendo la  $i$  si ottiene quella che Dirac stesso<sup>1</sup> definì una delle equazioni più eleganti mai scritte:

$$(\not{d} + im) \psi = 0. \quad (\text{E.1.4})$$

Un'altra relazione comoda per cui si utilizzano le matrici (E.2.2) è quella che definisce:

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0 \quad (\text{E.1.5})$$

che, come abbiamo avuto modo di vedere nei vari capitoli, è di notevole importanza.

## E.2 Definizioni e rappresentazione di Weyl

Abbiamo cominciato ad introdurre le matrici  $\gamma$  non appena, nel capitolo §3.3.3, abbiamo osservato le proprietà di trasformazione sotto parità degli spinori left e right (qui abbiamo introdotto  $\gamma^0$ ) e quando abbiamo visto come proiettare solo una delle due componenti dello spinore  $\psi$  (abbiamo definito  $\gamma^5$ ).

Abbiamo definito le matrici di Dirac come un'estensione in uno spazio quadridimensionale delle matrici di Pauli<sup>2</sup>. Infatti avevamo scritto un quadrivettore:

$$\gamma^\mu = (\gamma^0, \vec{\gamma}) \quad (\text{E.2.2})$$

in cui l'indice  $\mu$  è un indice di Lorentz, quindi corre da 0 a 3, i cui elementi sono le nostre matrici.  $\gamma^\mu$  ha un'algebra specifica, in particolare di anticommutatori, che è:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \quad (\text{E.2.3})$$

e va sotto il nome di **algebra di Clifford**. Sono molto importanti le matrici  $\gamma$  anche per la Fisica che deriva dall'equazione di Dirac, infatti la rappresentazione irriducibile è data da matrici 4x4 e ciò si traduce nel fatto che gli spinori  $\psi(x)$  descritti dall'equazione di Dirac saranno oggetti a 4 componenti. Ovviamente, non esiste un'unica rappresentazione di  $\gamma^\mu$ , ma quella che va sotto il nome di rappresentazione del chiriale o **rappresentazione di Weyl**<sup>3</sup> definisce:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_2 \\ \mathbb{1}_2 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{E.2.4})$$

---

<sup>1</sup>Vedi il libro *La bellezza come metodo. Saggi e riflessioni su fisica e matematica* di P. Dirac.

<sup>2</sup>Che sono le solite:

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{E.2.1})$$

<sup>3</sup>Vedi la sezione §E.4 per discorso sulle differenze tra le varie rappresentazioni.

in cui  $\mathbb{1}_2$  è la matrice identità 2x2. La rappresentazione di Weyl permette di decomporre lo spinore  $\psi$  come:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \quad (\text{E.2.5})$$

ma questa distinzione di spinori left e right è valida in qualsiasi rappresentazione dell'algebra di Clifford, ed è invariante, poiché come impareremo vale  $[\gamma^5, \sigma^{\mu\nu}] = 0$  in cui  $\sigma^{\mu\nu}$  sono collegati ai generatori  $M^{\mu\nu}$  di Lorentz, il vantaggio di utilizzare la rappresentazione di Weyl, o chiriale, viene dal fatto che la fattorizzazione di  $\psi_L$  e  $\psi_R$  e la loro proiezione con gli operatori  $P_{R,L} = \frac{\mathbb{1} \pm \gamma^5}{2}$  è più comoda rispetto ad altre. Quindi, non è che sia meno conveniente utilizzare altre rappresentazioni delle matrici  $\gamma$ , semplicemente la chiralità, che vedremo essere una proprietà intrinseca dei campi spinoriali, è meno trasparente. Per comodità possiamo riscrivere la rappresentazione (E.2.4) in modo più compatto, definendo:

$$\sigma^\mu = (\mathbb{1}, \vec{\sigma}) \quad , \quad \bar{\sigma}^\mu = (\mathbb{1}, -\vec{\sigma}) \quad (\text{E.2.6})$$

che permette di scrivere:

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{E.2.7})$$

Possiamo aggiungere ancora un'altra matrice oltre il quadrirettore (E.2.2), che va sotto il nome di **matrice di chiralità**:

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} -\mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}. \quad (\text{E.2.8})$$

Essendo la matrice (E.2.8) aggiunta in un momento successivo e non facente parte del vettore (E.2.2), ci si potrebbe chiedere quale algebra soddisfi. Si può dimostrare che:

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0 \quad (\text{E.2.9})$$

ossia,  $\gamma^5$  anticommuta con tutte le matrici di Dirac  $\gamma^\mu$ . Potremmo anche chiederci se siamo in presenza di matrici hermitiane oppure no. Vediamo che vale:

$$(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0 \quad , \quad (\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i \quad , \quad (\gamma^5)^\dagger = \gamma^5 \quad (\text{E.2.10})$$

e che dunque solo  $\gamma^0$  e  $\gamma^5$  sono hermitiane, mentre  $\gamma^i$  sono anti-hermitiane. Il fatto che non  $\gamma^\mu$  non siamo completamente hermitiana non ci deve stupire, esso infatti è una conseguenza del fatto che non esistono rappresentazioni unitarie finito dimensionali del gruppo di Lorentz (poiché non è compatto). In generale possiamo scrivere:

$$(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0. \quad (\text{E.2.11})$$

### E.3 Proprietà fondamentali

Le matrici (E.2.2) hanno importanti proprietà immediate da verificare<sup>4</sup>:

$$(\gamma^0)^2 = \mathbb{1} \quad (\text{E.3.1})$$

$$(\gamma^1)^2 = (\gamma^2)^2 = (\gamma^3)^2 = -\mathbb{1} \quad (\text{E.3.2})$$

$$\gamma^\mu \gamma_\mu = (\gamma^0)^2 + \gamma^i \gamma_i = 4\mathbb{1} \quad (\text{E.3.3})$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu = -2\gamma^\nu \quad (\text{E.3.4})$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\mu = 4g^{\nu\rho} \quad (\text{E.3.5})$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_\mu = -2\gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu. \quad (\text{E.3.6})$$

Possiamo calcolare le tracce delle matrici  $\gamma$  in 4 dimensioni. Torneranno sicuramente utili. Abbiamo sicuramente:

$$\text{Tr}\{\mathbb{1}\} = 4. \quad (\text{E.3.7})$$

Poi è facilmente dimostrabile che la traccia di un numero dispari di matrici  $\gamma$  è sempre nulla. Ad esempio:

$$\text{Tr}\{\gamma^\mu \gamma^5\} = 0. \quad (\text{E.3.8})$$

Poi possiamo vedere le seguenti relazioni:

$$\text{Tr}\{\gamma^\mu \gamma^\nu\} = 4g^{\mu\nu} \quad (\text{E.3.9})$$

$$\text{Tr}\{\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma\} = 4(g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) \quad (\text{E.3.10})$$

$$\text{Tr}\{\gamma^5\} = 0 \quad (\text{E.3.11})$$

$$\text{Tr}\{\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5\} = 0 \quad (\text{E.3.12})$$

$$\text{Tr}\{\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^5\} = -4i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}. \quad (\text{E.3.13})$$

Ovviamente, anche la matrice di chiralità (E.2.8) ha delle proprietà analoghe, infatti, per  $\gamma^5$  valgono:

$$\gamma^5 = i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = -\frac{1}{4!} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \quad , \quad (\gamma^5)^2 = \mathbb{1} \quad (\text{E.3.14})$$

e anche che:

$$\gamma^{\mu\nu\rho\sigma} = -i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma^5 \quad , \quad \gamma^{\mu\nu\rho} = +i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_\sigma \gamma^5. \quad (\text{E.3.15})$$

È importante ricordare che le proprietà e relazioni che utilizziamo valgono nella specifica rappresentazione che utilizziamo, se ne sceglessimo un'altra queste porterebbero non essere così evidenti.

---

<sup>4</sup>Noi, per lo meno in questa appendice, facciamo sempre riferimento alla rappresentazione di Weyl.

## E.4 Rappresentazione di Dirac

Nella sezione precedente §E.2 abbiamo visto la rappresentazione di Weyl per le matrici  $\gamma^\mu$ , ma è doveroso segnalare che esiste anche una rappresentazione di Dirac. A seconda del testo che si sceglie si può trovare l'una o l'altra. Fissata la notazione, ma facendo variare i testi si possono trovare delle definizioni diverse a meno di un segno, infatti, alcuni testi mettono un segno – in più o in meno nelle matrici  $\gamma^0$  e  $\gamma^5$  (le matrici  $\gamma^i$  sono sempre le stesse in qualsiasi delle due rappresentazioni).

Ad ogni modo, la **rappresentazione di Dirac** è:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{E.4.1})$$

## E.5 Generatori di Lorentz

Nel capitolo §5 noi ci riferivamo ad una generica matrice rappresentativa delle trasformazioni di Lorentz con  $S(\Lambda)$ . Ovviamente, quando ci mettiamo a lavorare e a fare conti esplicativi dobbiamo scrivere in qualche modo la matrice  $S(\Lambda)$ . Nel capitolo §5 la matrice  $S(\Lambda)$  l'abbiamo scritta, con la relazione (5.1.5), tramite l'esponenzializzazione dei generatori del gruppo di Lorentz, che ricordiamo di aver chiamato, nel modo più generico possibile, come  $M^{\mu\nu}$ . Abbiamo già visto alcune rappresentazioni utilizzabili per scrivere  $S(\Lambda)$ , infatti, finora abbiamo scritto gli  $S(\Lambda)$  rifacendoci alle matrici di Pauli  $\sigma_k$ , i generatori di  $SU(2)$ , cioè utilizzando "composizioni" di matrici  $2 \times 2$ . Ricordiamo, infatti, che i generatori  $M^{\mu\nu}$  nella rappresentazione  $SU(2) \otimes SU(2)$  vengono rappresentati tramite le matrici di Pauli (ricorda la relazione (2.4.64)). Però, quando ci mettiamo a studiare sistemi descritti dall'equazione di Dirac sappiamo bene che ci troviamo in mano oggetti che vivono in uno spazio governato dall'algebra di Clifford, che considera la rappresentazione la cui algebra ha base formata dalle matrici  $4 \times 4$   $\gamma^\mu$ , per questo motivo siamo interessati a dare una rappresentazione delle trasformazioni di Lorentz  $S(\Lambda)$  in termini delle matrici  $\gamma^\mu$ . Possiamo introdurre le seguenti matrici  $4 \times 4$ :

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad (\text{E.5.1})$$

che ci servono perché le matrici  $\frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu}$  sono i generatori del gruppo di Lorentz scritti in una rappresentazione quadridimensionale.

