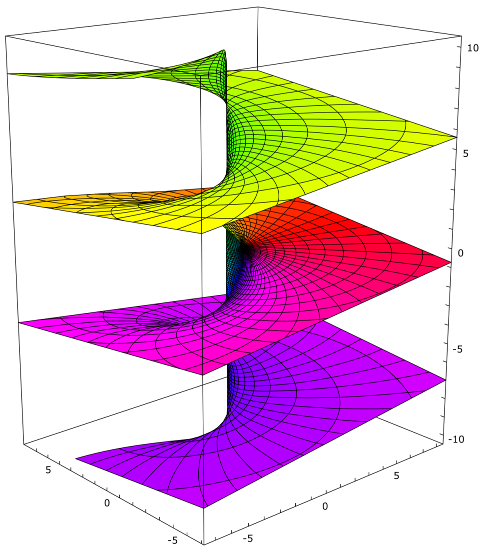
Appunti del corso di:

Metodi Matematici per la Fisica 2

Gabriele Cembalo

A.A. 2023-2024



Università degli Studi di Torino
Dipartimento di Fisica
Via Giuria, 1, Torino (TO)

Informazioni legali

I tell you, with complex numbers
you can do anything.

John Derbyshire

Prefazione

In questo documento voglio raccorgliere le mie note rispetto gli appunti relativi al corso di "**Metodi Matematici per la Fisica**" svolto dalla professoressa M. Frau e il professor C. Maccaferri e seguito all'*Università degli studi di Torino* nell'a.a. 2023-2024 aggiungendo eventualmente i riferimenti a vari libri (più o meno utili a seconda della volontà di approfondire). Questi appunti sono una riscrittura degli appunti presi in aula, quindi la fonte principale sono le note del/la professore/ssa, ma i libri sono fondamentali per una completa comprensione degli argomenti. Durante il corso sono stati consigliati diversi libri (indicati in Bibliografia), cercherò di indicare i vari riferimenti bibliografici all'inizio di ogni capitolo.

Questo documento è un indice un po' allungato dei miei appunti presi a lezione e non una loro trascrizione federe. Infatti, a differenza delle altre mie note, non sono presenti conti o passaggi matematici, ma solamente concetti e step da svolgere. Gli argomenti sono comunque divisi per sezioni e per ogni capitolo ho inserito delle note sul contenuto e su che cosa faccio in quelle particolari pagine; così da velocizzare il processo di ripasso o rilettura ed evitare di sfogliare 460 pagine di appunti. Sono note che potrebbero sostituire gli appunti vista la mole di conti presenti e i pochi concetti presenti. Le sezioni sui testi sono indicati con accanto al nome dei simboli del tipo: †, ‡, $\diamond$ (riferimenti dei testi al fondo). Ho inserito una sezione con dei commenti sui tutoraggi svolti in aula; è pensata come una parte che dovrebbe aiutare a ripassare "rapidamente" una specifica tipologia di esercizi anche in vista dello scritto e in cui sono anche presenti rapidi riassunti sulla teoria.

Chiaramente sono da intendere come degli appunti personali scritti in bella, eventuali sviste, errori o inesattezze sono dovute alla mia ignoranza, ma soprattuto ho scritto questi appunti in modo da *"spiegare"* a me stesso l'argomento, quindi alcune parti potrebbero sembrare troppo prolisse o troppo superficiali per alcuni. In ogni caso fa piacere se possono aiutare qualcun'altro. Spero in ogni caso di esser riuscito a scrivere un documento chiaro e ben strutturato.

Alcune volte posso non far riferimento ad un particolare testo o corso passato, in questi casi mi sto riferendo ai MIEI appunti riguardanti quell'argomento. Una mia collezione di appunti è presente nella mia pagina personale di GitHub: gCembalo/Theoretical-Physics-Notes.

Qualsiasi errore/refuso può essere inviato alla mia mail personale:
`gabriele.cembalo02@gmail.com`.

Ultimo aggiornamento: 22/01/2024

Indice

Parte I

Appunti Teoria

Capitolo 1

Trasformazioni conformi

In questo capitolo parliamo chiaramente di trasformazioni conformi, ossia di trasformazioni che preservano gli angoli. Come prima cosa ripassa cosa sono le funzioni analitiche in un punto e fai vedere che se scrivi $f(z_0) = w_0$ e valuti la funzione in un incremento infinitesimo di z_0 come esprimi il rispettivo incremento dell'immagine $\mathrm{d}w$ (devi farmi vedere che $\mathrm{d}w = \lambda(z_0)$ ossia che le derivate generano rotodilatazioni). Scrivi $\mathrm{d}w$ in termini di modulo e fase. Ora, vorrei vedere effettivamente che preservano gli angoli, ossia che se prendi due incrementi $\mathrm{d}z_1$ e $\mathrm{d}z_2$ allora se all'inizio hai $\arg(\mathrm{d}z_2) - \arg(\mathrm{d}z_1) = \varphi$ avrai $\arg(\mathrm{d}w_2) - \arg(\mathrm{d}w_1) = \varphi$.

Quello visto fin'ora va bene se $f'(z_0) \neq 0$, ma se mi mettessi in un punto in cui la derivata prima è nulla il fatto che io debba considerare la derivata seconda cosa comporta sugli angoli? (con gli stessi conti di prima vedi che l'angolo dell'immagine raddoppia) Poi fammi vedere anche il caso con uno zero di ordine n.

Si può studiare anche come si trasformano gli interi aperti di $\mathbb{C}$. Quali sono le trasformazioni che sicuramente mappano $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (<u>HINT</u> identità, traslazioni, dilatazioni) e quali sono esempi di mappe che non funzionano (<u>HINT</u> z^2, z^n oppure $e^z = e^x e^{iy}$, vedi che non vanno bene guardando anche ad occhio dove mappano il piano $\mathbb{C}$).

• Vedi la parte sulle trasformazioni lineari fratte nella sezione degli esercizi.

Capitolo 2

Continuazione analitica

In questa sezione vuoi studiare meglio le continuazioni analitiche e ti chiedi quando una funzione definita su un insieme può essere continuata analiticamente su altre parti di $\mathbb{C}$. Ci sono una serie di teoremi e dimostrazioni da fare.

lemma 1 Hp: $z_0 \in \mathbb{C}$ punto di regolare di $f(z)$ e z_0 punto di accumulazione di zeri, Th: $\exists I(z_0) \ / \ f(z) = 0 \quad \forall z \in I(z_0)$ (la dimostrazione la fai per assurdo,sapendo che $f(z)$ è regolare la puoi scrivere in serie di Taylor, supponi che tutti i coefficienti siano nulli, ma trovi $a_n \neq 0$, quindi puoi scrivere $f(z) = (z - z_0)^n g(z)$ con $g(z)$ regolare, ma se regolare allora esiste un intorno di z_0 in cui è non nulla e di conseguenza in cui è non nulla anche la $f(z)$, ma questo è assurdo perché z_0 è punto di accumulazione di zeri).

Teorema Hp: $f(z)$ regolare in $D \in \mathbb{C}$, D connesso e z_0 punto di accumulazione di zeri, Th: $f(z) = 0 \ \forall z \in D$ (la dimostrazione è quasi banale perché se un insieme è connesso allora è anche connesso per archi, ma se connesso per archi io posso prendere ∞ punti su una generica curva in D e per ognuno di questi vale il lemma 1).

corollario 1 Hp: $f_1(z)$,$f_2(z)$ regolari in $D \in \mathbb{C}$, D connesso e $I = \{z \mid f_1(z) = f_2(z)\}$ ha un punto di accumulazione in D, Th: $f_1(z) = f_2(z) \ \forall z \in D$ (la dimostrazione è come per il lemma 2 ma applicata alla differenza).

corollario bis $f_1(z)$ analitica in $D_1 \in \mathbb{C}$, $f_2(z)$ analitica in $D_2 \in \mathbb{C}$ e $I = \{z \mid f_1(z) = f_2(z)\}$ ha un punto di accumulazione in $D = D_1 \cap D_2$, Th: $f_1(z) = f_2(z) \ \forall z \in D_c$ con D_c parte connessa di D, le f_i sono uguali in un intorno di un punto di accumulazione allora sono uguali in tutta l'intersezione.

Ora, sono finiti i lemmi e corollari e puoi dare le definizioni di continuazione analitica e unicità di continuazione analitica.

continuazione analitica alla Weiestrass è banalmente un modo per costruire continuazioni analitiche in modo progressivo. Parti con una $f(z)$ analitica in D, quindi puoi sviluppare la funzione in un qualsiasi punto $z_0 \in$

D e scrivere $f_0(z) = \sum a_n(z - z_0)^n$ in $I_\delta(z_0)$, poi puoi prendere un altro punto $z_1 \in I_\delta(z_0)$ e puoi sviluppare $f_1(z) = \sum b_n(z - z_1)^n$ in $I_\varepsilon(z_1)$, sai che $I_\delta(z_0)$ non coincide con $I_\delta(z_0)$, ma sicuramente sai che $I_\delta \cap I_\varepsilon$, quindi in questo modo hai costruito una continuazione analitica di $f_0(z)$. e puoi scivere una continuazione analitica in tutto $\mathbb{C}$ con questo metodo. Puoi vedere l'esempio di $f_0(z) = \sum z^n$. Fai notare quando il metodo di Weiestrass smette di funzionare, ovvero, quando hai ∞ singolarità sul bordo del cerchio di convergenza. Fai anche notare che la continuazione alla Weiestrass funziona bene quando hai domini connessi e nelle zone non connesse non hai delle singolarità o cose strane.

Capitolo 3

Funzioni polidrome

Dimmi a grandi linee cosa sono le funzioni polidrome e cosa ti aspetti di trovare. Prendi ad esempio $w = f(z) = z^2$, parla dell'ambiguità che hai e a quale caratteristica della mappa è dovuta. Come risolvi se vuoi invertire la $f(z)$? Ma cosa comporta nel dominio la restrizione dei punti immagine? Fai vedere questa discontinuità prendendo $w_+ = xe^{i\varepsilon}$ e $w_- = xe^{i(2\pi-\varepsilon)}$. Puoi anche farmi vedere che i due fogli che ottieni sono collegati e se vedi la superficie di Riemann completa hai una funzione continua.

3.1 Funzioni polidrome: il logaritmo †

Vedi un caso specifico di funzione polidroma. Vuoi vedere $w = f(z) = \log z$ come una continuazione analitica di $\log x$, ma sai già che la funzione esponenziale manda infinite scrisce in infinite copie di $\mathbb{C}$, come ovvi a questo problema? **1.** fissando un range di angoli trovi una continuazione analitica; prendine due ($-\pi \leq \theta \leq \pi$ e $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$), vedi come si scrive la $f(z)$ e vedi le discontinnuità attraverso il taglio, ma poi chiediti se le due continuazioni analitiche sono uguali e dove lo sono. **2.** ora non fissi θ, ma lo fai andare tra $-\infty \leq \theta \leq +\infty$ e ti scrivi $L_n(z) = w$ tenendo esplicito sia il numero del foglio che l'angolo sotto cui vedi un punto ($L_n(z) = w = \log z = \log |z| + i\theta + i2\pi n$). Devi comunque separare i vari fogli facendo una scelta su θ, fai vedere che i fogli se uniti rendono la funzione continua. Dimmi come fai a capire se uno specifico punto è punto di diramazione.

Puoi vedere tutto questo con ad esempio $f(z) = \log \frac{z-a}{b-z}$. Valuta $f(z)$ su un generico foglio n e nota che nell'espressione del log non compare la fase di z, ma di $(z-a)$ e $(b-z)$. Vedi se girando attorno $z = a$ e $z = b$ trovi che sono punti di diramazione. Fai vedere cosa vuol dire girare attorno ad $z = a$ oppure $z = b$ (attorno $z = a$ sali sul foglio successivo, mentre $z = b$ scendi di un foglio). Se giri attorno l'∞? C'è un altro modo per vedere che ∞ è regolare? (Riesci a sviluppare $f(z)$ con Taylor, ricordando

$\log(1-w) = -\sum \frac{1}{k}w^k$). E studiando invece $f(z) = \log(z-a)(b-z)$ cosa cambia? (trovo gli stessi risultati, ma con ∞ punto di diramazione).

3.2 Studio di funzioni polidrome †

In questo paragrafo vuoi vedere quali sono i modi in cui puoi mettere i tagli. Fai notare come devi scegliere il punto, il foglio e che fasi di a e b devi avere affinché $\log z$ sia continuazione analitica di $\log x$ con $x \in \mathbb{R}$. Messo il taglio tra i due punti e fissato l'arg di z allora ho tutto ben definito e posso vedere cosa sono $f_0(z)^+$ ed $f_0(z)^-$ sopra e sotto il taglio e la loro differenza, ricordando l'espressione $f_n(z)$. Puoi vedere la discontinuità anche nel caso mettessi il taglio tra a, b ed ∞.

3.3 Funzioni polidrome: potenze †

In questo paragrafo fai vedere che il logaritmo è la madre delle funzioni polidorme proprio perché se hai una funzione generica in funzione di un log allora puoi vedere bene che hai sempre polidromia infinita valutando la $g(\log z|_n)$ in un punto iniziale e in uno finale. Se ad esemprio prendi una potenza z^α con α generico allora puoi scriverti $z^\alpha|_n$ e vedere la discontinuità sopra e sotto un taglio. Puoi vedere i casi in cui $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{Z}$ oppure $\alpha \in \mathbb{Q}$ usando $z^\alpha|_n = |z|^\alpha e^{i\alpha\theta} e^{i2\pi n\alpha}$.

3.3.1 Funzioni polidrome: potenze, esempi

In questo paragrafo vedi alcuni esempi che pssono risultare interessanti sullo studio delle funzioni polidrome.

Il primo esempio interessante è 1^i ossia $f(z) = z^i$, in cui puoi vedere facilmente che una funzione calcolata in uno specifico punto può assumere valori diversi se cambi l'intervallo dell'argomento di z.

Un secondo esempio è $\left(\frac{z-a}{b-z}\right)^\alpha$, ma in realtà questo esempio è praticamente identico a quello che hai visto nel paragrafo del logaritmo.

Un'ulteriore esempio è $[(z-a)(b-z)]^\alpha$, in cui puoi vedere che in questo caso l'∞ non è punto regolare e in più è facile vedere che per $\alpha \in \mathbb{Q}$ vedo la polidromia finita e all'∞ i fogli ordinati diversamente.

3.4 Integrali di funzioni polidrome

3.4.1 Integrali su cammini chiusi con funzioni poolidrome

In questo capitolo vedi 3 casi di integrali di funzioni polidrome. Puoi anche leggerti le note nella sezione degli esercizi in cui spiego bene cosa fare.

In questo breve paragrafo fai solamente due esempi di integrali di funzioni polidrome

$$\oint_\gamma \frac{\cos \pi z}{\log z - i\pi} \qquad \oint_C \frac{3\cos \pi z^5}{(\log z)^2 + \frac{9\pi^2}{25}}$$

con $\gamma : |z+1| = \dfrac{1}{2}$ e C = circonferenza di raggio 1 e centrata in $(-1, -i)$

sono dei puri esercizi come quelli fatti a tutoraggio in cui poni attenzione sul fatto che su alcuni fogli hai l'integrate $\neq 0$ perché le singolarità sono solo lì e non su tutti i fogli della superficie.