Quindi se possiamo scrivere:

$$M^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sigma^{\mu\nu} \quad (\text{E.5.2})$$

se la sostituiamo nell'esponenzializzazione dei generatori del gruppo otteniamo:

$$S(\Lambda) = e^{-\frac{i}{4} \omega_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu}}. \quad (\text{E.5.3})$$

L'equazione (E.5.3) da una rappresentazione esplicita della matrice  $S(\Lambda)$ , che induce una trasformazione di Lorentz sul campo spinoriale di Dirac, in termini delle matrici  $\gamma$  di Dirac. L'espressione (E.5.1) possiamo controllarla e scriverne effettivamente un'espressione matriciale, infatti, anche ricordando le espressioni viste (5.1.7), vediamo (utilizzando la rappresentazione di Weyl):

$$\sigma^{0i} = \frac{i}{2} [\gamma^0, \gamma^i] = -i \begin{bmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i \end{bmatrix} = 2M^{0i} \quad (\text{E.5.4})$$

$$\sigma^{ij} = \frac{i}{2} [\gamma^i, \gamma^j] = \varepsilon^{ijk} \begin{bmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{bmatrix} = \varepsilon^{ijk} \Sigma^k = 2M^{ij} \quad (\text{E.5.5})$$

in cui abbiamo definito la matrice  $\Sigma$ , che spesso nei libri viene chiamata *matrice di spin*:

$$\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}. \quad (\text{E.5.6})$$

## E.6 Forme bilineari degli spinori di Dirac

Questa sezione è fondamentale per la sezione §5.4, in cui vediamo le varie forme bilineari che ci interessa formare degli spinori di Dirac. Vediamo in questa sezione le matrici  $\Gamma^a$  e le loro proprietà che utilizzeremo in §5.4.

Tutte le proprietà viste riguardo gli spinori di Dirac e gli invarianti possono essere riassunte in una serie di forme bilineari. Infatti, possiamo dimostrare che esistono 16 matrici 4x4 ad elementi costanti, che indichiamo come  $\Gamma^a$ , tali per cui la combinazione  $\bar{\psi}\Gamma^a\psi$  può essere decomposta in termini che hanno proprietà di trasformazione, per operazione di matrici del gruppo di Lorentz, ben definite<sup>5</sup> e che costituiscono una base. Quello che vogliamo fare è riscrivere  $\Gamma^a$  in termini di queste 16 matrici, così che riusciamo a formare delle forme bilineari (quando  $\Gamma^a$  è messa dentro  $\bar{\psi}\Gamma^a\psi$ ) con le proprietà che ci servono in base alla situazione in cui siamo. Se ci pensiamo qualcuna l'abbiamo già vista, infatti, se prendiamo  $\Gamma^a = \gamma^\mu$  sappiamo che  $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$  è un vettore di Lorentz, oppure, se prendiamo  $\Gamma^a = \mathbb{1}$  sappiamo che  $\bar{\psi}\psi$  è un invariante di Lorentz. Ovviamente, già conosciamo una base di matrici 4x4 che ci permette di costruire degli oggetti ben definiti per trasformazioni di Lorentz, per questo motivo, gli oggetti  $\Gamma^a$  saranno combinazioni antisimmetriche di

---

<sup>5</sup>Il che vuol dire che possono essere degli invarianti, vettori di Lorentz o altro ben definito

matrici  $\gamma$ . La nostra base di matrici  $\Gamma^a$ , è formata da:

$\mathbb{1}$	(1 matrice)	scalare
$\gamma^\mu$	(4 matrice)	vettore
$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$	(6 matrici antisimm.)	tensore di rango 2
$\gamma^\mu\gamma^5$	(4 matrici)	pseudo-vettore
$\gamma^5$	(1 matrice)	pseudo-scalare

in cui intendiamo con pseudo-vettori e pseudo-scalari degli oggetti che trasformano come vettori e come scalari, ma che cambiano segno per trasformazioni di parità.

Possiamo vedere le proprietà delle matrici  $\Gamma^a$ .

- 1.** Vale:  $(\Gamma^a)^2 = \pm 1$ . Infatti, sappiamo bene che vale (E.3.2) e (E.3.14) e possiamo vedere che, ad esempio:

$$\sigma^{01} = \frac{i}{2}[\gamma^0, \gamma^1] = i\gamma^0\gamma^1 \quad (\text{E.6.1})$$

$$\implies (\sigma^{01})^2 = -\gamma^0\gamma^1\gamma^0\gamma^1 = +(\gamma^0)^2(\gamma^1)^2 = -\mathbb{1}. \quad (\text{E.6.2})$$

- 2.** Ogni  $\Gamma^a$  si può esprimere come prodotto al più di 4 matrici  $\gamma$  diverse, con coefficienti  $\pm 1$  o  $\pm i$ . Ad esempio possiamo scrivere:

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \quad (\text{E.6.3})$$

$$\gamma^0\gamma^5 = i\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \quad (\text{E.6.4})$$

dalla (E.6.4) possiamo accorgerci che quando ci sono più di 4 matrici  $\gamma$ , almeno 2 devono essere uguali e sapendo che vale (E.3.2) il loro prodotto farà  $\pm\mathbb{1}$  e ridurrà il numero totale di matrici  $\gamma$ .

- 3.** Vale:  $\forall \Gamma^a, \Gamma^b$  per cui  $a \neq b$ , allora  $\exists \Gamma^c \neq \mathbb{1}$  tale per cui  $\Gamma^a\Gamma^b = \alpha\Gamma^c$  con  $\alpha = \pm 1, \pm i$ .

Questa proprietà può essere vista come corollario della **2**.

- 4.** Vale:  $\forall \Gamma^a \neq \mathbb{1} \exists$  almeno una  $\Gamma^b$  tale per cui  $\{\Gamma^a, \Gamma^b\} = 0$ .

- 5.** Vale:  $\forall \Gamma^a \neq \mathbb{1}$  allora  $\text{Tr}\{\Gamma^a\} = 0$ . Infatti abbiamo:

$$\text{Tr}\{\Gamma^a\} = \pm \text{Tr}\left\{\Gamma^a \left(\Gamma^b\right)^2\right\} \quad (\text{E.6.5})$$

in cui  $\Gamma^b$  è una matrice che anticommuta con  $\Gamma^a$  e per cui esiste sicuramente la proprietà 4, così che possiamo operare una permutazione ciclica:

$$\pm \text{Tr} \left\{ \Gamma^a \left( \Gamma^b \right)^2 \right\} = \pm \text{Tr} \left\{ \Gamma^b \Gamma^a \Gamma^b \right\} = \mp \text{Tr} \left\{ \left( \Gamma^b \right)^2 \Gamma^a \right\} = - \text{Tr} \left\{ \Gamma^a \right\} \quad (\text{E.6.6})$$

abbiamo trovato quindi che:

$$\text{Tr} \left\{ \Gamma^a \right\} = - \text{Tr} \left\{ \Gamma^a \right\} \implies \text{Tr} \left\{ \Gamma^a \right\} = 0. \quad (\text{E.6.7})$$

**6.** Dalle proprietà 3 e 5 segue che per  $a \neq b$  vale  $\text{Tr} \left\{ \Gamma^a \Gamma^b \right\} = 0$ .

**7.** Le matrici  $\Gamma^a$  sono linearmente indipendenti e conseguentemente qualsiasi matrice 4x4 può essere scritta come sovrapposizione lineare di  $\Gamma^a$ .

Il set completo di forme bilineari che troviamo è quindi:

$\bar{\psi} \psi$	(1)	scalare
$\bar{\psi} \gamma^\mu \psi$	(4)	vettore (o vettore polare)
$\bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} \psi$	(6)	tensore di rango 2
$\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi$	(4)	pseudo-vettore (o vettore assiale)
$\bar{\psi} \gamma^5 \psi$	(1)	pseudo-scalare.

Rimandiamo alla sezione §5.4 per vedere le proprietà di trasformazione degli oggetti elencati sopra.

### E.6.1 Identità di Fierz

Sono identità che legano, per scambio, le forme bilineari. Il cuore di queste identità è la relazione che lega le matrici di Pauli:

$$(\sigma^\mu)_{\alpha\beta} (\sigma_\mu)_{\gamma\delta} = 2\epsilon_{\alpha\gamma}\epsilon_{\beta\delta}. \quad (\text{E.6.8})$$

Notiamo che le componenti  $\alpha, \gamma$  trasformano nella rappresentazione di Weyl come  $\psi_L$ , mentre  $\beta, \delta$  come  $\psi_R$ . Utilizzeremo la rappresentazione:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \quad (\text{E.6.9})$$

e gli spinori associati  $u, v$  a  $\psi_L$  e  $\psi_R$ , cioè  $u_L, u_R, v_L$  e  $v_R$ . Sono valide le relazioni:

$$\begin{cases} u_L = P_L u = \frac{1-\gamma^5}{2} u \\ u_R = P_R u = \frac{1+\gamma^5}{2} u \end{cases} \quad (\text{E.6.10})$$

e analoghe per  $v$ .