Un'altra osservazione importante che fai è che ti trovi sempre a sviluppare cose del tipo $\frac{1}{\log z - \alpha}$ ma è sempre lecito scrivere $\alpha = \log \beta$ e poi usare lo sviluppo del $\log(1+z) \sim z$, quindi vedi una cosa che puoi usare in generale:

$$\frac{1}{\log z - \alpha} = \frac{1}{\log z - \log \beta} = \frac{1}{\log \frac{z}{\beta}} = \frac{1}{\log\left(1 + \frac{z}{\beta} - 1\right)} \sim \frac{1}{\frac{z}{\beta} - 1} = \frac{\beta}{z - \beta}$$

e quando calcoli residui ti ritrovi sempre con cose tipo $\frac{z - z_0}{\log z - \log z_0}$ che usando la formula sopra puoi far diventare $(z - z_0)\frac{z_0}{z - z_0} = z_0$.

3.4.2 Integrali di funzioni polidrome: caso 1

In questo paragrafo risolvi il caso

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^\alpha R(x)\mathrm{d}x \qquad \text{con } R(x) \text{ funzione razionale}$$

il risultato è

$$I(\alpha) = \frac{-\pi e^{-i\pi\alpha}}{\sin \pi\alpha} \sum_{finito} Res(z^\alpha R(z))$$

negli appunti è fatto prima il caso particolare

$$I(\alpha) \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}$$

Questa tipologia è un caso facile perché basta definire l'integrale ausiliario $J(\alpha)$, scegliere la curva classica A.1 e calcolare $J(\alpha)$ nei due modi che sai (residui e somma di integrali curvilinei).

3.4.3 Integrali di funzioni polidrome: caso 2

In questo paragrafo risolvi il caso

$$I(\alpha) \int_a^b \left(\frac{x-a}{x-b}\right)^\alpha Q(x)\mathrm{d}x \qquad \text{con } Q(x) \text{ funzione razionale}$$

che è analogo al **caso 1**, ma qui hai come punti di diramazione dei punti finiti. Il risultato è

$$I(\alpha) = \frac{2\pi i}{1 - e^{i2\pi\alpha}} \sum_{tutti} Res\left(\left(\frac{x-a}{x-b}\right)^\alpha Q(z)\right)$$

Anche qua negli appunti abbiamo fatto un caso particolare

$$I(\alpha) \int_0^1 \frac{1}{x}\left(\frac{x}{1-x}\right)^\alpha \mathrm{d}x$$

dove si vede bene che non importa in che direzione vado all'∞ tanto il risultato non cambia e più importante si vede che il **caso 2** è semplicemente il **caso 1** con una trasformazione lineare fratta.

3.4.4 Integrali di funzioni polidrome: caso 3

In questo paragrafo generalizzi il metodo di calcolare integrali sul piano complesso a casi del tipo

$$I = \int_a^b R(x)\mathrm{d}x$$

banalmente lo risolvi come gli altri due casi ma sta volta l'integrale ausiliario è

$$J = \oint_\Gamma R(z)\log\left(\frac{z-a}{b-z}\right)\mathrm{d}z$$

con di nuovo Γ la curva ad osso di cane (cammino A.2). Importante notare che la parte polidroma l'hai aggiunta tu, quindi il risultato deve valere su qualsiasi foglio. Banalmente rifai gli stessi passaggi degli altri due casi e trovi il risultato

$$I = -\sum_{tutti} Res\left(R(z)\log\left(\frac{z-a}{b-z}\right)\right)$$

e il risultato vale anche per

$$\int_0^\infty R(x)\mathrm{d}x = -\sum_{tutti} Res\left(R(z)\log\left(\frac{z-a}{b-z}\right)\right)$$

e in aula abbiamo visto un caso particolare

$$I = \int_0^\infty R(x)\log x\mathrm{d}x$$

e si può dimostrare (facendo sempre gli stessi conti) che è corretto usare l'integrale ausiliario

$$J = \oint R(z)\log^2 z\mathrm{d}z$$

che avrà risultato

$$I = -\frac{1}{2} \sum_{z \in \bar{\mathbb{C}}} Res \left(R(z) \left(\log z - i\pi\right)^2 \right)$$

Nell'ultima parte di questo capitolo si fanno osservazioni sul teorema dei residui su fogli e superfici di Riemann. Sugli appunti si fa tutto un discorso utilizzando gli esempi

$$f(z) = \frac{1}{z} \sqrt{(z-a)(z-b)}$$

ma il succo del discorso è che quello che salta nel teorema dei residui (il Th. di Cauchy continua a valere, ossia, $\oint = \sum Res$) è che non abbiamo solo più singolarità isolate (i punti di diramazione non lo sono) e di conseguenza su un singolo foglio non avrò mai $\sum_{tutti} Res = 0$ e in generale nemmeno sulla superficie di Riemann lo avrò (a volte può capitare). Però nel caso di polidromia di ordine n finito si può enunciare

$$\boxed{\sum_{tutti\ i\ fogli} Resf(z) + \left(\sum_{p.ti\ diram.} \oint f(z) \mathrm{d}z \right) \frac{1}{2\pi i} = 0}$$

(polidromia di ordine n devi fare n giri nella circuitazione). Come ultima cosa si può dire notare la stessa cosa dal punto di vista intuitivo e visuale prendendo la superficie di Riemann come un piano nelle variabili (ρ, ϕ), ogni foglio è una striscia di ampiezza 2π e una curva chiusa è banalmente una linea verticare che parte e arriva tra due fogli identificati. Con questo disegno visuale si capisce anche perché è un enunciato che vale con un solo taglio, ma smette di funzionare se ce ne sono di più. Con un singolo taglio anche unendo due sfere $\bar{\mathbb{C}}$ ottengo un'altra sfera facendo delle deformazioni e riesco a fare circuitazioni attorno ai punti di diramazione, ma se ho due tagli quando unisco i pezzi ottengo due piani uniti da due tubi e deformando ottengo un toro che contiene curve che girano tutte attorno al toro o comunque curve non banali e non riesco più a far vedere l'enunciato.

Capitolo 4

Funzioni speciali

In questa sezione studiamo studiamo le funzioni speciali Γ, B e ζ con le loro proprietà.

4.1 Funzione Gamma e proprietà $\dagger\diamond$

Definizione della funzione Gamma

$$\boxed{\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t}}$$

puoi far vedere che questa funzione generalizza il concetto di fattoriale mettendo $z \in \mathbb{Z}$ e calcolando i vari $I_n = \int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-t} \mathrm{d}t$ (se calcoli I_1, I_2 ecc. puoi vedere la relazione di ricorrenza $I_n = (n-1) I_{n-1} = (n-1)!$). Da qui in poi ti preoccupi delle proprietà di analiticità della Γ. Vedi quali sono le condizioni su z affinché l'integrale esista ($\exists \Gamma$ sse $\mathrm{Re}\{z\} > 0$), vedi dov'è analitica, ossia, dove $\exists \frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}z}$ (fai il conto della derivata usando la definizione e trovi che esiste sse $\mathrm{Re}\{z\} > 0$) fammi anche vedere perché lecito derivare sotto integrale. Puoi trovare una continuazione analitica della Γ banalmente usando la relazione di ricorrenza (ossia scrivendo $\Gamma(z+1) = \int t^z e^{-}t$ e integrando per parti), importante far notare in che regioni per $\mathrm{Re}\{z\}$ valgono i vari pezzi, e trovi

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}$$

che è una continuazione analitica poiché il primo pezzo vale per $\mathrm{Re}\{z\} > 0$, mentre il secondo per $\mathrm{Re}\{z\} > -1$ e mi fa vedere che ho polo in $z = 0$. Generalizza questa continuazione analitica per valori $\mathrm{Re}\{z\} > -n$ con $n \in \mathbb{N}$ cosi da trovare

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\dots(z+n)} \tag{4.1.1}$$

è l'equazione in cui si vede bene che la Γ ha poli semplici in tutti gli interi negativi, altrove è analitica, e che l'∞ è punto di accumulazione di poli, quindi singolarità non isolata.

Puoi anche calcolarti quanto vale il residuo in tutti i poli. Puoi scrivere $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t} = \int_0^1 t^{z-1}e^{-t} + \int_1^{+\infty} t^{z-1}e^{-t} = P(z) + Q(z)$ ossia come una funzione $P(z)$ e una intera e regolare ovunque $Q(z)$. Scriviti $P(z)$ esplicita l'esponenziale come serie di potenze, integra la potenza di t che sbuca fuori, ora, prendendo il dominio di convergenza $D = \{z \ / \ |z+n| \geq \delta > 0\}$ i termini di $P(z)$ sono maggiorati da $\sum \frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{\delta}$ che è una serie convergente, quindi definisce una funzione analitica. Vedendo la serie come continuazione analitica della $P(z)$ dove l'integrale non è definito, puoi scrivere

$$\Gamma(z) \sim \frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{z+n} + \Omega(z+n) \qquad n \to -n$$

dove butti dentro la Ω tutti i pezzi della serie regolari in $z = -n$ e tutta la $Q(z)$ che tanto non da problemi. Da questa scrittura si vede bene

$$\boxed{Res\{\Gamma(z)\}\big|_{z=-n} = \frac{(-1)^n}{n!}}$$

Nota che potevi calcolarlo anche con

$$\lim_{z\to -n}(z+n)\Gamma(z) = \lim_{z\to -n}(z+n)\frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\dots(z+n)}$$

4.2 Funzione Beta †

Definizione della funzione Beta di Eulero

$$\boxed{B(z,u) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{u-1}\mathrm{d}t}$$

dimmi quali sono le condizioni di esistenza ($\mathrm{Re}\{z\}, \mathrm{Re}\{u\} > 0$) e fammi vedere bene la simmetria $B(z,u) = B(u,z)$ (basta fare il cambio di variabile $t \to t' = 1-t$). Un'altra rappresentazione integrale dell Beta può essere vista facendo il cambio $t = \sin^2\theta$, cosi trovi

$$B(z,u) = 2\int_0^{\pi/2}(\sin\theta)^{2z-1}(\cos\theta)^{2u-1}\mathrm{d}\theta$$

La funzione Beta è utilizzata per palesare alcune proprietà della funzione Gamma, quindi, è chiara l'importanza di vedere la relazione tra B e Γ. Scrivendo Γ con il cambio di variabile $t = y^2$, moltiplicandola per $\Gamma(u)$

e facendo un altro cambio $x = \rho\cos\theta$; $y = \rho\sin\theta$ allora puoi trovare la relazione tra Gamma e Beta

$$\Gamma(z)\Gamma(u) = \Gamma(z+u)B(z,u) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{B(z,u) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(u)}{\Gamma(z+u)}} \tag{4.2.1}$$

da cui puoi anche vedere l'analiticità di Beta.

4.2.1 Relazioni soddisfatte da Gamma usando Beta †

1. Sai già la relazione 4.1.1

2.

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z} \tag{4.2.2}$$

(lo dimostri scrivendo $\Gamma(z)\Gamma(1-z)$ usando la relazione 4.2.1 con B ed esplicitandola, poi usi il risultato noto dal calcolo di integrali per funzioni polidrome). È importante questa proprietà poiché si vede che Γ non ha mai zeri visto che l'inversa $1/\Gamma(z)$ è analitica. Sviluppando in serie di Taylor posso vedere a cosa tende $\Gamma(z)$ se $z \to -k$. Da questa proprietà riesco a calcolare la Γ per valori semiinteri di z, arrivando a

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi} \qquad \Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right) = \frac{(-2)^n}{(2n-1)!!}\sqrt{\pi}$$

3. Puoi trovare la formula di duplicazione della Γ

$$\Gamma(2z) = \frac{\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}2^{2z-1} \tag{4.2.3}$$

(quello che devi fare e scrivere $B(z,z)$ usando la relazione collegata con le Γ, poi devi fare il cambio di variabile $t = \frac{1+x}{2}$, lascia in sospeso e nella definizione di $B(u,z)$ fai il cambio $t = x^2$, ora prendendo $u = 1/2$ riesci a collegare i due conti che hai fatto anvendo $B(z,z) = 2^{-2z+1}B(1/2,z)$, riesci facilmente a trasformare la seconda B in funzioni Γ, concludi).

4.3 Rappresentazione integrale di Gamma di Henkel

Puoi scrivere la Γ con una rappresentazione integrale valida in una regione più vasta di $\mathbb{C}$. Considero

$$I(z) = \int_{C_H} t^{z-1}e^{-t}\mathrm{d}t \qquad , \qquad t \in \mathbb{C}$$

dove il cammino C_H è il cammino di Henkel, ossia, il cammino A.1, ma senza la circonferenza grande, quindi solo con una retta sopra il taglio, percorsa da ∞ ad ε, poi una circonferenza intorno a 0 e una retta sotto il taglio da ε ad ∞. Nota che hai un integrale polidromo. Giustifica il perché $\exists I(z)\ \forall z$. Per vedere il legame tra $I(z)$ e la $\Gamma(z)$ devi metterti dove esistono entrambi e vedere che cos'è realmente $I(z)$ (fai i conti), troverai che

$$\boxed{\Gamma(z) = \frac{e^{-i\pi z}}{2i\sin\pi z} I(z)}$$

in più, usando la seconda proprietà soddisfatta da Γ usando la B, riesci a vedere anche

$$\frac{1}{\Gamma(1-z)} = \frac{e^{-i\pi z}}{2\pi i} I(z)$$

A questo punto puoi ritrovare tutte le proprietà soddisfatte da Γ. Dalla equazione riquadrata puoi vedere che la $\Gamma(z)$ ha poli negli z interi (per colpa del sin) a meno che la $I(z)$ non si annulli anche lei, quindi studia che cosa fa la $I(z)$ (se ti metti in $z \in \mathbb{Z}$ non hai più un integrale polidromo, quindi $C_H \to$circonferenza attorno l'origine, quindi puoi usare i residui, ma nota prima che $I(z) = 0$ se $z = n > 0$, troverai che $I(n) = 2\pi i \frac{(-1)^k}{k!}$ e studiando $\Gamma(z)$ se $z \to -n$ allora trovi il residuo che già conosci). Notando che $I(z) = 0$ se $z = n > 0$ allora vedi bene che in questo caso il polo dato dal sin è bilanciato e la Γ è regolare negli interi positivi. Dalla relazione che hai trovato per $1/\Gamma(1-z)$ vedi la stessa cosa sapendo dove $I(n)$ è $= 0$ o $\neq 0$.

4.4 Funzione Digamma

La funzione Digamma Ψ deriva direttamente dalla Γ ed è un termine che compare nello sviluppo in serie della Gamma. Se sviluppi attorno $z \to -n$ la Γ (il termine della derivata prima devi scriverlo come $\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}z} = \Gamma\frac{\mathrm{d}\log\Gamma}{\mathrm{d}z}$) trovi

$$\Gamma(z) \sim \Gamma(z_0)\left[1 + \frac{\mathrm{d}\log\Gamma}{\mathrm{d}z}\Big|_{z_0}(z - z_0) + \dots\right]$$

puoi dare la definizione della funzione Digamma

$$\boxed{\Psi(z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\log\Gamma(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}}$$

La parte restante del paragrafo lo passi a vedere le proprietà di Ψ usando quelle che già conosci di Γ.