Se partiamo dalla relazione (E.6.8) e prendiamo prodotti a panino con  $u_1, u_2, u_3$  e  $u_4$  troviamo:

$$(\bar{u}_{1R} \sigma^\mu u_{2R}) (\bar{u}_{3R} \sigma_\mu u_{4R}) = 2\varepsilon_{\alpha\gamma} \bar{u}_{1R\alpha} \bar{u}_{3R\gamma} \varepsilon_{\beta\delta} u_{2R\beta} u_{4R\delta} \quad (\text{E.6.11})$$

$$= -(\bar{u}_{1R} \sigma^\mu u_{4R}) (\bar{u}_{3R} \sigma_\mu u_{2R}) \quad (\text{E.6.12})$$

dunque, il prodotto di queste forme bilineari è antisimmetrico per scambio degli indici 2,4 e 1,3. Possiamo riscriverla anche in notazione a 4 componenti:

$$(\bar{u}_{1R} \sigma^\mu u_{2R}) (\bar{u}_{3R} \sigma_\mu u_{4R}) = \bar{u}_1 \gamma^\mu \frac{\mathbb{1} + \gamma^5}{2} u_2 \bar{u}_3 \gamma^\mu \frac{\mathbb{1} + \gamma^5}{2} u_4 \quad (\text{E.6.13})$$

$$= -\bar{u}_1 \gamma^\mu \frac{\mathbb{1} + \gamma^5}{2} u_4 \bar{u}_3 \gamma^\mu \frac{\mathbb{1} + \gamma^5}{2} u_2. \quad (\text{E.6.14})$$

Le identità di Fierz possono essere generalizzate a ciascuna delle 16 forme bilineari introdotte come:

$$(\bar{u}_1 \Gamma^A u_2) (\bar{u}_3 \Gamma^B u_4). \quad (\text{E.6.15})$$



# Appendice F

## Spazio di Fock

Vediamo in questa sezione una veloce sfogliata delle nozioni fondamentali riguardo la trattazione di sistemi di particelle identiche in Meccanica Quantistica e dello spazio di Fock. Per motivi di tempo e anche di brevità non riporto tutta la trattazione, ma mi limiterò a intrudurre solamente gli oggetti e le relazioni utili ai miei fini. Una trattazione più soddisfacente e rigorosa può essere trovata nelle *note del corso di Meccanica Quantistica 2* del Prof. Sciuto, oppure, nei capitoli 2 e 3 del Lancaster e Blundell [6]. Puoi anche vedere il capitolo 1 dello Srednicki [10]. Se avete seguito il corso di IFIF sarà sufficiente rivedere gli appunti.

### F.1 Particelle distinguibili

In Meccanica Classica si è sempre stati in grado di distinguere due particelle identiche, poiché si aveva la nozione di traiettoria, per cui, almeno in linea di principio, si poteva seguire il cammino di ciascuna particella e non si avevano problemi nel distinguerle. Con la Meccanica Quantistica, come abbiamo già avuto modo di vedere, le cose si complicano poiché le particelle non seguono più una traiettoria, ma rispettano il principio d'indeterminazione di Heisenberg. Per la Meccanica Quantistica due particelle identiche sono indistinguibili. Cerchiamo in questa sezione un modo per trattare questo tipo di sistemi in Meccanica Quantistica non relativistica.

Cominciamo con il considerare un sistema di 2 particelle, il cui spazio di Hilbert complessivo risulterà:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \quad (\text{F.1.1})$$

con  $\mathcal{H}_{1,2}$  gli spazi di singola particella. Possiamo definire un'operatore di scambio  $P_{12}$  che sostanzialmente permette di scambiare di posto le particelle. Scelta come base  $\{|i\rangle\}$  per lo spazio  $\mathcal{H}_i$  all'ora l'operatore di scambio è

definito come:

$$P_{12} \sum_{i,j} c_{ij} |i\rangle |j\rangle = \sum_{i,j} c_{ij} |j\rangle |i\rangle \quad (\text{F.1.2})$$

è facile dimostrare che  $P_{ij}^2 = \mathbb{1}$  e che di conseguenza i suoi autovalori siano  $\pm 1$ . Quando troviamo l'autovalore  $+1$  possiamo dire che lo spazio  $\mathcal{H}$  è simmetrico per scambio di due particelle, mentre se abbiamo autovalore  $-1$  diciamo che  $\mathcal{H}$  è antisimmetrico per lo scambio di due particelle. Indichiamo:

$$\mathcal{H} : \begin{cases} (\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)_S & \text{simmetrico} \\ (\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)_A & \text{antisimmetrico.} \end{cases} \quad (\text{F.1.3})$$

Dunque, in generale gli spazi fisici, e di conseguenza gli stati, possono essere solamente simmetrici o antisimmetrici e possiamo descrivere gli stati come:

$$|\psi\rangle_S = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\varphi\rangle |\chi\rangle + |\chi\rangle |\varphi\rangle) \quad , \quad P_{12} |\psi\rangle_S = |\psi\rangle_S \quad (\text{F.1.4})$$

$$|\psi\rangle_A = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\varphi\rangle |\chi\rangle - |\chi\rangle |\varphi\rangle) \quad , \quad P_{12} |\psi\rangle_A = -|\psi\rangle_A. \quad (\text{F.1.5})$$

In più l'operatore di scambio dovrà commutare con tutte le osservabili dello SCOC (Sistema Completo di Osservabili Commutanti) poiché altrimenti la misura di un'osservabile che non commuta con  $P_{12}$ , permetterebbe di distinguere le particelle, che però essendo identiche devono rendere invariante per scambio il sistema.

Poiché la parità di scambio non dipende dalla coppia, non può dipendere dagli stati quantici occupati, dall'interazione tra esse, dal numero di particelle e nemmeno dallo stato del sistema. Dagli esperimenti si vede e con la Teoria Quantistica dei Campi si dimostra che la parità dipende unicamente dal tipo di particelle ed in particolare dipende dallo spin  $s$  del sistema. L'autovalore di  $P_{12}$  è  $(-1)^{2s}$  con  $s$  spin e permette di distinguere particelle bosoniche e fermioniche. Diciamo:

$$(-1)^{2s} : \begin{cases} +1 & \text{spin intero} \implies \text{bosoni} & (\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)_S \\ -1 & \text{spin semi-intero} \implies \text{fermioni} & (\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)_A. \end{cases} \quad (\text{F.1.6})$$

In particolare, possiamo verificare che gli stati fermionici:

$$|\psi\rangle_F = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\varphi\rangle |\chi\rangle - |\chi\rangle |\varphi\rangle) \quad (\text{F.1.7})$$

rispettano il principio di esclusione di Pauli, poiché mettendo  $|\varphi\rangle = |\chi\rangle$  abbiamo  $|\psi\rangle_F = 0$ .

Se vogliamo scrivere un po' meglio lo spazio di Hilbert di singola particella possiamo scriverlo come:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{orb}} \otimes \mathcal{H}_s \quad (\text{F.1.8})$$

dove  $\mathcal{H}_s$  è lo spazio di spin che è dimostrabile essere  $\mathcal{H}_s = \mathbb{C}^{2s+1}$ . Per un sistema di due particelle abbiamo di conseguenza:

$$\mathcal{H} = (\mathcal{H}_{\text{orb},1} \otimes \mathcal{H}_{\text{orb},2} \otimes \mathcal{H}_{s,1} \mathcal{H}_{s,2}) \quad (\text{F.1.9})$$

che ovviamente può essere simmetrico o antisimmetrico. Ad esempio per un sistema di 2 particelle fermioniche di spin 1/2 si ha:

$$\mathcal{H} = (\mathcal{H}_{\text{orb},1} \otimes \mathcal{H}_{\text{orb},2} \otimes \mathcal{H}_{1/2} \mathcal{H}_{1/2})_A \quad (\text{F.1.10})$$

in cui tra l'altro sappiamo come scrivere gli stati, poiché ad MQ1 abbiamo imparato che componendo due particelle con spin  $s = 1/2$  si ottengono 4 stati di spin disaccoppiati (uno stato di singoletto e 3 di tripletto):

$$\begin{cases} |1, 1\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle \\ |1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) \\ |1, -1\rangle = |\downarrow\downarrow\rangle \end{cases} \quad (\text{F.1.11})$$

$$|0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) \quad (\text{F.1.12})$$

tra cui l'unico che va bene, perché rispetta l'antisimmetria, è lo stato  $|0, 0\rangle$ , che ci permette di dire che:

$$\mathcal{H}_{1/2} \mathcal{H}_{1/2} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \implies \mathcal{H}_F = [\mathcal{H}_{\text{orb},1} \otimes \mathcal{H}_{\text{orb},2} \otimes (\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1)]. \quad (\text{F.1.13})$$

A noi non interessa molto, ma se si vuole nelle dispense di Sciuto c'è un capitolo riguardante l'attrazione e la repulsione tra le particelle bosoniche piuttosto che fermioniche.

## F.2 Formalismo dei numeri di occupazione

Vediamo in questa sezione il formalismo che ci porteremo avanti nel futuro e come esso sia essenziale nella Meccanica Quantistica non relativistica non appena cominciamo ad avere più di 3 particelle nel nostro sistema. Infatti, molte volte in Meccanica Quantistica non è fattibile trattare molte particelle. Prendendo un sistema con 3 particelle abbiamo:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_1 \quad (\text{F.2.1})$$

in cui possiamo definire 3 operatori di scambio  $P_{12}$ ,  $P_{13}$  e  $P_{23}$ . Per 3 particelle bosoniche avremmo la funzione d'onda:

$$|\psi\rangle_S = A(|\varphi_1\rangle |\varphi_2\rangle |\varphi_3\rangle + |\varphi_1\rangle |\varphi_3\rangle |\varphi_2\rangle + |\varphi_3\rangle |\varphi_2\rangle |\varphi_1\rangle + |\varphi_2\rangle |\varphi_1\rangle |\varphi_3\rangle + |\varphi_3\rangle |\varphi_1\rangle |\varphi_2\rangle). \quad (\text{F.2.2})$$

Per i fermioni basterebbe antisimmetrizzare  $|\psi\rangle$ . Se immaginiamo di fare la stessa cosa fatta per (F.2.2), ma con 4, 5, 6... particelle, ci rendiamo immediatamente conto che questo implicherebbe l'avere una funzione d'onda lunghissima e intrattabile matematicamente. Ovviamente, è un problema risolvibile. Facciamo un passo indietro e ragioniamo sul modo che abbiamo di operare. Fin'ora se avessimo voluto scrivere lo stato del sistema avremmo scritto lo stato di ogni particella, lo avremmo composto con tutte le altre e avremmo sommato tutte le possibili combinazioni. Per capirci, un sistema di due particelle che possono essere negli stati  $|i_1\rangle$  e  $|i_2\rangle$  (diversi tra loro) lo possiamo descrivere con la funzione d'onda:

$$|\psi\rangle_{B,F} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|i_1\rangle|i_2\rangle \pm |i_2\rangle|i_1\rangle). \quad (\text{F.2.3})$$

Questo modo di procedere abbiamo appena finito di dire che non va bene. Allora, al posto di descrivere il sistema con uno stato  $|\psi\rangle_{B,F}$  in cui specifichiamo la natura bosonica o fermionica e scriviamo in modo simmetrico o antisimmetrico tutte le possibili combinazioni di composizione degli stati di singola particella, possiamo pensare di descrivere il sistema dicendo semplicemente quante particelle ci siano in uno specifico stato e lasciamo sottointesa la simmetrizzazione o l'antisimmetrizzazione del sistema. Mi spiego meglio, se abbiamo due particelle identiche che possono stare negli stati  $|i_1\rangle$  e  $|i_2\rangle$  (diversi tra loro) allora il sistema complessivo lo descriviamo dicendo:

$$|n_{i_1} = 1, n_{i_2} = 1\rangle = |1, 1\rangle \quad (\text{F.2.4})$$

in cui intendiamo dire che è presente  $n_{i_1} = 1$  particella nello stato  $|i_1\rangle$  e  $n_{i_2} = 1$  particella nello stato  $|i_2\rangle$ . I numeri  $n_i$  sono detti **numeri di occupazione**.

Per generalizzare il tutto prendiamo un sistema di  $N$  particelle con:

$$\mathcal{H}_N = \underbrace{\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_1}_{N \text{ volte}}. \quad (\text{F.2.5})$$

Utilizzando il formalismo dei numeri di occupazione possiamo scrivere in modo sintetico una qualsiasi base per lo spazio  $\mathcal{H}_N$ :

$$|\{n\}\rangle = |n_0, n_1, \dots, n_N\rangle \quad n_i \in \mathbb{N} \quad (\text{F.2.6})$$

ma con il vincolo per particelle bosoniche:

$$\sum_i n_i = N \quad (\text{F.2.7})$$

e per particelle fermioniche:

$$n_i = 0, 1 \quad (\text{F.2.8})$$

poiché se sono particelle fermioniche ovviamente devono rispettare il principio di Pauli e non possiamo avere più di una particella in un certo stato  $|i\rangle$ .

In questo formalismo gli stati di singoletto e tripletto li scriviamo:

$$\begin{cases} |1,1\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle \\ |1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) \\ |1,-1\rangle = |\downarrow\downarrow\rangle \\ |0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) \end{cases} \implies \begin{cases} |2,0\rangle \\ |1,1\rangle \\ |0,2\rangle \\ |1,1\rangle \end{cases} \quad (\text{F.2.9})$$

in cui notiamo che abbiamo due stati  $|1,1\rangle$ , ma uno simmetrico ed uno antisimmetrico. Per ora sorvoliamo sul fatto che non siamo in grado di distinguere la natura bosonica o fermionica di un sistema, lo capiremo meglio quando ripareremo degli operatori  $\hat{a}$  e  $\hat{a}^\dagger$ .

### F.3 Spazio di Fock

Quando cerchiamo di fare la seconda quantizzazione, ovvero cerchiamo di passare da una teoria di campo classica ad una teoria di campo quantistica, cerchiamo di avere una descrizione che ammetta sia sistemi con un numero  $\infty$  di particelle sia sistemi con il numero di particelle non fissato. Avere  $N \rightarrow \infty$  o  $N$  non fissato nella Meccanica Quantistica non relativistica non è permesso<sup>1</sup>, per cui lo spazio che avremo nella nuova teoria di campo quantistica non potrà essere lo spazio di Hilbert a cui eravamo abituati.

Il nuovo spazio che avremo nella nostra teoria si chiama **spazio di Fock** e si costruisce partendo dagli spazi di  $N$  particella, bosoniche o fermioniche, e da uno spazio aggiuntivo  $\mathcal{H}_0$  che è definito come lo spazio unidimensionale, generato da  $|0\rangle$ , e rappresenta lo stato di vuoto, ovvero l'assenza di particelle. Abbiamo:

$$\mathcal{H}_{\text{Fock}} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_{1,B/F} \oplus \mathcal{H}_{2,B/F} \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}_{N,B/F} \quad (\text{F.3.1})$$

in cui  $\mathcal{H}_{i,B/F}$  sono i sottospazi di  $i$  particelle. Come già detto possiamo estendere lo spazio di Fock per  $N \rightarrow \infty$  e ottenere:

$$\mathcal{H}_{\text{Fock}} = \bigoplus_{N=0}^{\infty} \mathcal{H}_{N,B/F}. \quad (\text{F.3.2})$$

Fissata una base per  $\mathcal{H}_1$  si può anche fissare la base di  $\mathcal{H}_{\text{Fock}}$  utilizzando il formalismo dei numeri di occupazione. Gli elementi di tale base sono i vettori:

$$|\{n\}\rangle \quad \begin{cases} n_i \in \mathbb{N} & \text{bosoni} \\ n_i = 0, 1 & \text{fermioni} \end{cases} \quad (\text{F.3.3})$$

in cui ciascun elemento appartiene ad un solo sottospazio  $\mathcal{H}_{i,B/F}$ .

---

<sup>1</sup>Mandare  $N \rightarrow \infty$  in Meccanica Quantistica fa perdere la separabilità dello spazio.

## F.4 Operatori di creazione e distruzione

Abbiamo detto che vogliamo descrivere sistemi in cui il numero di particelle non è fissato, però non abbiamo detto come aggiungere o togliere particelle al sistema. Descriviamo in questa sezione gli operatori di creazione  $\hat{a}^\dagger$  e di distruzione  $\hat{a}$ , che per semplicità scriveremo senza cappelletto per semplicità. Il formalismo matematico che utilizzeremo sarà identico a quello utilizzato per gli operatori di innalzamento e abbassamento dell'oscillatore armonico della Meccanica Quantistica, ma il significato fisico completamente differente. Ora, come vedremo, il nome creazione e distruzione sarà descrittivo dell'azione che essi svolgono. Come detto, però, dobbiamo distinguere i sistemi bosonici da quelli fermionici, per via dei vincoli che abbiamo sui valori che  $n_i$  numero di occupazione può assumere.

Procediamo per step e cominciamo a definire  $a_i^\dagger$  come l'**operatore di creazione** e  $a_i$  come l'**operatore di distruzione** che rispettivamente creano e distruggono particelle nello stato  $i$  e sono operatori che vivono nello spazio di Fock. Il discorso che faremo sarà già introattivo per il teorema dello spin-statistica, ma vedremo meglio il discorso in seguito. Immaginiamo di voler creare il sistema con una particella nello stato  $i_1$  ed una nello stato  $i_2$ . Possiamo quindi agire sullo stato di vuoto come:

$$a_{i_1}^\dagger a_{i_2}^\dagger |0\rangle \propto |1, 1\rangle \quad (\text{F.4.1})$$

ma allo stesso tempo come:

$$a_{i_2}^\dagger a_{i_1}^\dagger |0\rangle \propto |1, 1\rangle \quad (\text{F.4.2})$$

in cui il segno di proporzionalità è necessario perché c'è una costante ancora da determinare. Se lo stato finale che otteniamo è sempre  $|1, 1\rangle$  allora ci aspettiamo che in qualche modo gli operatori che utilizziamo per crearlo siano proporzionali:

$$a_{i_1}^\dagger a_{i_2}^\dagger = \lambda a_{i_2}^\dagger a_{i_1}^\dagger \quad (\text{F.4.3})$$

con  $\lambda$  costante. Assumiamo che ci siano solamente due possibilità:  $\lambda = \pm 1$ , che rispecchiano la possibilità di avere stati simmetrici piuttosto che antisimmetrici rispetto lo scambio delle due particelle, ovvero, bosoni e fermioni. Chiamiamo  $i_1 = i$  e  $i_2 = j$  per semplicità.

**Bosoni** Prendiamo  $\lambda = +1$  e abbiamo:

$$a_i^\dagger a_j^\dagger = a_j^\dagger a_i^\dagger \quad (\text{F.4.4})$$

il che ci permette di vedere:

$$\left[ a_i^\dagger, a_j^\dagger \right] = a_i^\dagger a_j^\dagger - a_j^\dagger a_i^\dagger = 0. \quad (\text{F.4.5})$$

con discorsi analoghi abbiamo anche:

$$[a_i, a_j] = 0 \quad (\text{F.4.6})$$

e possiamo imporre, in analogia con quanto succedeva in Meccanica Quantistica quando componevamo due oscillatori armonici:

$$\left[ a_i, a_j^\dagger \right] = \delta_{ij}. \quad (\text{F.4.7})$$

Possiamo generalizzare l'azione degli operatori  $a_i$  e  $a_i^\dagger$  sfruttando i fattori di normalizzazione che avevamo definito nella trattazione dell'oscillatore armonico. Definiamo nel caso generale:

$$a_i^\dagger |n_1, \dots, n_i, \dots\rangle = \sqrt{n_i + 1} |n_1, \dots, n_i + 1, \dots\rangle \quad (\text{F.4.8})$$

$$a_i |n_1, \dots, n_i, \dots\rangle = \sqrt{n_i} |n_1, \dots, n_i - 1, \dots\rangle. \quad (\text{F.4.9})$$

Per snellire leggermente la trattazione possiamo scrivere al posto del ket con tutti i numeri di occupazione solamente un ket compatto in cui inseriamo solo il numero di occupazione che viene modificato dall'azione dell'operatore; quello che sto dicendo è che le relazioni generiche diventano:

$$a_i^\dagger |n_i\rangle = \sqrt{n_i + 1} |n_i + 1\rangle \quad a_i |n_i\rangle = \sqrt{n_i} |n_i - 1\rangle. \quad (\text{F.4.10})$$

Ovviamente vale, come per l'oscillatore armonico:

$$a_i |0\rangle = 0. \quad (\text{F.4.11})$$

Ad esempio, partiamo dallo stato  $|1, 0, 1\rangle$  e applichiamo l'operatore  $a_2^\dagger$ , otteniamo:

$$a_2 |1, 0, 1\rangle = |1, 1, 1\rangle. \quad (\text{F.4.12})$$

Chiudiamo questo paragrafo vedendo come creare un generico stato:

$$|\{n_i\}\rangle = \prod_{i \in \mathbb{N}} \frac{(a_i^\dagger)^{n_i}}{\sqrt{n_i!}} |0\rangle. \quad (\text{F.4.13})$$

Possiamo vedere che nel caso bosonico agire sul vuoto prima con  $a_i^\dagger$  o con  $a_j^\dagger$  non cambia nulla:

$$a_i^\dagger a_j^\dagger |0\rangle = a_j^\dagger a_i^\dagger |0\rangle \quad (\text{F.4.14})$$

per via della simmetria e delle regole di commutazione.