1. Sapendo che Γ non ha mai zeri, quindi che Ψ è singolare dove Γ' è singolare, e sapendo come si sviluppa la Gamma intorno $z \to -n$, ossia, $\Gamma(z) \sim \frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{z+n} + \Omega(z)$, allora (derivando questo sviluppo di Γ) conosci anche quello di Γ' e moltiplicandoli, dividendo per il termine $\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{z+n}$, sviluppando il denominatore che non è altro che una potenza "-1", riesci a vedere che hai tutti pezzi regolari ad eccezione di uno e trovi che

$$\Psi(z) \sim -\frac{1}{z+n} + \hat{\Omega}(z) \quad \hat{\Omega}(z) \text{ regolare}$$

e quindi $Res = -1$.

2. Usando $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ (banalmente calcolado $\Psi(z+1)$, facendo le dovute derivate dopo aver sostituito la proprietà della Γ) trovi

$$\Psi(z+1) = \frac{1}{z} + \Psi(z)$$

3. Usando $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$ (deriva questa proprietà e scivi le Ψ corrispondenti, dividi per l'equazione originaria) trovi

$$\Psi(z) - \Psi(1-z) = -\pi \cot \pi z$$

4. Usando la formula di duplicazione $\Gamma(2z)\sqrt{\pi} = \Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)2^{2z-1}$ (derivando, dividendo per l'equazione originaria) trovi

$$2\log 2 + \Psi(z) + \Psi(z+1/2) = 2\Psi(2z)$$

Usando le proprietà della Ψ si può calcolare sia in tutti i numeri interi (usando la **2**) e in tutti i semiinteri (usando la **4**) trovando

$$\Psi(n+1) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \gamma \qquad ; \qquad \Psi(n+1/2) = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} - \gamma - 2\log 2$$

con l'accortezza di aver visto $\Psi(1/2) = -\gamma - 2\log 2$ e $\boxed{\Psi(1) = \Gamma'(1) = -\gamma = 0.577}$ che è la costante di Eulero-Mascheroni.

4.4.1 Rappresentazioni integrali, per serie e prodotto di Gamma

In questo paragrafo cerchi rappresentazioni della funzione Ψ. Parti dalla conoscenza della definizione della Γ, che non è altro che una sua rappresentazione integrale, sai anche che cos'è una rappresentazione di Γ' (la derivata della rappresentazione di Γ). A questo punto per saperne una per Ψ basterebbe dividerle e concludi, ma per poterlo fare ti servirebbe una rappresentazione per il log che compare. Nota che

$$I(t) = \int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-xt}}{x} \mathrm{d}x$$

è esattamente il $\log t$ (lo vedi notando che $\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\log t$), poi fai anche vedere che l'integrale esiste se tengo i pezzi insieme, ma non se li separo. Se metti la rappresentazione del log dentro quella di Γ' e separi i due pezzetti, vedi che in uno ti compare direttamente la Γ, ma l'altro non è immediato. Hai $A = \int_0^\infty \mathrm{d}t e^{-t(x+1)} t^{z-1}$, fai un cambio di variabile $w = t(x+1)$ e vedi che $A = \Gamma(z)/(x+1)^z$. Ora, riesci a scrivere Γ' in termini di Γ, cosi hai un'espressione integrale per $\Psi(z)$

$$\Psi(z) = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x}\left[e^{-x} - \frac{1}{(x+1)^z}\right]$$

che però non è cosi bella poiché io vorrei separarla in due, ma se la spezzi ottieni cose che divergono, quindi il trucco è spezzarlo, ma mettere $\lim_{\varepsilon\to 0}$ e $\int_\varepsilon^\infty$ cosi ottieni

$$\Psi(z) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_\varepsilon^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x} e^{-x} - \int_\varepsilon^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x}\frac{1}{(x+1)^z}\right]$$

guarda prima solo il secondo pezzo, fai il cambio di variabile $x = y$, poi ancora $y+1 = e^x$ per arrivare ad $\int_\varepsilon^\infty \mathrm{d}x \frac{e^{-zx}}{1-e^{-x}}$, a questo punto posso mettere tutto in $\Psi(z)$, fare il limite e ottenere una prima rappresentazione integrale

$$\boxed{\Psi(z) = \int_0^\infty \mathrm{d}x\left[\frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-zx}}{1-e^{-x}}\right]}$$

si può anche vedere chi è γ meglio calcolando $\Psi(1)$. Si può sommare e sottrarre la rappresentazione integrarle di $-\gamma$ a $\Psi(z)$ cosi da ottenere

$$\Psi(z) = -\gamma + \int_0^\infty \mathrm{d}x \frac{e^{-x} - e^{-zx}}{1-e^{-x}}$$

facendo ancora il cambio di variabile $y = e^{-x}$ riesco a trovare

$$\boxed{\Psi(z) = -\gamma + \int_0^1 \mathrm{d}y \frac{1-y^{z-1}}{1-y}} \tag{4.4.1}$$

che esiste se $\mathrm{Re}\{z\} > 0$.

Partendo da quest'ultima rappresentazione è possibile trovare una rappresentazione per serie. In $[0,1]$ posso sviluppare $\frac{1}{1-y} = \sum y^n$ (uniformemente convergente) che ributtata dentro l'integrale mi da una cosa che so calcolare e arrivo a

$$\boxed{\Psi(z) = -\gamma + \sum_{n=0}^\infty\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+z}\right)} \implies \boxed{\Psi(z) = -\gamma - \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^\infty \frac{z}{n(n+z)}} \tag{4.4.2}$$

che sono ancora rappresentazioni valide per $\text{Re}\{z\} > 0$. Vedendo che la serie è uniformemente convergente allora posso dire che è continuazione analitica di $\Psi(z)$ in $\mathbb{C} - \{z \ / \ z = -n\}$.

Sfruttando le rappresentazioni integrali e per serie di $\Psi(z)$ si può trovare una rappresentazione come prodotto infinito di $\Gamma(z)$. Tutto sta nel calcolare

$$\int_0^z \mathrm{d}w \Psi(w+1)$$

in due modi diversi e poi confrontare i risultati. Il primo modo è quello di utilizzare la definizione di funzione digamma come derivata del $\log \Gamma$, mentre nel secondo metti dentro l'integrale la prima rappresentazione in serie della 4.4.2 e potendo integrare termine a termine riesci a confrontare i due risultati e vedere

$$\log \Gamma(z+1) = -\gamma z + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{n} - \log \left(1 + \frac{z}{n}\right)\right) \implies \boxed{\Gamma(z+1) = e^{-\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} e^{z/n} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1}}$$

4.4.2 Osservazioni e funzioni Poligamma

Le funzioni poligamma sono delle generalizzazioni delle derivate della funzione Γ definite come

$$\Psi^{(k)} = \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}z^k} \Psi(z)$$

dalla definizione e dalle proprietà della Ψ nascono anche le sue proprietà (usi la prima eq di 4.4.2, poi il passaggio prima di 4.4.1 e per ultima puoi usare 4.4.1).

4.5 Zeta di Riemann $\diamond$

Definizione della Zeta di Riemann

$$\boxed{\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \qquad \text{Re}\{s\} > 1}$$

e nota che se $\text{Re}\{s\} \leq 1$ ho una serie armonica e diverge. Si può dimostrare che esiste anche una seconda rappresentazione della Zeta

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

e si dimostra che sono equivalenti calcolando un paio di termini di $\zeta(s) \prod_{i=1}^{\infty}(1 - p_i^{-s})$ e trovando che è $= 1$. Questa seconda rappresentazione è importante perché prima di tutto mi fa vedere che $\zeta(s) \neq 0 \quad \forall s \ / \ \mathrm{Re}\{s\} > 1$ e nel semipiano $\mathrm{Re}\{s\} > 0$ la $\zeta(s)$ è una funzione intera e analitica, in più permette di dimostrare che i numeri primi dono infiniti (scrivi $\zeta(s)\prod_{i=1}^{N}(1-p_i^{-s}) = 1$, invertila e trova $\zeta(s)$, puoi fare il massimo comune denominatore e mettendo $s = 1$ vedi che esce qualcosa di finito a destra, ma contraddice il fatto che $\zeta(s)$ definito come serie diverge se $s = 1$).

4.5.1 Rappresentazioni integrali

Posso trovare velocemente una rappresentazione integrale della $\zeta(s)$ utile, ma che non mi fa guadagnare nulla sulla regione di convergenza. Comincia vedendo che $\Gamma(s)/\alpha^s = \int_0^\infty \mathrm{d}x e^{-\alpha x} x^{s-1}$ (usi la definizione di Γ e fai il cambio $t/\alpha = x$). Poi in $\mathrm{Re}\{s\} > 0$ calcoli $\Gamma(s)\zeta(s) = \sum \Gamma(s)/n^s$ (notando che l'integrale dato da gamma è uniformemente convergente, puoi portare dentro la somma, essendo una serie geometrica sai quanto fa la somma) e riesci ad arrivare alla rappresentazione integrale

$$\boxed{\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \mathrm{d}x \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}}$$

che come già annunciato vale per $\mathrm{Re}\{s\} > 1$ poiché se vedi $x \to 0$ vedi che la funzione integranda va a x^{s-2}.

4.5.2 Rappresentazione integrale di Henkel

Per questa rappresentazione integrale mimiamo quello che abbiamo fatto nel capitolo **04.3**. Dobbiamo riuscire a collegare $\zeta(s)$ con

$$I(s) = \int_{C_H} \mathrm{d}z \frac{z^{s-1}}{e^z - 1} \qquad z \in \mathbb{C}$$

dove il cammino C_H è il cammino di Henkel e chiaramente $I(s)$ ha un taglio. Faccio i soliti passaggi, mi metto dove esistono entrambe le funzioni, spezzo in 3 $I(s)$ e con semplici passaggi arrivo a dire

$$\boxed{\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \frac{e^{-i\pi s}}{2i \sin \pi s} I(s)}$$

che sfuttando la proprieta $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}$ allora vedo anche

$$\boxed{\zeta(s) = \frac{e^{-i\pi s}}{2\pi i} \Gamma(1-s) I(s)}$$

Ora posso analizzare le singolarità di ζ da quest'ultima rappresentazione. Mi devo mettere in un $s = n \in \mathbb{Z}$, quindi $C_H \to$circonferenza attorno

0, e in più posso notare che se $z \to 0$ la funzione integranda $\sim z^{n-2}$, quindi posso scriverla come il polo per una funzione regolare in 0, ossia come $z^{n-2}\frac{z}{e^z-1} = z^{n-2}f(z)$.

Piccola divagazione Devo sviluppare la $f(z)$ che poi riesco a vederla come funzione generatrice dei **numeri di Bernoulli**, ossia come

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$$

che sono utili in diversi contesti (si??), cosi come i **polinomi di Bernoulli** generati da

$$\frac{z}{e^z - 1} e^{xz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} z^n \quad / \quad B_n(0) = B_n$$

(noi abbiamo verificato $B_0 = 1$, $B_1 = -1/2$, $B_2 = 1/6, B_3 = 0$ e si può dimostrare che $B_{2n+1} = 0$ se $n \neq 0$).
Fine divagazione

Ritorno ad $I(s)$ e ci metto dentro la serie che ho per i numeri di Bernoulli. Valuta quando fa $I(s)$ usando il teorema dei residui e troverai

$$I(s) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{1}{k!} \delta_{k,1-n} 2\pi i$$

valuta quanto fa nei casi $n \geq 2$, $n = 1$, $n = 0$, $n = -2l$ ed $n = -2l + 1$. Dii anche cosa comporta sulla $\zeta(s)$.

In generale trovo

$$\begin{aligned} \zeta(-2l) &= 0 \qquad \text{zeri banali} \\ \zeta(-2l+1) &= -\frac{B_{2l}}{2l} \end{aligned}$$

4.5.3 Equazione funzionale

Mi serve per connettere i valori di $\zeta(s)$ in $\mathrm{Re}\{s\} > 1$, dove conosco la definizione come serie, e quelli in $\mathrm{Re}\{s\} < 0$ dove posso scrivermi $\zeta(1-s)$ dalla definizione come serie. Devo però prima calcolare

$$I_N = \oint_{C_N} \frac{z^{s-1}}{e^z - 1} \mathrm{d}z = -2\pi i \sum Resf(z)$$

dove il cammino C_N è un cammino di Henkel chiuso con una circonferenza di raggio $R = (2N+1)\pi$ cosi da non passare sulle singolarità della $f(z)$. Calcolo

I_N usando i residui (notando che ho sempre poli semplici, sviluppando il denominatore). Con conti semplici e magheggi da scuola superiore arrivi a

$$I_N = 4\pi i (2\pi)^{s-1} e^{i\pi s} \sin\left(\frac{\pi}{2}s\right) \sum_{n=1}^{N} n^{s-1}$$

Ora, per vedere delle ζ devo fare il limite $N \to \infty$, in questo modo

$$\lim_{N\to\infty} I_N(s) = 4\pi i (2\pi)^{s-1} e^{i\pi s} \sin\left(\frac{\pi}{2}s\right) \zeta(1-s)$$

che è una relazione valida dove esiste la serie di $\zeta(1-s)$, ovvero in $\mathrm{Re}\{s\} < 0$. In più posso scrivere il cammino di integrazione come unione di una circonferenza ed un cammino di Henkel $C_N = \Gamma_N \cup C_{H_N}$ e posso spezzare l'integrale nei due pezzi. Ora, senza fare troppe domande, se $N \to \infty$ il contributo dato dalla Γ_N è nullo (come nel lemma di Jordan) e l'altro cammino diventa semplicemente un cammino di Henkel, ma l'integrale $I(s) = \int_{C_H} \mathrm{d}z \frac{z^{s-1}}{e^z-1}$ lo abbiamo già calcolato nella rappresentazione integrale di Henkel e avevamo visto che

$$I(s) = 2\pi i e^{i\pi s} \frac{1}{\Gamma(1-s)} \zeta(s)$$

eguagliando i due risultati per i limiti trovo

$$\boxed{\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi}{2}s\right) \Gamma(1-s)\zeta(1-s)}$$

Da questa relazione posso rivedere facilmente tutte le proprietà che già conoscevo.

- Posso prendere $s = 1$, vedo che con $s \to 1$ ho $\zeta(s) \sim 2\frac{1}{1-s}\zeta(0)$ e in base a se conosco il membro di destra piuttosto che il membro di sinistra è equivalente dire:

$$\text{Polo di } \zeta(s) \text{ in } s = 1 \text{ di } Res = 1 \ \longleftrightarrow\ \zeta(0) = -\frac{1}{2}$$

- Posso anche guardare $s \to 2k$ intero positivo e trovo

$$\zeta(s) \sim 2^{2k-1} \pi^{2k} (-1)^k \frac{1}{(2k-1)!} \zeta(1-2k)$$

quindi ora è equivalente dire che se $\zeta(s)$ negli interi positivi non si annulla mai allora $\zeta(1-2k)$ è un numero finito (ricorda che $\zeta(1-2l) = -\frac{B_{2l}}{2l}$) e viceversa.

Come ultima cosa si può definire la **Zeta di Riemann generalizzata** (di Hurwitz)

$$\boxed{\zeta(a,z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(a+n)^s}}$$

nota che chiaramente $\zeta(0,s) = \zeta(s)$ e inoltre si possono dimostrare tutte le cosa già viste (non lo abbiamo fatto in aula).

Capitolo 5

Sviluppi asintotici

Occorre ripassare le definizioni di **o-piccolo** e **O-grande** (O-grande lo diciamo se due funzioni dono dello stesso ordine $|f(z)| < A|\varphi(z)|$, $A > 0$ in un intorno qualsiasi di un punto appartenente alla regione di analiticità delle due, mentre o-piccolo lo diciamo se $|f(z)| < \varepsilon|\varphi(z)|$, $\forall\varepsilon > 0$). Poi puoi dare la definizione di **successione asintotica** (preso un insieme di fuzioni regolari da qualche parte, ogni funzione è o-piccolo della precedente). Puoi dare la definizione di **sviluppo asintotico** (puoi scrivere una funzione come serie di una successione asintotica, opportunamente pesata, e vale che il resto n-esimo $R^n(z) = f(z) - \sum_{l=0}^{n-1} a_l\varphi_l$ è o-piccolo di φ_{n-1}).

Un esempio importante è lo sviluppo asintotico della trasformata di Laplace. Usi la definizione di trasformata di Laplace

$$F(s) = \mathcal{L}_s(f) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)\mathrm{d}x$$

che so essere definita per $\mathrm{Re}\{s\} > \alpha_0$ e in più so che

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_s(f') = s\mathcal{L}_s(f) - f(0) \\
&\mathcal{L}_s(f^{(n)}) = s^n\mathcal{L}_s(f) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)
\end{aligned}$$

invertendo la seconda riesco a scrivere $\mathcal{L}_s(f) = F(s) = \ldots$ che è lo sviluppo asintotico di $F(s)$ in $D = \{s\ /\ \mathrm{Re}\{s\} > 0\}$. Lo potrei scrivere come

$$F(s) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(n)}(0)}{s^{k+1}} + R^n(s)$$

in cui il resto n-esimo non è altro che $\mathcal{L}_s(f^{(n)})/s^n$. ricordando che a Metodi I avevamo dimostrato che $\mathcal{L}_s(g)$ fosse sempre limitata posso dire che $\mathcal{L}_s(f) = O(1/s)$ e quindi scrivendo bene il resto n-esimo vedo che $R^n(s) = O(1/s)/s^n = O(1/s^{n+1}) = o(1/s^n)$.

5.1 Proprietà serie asintotiche †

1. È opportuno notare che per le serie asintotiche non è detto che la precisione migliori se si sale con n, ma anzi esiste un n oltre il quale la precisione peggiora (si vede se prendi i coefficienti di un esempio fatto in classe $a_n = n!/s^{n+1}$, se calcoli la derivata rispetto ad n, usando stirling $n! = \sqrt{2\pi n}e^{-n}n^n$, riesci a trovare $s = ne^{1/2n}$ e puoi anche verificare che effettivamente è un minimo valutando $(n-1)!/s^n > n!/s^{n+1}$, dividendo per il termine a destra trovi $n < s$).

2. Data $f(z)$ lo sviluppo asintotico è unico, ossia, i coefficienti sono determinati in modo univoco (lo vedi scrivendo la $f(z)$ come serie e partendo dal resto ti trovi i vari coefficienti di $f(z)$, basta che calcoli R^0 ed R^1).

3. Non è vero il viceversa, ossia, che dato uno sviluppo asintotico allora la funzione è unica e questo perché esistono infinite funzioni che hanno sviluppo asintotico nullo. (questa proprietà la vedi prendendo $z_0 = \infty$ e $D = \{z \,/\, |\arg z| < \pi/2 - \delta\}$ usando $\{\varphi_l = 1/z^l\}$ calcola lo sviluppo asintotico di e^{-z} e vedi che effettivamente è tutto nullo, quindi presa $f(z)$ con un certo sviluppo allora $g(z) = f(z) + Kz^m e^{-z}$ avrà lo stesso sviluppo).

5.2 Somma di Borel

Usiamo le somme alla Borel per dare un senso alle somme che non riusciamo a fare esplicitamente, e per farlo utilizziamo una funzione ed un integrale ausiliario. Se stiamo studiando una funzione scritta con il suo sviluppo in serie (di Taylor) con raggio di convergenza finito, possiamo definire una funzione ausiliaria ϕ, che chiamiamo trasformata di Borel di $f(z)$, come una serie identica alla $f(z)$ originaria, ma divisa per un fattoriale e in questo modo questa nuova funzione ha raggio di convergenza infinito. È utile la ϕ perché cosi possiamo definire l'integrale

$$I(z) = \int_0^\infty e^{-t}\phi(zt)\mathrm{d}t$$

e puoi dimostrare che se $|z| < \rho$ allora $I(t) = f(z)$ (basta che dentro l'integrale espliciti la serie di $\phi(zt)$). Nota che $I(t)$ è definito $\forall z$, quindi, dove posso calcolarlo è la continuazione analitica della $f(z)$. Però potremmo anche avere una funzione scritta come serie divergente, ma in questo caso $I(t)$ da un senso alla somma divergente e se siamo in grado di calcolarlo allora possiamo dire che $f(z)$ è sommabile alla Borel.

Potresti considerare gli esempi

$$\textbf{1.}\ f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$$
$$\textbf{2.}\ f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} k!(-1)^k z^k$$
$$\textbf{3.}\ f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)! z^n$$

Però nota che nell'ultimo esempio hai un'ambiguità sulla funzione che ti compare dentro $I(t)$, a causa della polidromia, e di conseguenza hai un'ambiguità sul valore di $I(t)$.

5.3 Sviluppi asintotici di integrali †

Cominciamo con questo paragrafo a parlare di sviluppi asintotici. Per prima cosa calcola due integrali e poi fanne lo sviluppo asintotico con $s \to \infty$ in una regione $D = \{s \ / \ |\arg s| < \frac{\pi}{2} - \delta \ , \ \delta > 0\}$

$$I_a(s) = \int_0^a e^{-sx} \mathrm{d}x \qquad ; \qquad J_a(s) = \int_0^a x^n e^{-sx} \mathrm{d}x$$

e quello che devi arrivare a vedere è che puoi estendere l'integrale da $(0, \infty)$ e il risultato sarebbe lo stesso.

Teorema Hp: $g(x)$ ammette trasformata di Laplace, Th: $\forall a > 0$ si ha

$$\boxed{\int_a^{\infty} e^{-sx} g(x) \mathrm{d}x \sim O(e^{-sa})}$$

la dimostrazione la fai facendo il calcolo dell'integrale, mettendo un cambio di variabile per portare l'integrale tra $(0, \infty)$ e ricordando che la T.L. è limitata.

Questo teorema è importante perché mi dice che se conosco lo sviluppo di una funzione intorno lo zero, allora dovrei riuscire a calcolare l'integrale su tutto $\mathbb{R}_+$. Vedi bene questa cosa con un calcolo esplicito assumendo che $\forall x \in B_p(0)$ puoi scrivere $g(x) = \sum_{n \geq 0} g_n x^{n+\nu}$ con $\nu \ / \ \mathrm{Re}\{\nu\} > -1$ e mettendo questa somma dentro una trasformata di Laplace tra $(0, a)$ e facendo un cambio di variabile comodo, riesco ad arrivare ad un risultato che mi anticipa l'enunciato di un teorema.

Teorema Hp: Dato $I(s) = \int_0^a e^{-sf(x)} g(x) \mathrm{d}x$ con $a \in \mathbb{R}_+$; $f(x)$ regolare in $[0, a]$ (ossia la posso scrivere in serie di Taylor); $f'(0) < 0$; $x = 0$ è un massimo assoluto per $f(x)$ in $[0,a]$; $\exists\delta > 0$ / $g(x) = \sum_{n\geq 0} g_n x^{n+\nu}$ con $\nu \in \mathbb{C}$ / $\mathrm{Re}\{\nu\} > -1 \quad \forall x \in [0,\delta]$ allora Th:

$$\boxed{I(s) \sim \frac{e^{sf_0}}{|f_1|^{\nu+1}} g_0 \frac{\Gamma(\nu+1)}{s^{\nu+1}} \left(1 + O\left(\frac{1}{s}\right)\right)} \tag{5.3.1}$$

La **dimostrazione** la fai facendo i conti. Metti dentro $I(s)$ la $f(x)$ scritta come serie ed esplititi i primi due termini. i pezzi restanti nell'integrale saranno la serie con $n \geq 2$ e la funzione $g(x)$, esplicita entrambi e scrivi la motliplicazione tra i polinomi ordinate in base alla potenza x^ν crescente. Comincia a calcolare il contributo di quello che risulterà il termine dominante ossia $x^\nu g_0$, poi calcolando gli altri termini $g_1 x^{\nu+1}$ e in generale $Cx^{n+\nu}s^k$ per vedere che efettivamente sono termini sottodominanti.

Questo teorema è importate perché mi dice che il contributo dominante dell'integrale nel limite $s \to \infty$ con $s \in D$ viene dalla zona in cui la funzione ad esponente è massima. Il teorema ha validità generale anche nel caso in cui io abbia un massimo assoluto in $x = \{a, b\}$ di un intervallo $[a, b]$ e in questo caso si avrà (prendo ad esempio $x = a$)

$$\int_a^b e^{sf(x)} g(x) \mathrm{d}x \sim e^{sf(a)} g_0 \frac{\Gamma(\nu+1)}{|f'(a)|^{\nu+1}} \frac{1}{s^{\nu+1}}$$

(puoi dimostrarlo o facendo un cambio di varibile e portare l'intervallo di integrazione di nuovo con il massimo nell'origine, oppure, sviluppi le funzioni in $(x-a)$). Chiaramente è analogo se il massimo è in $x = b$.

5.3.1 Metodo di Laplace †

Da qui in poi negli appunti, non si sa bene il perché, ma sostituisco la variabile t al posto di s, ma non cambia assolutamente nulla. Il metodo di Laplace consente di fare essattamente la stessa cosa per quanto riguarda lo sviluppo asintotico, ma sta volta prende in esame il caso in cui il punto in cui la funzione nell'esponenziale ha un massimo è all'interno dell'intervallo di integrazione. Otterremo comunque il risultato che l'integrale è dominato dal valore assunto in un intorno del massimo.

Teorema Hp: dato $I(s) = \int_a^b e^{-tf(x)} g(x) \mathrm{d}x$ t.c. $\exists x_0 \in [a, b]$ massimo assoluto di $f(x)$ e $g(x)$ regolare in $[a, b]$ allora Th:

$$\boxed{I(t) \sim e^{tf(x_0)} g(x_0) \sqrt{\frac{2\pi}{t|f''(x_0)|}} \left(1 + O\left(\frac{1}{t}\right)\right)} \tag{5.3.2}$$

Dimostrazione sai che puoi sviluppare in serie la $g(x)$ e avrai uno sviluppo della $f(z)$ senza il termine di derivata prima (poiché sei su un massimo).

Metti i due sviluppi nell'integrale e come già fatto togli i primi due pezzi dell'esponenziale (in questo caso saranno la funzione valutata e la derivata seconda) cosi da lasciarti un exp con una serie che parte da 3 moltiplicata per la serie di $g(x)$. Cerca lo sviluppo esplicito di questi due pezzi (sviluppa l'exp e moltiplica termine a termine ordinandoli a potenze di $(x - x_0)$ crescenti). Fai il cambio di variabile per traslare il massimo in uno dei due estremi. Ora devi un attimo fermarti e notare che con $t \to \infty$, $t \in D$ e $c > 0$ hai

$$\int_c^{\infty} e^{-ty^2} \mathrm{d}y = O(e^{-tc^2})$$
$$\int_{-\infty}^{-c} e^{-ty^2} \mathrm{d}y = O(e^{-tc^2})$$

e lo dimostri (dalla prima riga ad esempio) prima sommando e sottraendo c^2 nell'exp, poi facendo un cambio di variabile $x^2 = y^2 - c^2$ e infine notando che quello che ti compare nell'integrale è la T.L. di una funzione legittima e che conoscendo già gli altri teoremi sai essere un $O(e^{-tc^2})$. Questa cosa vale anche se nell'integrale c'è anche una funzione $g(x)$ che ammette T.L..

Questa piccola pausa è fondamentale perché permette di estendere $I(t)$ tra $(-\infty, +\infty)$ e quindi riesco a trasformarlo in una somma di integrali gaussiani. Ricorda

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-tAw^2} \mathrm{d}w = \sqrt{\frac{\pi}{A}} t^{-1/2}$$

Puoi calcolare il termine dominante separatamente e vedere che ti esce il pezzo dell'enunciato dal teorema. Per vedere i termini successivi chiaramente devi calcolare gli integrali gaussiani con le potenze dentro, ma puoi farlo in modo generale separando i casi pari e dispari (caso dispari sempre $= 0$, metre il caso pari riesci a scriverlo usando le derivate). Ributtando tutto nell'integrale di partenza concludi.

5.3.2 Sviluppo asintotico di Gamma con il metodo di Laplace †

È un esercizio (forse anche facile) in cui partendo dalla definizione della $\Gamma(t)$ vuoi vedere il suo sviluppo asintotico con $t \to \infty$. L'unica osservazione che devi fare è che non hai immediatamente l'integrale nella forma dell'enunciato del teorema e quindi devi aggiustartelo un attimo (fai il cambio di variabile $x = ty$). Riesci ad arrivare con i soliti passaggi a

$$\Gamma(t) \sim t^t e^{-t} \sqrt{\frac{2\pi}{t}} \left[1 + \frac{1}{12} \frac{1}{t} + O\left(\frac{1}{t^2} \right) \right]$$

e da cui puoi anche vedere la formula di Stirling poiché sapendo scrivere

$$t! = \Gamma(t+1) = t\Gamma(t) = e^{-t}t^t t\sqrt{\frac{2\pi}{t}}\left(1 + O\left(\frac{1}{t^2}\right)\right) \sim e^{-t}t^t\sqrt{2\pi t}$$

5.4 Metodo punto a sella †

Il metodo del punto a sella è una generalizzazione del metodo di Laplace per integrali con cammino di integrazione curve in $\mathbb{C}$, quindi, sono casi in cui vogliamo studiare l'andamento asintotico di cose del tipo

$$I(t) = \int_\gamma e^{tf(z)}g(z)\mathrm{d}z \qquad\qquad t \in \mathbb{R}\ ,\ t \to +\infty$$

in cui $f(z)$,$g(z)$ sono funzioni analitiche in una certa regione $E \subset \mathbb{C}$ che contiene γ. Supponendo che ci sia un punto $z_0 \in E$ in cui $f(z)$ sia stazionario, allora puoi arrivare a dimostrare che

$$\boxed{I(t) \sim e^{i\varphi}e^{tf(z_0)}g(z_0)\sqrt{\frac{2\pi}{t|f''(z_0)|}}\left(1 + O\left(\frac{1}{t}\right)\right)} \tag{5.4.1}$$

L'affermazione di questa cosa (come nei casi precedenti) è che dato $I(t)$, con funzioni analitiche in una certa regione in cui trovo un punto in cui $f(z_0) = 0$, allora posso deformare la γ (grazie al corollario del Th di Cauchy so che $I(t)$ non cambia) e in modi simili ai metodi già visti, trovo che l'integrale è dominato solo da un certo termine.