**Fermioni** Analizziamo ora il caso in cui in (F.4.3) abbiamo  $\lambda = -1$ . Ora abbiamo:

$$a_i^\dagger a_j^\dagger = -a_j^\dagger a_i^\dagger \quad (\text{F.4.15})$$

il che porta a:

$$\left\{ a_i^\dagger, a_j^\dagger \right\} = 0 \quad (\text{F.4.16})$$

e anche:

$$\{a_i, a_j\} = 0 \quad , \quad \left\{ a_i, a_j^\dagger \right\} = \delta_{ij}. \quad (\text{F.4.17})$$

Anche per particelle fermioniche possiamo definire l'azione degli operatori di creazione e distruzione come sopra, ma ora oltre la condizione:

$$a_i |0\rangle = 0 \quad (\text{F.4.18})$$

abbiamo anche:

$$a_i^\dagger |n_i = 1\rangle = 0 \quad (\text{F.4.19})$$

per via del principio di esclusione di Pauli.

Possiamo scrivere lo stato generico come:

$$|\{n_i\}\rangle = \prod_{i \in \mathbb{N}} (a_i^\dagger)^{n_i} |0\rangle \quad (\text{F.4.20})$$

in cui non abbiamo il fattore di normalizzazione per via del fatto che  $n_i = 0, 1$ .

Però facciamo attenzione perché non è così banale come agiscono gli operatori  $a_i^\dagger$  su stati che non siano  $|0\rangle$  o  $|n_i = 1\rangle$ . Infatti se per un sistema bosonico avevamo (F.4.14) ora abbiamo:

$$a_i^\dagger a_j^\dagger |0\rangle = a_i^\dagger |n_j = 1\rangle = |n_i = 1, n_j = 1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|i\rangle |j\rangle - |j\rangle |i\rangle) \quad (\text{F.4.21})$$

e se immaginiamo di invertire l'ordine degli operatori:

$$a_j^\dagger a_i^\dagger |0\rangle = a_j^\dagger |n_i = 1\rangle = |n_j = 1, n_i = 1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|j\rangle |i\rangle - |i\rangle |j\rangle) \quad (\text{F.4.22})$$

e dunque:

$$a_i^\dagger a_j^\dagger |0\rangle = -a_j^\dagger a_i^\dagger |0\rangle \quad (\text{F.4.23})$$

a causa dell'asimmetria e delle regole di anti-commutazione.

Vedi la sezione del normal ordering per vedere le relazioni generali per le azioni di  $a_i$  e  $a_i^\dagger$  nel caso fermionario.

## F.5 Normal Ordering

Parliamo ora di quello che va sotto il nome di **normal ordering**, che indichiamo come  $N[\cdot] = \langle \cdot \rangle$  e che serve per riuscire ad attribuire un segno alla nostra base e a capire se siamo in presenza di fermioni o bosoni. L'azione di  $N[\cdot]$  serve anche per eliminare gli infiniti che si vengono a creare nella costruzione della teoria di campo. Definiamo il normal ordering scegliendo come posizionare gli operatori di creazione e distruzione davanti allo stato su cui stanno agendo. Ovviamente, il problema ce lo poniamo quando abbiamo una produttoria di più di un operatore che agisce su uno stato. Scegliamo innanzitutto di mettere gli operatori che compaiono nella produttoria in ordine crescente e poi di mettere tutti gli operatori  $a_i^\dagger$  a sinistra e tutti gli  $a_i$  a destra.

Quando siamo in presenza di bosoni il normal ordering non da problemi vista l'algebra di commutatori che li governa, ma quando trattiamo fermioni compare un segno meno, per via degli anticommutatori.

Possiamo scrivere ad esempio, nel caso *bosonico*:

$$N[a a^\dagger] = :a a^\dagger: = a^\dagger a \quad (\text{F.5.1})$$

$$N[a^\dagger a a a^\dagger a^\dagger] = :a^\dagger a a a^\dagger a^\dagger: = a^\dagger a^\dagger a^\dagger a a \quad (\text{F.5.2})$$

$$N[a_1 a_2^\dagger a_3] = a_2^\dagger a_1 a_3 \quad (\text{F.5.3})$$

dove in (F.5.3) non conta l'ordine tra  $a_1$  e  $a_3$  poiché essi commutano.

Nel caso *fermionario* invece avremmo nel caso (F.5.3):

$$N[a_1 a_2^\dagger a_3] = -a_2^\dagger a_1 a_3 \quad (\text{F.5.4})$$

in cui abbiamo fatto solo una permutazione che per via dell'anticommutatore fa comparire un segno meno.

Il normal ordering serve per capire come agiscono gli operatori di creazione e distruzione su stati che non siano  $|0\rangle$  o  $|n_i=1\rangle$  nel caso fermionario. Facciamo un esempio. Consideriamo come stato iniziale  $|0, 1, 1\rangle$  e vogliamo agire con  $a_2$  su di esso (le etichette le facciamo partire da 0), siamo sicuri di ottenere:

$$a_2 |0, 1, 1\rangle = |0, 1, 0\rangle ? \quad (\text{F.5.5})$$

Utilizziamo le regole che ci siamo imposti:

$$a_2 |0, 1, 1\rangle = a_2 a_1^\dagger a_2^\dagger |0\rangle \quad (\text{F.5.6})$$

$$= -a_1^\dagger a_2 a_2^\dagger |0\rangle \quad (\text{F.5.7})$$

$$= -a_1^\dagger (\mathbb{1} - a_2^\dagger a_2) |0\rangle \quad (\text{F.5.8})$$

$$= -a_1^\dagger |0\rangle + a_1^\dagger a_2^\dagger a_2 |0\rangle \quad (\text{F.5.9})$$

$$= -a_1^\dagger |0\rangle \quad (\text{F.5.10})$$

$$= -|0, 1, 0\rangle \quad (\text{F.5.11})$$

abbiamo ottenuto un segno di differenza rispetto quello che ci aspettavamo. Un altro esempio è:

$$a_1^\dagger |1, 0, 1\rangle = a_1^\dagger a_0^\dagger a_2^\dagger |0\rangle = a_0^\dagger a_1^\dagger a_2^\dagger |0\rangle = -|1, 1, 1\rangle. \quad (\text{F.5.12})$$

Nel caso fermionico, in base a quello visto fin'ora, possiamo scrivere:

$$a_i |n_i\rangle = \pm n_i |n_i - 1\rangle \quad (\text{F.5.13})$$

$$a_i^\dagger |n_i\rangle = \pm (1 - n_i) |n_i + 1\rangle. \quad (\text{F.5.14})$$

### F.5.1 Operatore numero di occupazione

Con il formalismo del numero di occupazione  $n_i$  ci rappresenta il numero di particelle nello stato  $|i\rangle$ . C'è un operatore che ci permette di capire, se abbiamo il nostro sistema in un suo generico stato, quante particelle si trovano nello stato di singola particella  $|i\rangle$ . Definiamo l'operatore:

$$\hat{n}_i \equiv a_i^\dagger a_i \quad (\text{F.5.15})$$

che chiamiamo **operatore numero**.

Verifichiamo che effettivamente  $\hat{n}_i$  conti le particelle. Per i *bosoni* è immediato:

$$\hat{n}_i |n_i\rangle = a_i^\dagger a_i |n_i\rangle = a_i^\dagger \sqrt{n_i} |n_i - 1\rangle = n_i |n_i\rangle \quad (\text{F.5.16})$$

e vediamo che l'autovalore di  $\hat{n}_i$  è proprio il numero di particelle  $n_i$ . Per il caso *fermionico* abbiamo:

$$\hat{n}_i |n_i\rangle = a_i^\dagger a_i |n_i\rangle = a_i^\dagger (\pm n_i |n_i - 1\rangle) \quad (\text{F.5.17})$$

$$= \pm n_i a_i^\dagger |n_i - 1\rangle = \pm n_i [\pm (1 - (n_i - 1)) |n_i\rangle] \quad (\text{F.5.18})$$

$$= \pm n_i [\pm (1 - n_i + 1)] |n_i\rangle = n_i (2 - n_i) |n_i\rangle \quad (\text{F.5.19})$$

$$= (2n_i - n_i^2) |n_i\rangle \quad (\text{F.5.20})$$

$$\text{vale } n_i^2 = n_i \quad (\text{F.5.21})$$

$$= (2n_i - n_i) |n_i\rangle = n_i |n_i\rangle. \quad (\text{F.5.22})$$

Notiamo che  $n_i^2 = n_i$  solo perché nel caso fermionico abbiamo che  $n_i = 0, 1$ .

Possiamo anche definire l'**operatore numero** che conta, non le particelle in un singolo stato, ma le particelle totali nel sistema. In questo caso è presente una somma su tutti i possibili stati  $i$ . L'operatore è:

$$\hat{N} |\{n_i\}\rangle = \sum_i \hat{n}_i |\{n_i\}\rangle = \sum_i n_i |\{n_i\}\rangle = N |\{n_i\}\rangle \quad (\text{F.5.23})$$

## F.6 Operatore di campo quantizzato

Vediamo in questa sezione la potenza che ha il formalismo dei numeri di occupazione e lo spazio di Fock. Infatti, lo spazio di Fock permette di "riorganizzare" lo spazio di Hilbert e di trattare sistemi di paricelle identiche con un nuovo formalismo, trattando la funzione d'onda, nel senso della MQ, come un campo.

Facciamo attenzione che siamo ancora in Meccanica Quantistica non relativistica anche se stiamo facendo cose che ci sembrano familiari a quelle che facciamo in Teoria Quantistica dei Campi.

Abbiamo visto che per particella singola scriviamo:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{orb}} \otimes \mathcal{H}_s \quad (\text{F.6.1})$$

e tra tutte le basi per lo spazio di singola particella la più naturale è quella composta dagli autovalori simultanei della posizione  $\vec{x}$  e della terza componente dello spin  $S_3$ , cioè i vettori  $|\vec{x}, \sigma\rangle$ , e per cui valgono le equazioni agli autovalori:

$$\hat{x} |\vec{x}, \sigma\rangle = \vec{x} |\vec{x}, \sigma\rangle \quad , \quad \hat{\sigma} |\vec{x}, \sigma\rangle = \hbar \sigma |\vec{x}, \sigma\rangle . \quad (\text{F.6.2})$$

Purtroppo però non è una base numerabile e occorre fare un'estensione al continuo. Per brevità di notazione<sup>2</sup> possiamo scrivere:

$$|\vec{x}_1 \sigma_1, \dots, \vec{x}_N \sigma_N\rangle = |\{\vec{x}, \sigma\}\rangle \quad (\text{F.6.4})$$

che rappresenta una base per lo spazio  $\mathcal{H}_N$  di  $N$  particelle bosoniche o fermioniche.

Possiamo scrivere una base sia per lo spazio simmetrico che antisimmetrico di bosoni e fermioni identici:

$$|\{\vec{x}, \sigma\}\rangle_S = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_P P |\vec{x}_1 \sigma_1, \dots, \vec{x}_N \sigma_N\rangle \quad (\text{F.6.5})$$

$$|\{\vec{x}, \sigma\}\rangle_A = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_P (-1)^P P |\vec{x}_1 \sigma_1, \dots, \vec{x}_N \sigma_N\rangle \quad (\text{F.6.6})$$

---

<sup>2</sup>Nota che l'ordine dei prodotti diretti è solo convenzione e potremmo tranquillamente scrivere:

$$|\vec{x}_1 \sigma_1, \dots, \vec{x}_N \sigma_N\rangle = |\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N\rangle |\sigma_1, \dots, \sigma_N\rangle = |\{\vec{x}\}\rangle |\{\sigma\}\rangle . \quad (\text{F.6.3})$$

in cui la somma è estesa a tutti gli operatori di scambio dello spazio  $\mathcal{H}_N$  che permutano gli stati delle particelle e il termine  $(-1)^P$  indica che il termine della sommatoria va preso con il segno positivo o negativo a seconda che il numero di scambi sia pari o dispari.

Prendiamo il caso di particelle bosoniche. Fissata la base possiamo creare un'operatore  $\hat{\psi}_\sigma^\dagger(\vec{x})$  che crei una particella nello stato  $|\{\vec{x}, \sigma\}\rangle$ , proprio come nello spazio discreto faceva  $a_i$  per lo stato  $|\{i\}\rangle$ . In particolare, quando  $\hat{\psi}_\sigma^\dagger(\vec{x})$  agisce sullo stato di vuoto vorremmo:

$$\hat{\psi}_\sigma^\dagger(\vec{x}) |0\rangle = |\vec{x}, \sigma\rangle. \quad (\text{F.6.7})$$

Per dare una rappresentazione di  $\hat{\psi}^\dagger$  possiamo utilizzare la relazione di completezza dello spazio nella relazione (F.6.7):

$$\hat{\psi}_\sigma^\dagger(\vec{x}) |0\rangle = \sum_{i,\rho} |i, \rho\rangle \langle i, \rho | \vec{x}, \sigma\rangle \quad (\text{F.6.8})$$

per via del fatto che possiamo separare i prodotti diretti:

$$\hat{\psi}_\sigma^\dagger(\vec{x}) |0\rangle = \sum_{i,\rho} |i, \rho\rangle \langle i | \vec{x} \rangle \langle \rho | \sigma\rangle \quad (\text{F.6.9})$$

$$= \hat{\psi}_\sigma^\dagger(\vec{x}) |0\rangle = \sum_{i,\rho} |i, \rho\rangle \langle i, \vec{x} | i, \vec{x} \rangle \delta_{\rho\sigma} \quad (\text{F.6.10})$$

$$\hat{\psi}_\sigma^\dagger(\vec{x}) |0\rangle = \sum_{i,\rho} \langle i | \vec{x} \rangle |i, \sigma\rangle \quad (\text{F.6.11})$$

$$\hat{\psi}_\sigma^\dagger(\vec{x}) |0\rangle = \sum_{i,\rho} \langle i | \vec{x} \rangle a_{i\sigma}^\dagger |0\rangle \quad (\text{F.6.12})$$

individuiamo dunque:

$$\hat{\psi}_\sigma^\dagger(\vec{x}) = \sum_{i,\rho} \langle i | \vec{x} \rangle a_{i\sigma}^\dagger \quad (\text{F.6.13})$$

in cui possiamo identificare, come abbiamo imparato dalla Meccanica Quantistica, il braket  $\langle i | \vec{x} \rangle$  con la funzione d'onda  $\psi_i^\dagger(\vec{x})$  (ora la  $\dagger$  indica il complesso coniugato) nel senso della MQ non relativistica. Possiamo vedere l'hermitiano coniugato di (F.6.13):

$$\hat{\psi}_\sigma(\vec{x}) = \sum_{i,\rho} \langle \vec{x} | i \rangle a_{i\sigma}. \quad (\text{F.6.14})$$

Notiamo subito che vale:

$$\hat{\psi}_\sigma(\vec{x}) |0\rangle = 0. \quad (\text{F.6.15})$$

Abbiamo quindi trovato che gli operatori (F.6.13) e (F.6.14) sono una combinazione lineare degli operatori di creazione e distruzione pesati tramite

le funzioni d'onda  $\psi_i^\dagger(\vec{x}) = \langle i|\vec{x}\rangle$  e  $\psi_i(\vec{x}) = \langle \vec{x}|i\rangle$  nello spazio delle configurazioni. Gli operatori (F.6.13) e (F.6.14) creano e distruggono particelle di spin  $\sigma$  nel punto  $\vec{x}$  dello spazio delle configurazioni. Uno stato generico lo costruiamo come:

$$\hat{\psi}_{\sigma_1}^\dagger(\vec{x}_1) \hat{\psi}_{\sigma_2}^\dagger(\vec{x}_2) \dots \hat{\psi}_{\sigma_N}^\dagger(\vec{x}_N) |0\rangle = |\vec{x}_1 \sigma_1, \vec{x}_2 \sigma_2, \dots, \vec{x}_N \sigma_N\rangle. \quad (\text{F.6.16})$$

Notiamo un'ultima cosa, che ritroveremo anche nella Teoria Quantistica dei Campi capitolo §6, ossia lo studio dell'algebra degli operatori (F.6.13) e (F.6.14). Vediamo:

$$[\hat{\psi}_\sigma(\vec{x}), \hat{\psi}_\rho^\dagger(\vec{y})] = \sum_{i,j} \langle \vec{x}|i\rangle \langle j|\vec{y}\rangle [a_{i\sigma}, a_{j\rho}^\dagger] \quad (\text{F.6.17})$$

$$= \sum_{i,j} \langle \vec{x}|i\rangle \langle j|\vec{y}\rangle \delta_{ij} \delta_{\sigma\rho} \quad (\text{F.6.18})$$

$$= \sum_i \langle \vec{x}|i\rangle \langle i|\vec{y}\rangle \delta_{\sigma\rho} \quad (\text{F.6.19})$$

$$= \delta_{\sigma\rho} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}). \quad (\text{F.6.20})$$

Valgono anche:

$$[\hat{\psi}_\sigma(\vec{x}), \hat{\psi}_\rho(\vec{y})] = 0 \iff [a_{i\sigma}, a_{j\rho}] = 0 \quad (\text{F.6.21})$$

$$[\hat{\psi}_\sigma^\dagger(\vec{x}), \hat{\psi}_\rho^\dagger(\vec{y})] = 0 \iff [a_{i\sigma}^\dagger, a_{j\rho}^\dagger] = 0. \quad (\text{F.6.22})$$

Nel caso di particelle fermioniche basta semplicemente sostituire i commutatori con gli anticommutatori.

Quello che abbiamo visto è il modo in cui si tratta la Meccanica Quantistica non relativistica per un sistema con molte particelle bosoniche (o fermioniche). La generalizzazione del formalismo che abbiamo sviluppato (vedi Srednicki [10] nel capitolo 1 come ne parla) non può essere fatta se non passando ad una teoria di campo, che sarà proprio quello che faremo nel capitolo §6, a cui rimando per discorsi dettagliati riguardo la Teoria Quantistica dei Campi.



## Appendice G

# Discorsi sulla costruzione dell'operatore di campo di Klein-Gordon

### G.1 Riferimenti dei libri

Visto che mi è sembrato un po' oscuro il modo in cui ci siamo ricavati l'espressione dell'operatore di campo  $\hat{\phi}$ , allora ho deciso di raccogliere le varie fonti per chiarirmi un po' le idee:

- Dal capitolo 2.3 di Peskin e Schroeder [7] e Tong [12]: vediamo che se espandiamo il campo  $\phi(x)$  di Klein-Gordon come (facciamo una trasformazione di Fourier):

$$\phi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \phi(\vec{p}, t) \quad (\text{G.1.1})$$

possiamo riscrivere l'equazione di Klein-Gordon come:

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} + (|\vec{p}|^2 + m^2) \right] \phi(\vec{p}, t) = 0 \quad (\text{G.1.2})$$

e non è difficile accorgersi che questa è l'equazione differenziale di un'oscillatore armonico con pulsazione:

$$\omega_p = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}. \quad (\text{G.1.3})$$

Dal corso di MQ1 noi sappiamo bene come risolvere il problema dell'oscillatore armonico (se vuoi ripassa il comportamento degli operatori di innalzamento ed abbassamento nell'appendice F) e sappiamo scrivere posizione ed impulso in termini di  $a^\dagger$  e  $a$ :

$$q = \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} (a + a^\dagger) \quad , \quad p = -i\sqrt{\frac{\omega_p}{2}} (a - a^\dagger). \quad (\text{G.1.4})$$

Ora, stiamo andando nella teoria di campo e abbiamo  $q^i \rightarrow \phi(x)$  e  $p_i \rightarrow \Pi(x)$ , per cui in analogia con quanto già noto scriviamo:

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} (a + a^\dagger) , \quad \Pi = -i\sqrt{\frac{\omega_p}{2}} (a - a^\dagger). \quad (\text{G.1.5})$$

Possiamo scrivere l'espansione il campo di Klein-Gordon usando lo stesso ragionamento, ma trattando ogni modo di oscillazione, ad impulso  $\vec{p}$  fissato, come un'oscillatore armonico indipendente con il proprio  $a$  e  $a^\dagger$ :

$$\phi(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} (a_p e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + a_p^\dagger e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}) \quad (\text{G.1.6})$$

e di conseguenza:

$$\Pi(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (-i)\sqrt{\frac{\omega_p}{2}} (a_p e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} - a_p^\dagger e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}). \quad (\text{G.1.7})$$

In questo modo anche i discorsi sui fattori di normalizzazione si risolvono in automatico.