Dimostrazione operativa Devi cercare un modo di ricondurti ad un'integrale gaussiano e al caso del metodo di Lagrange. Puoi sviluppare la $f(z)$ e scrivere la $g(z)$ come serie. Scriviti la derivata seconda come modulo e fase che è più semplice per vedere con che angolo passare attraverso z_0 p.to di sella. Puoi parametrizzare il cammino che fai nell'intorno di z_0 come $z = z_0 + \rho e^{i\varphi}$ e di conseguenza scriverti meglio cos'è $f(z) - f(z_0)$. Quello che ti interessa di questa differenza è la parte reale. Fai le dovute osservazioni del fatto che z_0 è sicuramente un punto a sella e non può essere un massimo assoluto. Quale condizione ti ritrovi sulla fase φ? Cosa comporta sulla parte immaginaria della differenza? Rimettendo tutto nell'integrale e facendo il cambio di variabile $z = z_0 + \rho e^{i\varphi}$ riesci ad ottenere, dopo aver tirato fuori i primi due pezzi dello sviluppo di $f(z)$, un integrale che riesci a fare (identico ai casi già visti).

Che osservazione puoi fare se devi studiare un caso in cui vuoi un andamento asintotico di qualcosa che va ad ∞ con una direzione qualsiasi θ (ad esempio vuoi $t \to -\infty$). Puoi anche notare quali sono le direzioni che mi separano la zona in cui ho il percorso massimo e le zone proibite.

5.5 Metodo della fase stazionaria †

Il metodo della fase stazionaria è banalmente un applicazione del metodo del punto a sella, ma con un esponenziale complesso e quindi un integrale del tipo

$$I(t) = \int_a^b e^{ith(x)} g(x) \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

e $h(x)$ e $g(x)$ funzioni reali. So dal lemma di Riemann che se $t \to \infty$ allora $I(t) =$ per via delle oscillazioni dell'exp, ma il lemma vale solo se: $h(x)$ è integrabile, derivabile e non costante in $[a, b]$, e riesci anche a vedere che effettivamente $I(t) \to 0$ se $h'(x) \neq 0$ (nell'integrale puoi moltiplicare e dividere per $h'(x)$ e poi integrare per parti). Ma se ti metti in un punto x_0 in cui $h'(x_0) = 0$, puoi sicuramente sviluppare $h(x)$ e, fondamentale, vedere il cammino di integrazione reale come una curva in campo complesso, in questo modo puoi usare il metodo del punto a sella con $f(z) = ih(z)$. in questo metodo devi stare attento a come scegli φ perché prima guardavi la parte reale di $f(z)$, ma ora per com'è definita dovrei guardare $-\operatorname{Im}\{h(z)\}$. Da qui in poi è lo stesso procedimento fatto per il punto a sella, ma usando $h(z)$. Nota importante però è che la fase della derivata seconda di $h(z)$ può essere soltanto $\{0, \pi\}$ (quindi $\varphi = \pm\pi/4$) visto che $h(z)$ è una funzione a valori reali. Tutto questo per arrivare ad un risultato

$$\boxed{I(t) \sim e^{\pm i\frac{\pi}{4}} e^{ith(x_0)} g(x_0) \sqrt{\frac{2\pi}{|h''(x_0)|t}}} \tag{5.5.1}$$

Capitolo 6

Equazioni differenziali totalmente fuchsiane

Se vuoi ripassare *tipi di singolarità di una edo, teorema di Fuchs, come si trovano le soluzioni intorno ad un punto fuchsiano, equazione indiciale e lo studio all'infinito* allora puoi sbirciare nella prima pagina della sezione degli appunti degli esercizi in cui rivedo tutto quello fatto a METODI I.

In questo capitolo vedi come risolvere le equazioni differenziali con 3 punti fuchsiano conoscendo solo dove sono le singolarità e il comportamento della soluzione in un intorno della singolarità.

Il primo passo è studiare una equazione differenziale con un solo punto singolare $z_0 = \infty$ (allora conosci l'andamento di $P(z)$ e $Q(z)$, dal teorema di Liouville sai che saranno costanti ovunque e puoi trovare una soluzione generale $u(z) = az + b$), poi pui studiare se $z_0 \in \mathbb{C}$ (è quasi analoga a quella dell'∞ perché sai l'andamento di $P(z)$ e $Q(z)$ intorno la singolarità, per il Th. di Liouville sai che saranno costanti, sai che l'∞ sarà regolare e quindi riesci a determinare le costanti in $P(z)$ e $Q(z)$, dopodiché ti trovi con una edo che se fai un cambio di variabili riesci a risolvere facilmente). Puoi vedere che anche con due singolarità, $z = 0$ e $z = \infty$ la soluzione è determinata dalla conoscenza dei punti e dei comportamenti di $P(z)$ e $Q(z)$ (conviene in questo caso scrivere $P(z)$ e $Q(z)$ come funzioni regolari, che si possono sviluppare, divise per l'ordine del polo che si ha nella singolarità, dopodiché c'è ancora Liouville, quindi le funzioni devono essere costanti, quindi gli sviluppi devono essere uguali, ottieni una edo relativamente semplice che puoi risolvere con il cambio di variabile $z = e^w$ e risolvendo l'equazione caratteristica).

6.1 Equazione totalmente fuchsiana con 3 singolarità

Vuoi vedere che anche con 3 singolarità hai le soluzioni ben determinate dalla conoscenza dei punti singolari. Prendi come singolarità tre punti al finito ξ_1, ξ_2 e ξ_3 con degli andamenti delle soluzioni α_i e β_i (quelli che trovi risolvendo l'equazione caratteristica). Puoi fissare una condizione sulle costanti di $P(z)$ e $Q(z)$ sfruttando la conoscenza che i punti singolari sono al finito e che ∞ è regolare. Puoi trovare chi sono p_0 e q_0, messi nell'equazione indiciale sai anche chi saranno $\alpha_i + \beta_i$ e $\alpha_i \cdot \beta_i$.

Se invece hai singolarità fuchsiane in ξ_1, ξ_2 e ∞, puoi comunque scriverti una forma per $P(z)$ e $Q(z)$, scrivere un'equazione indiciale, trovare chi sono $\alpha_i + \beta_i$ e $\alpha_i \cdot \beta_i$ sia per l'∞ che per i punti al finito.

6.1.1 Simbolo $\mathcal{P}$ di Riemann

Visto che la soluzione di una edo è determinata dalla conoscenza di chi sono le singolarità e degli andamenti intorno a loro, vorrei scrivere un simbolo che contienga tutte queste informazioni. Dentro il simbolo

$$\mathcal{P}\left\{\begin{matrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & z \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \end{matrix}\right\}$$

ci devo mettere 9 informazioni, ma devo pur sempre ricordare che ho dei vincoli sugli esponenti. Il simbolo $\mathcal{P}$ è un simbolo per l'integrale generale che si comporta come una combinazione lineare dei fattori $(z-\xi_i)^{\alpha_i}$ e $(z-\xi_i)^{\beta_i}$, $u(z) \sim k_1(z-\xi_i)^{\alpha_i} + k_2(z-\xi_i)^{\beta_i}$ se $z \to \xi_i$. Studia alcune sue proprietà:

1. Posso scambiare i punti ξ_i e i relativi indici α_i e β_i senza dover cambiare simbolo $\mathcal{P}$ (visto che non esiste un ordinamento in $\mathbb{C}$).

2. $\mathcal{P}$ (e quindi l'integrale generale) è determinato a meno di una fase moltiplicativa.

3. $\mathcal{P}\left\{\begin{matrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & z \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \end{matrix}\right\} = \mathcal{P}\left\{\begin{matrix} \xi'_1 & \xi'_2 & \xi'_3 & \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & z' \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \end{matrix}\right\} \quad \text{con} \quad z' = \dfrac{az+b}{cz+d} \quad \text{t.c.} \quad ad-bc=1$

ossia una trasformazione lineare fratta. Data la bellezza di questo tipo di trasformazioni trovo che le singolarità sicuramente si spostano, ma gli andamenti delle soluzioni nei loro intorni rimangono gli stessi, di conseguenza anche l'integrale generale del primo simbolo si può scrivere in termini del secondo. (la **dimostrazione** la fai vedendo gli andamenti delle soluzioni prendi $u(z') \sim (z' - \xi_i')^{\alpha_i}$ e fai il cambio di coordinate e riuscirai a vedere che $(z' - \xi_i')^{\alpha_i} \sim (numero)(z - \xi_i)^{\alpha_i})$.

4. $\mathcal{P}\begin{Bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & z \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \end{Bmatrix} = (z-\xi_1)^{\gamma_1}(z-\xi_2)^{\gamma_2}(z-\xi_3)^{\gamma_3}\,\mathcal{P}\begin{Bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \\ \alpha_1-\gamma_1 & \alpha_2-\gamma_2 & \alpha_3-\gamma_3 & z \\ \beta_1-\gamma_1 & \beta_2-\gamma_2 & \beta_3-\gamma_3 & \end{Bmatrix}$

ma con il vincolo: $\gamma_3 = -\gamma_1 - \gamma_2$. (la **dimostrazione** è quasi banale perché se una soluzione va come $\hat{u}(z) = A(z-\xi_1)^{\alpha_1-\gamma_1} + B(z-\xi_1)^{\beta_1-\gamma_1}$ allora la seconda andrà come $u(z) = (z-\xi_1)^{\gamma_1}\hat{u}(z) = A(z-\xi_1)^{\alpha_1} + B(z-\xi_1)^{\beta_1}$). Questa proprietà vale anche nel caso di una singolarità all'∞:

4. $\mathcal{P}\begin{Bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \infty & \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & z \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \end{Bmatrix} = (z-\xi_1)^{\gamma_1}(z-\xi_2)^{\gamma_2}\,\mathcal{P}\begin{Bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \infty & \\ \alpha_1-\gamma_1 & \alpha_2-\gamma_2 & \alpha_3-\gamma_3 & z \\ \beta_1-\gamma_1 & \beta_2-\gamma_2 & \beta_3-\gamma_3 & \end{Bmatrix}$

con sempre $\gamma_3 = -\gamma_1 - \gamma_2$.

La parte restante del paragrafo fa vedere come partendo da una edo con determinate singolarità si riesce sempre a scrivere un simbolo di Riemann con singolarità in $0, 1, \infty$ e con 2 indici nulli.

6.2 Equazione Ipergeometrica ⋄

Preso un simbolo di Riemann con singolarità solo in $0, 1, \infty$ posso scrivere l'edo che rappresenta

$$\mathcal{P}\begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & a & z \\ 1-c & c-a-b & b & \end{Bmatrix} \tag{6.2.1}$$

$$z(1-z)u'' + [c - (a+b+1)z]u' - abu = 0 \quad , \quad a, b, c \in \mathbb{C} \tag{6.2.2}$$

Posso chiaramente scrivermi $P(z)$ e $Q(z)$ da 6.2.2, calcolarmi p_0 e q_0 per tutte e 3 le singolarità e verificare che effettivamente corrisponde la simbolo $\mathcal{P}$ di 6.2.1. Dovremmo cercare una soluzione di questa cosa. Chiamiamo funzione ipergeometrica $F(a, b, c, z)$ la soluzione regolare nell'origine.

Guarda la soluzione intorno $z = 0$. Sai dal Th di Fuchs come sono le due soluzioni se $\rho_1 - \rho_2 = 1 - c \notin \mathbb{Z}$e puoi calcolare chi sono i coefficienti di $u_1(z) = z^0 \sum c_k z^k$ (troverai $c_{k+1} = \frac{(k+a)(k+b)}{(k+1)(k+c)} c_k$ e genericamente $c_n = \frac{1}{n!}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}$ ricordando $(x)_n = \frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)}$) giungendo alla soluzione

$$\boxed{u_1 = F(a, b, c, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n} z^n = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)} z^n} \tag{6.2.3}$$

Devi ancora trovare la seconda soluzione $u_2(z) = z^{1-c}\sum b_k z^k$, ma conosci le proprietà del simbolo di Riemann e da 6.2.1 tirando fuori un z^{1-c} riesci a scriverti un'altra soluzione nell'intorno dell'origine, chiaramente con altri parametri, e trovi che

$$\boxed{u_2(z) = z^{1-c}F(a-c+1, b-c+1, 2-c, z)} \tag{6.2.4}$$

e quindi trovi una soluzione generale

$$\boxed{u(z) = k_1 F(a,b,c,z) + k_2 z^{1-c}F(a-c+1, b-c+1, 2-c, z) \qquad \text{se } 1-c \notin \mathbb{Z}}$$

Ma cosa puoi dire di u_1 e u_2 se $c = -N \in \mathbb{Z}$,$c = N \in \mathbb{Z}$ o se $c = 1$. Come potresti ovviare al fatto che se $c = -N \in \mathbb{Z}$ l'equazione 6.2.3 non è definita (scrivi $\bar{F}(a,b,c,z) = \frac{1}{\Gamma(c)}F(a,b,c,z)$), ma dimostra anche che in realtà non cambia molto perché trovi che è proporzionale ad u_2 (esplicita $\bar{F}(a,b,c,z)$, nota che i primi N termini sono nulli, cambia indice e rifai partire la somma da 0, moltiplica e dividi per $\frac{\Gamma(a+N+1)\Gamma(b+N+1)}{\Gamma(c+N+1)}$, vedi u_2).

Arrivi ad un'uguaglianza:

$$\bar{F}(a,b,-N,z) = \frac{\Gamma(a+N+1)\Gamma(b+N+1)}{N!\Gamma(a)\Gamma(b)} z^{1+N} F(a+N+1, b+N+1, N+1, z) \tag{6.2.5}$$

Quello che concludi è che se $c \in \mathbb{Z}$ hai sempre una delle due soluzioni.

6.2.1 Rappresentazione integrale della funzione Ipergeometrica

In questo paragrafo cerco di dare una rappresentazione integrale della funzione ipergeometrica. Per farlo cerchiamo di riscrivere in modo diverso la frazione $\frac{\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)}$ che compare nella somma di $F(a,b,c,z)$, moltiplicando sopra e sotto per $\Gamma(c-b)$ e ricordando la relazione 4.2.1 tra la Beta e la Gamma. Fatto ciò posso esplicitare la B e ottenere una serie dentro l'integrale. Ora devi fare un'osservazione su cos'è il coefficiente binomiale con un numero negativo, ossia, devi vedere che

$$\binom{-\alpha}{k} = \frac{(-1)^k(\alpha)_n}{k!}$$

cosi ti puoi acorgere che quello che hai dentro la serie nell'integrale non è altro che

$$\frac{\Gamma(a+n)}{n!\Gamma(a)} = \frac{(a)_n}{n!} = (-1)^n\binom{-a}{n}$$

e in questo modo riesci a vedere bene che tipo di serie hai dentro l'integrale e trovare la rappresentazione integrale

$$\boxed{F(a,b,c,z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 \mathrm{d}t t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a}} \tag{6.2.6}$$

Da questa relazione puoi sicuramente dire dove vale ($\mathrm{Re}\{c\} > \mathrm{Re}\{b\} > 0$) e dove può esistere z ($z \notin [1, \infty)$), inoltre, ragionando neanche troppo su cosa implica sul dominio di esistenza di $1 - z$ riesci a cominciare ad intuire che $z = 1$ potrebbe essere un p.to di diramazione di F.

L'ultima parte del paragrafo è dedicata al calcolo di quanto faccia la funzione ipergeometrica in $z = 1$, arrivando chiaramente da sinistra. Il conto è semplice perché basta mettere $z = 1$ nell'integrale, riconoscere la Beta e scriverla in termini di Gamma usando la 4.2.1. Trovi

$$\boxed{\lim_{z \to 1^-} F(a, b, c, z) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c - b - a)}{\Gamma(c - b)\Gamma(c - a)}} \tag{6.2.7}$$

6.2.2 Proprietà della funzione Ipergeometrica

Vedi alcune proprietà partendo dalla conoscenza di 6.2.3.