Questo discorso è anche collegato a quanto detto per la costruzione del campo quantizzato nell'Appendice F. Avevamo trovato che l'operatore di campo era:

$$\hat{\psi}_\sigma(\vec{x}) = \sum_{i,\sigma} \langle \vec{x} | i \rangle a_{i\sigma} , \quad \hat{\psi}_\sigma^\dagger(\vec{x}) = \sum_{i,\sigma} \langle i | \vec{x} \rangle a_{i\sigma}^\dagger \quad (\text{G.1.8})$$

in cui compariva la funzione d'onda nel senso della Meccanica Quantistica che pesava gli operatori di creazione e distruzione.

- Dal capitolo 11 di Lancaster e Blundell [6]: fanno i primi step, in cui costruiscono  $\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{H}$  e le relazioni di commutazione esattamente come facciamo noi nel capitolo §6. Poi, dopo aver elevato ad operatori  $\hat{\phi}$  e  $\hat{\Pi}$  si convince che il modo più conveniente per capire come essi possano agire sullo stato  $\{|n_i\rangle\}$  di numeri di occupazione sia quello di scriverli in termini di operatori di creazione e distruzione. Quello che fanno è ricordarsi i risultati che hanno ottenuto nel loro capitolo §2 in cui studiano gli oscillatori armonici quantistici e le loro composizioni. In particolare ciò che ricordano è come scrivono l'operatore posizione in termini di  $a$  e  $a^\dagger$ , ossia:

$$\hat{x}_j = \left( \frac{\hbar}{m} \right)^{1/2} \sum_k \frac{1}{(2\omega_k N)^{1/2}} (\hat{a}_k e^{ik_j a} + \hat{a}_k^\dagger e^{-ik_j a}). \quad (\text{G.1.9})$$

In analogia a ciò, facendo i cambi  $\vec{k} \rightarrow \vec{p}$ ,  $\omega_k \rightarrow E_p$  e  $\hat{x} \rightarrow \hat{\phi}$ , scrivono l'operatore di campo indipendente dal tempo:

$$\phi(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (a_p e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + a_p^\dagger e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}) \quad (\text{G.1.10})$$

in cui non fanno molti discorsi sui fattori di normalizzazione, ma ne parleremo meglio noi in seguito. Nel capitolo 11 fanno dei discorsi molto simili a quelli che ho riportato nel capitolo §6. Anche per loro vale:

$$E_p = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}. \quad (\text{G.1.11})$$

- Dal capitolo 3 di Srednicki [10]: lui fa in una pagina un paio di osservazioni, basati sui risultati che aveva ottenuto per l'hamiltoniana della MQ non relativistica nel tentativo di relativizzarla (nel suo capitolo 1), e arriva a scrivere un'espressione, relativistica, per  $H$ . Poi ricomincia tutto da capo e mostra meglio l'invarianza di Lorentz di quello che crea.

Ricomincia da capo, prende un campo classico scalare e reale, si scrive una lagrangiana Lorentz invariante, calcola l'azione e la minimizza trovando l'equazione di Klein-Gordon. Nota che la generica soluzione di KG è l'onda piana di forma:

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}\pm i\omega t} \quad (\text{G.1.12})$$

con  $\vec{k}$  vettore d'onda arbitrario e  $\omega$  della forma:

$$\omega = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}. \quad (\text{G.1.13})$$

La generica soluzione di Klein-Gordon la scrive di conseguenza come:

$$\phi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3k}{f(k)} \left[ a(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}-i\omega t} + b(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}+i\omega t} \right] \quad (\text{G.1.14})$$

con  $a(\vec{k})$  e  $b(\vec{k})$  funzioni arbitrarie e  $f(\vec{k})$  inserita per futura convenienza. Siamo ancora in una teoria di campo classica, ma se interpretassimo  $\phi(\vec{x}, t)$  come una funzione d'onda (che non è) potremmo vedere in  $e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}+i\omega t}$  è il contributo delle energie negative, poiché sappiamo che la soluzione dell'equazione di Schrodinger libera è  $\phi \propto e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}-iE(\vec{p})t}$  in cui  $E(\vec{p})$  è l'energia della particella, se prendiamo  $e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}+iE(\vec{p})t}$  allora abbiamo un segno meno da associare all'energia.

Srednicki fa tutti i discorsi utilizzando campi classici reali (reale che vuol dire che  $\phi(\vec{x}, t)$  assegna un numero reale ad ogni punto dello spazio tempo) e scalari (che significa che per due sistemi di riferimento inerziali diversi vale  $\phi(x) = \bar{\phi}(\bar{x})$ , ovvero, che le equazioni del moto in SRI diversi sono uguali). Per avere un campo reale bisogna imporre  $\phi(x) = \phi^*(x)$ , il che ci porta a:

$$\phi^*(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3k}{f(k)} \left[ a^*(\vec{k}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}+i\omega t} + b^*(\vec{k}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}-i\omega t} \right] \quad (\text{G.1.15})$$

$$= \int \frac{d^3k}{f(k)} \left[ a^*(\vec{k}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}+i\omega t} + b^*(-\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}-i\omega t} \right] \quad (\text{G.1.16})$$

in cui nella seconda riga cambiamo variabile d'integrazione del secondo termine  $\vec{k} \rightarrow -\vec{k}$ . Comparando le espressioni di  $\phi$  e  $\phi^*$  e imponendo l'uguaglianza si arriva a:

$$a(\vec{k}) = b^*(-\vec{k}) \quad (\text{G.1.17})$$

che permette di scrivere facilmente:

$$\phi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3k}{f(k)} \left[ a(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\omega t} + a^*(-\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x} + i\omega t} \right] \quad (\text{G.1.18})$$

$$= \int \frac{d^3k}{f(k)} \left[ a(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\omega t} + a^*(\vec{k}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x} + i\omega t} \right] \quad (\text{G.1.19})$$

$$= \int \frac{d^3k}{f(k)} \left[ a(\vec{k}) e^{ik^\mu x_\mu} + a^*(\vec{k}) e^{-ik^\mu x_\mu} \right] \quad (\text{G.1.20})$$

con  $k^\mu$  quadrivettore d'onda e il prodotto<sup>1</sup>:

$$k^\mu x_\mu = -\omega_k t + \vec{k} \cdot \vec{x} \quad (\text{G.1.21})$$

che è Lorentz invariante. A questo punto passa a parlare della normalizzazione  $f(\vec{k})$  e la fissa in modo che la misura di integrazione sia Lorentz invariante. Il modo in cui Srednicki lo fa è prendendo (come facciamo noi nel capitolo §6)  $d^4k \delta(k^2 + m^2)\theta(k^0)$  che abbiamo dimostrato valere:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dk^0 \delta(k^2 + m^2)\theta(k^0) = \frac{1}{2\omega}. \quad (\text{G.1.22})$$

Per questo motivo sceglie  $f(k^\mu) = (2\pi)^3 2\omega$  e quindi arriva a:

$$\phi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} \left[ a(\vec{k}) e^{ik^\mu x_\mu} + a^*(\vec{k}) e^{-ik^\mu x_\mu} \right]. \quad (\text{G.1.23})$$

Però, arrivato a questo punto si stanca della teoria classica ed eleva i campi al ruolo di operatore e definisce le regole di commutazione come le abbiamo già viste. Quando impone i commutatori tra i campi e i momenti coniugati vede anche le regole di commutazione di  $a(\vec{k})$  e il suo complesso coniugato, che ora è diventato l'hermitiano, ossia  $a^\dagger(\vec{k})$ . Nel capitolo 4 comincia a parlare del teorema di spin-statistica, ma lasciamolo per il futuro.

---

<sup>1</sup>Nota che Srednicki utilizza la metrica Minkowskiana con i segni opposti a quelli usati da noi.

## G.2 Normalizzazione stati a tri-impulso fissato

In questa sezione parleremo della normalizzazione degli stati  $|\vec{k}\rangle$  a tri-impulso fissato; prima verificheremo che siano correttamente normalizzati e solo successivamente vedremo che non sono Lorentz invarianti.

Se partiamo dalla conoscenza di:

$$|\vec{k}\rangle = \hat{a}_k^\dagger |0\rangle \quad , \quad \langle \vec{k}| = \langle 0| \hat{a}_k \quad (\text{G.2.1})$$

e una corretta normalizzazione dello stato di vuoto:

$$\langle 0|0\rangle = 1 \quad (\text{G.2.2})$$

allora, possiamo verificare:

$$\langle \vec{k}'|\vec{k}\rangle = \langle 0| \hat{a}_{k'} \hat{a}_k^\dagger |0\rangle \quad (\text{G.2.3})$$

$$= \langle 0| \left( [\hat{a}_{k'}, \hat{a}_k^\dagger] + \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_{k'} \right) |0\rangle \quad (\text{G.2.4})$$

$$= \langle 0| [\hat{a}_{k'}, \hat{a}_k^\dagger] |0\rangle \quad (\text{G.2.5})$$

$$= \langle 0| \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') |0\rangle \quad (\text{G.2.6})$$

$$= \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \quad (\text{G.2.7})$$

come volevamo.<sup>2</sup>

Parliamo ora del fatto che:

$$\langle \vec{k}'|\vec{k}\rangle = \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \quad (\text{G.2.8})$$

non sia Lorentz invariante. Se facciamo, ad esempio, un boost nella direzione 3 abbiamo:

$$k = \begin{pmatrix} E_k \\ k_3 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad k' = \begin{pmatrix} E_{k'} \\ k'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_k \\ k_3 \end{pmatrix} \quad (\text{G.2.9})$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma E_k + \beta\gamma k_3 \\ \beta\gamma E_k + \gamma k_3 \end{pmatrix} \quad (\text{G.2.10})$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma(E_k + \beta k_3) \\ \gamma(\beta E_k + k_3) \end{pmatrix}. \quad (\text{G.2.11})$$

---

<sup>2</sup>La norma di  $|\vec{k}\rangle$  è positiva poiché il commutatore è stato definito con il segno positivo.

Quindi la misura di integrazione Lorentz invariante dovrà essere normalizzata in modo tale che:

$$\delta^3(\vec{k} - \vec{p}) d^3k = \delta^3(\vec{k}' - \vec{p}') d^3k' \quad (\text{G.2.12})$$

$$\delta^3(\vec{k} - \vec{p}) = \delta^3(\vec{k}' - \vec{p}') \frac{d^3k'}{d^3k} \quad (\text{G.2.13})$$

$$\delta^3(\vec{k} - \vec{p}) = \delta^3(\vec{k}' - \vec{p}') \gamma \left( \beta \frac{dE_k}{dk_3} + 1 \right) \quad (\text{G.2.14})$$

utilizzando:

$$E_k^2 - k_3^2 = m^2 \implies E_k = \sqrt{m^2 + k_3^2} \quad (\text{G.2.15})$$

$$\implies \frac{dE_k}{dk_3} = \frac{1}{2E_k} 2k_3 = \frac{k_3}{E_k} \quad (\text{G.2.16})$$

otteniamo:

$$\delta^3(\vec{k} - \vec{p}) = \delta^3(\vec{k}' - \vec{p}') \gamma \left( \beta \frac{k_3}{E_k} + 1 \right) \quad (\text{G.2.17})$$

$$= \delta^3(\vec{k}' - \vec{p}') \frac{\gamma}{E_k} \underbrace{(E_k + \beta k_3)}_{E'_k} \quad (\text{G.2.18})$$

$$= \delta^3(\vec{k}' - \vec{p}') \frac{E'_k}{E_k} \quad (\text{G.2.19})$$

quindi, la normalizzazione Lorentz invariante degli stati a tri-impulso fissato deve includere un fattore proporzionale all'energia in modo che:

$$\langle k | p \rangle = \delta^3(\vec{k} - \vec{p}) E_k = \delta^3(\vec{k}' - \vec{p}') E'_k \quad (\text{G.2.20})$$

proprio come abbiamo trovato nel campitolo §6.

## Appendice H

# Rappresentazione di interazione

Ricordiamo in questa appendice alcune cose riguardo la rappresentazione di interazione. Questo tipo di interazione è la più comoda da utilizzare in Teoria Quantistica dei Campi e potrò essere un po' veloce su alcuni punti riguardo le rappresentazioni di Heisembreg e Schrodinger, ma per quello rivedi gli appunti di MQ1. Puoi seguire per questa appendice il capitolo 18 del Lancaster e Blundell [6].

Come ben sappiamo finora in Meccanica Quantistica possiamo avere una formulazione con stati dipendenti dal tempo ed operatori indipendenti dal tempo (rappresentazione di Schrödinger) o una con stati indipendenti dal tempo e operatori dipendenti dal tempo (rappresentazione di Heisenberg). Sappiamo anche che è disponibile una terza via, chiamata rappresentazione dell'interazione, in cui sia gli stati che gli operatori hanno una certa dipendenza dal tempo.

Come detto sopra, prendiamo l'hamiltoniana divisa in due parti  $H = H_0 + H'$ . La parte libera sarà generalmente indipendente dal tempo e può essere facilmente risolta. Imponiamo che gli operatori nella rappresentazione di interazione evolvono nel tempo (secondo Heisenberg) attraverso la parte libera dell'hamiltoniana:

$$\hat{O}_I(t) = e^{i\hat{H}_0 t} \hat{O} e^{-i\hat{H}_0 t} \quad (\text{H.0.1})$$

e avremo dunque un'equazione del moto di tipo Heisenberg:

$$i \frac{d\hat{O}_I}{dt} = [\hat{O}_I, \hat{H}_0]. \quad (\text{H.0.2})$$

Però una volta stabilità la dipendenza temporale degli operatori, possiamo utilizzare un generico elemento di matrice per vedere come evolvono gli stati. Sfruttiamo il fatto che i valori medi rimangono uguali al variare della

rappresentazione:

$${}_S \langle \phi(t) | \hat{O} | \psi(t) \rangle_S \quad (\text{H.0.3})$$

$$= \langle \psi_I(t) | \hat{O}_I(t) | \psi_I(t) \rangle \quad (\text{H.0.4})$$

$$= \langle \psi_I(t) | e^{i\hat{H}_0 t} \hat{O} e^{-i\hat{H}_0 t} | \psi_I(t) \rangle \quad (\text{H.0.5})$$

e da quello scritto sopra vediamo bene che:

$$| \psi(t) \rangle_S = e^{-i\hat{H}_0 t} | \psi_I(t) \rangle \implies | \psi_I(t) \rangle = e^{i\hat{H}_0 t} | \psi(t) \rangle_S \quad (\text{H.0.6})$$

che possiamo derivarla nel tempo:

$$i \frac{\partial}{\partial t} | \psi_I(t) \rangle = i \frac{\partial}{\partial t} \left[ e^{i\hat{H}_0 t} | \psi(t) \rangle_S \right] \quad (\text{H.0.7})$$

$$= -H_0 e^{i\hat{H}_0 t} | \psi(t) \rangle_S + e^{i\hat{H}_0 t} \underbrace{i \frac{\partial}{\partial t} | \psi(t) \rangle_S}_{\hat{H} | \psi(t) \rangle_S} \quad (\text{H.0.8})$$

$$= -H_0 e^{i\hat{H}_0 t} | \psi(t) \rangle_S + e^{i\hat{H}_0 t} \hat{H} | \psi(t) \rangle_S \quad (\text{H.0.9})$$

$$= -H_0 e^{i\hat{H}_0 t} | \psi(t) \rangle_S + e^{i\hat{H}_0 t} (\hat{H}_0 + \hat{H}') | \psi(t) \rangle_S \quad (\text{H.0.10})$$

$$= e^{i\hat{H}_0 t} \hat{H}' | \psi(t) \rangle_S \quad (\text{H.0.11})$$

$$= e^{i\hat{H}_0 t} \hat{H}' e^{-i\hat{H}_0 t} | \psi_I(t) \rangle. \quad (\text{H.0.12})$$

Dunque, vediamo che mentre gli operatori, nella rappresentazione di interazione, evolvono come scritto in (H.0.1) e (H.0.2), gli stati evolvono alla Schrodinger con  $H'$ :

$$i \frac{\partial}{\partial t} | \psi_I(t) \rangle = \hat{H}_I | \psi_I(t) \rangle \quad (\text{H.0.13})$$

in cui  $\hat{H}_I$  è l'hamiltoniana di interazione, che essendo un'operatore anch'essa, evolve secondo Heisemberg:

$$\hat{H}_I = e^{i\hat{H}_0 t} \hat{H}' e^{-i\hat{H}_0 t}. \quad (\text{H.0.14})$$

Forse è passata in secondo piano, ma abbiamo detto che tutte le descrizioni che diamo sono equivalenti, il che è molto importante, poiché la Fisica, chiaramente, non deve dipendere da come noi scriviamo gli oggetti. Ciò lo possiamo facilmente verificare calcolando un generico elemento di matrice di un qualsiasi operatore:

$$\langle \hat{F} \rangle_\psi = {}_S \langle \psi(t) | \hat{F} | \psi(t) \rangle_S \quad (\text{H.0.15})$$

$$= \langle \psi(0) | \hat{U}^\dagger(t, 0) \hat{F} \hat{U}(t, 0) | \psi(0) \rangle \quad (\text{H.0.16})$$

$$= \langle \psi(0) | e^{i\hat{H}t} \hat{F} e^{-i\hat{H}t} | \psi(0) \rangle \quad (\text{H.0.17})$$

$$= \langle \psi(0) | e^{i\hat{H}'t} e^{i\hat{H}_0 t} \hat{F} e^{-i\hat{H}_0 t} e^{-i\hat{H}'t} | \psi(0) \rangle \quad (\text{H.0.18})$$

in cui, ovviamente tutte le uguaglianze sono valide e i vari termini sono equivalenti, ma in particolare individuiamo in (H.0.15) la rappresentazione di Schrodinger, in (H.0.17) la rappresentazione di Heisemberg e in (H.0.18), se assegnamo gli esponenziali correttamente, la rappresentazione di interazione.

Notiamo che in particolare tutte le rappresentazioni coincidono a  $t = 0$ , poiché:

$$e^{i\hat{H}t}\Big|_{t=0} = 1 \implies \hat{O}_I = \hat{O} \quad , \quad \hat{H}_I = \hat{H}' \quad , \quad |\psi_I(0)\rangle = |\psi(0)\rangle_S . \quad (\text{H.0.19})$$

il motivo per cui la rappresentazione di interazione è importante lo abbiamo spiegato quando abbiamo definito la matrice di scattering  $S$ .



# Bibliografia

- [1] V. Barone. *Relatività*. Bollati Boringhieri, 2004. ISBN: 9788833957579.
- [2] F. Bastianelli. «Appunti di teoria dei gruppi».
- [3] G. Cembalo. «Appunti del corso: "Introduzione alla Fisica delle Interazioni Fondamentali" presieduto dalla professoressa M. Boglione nell'a.a. 2023-2024».
- [4] P. Gambino. «Appunti di teoria dei gruppi».
- [5] M. Kaku. *Quantum field theory: A Modern introduction*. 1993.
- [6] Tom Lancaster e Stephen J. Blundell. *Quantum Field Theory for the Gifted Amateur*. Oxford University Press, 2014. ISBN: 978-0-19-969933-9.
- [7] Michael E. Peskin e Daniel V. Schroeder. *An Introduction to quantum field theory*. Reading, USA: Addison-Wesley, 1995. ISBN: 978-0-201-50397-5. DOI: [10.1201/9780429503559](https://doi.org/10.1201/9780429503559).
- [8] Pierre Ramond. *Field theory: a modern primer*. Vol. 51. 1981.
- [9] G. Salmé. «Appunti di teoria dei gruppi».
- [10] M. Srednicki. *Quantum field theory*. Cambridge University Press, gen. 2007. ISBN: 978-0-521-86449-7. DOI: [10.1017/CBO9780511813917](https://doi.org/10.1017/CBO9780511813917).
- [11] George F. Sterman. *An Introduction to quantum field theory*. Cambridge University Press, ago. 1993. ISBN: 978-0-521-31132-8.
- [12] D. Tong. «QFT lecture notes».
- [13] Steven Weinberg. *The Quantum theory of fields. Vol. 1: Foundations*. Cambridge University Press, giu. 2005. ISBN: 978-0-521-67053-1. DOI: [10.1017/CBO9781139644167](https://doi.org/10.1017/CBO9781139644167).