1. Hai simmetria di a e b (come vedi dal calcolo di F in $z = 1$), quindi

$$F(a, b, c, z) = F(b, a, c, z)$$

2. Se $a, b = -N$ con $N \in \mathbb{N}$ allora $F(-N, b, c, z)$ è un polinomio di grado N (questo lo vedi dal fatto che hai dei simboli di Pochhammel, quindi esplicitando $(a)_n$ vedi che dal termine $N + 1$ sono termini nulli, quindi F si troca, oppure, lo vedi dal rapporto che hai $\frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}$).

3. Ci sono diverse situazioni in cui la $F(a, b, c, z) \longrightarrow$ funzione elementare (per opportuni parametri). Sotto alcuni esempi:

3.1 $F(a, 1, a, z) = F(1, b, b, z) = \sum \frac{(1)_n}{n!} z^n = \sum z^n = \frac{1}{1 - z}$

3.2 $F(a, b, b, z) = \sum \frac{(a)_n}{n!} z^n = \sum \binom{-a}{n} z^n = (1 - z)^{-a}$

3.3 $F(1, 1, 2, z) = \sum \frac{(1)_n (1)_n}{n! (2)_n} z^n = \sum z^n = \sum \frac{z^n + 1}{n + 1} = -\frac{1}{z} \log(1 - z)$

3.4 $F(1/2, 1, 3/2, z^2) = \frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(1/2)} \sum \frac{\Gamma(1/2 + n)}{\Gamma(3/2 + n)} z^{2n} = \frac{1}{2} \sum \frac{z^{2n}}{1/2 + n} = \frac{1}{2z} \log\left(\frac{1 + z}{1 - z}\right)$

$$\text{ricordando} \quad \log\left(\frac{1 + z}{1 - z}\right) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{2k + 1}$$

3.5 $\arctan z = \frac{1}{2i} \log\left(\frac{1 + iz}{1 - iz}\right) = zF(1/2, 1, 3/2, -z^2)$

4. In generale vale:

$$\frac{\mathrm{d}^n F}{\mathrm{d}z^n} = \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} F(a+n, b+n, c+n, z)$$

(lo puoi vedere con la derivata prima, fai la derivata di z^n, poi fai un cambio di indice e rimangono da fare solo identità semplici e il risultato finale è $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z} = \frac{ab}{c} F(a+1, b+1, c+1, z)$).

5. Ci sono anche delle relazioni tra la funzione ipergeometrica e le sue funzioni contigue, ossia quelle con i parametri traslati di un unità (combinandole si ottengono quelle di F con le F con parametri traslati di n unità), ma sono veramente da sapere a memoria e mi rifiuto categoricamente di studiarle. Le dimostrazioni di fanno esplicitando le definizioni di F con i Pochhammel. Ne metto due a seguire:

$$(c-a-b)F(a,b,c,z) + a(1-z)F(a+1,b,c,z) - (c-b)F(a,b-1,c,z) = 0$$
$$F(a,b,c,z) - F(a,b,c-1,z) = -\frac{ab}{c(c-1)} zF(a+1,b+1,c+1,z)$$

6.2.3 Trasformazioni lineari dell'equazione Ipergeometrica

In questo paragrafo partendo dalla conoscenza di un' equazione ipergeometrica 6.2.2 e dal suo simbolo di Riemann 6.2.1 voglio trovare i possibili modi di scrivere una soluzione generale nell'intorno delle 3 singolarità $0, 1, \infty$. Banalmente lo fai partendo da 6.2.1. In un intorno di $z = 0$ sai già che puoi scrivere (come già visto in un paragrafo precedente)

$$\begin{aligned} u_1 &= F(a,b,c,z) \\ u_5 &= z^{1-c} F(a-c+1, b-c+1, 2-c, z) \qquad 1-c \notin \mathbb{Z} \end{aligned}$$

sfruttando una trasformazione lineare puoi mandare $0 \to 1$ oppure $0 \to \infty$ e usando le proprietà del simbolo $\mathcal{P}$ puoi scriverti altre soluzioni intorno 1 e ∞, ossia intorno $z = 1$

$$\begin{aligned} u_2 &= F(a,b,a+b-c+1, 1-z) \\ u_6 &= (1-z)^{c-a-b} F(c-b, c-a, c-a-b+1, 1-z) \end{aligned}$$

ed intorno $z = \infty$

$$\begin{aligned} u_3 &= z^{-a} F(a, 1+a-c, 1+a-b, 1/z) \\ u_4 &= z^{-b} F(b, 1+b-c, 1+b-a, 1/z) \end{aligned}$$

ma in generale ci sono 6 trasformazioni lineari che ti scambiano $0, 1, \infty$:

1. $w = z$	$0 \to 0;\ 1 \to 1\ ;\ \infty \to \infty$
2. $w = 1 - z$	$0 \to 1;\ 1 \to 0\ ;\ \infty \to \infty$
3. $w = \frac{1}{z}$	$0 \to \infty;\ 1 \to 1\ ;\ \infty \to 0$
4. $w = \frac{z}{z-1}$	$0 \to 0;\ 1 \to \infty\ ;\ \infty \to 1$
5. $w = \frac{1}{1-z}$	$0 \to 1;\ 1 \to \infty\ ;\ \infty \to 0$
6. $w = \frac{z-1}{z}$	$0 \to \infty;\ 1 \to 0\ ;\ \infty \to 1$

Ora, puoi vedere le varie relazioni tra le funzioni Ipergeometriche scritte nelle variabili $z, \frac{1}{z}, 1 - z$. Banalmente metti in evidenza un fattore $(1 - z)^{c-a-b}$ nel simbolo 6.2.1 e poi puoi scriverti una nuova sol regolare intorno $z = 0$

$$v = (1 - z)^{c-a-b} F(c - b, c - a, c, z)$$

che chiaramente dovrà essere proporzionale all'altra sol regolare in $z = 0$ che conosci e puoi vedere la costante di proporzionalità calcolando ad esempio $v(0) = Cu_1(0)$ e puoi giungere alla **Relazione di autotrasformazione delle funzioni ipergeometriche**

$$\boxed{(1 - z)^{c-a-b} F(c - b, c - a, c, z) = F(a, b, c, z)} \tag{6.2.8}$$

Puoi anche fare la traformazione 4, ossia, $w = \frac{z}{z-1}$ e trovare una nuova soluzione intorno a $z = 0$

$$x = (1 - z)^{-a} F\left(a, c - b, c, \frac{z}{z - 1}\right)$$

(c'è anche analoga mettendo in evidenza b). In questo caso negli appunti per trovare che $x = u_1$ usa la rappresentazione integrale 6.2.6 che scrivendola per u_1, facendo un cambio di variabile $s = 1 - t$ e mettendo in evidenza $(1 - z)^{-a}$ trovo esattamente la rappresentazione di x.

A questo punto ho 4 modi di scrivere la soluzione $u_1(z)$ e puoi vedere cosa impari della convergenza di tutte.

$$\begin{aligned}
u_1^{(1)}(z) &= F(a, b, c, z) \\
u_1^{(2)}(z) &= (1 - z)^{c-a-b} F(c - a, c - b, c, z) \\
u_1^{(3)}(z) &= (1 - z)^{-a} F\left(a, c - b, c, \frac{z}{z - 1}\right) \\
u_1^{(4)}(z) &= (1 - z)^{-b} F\left(b, c - a, c, \frac{z}{z - 1}\right)
\end{aligned}$$

Da $u_1^{(2)}(z)$ non imparo molto poiché converge nello stesso cerchio di raggio 1 di $u_1^{(1)}(z)$, ma posso vedere $u_1^{(3)}(z)$ ed $u_1^{(4)}(z)$ come continuazioni analitiche e che convergono in $\left|\frac{z}{z-1}\right| < 1$, ossia in $\mathrm{Re}\{z\} < 1/2$.

Una nota generale è che per ogni singolarità e per ogni soluzione $u_i(z)$ esistono 4 modi di scriverla, esattamente come fatto per la soluzione regolare in $z = 0$, quindi in totale hai $6 \cdot 4$ modi di scrivere le soluzioni di un Ipergeometrica (su sito di moodle ci sono tutte) e si chiamano **soluzioni classificate da Kummer**. Come soluzioni linearmente indipendenti noi prendiamo le u_i, $i = \{1, \ldots, 6\}$ che però sono l.i. a coppie ed esistono delle relazioni tra di esse. Data una certa F posso scriverla come compinazione lineare di una di queste coppie l.i..

Ad esempio trova la relazione tra $u_1 = F(a, b, c, z)$ ed u_2 ed u_6. Un' integrale generale dell'ipergeometrica lo scrivo come c.l. di u_2 ed u_6, ma essendo regolari in $z = 0$ posso scrivere anche u_1 come c.l. di loro due.

$$F(a, b, c, z) = c_1 F(a, b, a+b+1, 1-z) + c_2 (1-z)^{c-a-b} F(c-a, c-b, c+1-a-b, 1-z)$$

entrambi i membri convergono in zone diverse ($|z| < 1$ e $|1 - z| < 1$) e se riesco a trovare i coefficienti allora posso vedere l'uno come la continuazione analitica dell'altro. Quindi il problema è determinare i coefficienti, cosa che posso fare calcolando entrambi i membri in due punti distinti in cui entrambi sono definiti (ossia faccio i limiti per $z \to 1^-$ e $z \to 0^+$) e paragonando i risultati. Trovi subito un coefficiente facilmente, mentre l'altro devi fare qualche giochetto con le proprietà di $\Gamma(z)$ e soprattutto ricordando la relazione 4.2.2. Cosi arrivi ai coefficienti

$$c_1 = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \qquad c_2 = \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$$

e puoi scriverti la relazione

$$F(a, b, c, z) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} F(a, b, a+b-c+1, 1-z) + \tag{6.2.9}$$

$$+ \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} (1-z)^{c-a-b} F(c-a, c-b, 1+c-a-b, 1-z) \tag{6.2.10}$$

Da questa relazione riesco a vedere bene che $z = 1$ è effettivamente p.to di diramazione. Parte fondamentale è vedere i limiti di validità della relazione, che ovviamente saranno dati dalle Γ. Troverai che $c \neq -n$ e $c - a - b \notin \mathbb{Z}$. Se usi la rappresentazione in serie delle F puoi vedere il secondo membro come continuazione analitica in un cerchio $|z - 1| < 1$ e $z \notin [1, 2]$ per via del taglio. Ma posso anche utilizzare la rappresentazione integrale delle F e notare che il primo membro è definito nella regione $z \notin [1, +\infty)$, mentre il secondo in $z \notin (-\infty, 0)$ (lo vedi chiedendo $1 - t(1-z) \neq 0$ e con $t \in (0,1)$) e in questo modo trovi una regione di $\mathbb{C}$ in cui sono definite entrambe, le regioni in cui non è definita una delle due e quindi le regioni in cui puoi vedere l'una come continuazione analitica dell'altra.

Ora, devi trovare una relazione tra $F(z)$ ed $F(1/z)$, ma non direttamente poiché convergono una dentro il cerchio unitario e l'altra fuori. Trova prima la relazione tra $F(z)$ ed $F(1/(1-z))$. Per farlo te conosci 6.2.8, ma conosci anche la relazione tra una F e la F con variabile $1-$la varibile dell'altra, ovvero la 6.2.10, quindi arrivi a scrivere

$$F(a,b,c,z) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(c-a)\Gamma(b)}(1-z)^{-a} F\left(a, c-b, a-b+1, \frac{1}{1-z}\right) + \tag{6.2.11}$$

$$+ \frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)}(1-z)^{-b} F\left(c-a, b, b-a+1, \frac{1}{1-z}\right) \tag{6.2.12}$$

puoi valutare ancora una volta i limiti di validità di questa identità ($F(z)$ converge nel cerchio $|z| < 1$, mentre $F(1/(1-z))$ fuori dal cerchio $|1-z| > 1$, ma nota anche il taglio che la parte polidroma del membro a destra porta, lo vedi da $[2, \infty)$ e non da $[1, \infty)$ come dovrebbe essere poiché tra $[1, 2]$ nessuno dei due membri converge). Considerando le rappresentazioni integrali la $F(z)$ ha un taglio su $[1, \infty)$ e la $F(1/1-z)$ ha un taglio su $[0, 1]$.

Ora puoi legare $F(z)$ con $F(1/z)$. Nota che

$$1 - \frac{1}{1-z} = \frac{z}{z-1}$$

$$\frac{\frac{1}{1-z}}{\frac{1}{1-z} - 1} = \frac{1}{1-1+z} = \frac{1}{z}$$

quindi puoi usare la relazione di autotrasformazione tra $F(z)$ ed $F(z/z-1)$ (ossia la $u_1^{(3)}$), ma utilizzarla sulla $F(1/1-z)$ e quindi legarla con $F(1/z)$. Cosi arrivi alla relazione:

$$F(a,b,c,z) = (-z)^{-a} \frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(c-a)\Gamma(b)} F\left(a, a-c+1, a-b+1, \frac{1}{z}\right) + \tag{6.2.13}$$

$$+ (-z)^{-b} \frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)}(1-z) F\left(b, b-c+1, b-a+1, \frac{1}{z}\right) \tag{6.2.14}$$

Valuti ancora i limiti di validità.

Ora, hai trovato le relazioni tra delle funzioni ipergeometriche con varibili diverse, ma che devono rispettare diversi limiti di validità. Per esempio nella relazione 6.2.10 abbiamo escuso il caso $c-a-b \in \mathbb{Z}$ sia perché le Γ esploderebbero sia perché se valesse in un introno di 1 non è detto che entrambi i pezzi di destra esistano e siano l.i. e quindi una dei due deve contenere il termine logaritmico. Ma posso verificare se la relazione 6.2.10 vale anche nel caso in cui $c-a-b \in \mathbb{Z}$. Procedimento Guarda solo il pezzo di destra, utilizza la definizione come serie della F, raccogli i pezzi comuni e usa la relazione 4.2.2 di Γ in modo da poter raccogliere anche un termine $\pi/\sin(\ldots)$ davanti a tutto e a questo punto sei in una situazione del tipo

$$F(a,b,c,z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}\frac{\pi}{\sin\left(\pi(c-a-b)\right)}[g_1(z)-g_2(z)]$$

con

$$g_1 = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+k)\Gamma(b+k)}{k!\Gamma(a+b-c+1+k)}(1-z)^k$$
$$g_2 = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(c-a+k)\Gamma(c-b+k)}{k!\Gamma(c-a-b+1+k)}(1-z)^{k+c-a-b}$$

Ora, puoi vedere che succede se $c \to a+b+n$, $n \in \mathbb{Z}$, che è un limite che mi interessa poiché mi dice che se la differenza degli indici è intera ho un pezzo logaritmic, ma trovo una forma indeterminata $0/0$. Trovo la forma indeterminata per via dello zero del sin e per via del fatto che se faccio il limite $g_1 \to g_2$ (lo verifichi scrivendo la def di g_1, vedi che i primi termini sono nulli finché $-n+1+k<0$, puoi cambiare indice per far cominciare la serie da 0 con $k = l+n$, dopodiché puoi fare il limite di g_2 ed effettivamente verificare l'uguaglianza). Allora, avendo una forma indeterminata non posso fare semplicemente il limite, ma posso farlo utilizzando De l'Hopital e per semplicità fai i conti tenendo $n=0$. Facendo tutti i conti arrivi a

$$F(a,b,a+b,z) = -\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\log(1-z)F(a,b,1,1-z) + K\sum_{k=0}^{\infty}c_k(1-z)^k \tag{6.2.15}$$

Quindi vedo che la relazione 6.2.10 contiene tutte le informazioni per qualsiasi range di parametri e per di più mi conferma quello che mi aspetterei da Fuchs, poiché in un intorno di $z=1$ mi aspetterei le soluzioni

$$u_1 = F(a,b,1,1-z)$$
$$u_2 = \sum_{k=0}^{\infty} d_k(1-z)^k + AF(a,b,1,1-z)\log(1-z)$$

ma so che la soluzione dell'equazione ipergeometrica per $c=a+b$ la posso scrivere in termini di soluzioni in un intorno di $z=1$ (o volendo anche

$z = \infty$), ossia

$$\begin{aligned} F(a,b,a+b,z) &= B_1u_1 + B_2u_2 \\ &= B_1F(a,b,1,1-z) + B_2\sum d_k(1-z)^k + B_2AF(a,b,1,1-z)\log(1-z) \end{aligned}$$

6.3 Equazione associata di Legendre

In questo paragrafo studiamo l'equazione associata di Legendre e soprattutto come scrivere le **funzioni associate di Legendre di I specie** e delle loro rappresentazioni in termini di funzioni ipergeometriche.

L'equazione di Legendre è:

$$(1-z^2)u''(z) - 2zu'(z) + \left[\nu(\nu+1) - \frac{\mu^2}{1-z^2}\right]u(z) = 0 \qquad (6.3.1)$$

e nota che se $\mu = 0$ torni all'equazione fatta a metodi I.

Risolvi l'equazioni e scriviti il simbolo $\mathcal{P}$ con singolarità in $z = \pm 1$ e $z = \infty$

$$\mathcal{P}\begin{Bmatrix} -1 & 1 & \infty & \\ \mu/2 & \mu/2 & \nu+1 & z \\ -\mu/2 & -\mu/2 & -\nu & \end{Bmatrix} \qquad (6.3.2)$$

per poi cosi trasformarlo e ottenere un simbolo di un ipergeometrica

$$\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\mu/2}\mathcal{P}\begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & \nu+1 & \frac{1-z}{2} \\ \mu & -\mu & -\nu & \end{Bmatrix} \qquad (6.3.3)$$

e puoi estrarre la prima soluzione che se dividi per la $\Gamma(c)$, ossia $\Gamma(1-\mu)$, allora puoi definire la **funzione associata di Legendre di I specie**

$$\boxed{P_\nu^\mu(z) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\mu/2} F\left(\nu+1, -\nu, 1-\mu, \frac{1-z}{2}\right)} \qquad (6.3.4)$$

che è definita anche se $1-\mu \in \mathbb{Z}$.

A questo punto ricordandoti la relazione 6.2.8 di autotrasformazione delle F puoi usarla dentro la 6.3.4 e trovare una nuova scrittura

$$P_\nu^\mu(z) = \frac{2^\mu}{\Gamma(1-\mu)}(1-z^2)^{-\mu/2}F\left(1+\nu-\mu, -\mu-\nu, 1-\mu, \frac{1-z}{2}\right) \qquad (6.3.5)$$

Ora potresti trovare la seconda soluzione di 6.3.1 ripartendo dal simbolo 6.3.2 e raccogliendo l'altro indice che non hai toccato quando hai cercato la prima soluzione. Normalizzando sempre il risultato per la Γ del terzo parametro riesci a trovare

$$u_2(z) = P_\nu^{-\mu}(z) = \frac{1}{\Gamma(1+\mu)} \left(\frac{1-z}{1+z}\right)^{\mu/2} F\left(\nu+1, -\nu, 1+\mu, \frac{1-z}{2}\right) \tag{6.3.6}$$

quindi hai trovato 6.3.4 e la 6.3.6 che sono le due soluzioni l.i. se $\mu \notin \mathbb{Z}$.

Il prossimo passo è quello di mostrare che se $\mu \in \mathbb{Z}$, allora P_ν^μ e $P_\nu^{-\mu}$ sono linearmente dipendenti. Lo fai ricordandoti la relazione 6.2.5 che c'è tra le due soluzioni dell'equazione ipergeometrica nel caso in cui $c \in \mathbb{Z}$ e che ti dice in quel caso che una delle due F non esisteva. Devi riadattare la relazione al problema delle equazioni associate di Legendre, ossia, con i parametri:

$$\begin{aligned} -N &\to 1+m \\ a &\to \nu+1 \\ b &\to -\nu \\ z &\to \frac{1-z}{2} \end{aligned}$$

rimettendo la relazione 6.2.5 con i nuovi parametri in $P_\nu^{-\mu}$ si vede facilmente che è proporzionale a P_ν^μ, e ancora riutilizzando la proprietà della funzione Γ 4.2.2 allora riesco a metterla più o meno dentro e ottengo la relazione

$$\boxed{P_\nu^{-\mu}(z) = (-1)^m \frac{\Gamma(\nu+1-m)}{\Gamma(\nu+1+m)} P_\nu^\mu(z)} \quad \mu = m \in \mathbb{Z} \tag{6.3.7}$$

Che si può invertire per scrivere $P_\nu^\mu(z) = \dots$ e usando la relazione 6.3.5 per $P_\nu^{-\mu}(z)$ giungo ad un'altra definizione

$$P_\nu^\mu(z) = (-1)^m \frac{\Gamma(\nu+1+m)}{\Gamma(\nu+1-m)} \frac{2^m}{\Gamma(1+m)} (1-z^2)^{m/2} F\left(1+\nu+m, m-\nu, 1+m, \frac{1-z}{2}\right) \tag{6.3.8}$$

Come ultima cosa potresti notare che esiste un'altro modo per trovare la seconda soluzione di 6.3.1, ossia, puoi fare il cambio di variabile $z \to w = z^2$, che anche se non è una trasformazione lineare fratta è opportuno fare in 6.3.1 perché comunque rimane una equazione totalmente fuchsiana con le singolarità di prima. Puoi in questo caso trovare la soluzione

$$u_2(w) \sim (w-1)^{\mu/2} F\left(-\frac{\nu}{2} + \frac{\mu}{2}, \frac{\mu}{2} + \frac{\nu}{2} + 1, c(\nu), w\right)$$

che è linearmente indipendente da $u_1 = P_\nu^\mu$ proprio perché c è indipendete da μ.

6.3.1 Proprietà soluzioni dell'equazione associata di Legendre

Questo paragrafo è relativamente corto e ti concentri solo sul fatto di mostrare che nota la funzione di Bessel con $\mu = 0$ allora sono ben determinate tutte le altre e poi fai delle osservazioni sull'atomo di Idrogeno.

In Fisica interessano sempre i casi con indice intero, $\mu = m \in \mathbb{Z}$ e chiamando $P_\nu^0 = P_\nu$ e calcolando la sua derivata m-esima riesci a giungere alla proprietà fondamentale

$$\boxed{P_\nu^m(z) = (-1)^m (1-z^2)^{\frac{m}{2}} \frac{\mathrm{d}P_\nu}{\mathrm{d}z^m}} \tag{6.3.9}$$

che è una relazione molto importante.

Quando risolvi l'equazione agli autovalori dell'oscillatore armonico ti preoccupi solo del caso $z = \pm 1$. Per noi ± 1 sono equivalenti e vorremmo scrivere soluzioni regolari anche in ± 1, però le equazioni 6.3.5 e 6.3.8 non si comportano entrambe bene sia in 1 che in -1 a causa di quanto fa la F (so che se $z = 1$ ho $F(0)$ ed entrambe sono ben definite, ma se $z = -1$ ho $F(1)$ che ha una singolarità di tipo logaritmico). Quindi, nel caso dell'atomo di Idrogeno si utilizza l'equazione 6.3.8 perché è simmetrica in $z = \pm 1$, ma in generale quando abbiamo un problema di questo tipo dobbiamo scegliere tra le espressioni quella che non diverge.

6.4 Funzione ipergeometrica confluente ⋄

In questo capitoletto ti chiedi che succede se partendo dall'equazione ipergeometrica prendi la singolarità in $z = 1$ e la fai confluire con la singolarità all'∞. Parti da

$$w(1-w)\frac{\mathrm{d}^u}{\mathrm{d}w^2} + [c - (a+b+1)w]\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}w} - abu = 0 \tag{6.4.1}$$

Intuitivamente mi aspetto che in $z = 0$ rimangono cose regolari, mentre succede qualcosa all'∞. Il punto di partenza è l'equazione ipergeometrica 6.2.2, da qui vorrei che la singolarità in $1 \to \hat{b}$ cosi che poi io possa fare il limite $\hat{b} \to \infty$. Basta fare il cambio di variabile $w = \frac{z}{\hat{b}}$ cosi l'equazione 6.2.2 diventa

$$z(\hat{b} - z)u''(z) + [c\hat{b} - (a+b+1)z]u'(z) - abu(z) = 0 \tag{6.4.2}$$

a questo punto puoi facilmente individuare chi sono $P(z)$ e $Q(z)$ nel limite $\hat{b} \to \infty$ distinguendo il caso in cui il resto resta finito dal caso in cui no.

Nel caso di resto finito troverai

$$\lim_{\hat{b}\to\infty} P(z) = \frac{c}{z}$$
$$\lim_{\hat{b}\to\infty} Q(z) = 0$$

Quindi l'equazione differenziale e di conseguenza la soluzione è banale

$$u''(z)z + cu'(z) = 0 \Longrightarrow u(z) = kz^{1-c}$$

Mentre per il caso in cui il resto non è finito conviene porre $\hat{b}$ uguale ad un parametro e poi mandare quello all'∞. Poni $\hat{b} = b \to \infty$ e trovi

$$\lim_{b\to\infty} P(z) = \frac{c}{z} - 1$$
$$\lim_{b\to\infty} Q(z) = -\frac{a}{z}$$

cosi ottieni l'**equazione ipergeometrica confluente**

$$\boxed{zu''(z) + (c-z)u'(z) - au(z) = 0} \tag{6.4.3}$$

in cui puoi vedere le uniche due singolarità e di cui puoi individuare due soluzioni. Valendo il teorema di Fuchs puoi trovare i due esponenti quando $z \to 0$ e sai come sono fatte le soluzioni scritte come serie, ma un procedimento più conveniente potrebbe essere quello di prendere le soluzioni di 6.4.1 in termini di funzioni ipergeometriche, ossia come

$$u_1(z) = F(a, b, c, z/b)$$
$$u_2(z) = z^{1-c}F(a-c+1, b-c+1, 2-c, z/b)$$

e poi farne il limite di $b \to \infty$ [1] e quindi trovando l'**funzione ipergeometrica confluente di 1° tipo** (o funzione di Kummer)

$$\boxed{u_1(z) = \Phi(a, c, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{k!(c)_k} z^k = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(c+k)k!} z^k} \tag{6.4.4}$$

Un altro modo per trovarla è quella di partire dalla rappresentazione integrale di F, ossia dalla relazione 6.2.6 e poi fare sempre il limite $b \to \infty$[2] trovi cosi

[1]Notando però che

$$\lim_{b\to\infty} \frac{(b)_k}{b^k} = \lim \frac{b(b+1)\dots(b+k-1)}{b \cdot b \dots b} \sim \lim \frac{b \cdot b \dots b}{b \cdot b \dots b} = 1$$

[2]Notando che

$$\lim_{b\to\infty} \left(1 - t\frac{z}{b}\right)^{-b} = e^{tz}$$

una rappresentazione integrale di Φ

$$\boxed{\Phi(a,c,z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\int_0^1 \mathrm{d}t(1-t)^{c-a-1}t^{a-1}e^{tz}} \tag{6.4.5}$$

che è valida se $\mathrm{Re}\{c\} > \mathrm{Re}\{a\} > 0$.

Trovare la seconda soluzione è più semplice perché basta prendere u_2 scritta con una F e notando che all'interno c'è $b-c+1$ che è $\neq b$, ma nel limite $b \to \infty$ è $\sim b$, quindi trovo lo stesso risultato di u_1 ma con i parametri diversi

$$\boxed{u_1(z) = z^{1-c}\Phi(a-c+1, 2-c, z)} \tag{6.4.6}$$

che è l.i. da u_1 e un generico integrale di 6.4.3 è una loro combinazione lineare. Nota che se $c \in \mathbb{Z}$ hai lo stesso problema di esistenza che avevi per le F.

Ora, trovando una nuova scrittura della soluzione dell'equazione confluente puoi trovare una relazione di autotrasformazione delle Φ. Fai l'ansatz che

$$e^z\Psi(c-a,c,-z)$$

è soluzione di 6.4.3 e lo verifichi mettendo le derivate dentro l'equazione differenziale. Però visto che $u_3 \to \mathit{kost}$ se $z \to 0$ capisco che se $c \notin \mathbb{Z}$ allora dev'essere legata con u_1 e non con u_2, che invece non è regolare in $z = 0$. Fissi la costante di proporzionalità calcolando entrambe nell'origine e troverai $u_3 = u_1$ e quindi la **relazione di autotrasformazione**

$$\boxed{\Phi(a,c,z) = e^z\Phi(c-a,c,-z)} \tag{6.4.7}$$

Però ricordati che esistono le seguenti proprietà (molto simili a quelle della Γ) della funzione ipergeometrica confluente:

1.
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\Phi(a,c,z) = \frac{a}{c}\Phi(a+1,c+1,z)$$

e in generale

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n}\Phi(a,c,z) = \frac{(a)_n}{(c)_n}\Phi(a+n,c+n,z)$$

2. La Φ soddisfa delle relazioni lineari con le sue contigue, ad esempio

$$c\Phi(a,c,z) - c\Phi(a-1,c,z) - z\Phi(a,c+1,z) = 0$$

3. Ci sono alcuni casi particolari

$$\Phi(a,a,z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z$$
$$\Phi(1,2,z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1)_k}{(2)_k k!} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!} = \frac{1}{z}(e^z - 1)$$
$$\Phi(-n,c,z) = (polinomio) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-n)_k}{(c)_k k!} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(c)_k} \binom{n}{k} z^k$$

NOTA Negli appunti a pagina 395 ci sono 3 pagine in cui si parla dell'equazione asociata di Laguerre, ma è un argomento che sincermante non ricordo ed è molto fatto male e mi sembra molto un collegamento a caso ad MQI, quindi in questi appunti l'ho saltato.

6.4.1 Funzione ipergeometrica confluente di I specie

*paragrafo inserito dentro il capitoletto **06.4**.*

6.4.2 Funzione ipergeometrica confluente di II specie

Fin'ora abbiamo studiato il caso in cui $c \notin \mathbb{Z}$ e abbiamo trovato le due soluzioni linearmente indipendenti di 6.4.3, ossia, 6.4.4 e 6.4.6. Però il caso interessante è ricavare la funzione ipergeometrica confluente di secondo tipo, ovvero la seconda soluzione di 6.4.3 linearmente indipendente da 6.4.4 quando $c \in \mathbb{Z}$.

Il metodo standard è quello di utilizzare la trasformata di Laplace

$$u(z) = \int_\gamma \mathrm{d}t \; e^{-zt} U(t) \tag{6.4.8}$$

per risolvere l'edo, cosi da ottenere un'equazione algebrica in $U(t)$ che reinsendo in 6.4.8 ci permette di trovare $u(z)$. Il problema è che se facciamo questa cosa non otteniamo un'equazione algebrica a coefficienti costanti come a metodi I, invece se usi 6.4.8 dentro la edo (dopo aver fatto le derivate) trovi una cosa del tipo

$$\int_\gamma \mathrm{d}t \; e^{-zt}[zt^2 - (c-z)t - a]U(t) = 0$$

A questo punto puoi trattare separatamente i termini con la t e quelli senza, per il termine con la t fai:

$$\begin{aligned}
ze^{-zt}(t^2+t)U(t) &\Longrightarrow -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e^{-zt})[(t^2+t)U(t)] \\
&\Longrightarrow -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(e^{-zt}(t^2+t)U(t)\Big)+e^{-zt}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(t^2+t)U(t)] \\
&\Longrightarrow -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(e^{-zt}t(t+1)U(t)\Big)+e^{-zt}\Big[(2t+1)U(t)+t(t+1)U'(t)\Big]
\end{aligned}$$

puoi mettere questa relazione dentro l'integrale e notare che con l'ipotesi che il termine di bordo sia nullo riesci ad ottenere un edo di primo grado per $U(t)$ che risolvendola ti da

$$U(t)=kt^{a-1}(1-t)^{c-a-1}$$

Ora, avendo trovato $U(t)$, basta che la metti dentro 6.4.8 e hai finito perché integrando puoi trovare chi è la seconda soluzione. Però hai fatto l'importante assunzione che il termine di bordo sia nullo, ma questo è vero a seconda di chi è γ. Valuta i due casi $\gamma=[-1,0]$ e $\gamma=[0,\infty)$. Valutando i termini di bordo in entrambi i casi trovi che sono entrambi 0, ma calcolando la soluzione, nel primo caso troverai $u(z)=\Phi(a,c,z)$, mentre nel secondo

$$\boxed{u(z)=\Psi(a,c,z)=\frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^{\infty}\mathrm{d}t\; e^{-zt}t^{a-1}(1+t)^{c-a-1}} \tag{6.4.9}$$

che è la rappresentazione integrale della **funzione ipergeometrica confluente di II specie** (o funzione di Tricomi).

Il fatto è che facciamo uscire la Ψ quando $c\in\mathbb{Z}$, ma questo vuol dire che se $c\notin\mathbb{Z}$, allora, dev'essere una combinazione lineare della due soluzioni 6.4.4 e 6.4.6, quindi scrivibile come

$$\Psi(a,c,z)=A\Phi(a,c,z)+Bz^{1-c}\Phi(a-c+1,2-c,z)$$

Per fissare i coefficienti come al solito devo valutare i due termini in due punti. Visto che potrebbe non essere facile sommare le serie o fare gli integrali posso calcolarli in $z\to 0^+$ e anche le loro derivate in $z\to 0^+$. Supponendo $\mathrm{Re}\{c\}<1$ posso calcolare

$$\lim_{z\to 0^+}(II membro)=A$$

che è valido anche se $\mathrm{Re}\{c\}$ non è <1 visto che A è una costante. Invece il limite del primo membro lo faccio istantaneamente, ma poi facendo un cambio di variabile $t=\frac{w}{1-w}$ reisco a riconoscere una Beta e trovare

$$\lim_{z\to 0^+}\Psi=\frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(a+1-c)}\Longrightarrow A=\frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(a+1-c)}$$

Ora poi valutare $z^c \frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}z}\Big|_{z=0}$. Suppondgo $\mathrm{Re}\{c\} > 0$ e calcolo

$$\lim_{z\to 0^+} (IImembro) = -B(c-1)$$

Invece per il primo membro conviene fare il limite della derivata della rappresentazione integrale 6.4.9, mettendo dentro l'integrale z^c e scrivendo ovunque la variabile zt riesco a riconoscere una Γ e posso trovare

$$\lim_{z\to 0^+} z^c \frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}z} = -\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \Longrightarrow B = \frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(a)}$$

e quindi trovo la relazione

$$\boxed{\Psi(a,c,z) = \frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(a+1-c)}\Phi(a,c,z) + z^{1-c}\frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(a)}\Phi(a-c+1, 2-c, z)} \tag{6.4.10}$$

Questa relazione è valida per $c \notin \mathbb{Z}$, ma se $c \in \mathbb{Z}$ so che la Ψ esiste e posso far vedere con una dimostrazione analoga a quella usata per le F che contiene il pezzo log. (Per la dimostrazione leggiti il procedimento del paragrafo **06.2.3**, dopo l'equazione 6.2.14 che è analogo, ma metti $c = n+1$ e arriverai a dimostrare $\lim_{c\to n+1} \Psi(a,c,z) = \cdots + C \log z \; \Phi(a, n+1, z)$).

6.4.3 Comportamento asintotico della funzione ipergeometrica confluente di II specie

In questo paragrafetto cerchi di sviluppare asintoticamente la funzione ipergeometrica si II specie, il che sarà quasi immediato, ma risulterà fondamentale per trovare lo sviluppo asintotico della funzione di I specie.

Devi studiare l'equazione 6.4.9, che vale con $\mathrm{Re}\{a\} > 0$, quando $z \to +\infty$. Devi fare gli stessi procedimenti che fai quando studi lo sviluppo asintotico di un generico integrale, ma in questo caso è ancora più facile perché puoi scrivere

$$(1-t)^{c-a-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{c-a-1}{k} t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a-c+1+k)}{\Gamma(a-c+1)k!}(-1)^k t^k$$

ossia puoi sviluppare tutto quello che c'è al piano terra dell'exp intorno a $t = 0$ e sicuramente puoi scambiare serie ed integrale perché tutto converge in 0. Dentro l'integrale dovrebbe rimanere solo una cosa facile da individuare come una Γ divisa per una potenza di z e quindi trovare

$$\Psi(a,c,z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(a-c+1+k)\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)\Gamma(a-c+1)k!} z^{-a-k} \tag{6.4.11}$$

$$\Longrightarrow \Psi(a,c,z) \sim z^{-a}\left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right) \qquad z \to +\infty \tag{6.4.12}$$

di cui guardo solo il termine dominante 6.4.12. Questo sviluppo l'ho ricavato nel caso di $\mathrm{Re}\{a\} > 0$ e $\mathrm{Re}\{z\} > 0 \Longrightarrow |\arg z| < \frac{\pi}{2}$, ma più avanti troverai che in realtà vale ovunque e non c'è differenza se $z \to \pm\infty$; caso diverso invece per Φ.

6.4.4 Comportamento asintotico della funzione ipergeometrica confluente di I specie

Per trovare lo sviluppo di Φ sfrutto lo sviluppo 6.4.12 combinato con la relazione 6.4.10, ma girata in modo di avere Phi espressa in termini di c.l. di due Psi. Per girare la 6.4.10 devi prima di tutto scriverti quella relativa a $\Psi(c-a,c,-z)$, in cui tra l'altro devi definire bene $-z$ che vuol dire (devi scegliere $-z = ze^{-i\pi}$, ossia $\mathrm{Im}\{z\} > 0$), dopodichè moltiplichi tutto per e^z e nei termini a destra puoi utilizzare la relazione di autotrasformazione 6.4.7. A questo punto se riuscissi a combinare con oppurtuni coefficienti la relazione 6.4.10 con quella che hai appena trovato, riusciresti ad ottenere solamente una Φ da un lato e quindi quello che stai cercando. Calcola

$$\frac{1}{\Gamma(c-a)}\Psi(a,c,z) + e^{-i\pi c}\frac{1}{\Gamma(a)}e^z\Psi(c-a,c,-z)$$

otterrai subito una cancellazione di due termini a destra e utilizzando le proprietà di Γ riuscirai ad arrivare a

$$\frac{e^{-i\pi a}}{\Gamma(c)}\Phi(a,c,z)$$

e quindi alla relazione

$$\boxed{\Phi(a,c,z) = e^{i\pi a}\left[\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)}\Psi(a,c,z) + e^{-i\pi c}\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)}e^z\Psi(c-a,2-c,-z)\right]} \tag{6.4.13}$$

Ora, sfruttando la conoscenza di 6.4.12 riesco a trovare lo sviluppo di Φ a seconda di $z \to +\infty$ oppure $z \to -\infty$ (a seconda di $z \to \pm\infty$ vincerà un termine della c.l. piuttosto che l'altro). Troverai

$$\Phi(a,c,z) \sim e^z\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)}z^{a-c} \qquad z \to +\infty \tag{6.4.14}$$

$$\Phi(a,c,z) \sim \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)}(-z)^{-a} \qquad z \to -\infty \tag{6.4.15}$$

Nota però che in entrambi i casi l'oggetto che va ad ∞ è qualcosa con parte reale > 0.

6.5 Funzione di Bessel

In questo paragrafo studi le soluzioni dell'equazione di Bessel

$$\boxed{z^2 u''(z) + z u'(z) + (z^2 - \nu^2) u(z) = 0} \tag{6.5.1}$$

che noti subito avere singolarità fuchsiana in $z = 0$ e singolarità irregolare in $z = \infty$ (quindi sarà legabile in qualche modo con la funzione ipergeometrica confluente). Quello che fai ora è cercare le soluzioni, ma banalmente utilizzando il teorema di Fuchs intorno a $z = 0$. Troverai

$$\rho = \pm\nu \qquad \text{sceglierai } \mathrm{Re}\{\nu\} > 0 \text{ cosi da mantenere questi segni}$$

$$a_0 = \text{indeterminato} \;;\; a_1 = 0 \;;\; a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n+2\nu)}$$

$$\Longrightarrow a_{2n} = -\frac{a_{2n-2}}{4n(n+\nu)} \text{ iterando } \Longrightarrow a_{2n} = (-1)^n \frac{a_0 \Gamma(\nu+1)}{n! \Gamma(1+\nu+n) 2^{2n}}$$

Devi fare la scelta:

$$a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} \Longrightarrow a_{2n} = \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(1+\nu+n)} \left(\frac{1}{2}\right)^\nu$$

In questo modo ottieni la **funzione di Bessel di I specie**

$$\boxed{u_1(z) = J_\nu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(1+\nu+n)} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu} \tag{6.5.2}$$

Ora, come al solito devi trovare la seconda soluzione di 6.5.1. Prima guarda il caso facile $\nu \notin \mathbb{Z}$. Da Fuchs sai che avrai $u_2 \sim z^{-\nu}(O(1))$, ma notando la palese simmetria di 6.5.1 per $\pm\nu$ se esiste la soluzione per $+\nu$ deve esistere anche quella per $-\nu$, quindi

$$\boxed{u_2(z) = J_{-\nu}(z)} \tag{6.5.3}$$

Ora, però bisogna studiare anche il caso in cui $\nu = m \in \mathbb{Z}$ che mi dice che J_ν e $J_{-\nu}$ non sono l.i. . Lo dimostri prendendo la definizione 6.5.2 scritta per J_{-m}, noti che per colpa della Γ a denominatore i primi $m - 1$ termini sono nulli e facendo un cambio di indice trovi

$$J_{-m} = (-1)^m J_m(z)$$

La seconda soluzione della EDO la definisci come una c.l. delle J. Definisci la **funzione di Bessel di II specie**

$$\boxed{Y_\nu(z) = \frac{1}{\sin(\pi\nu)} \Big[\cos(\pi\nu) J_\nu(z) - J_{-\nu}(z) \Big]} \tag{6.5.4}$$

<u>**NOTA**</u> puoi vedere che $u_2(z) = Y_\nu(z)$ contiene il termine logaritmico sempre allo stesso modo, ossia, fai il limite con $\nu \to m \in \mathbb{Z}$ di $Y_\nu(z)$ e utilizzando De l'Hopital trovi che esce il termine $\propto AJ_m(z)\log z$.

Visto che le funzioni J_ν e $J_{-\nu}$ quando $\nu \notin \mathbb{Z}$ formano una base per lo spazio delle soluzioni, allora esistono anche altre soluzioni di 6.5.1 scrivibili come c.l. di queste due. In particolare le **funzioni di Henkel di I e II specie** (o di Bessel di III e IV specie):

$$H_\nu^{(1)}(z) = \frac{i}{\sin(\pi\nu)}\Big[e^{-i\pi\nu}J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)\Big] \tag{6.5.5}$$

$$H_\nu^{(2)}(z) = \frac{-i}{\sin(\pi\nu)}\Big[e^{i\pi\nu}J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)\Big] \tag{6.5.6}$$

che si possono invertire e trovare le funzioni di Bessel di I e II specie in funzione di queste:

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2}\Big(H_\nu^{(1)}(z) + H_\nu^{(2)}(z)\Big) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\Big\{H^{(1)} + H^{(2)}\Big\} \tag{6.5.7}$$

$$Y_\nu(z) = \frac{1}{2i}\Big(H_\nu^{(1)}(z) - H_\nu^{(2)}(z)\Big) = \frac{1}{2i}\,\mathrm{Im}\Big\{H^{(1)} - H^{(2)}\Big\} \tag{6.5.8}$$

dove la seconda uguaglianza viene dal fatto che $H^{(1)}$ ed $H^{(2)}$ sono entrambe funzioni complesse (mentre J_ν e Y_ν se $z \in \mathbb{R}$ sono funzioni reali) e sono l'uno il complesso coniugato dell'altro.

6.5.1 Proprietà funzioni di Bessel

In questo piccolo paragrafetto vedi le due proprietà valide per le funzioni di Besserl $Z_\nu = J_\nu, Y_\nu, H_\nu$.

1. Relazione per le derivate

$$Z'_\nu(z) = \frac{\nu}{z}Z_\nu(z) - Z_{\nu+1}(z)$$

2. Relazione di ricorrenza

$$Z_{\nu+1}(z) - \frac{2\nu}{z}Z_\nu(z) + Z_{\nu-1}(z) = 0$$

Si dimostrano banalmente faccendo il conto. Negli appunti è stato fatto nel caso di $J_\nu(z)$ e usando la rappresentazione 6.5.2.

6.5.2 Connessione funzioni di Bessel e funzione ipergeom. confluente

In questo paragrafo vedi che a partire da qualunque soluzione dell'equazione ipergeometrica confluente ti puoi scrivere una soluzione dell'equazione di

Bessel.

Parto da un'equazione confluente 6.4.3 con parametri

$$c = 2\nu + 1 \qquad a = \frac{c}{2} = \nu + \frac{1}{2} \implies c - a = \nu + \frac{1}{2}$$

e quindi in questo caso hai l'equazione

$$wu''(w) + (2\nu + 1 - w)u'(w) - \left(\nu + \frac{1}{2}\right) u(w) = 0 \tag{6.5.9}$$

e so già che la soluzione sarà una qualche funzione di Bessel. Scrivo

$$u(w) = e^{w/2} w^{-\nu} v(w) = l(w)v(w) \tag{6.5.10}$$

facendo le derivate e mettendola dentro la EDO 6.5.9 trovo che se $u(w)$ è soluzione allora la $v(w)$ deve rispettare

$$wv''(w) + v'(w) - \left(\frac{w}{4} + \frac{\nu^2}{w}\right) v(w) = 0$$

A questo punto devo porre $w = 2iz$ e chiamo $f(z) = v(2iz)$ e facendo le derivate partendo dalla EDO di $v(w)$ posso trovare l'EDO soddisfatta da $f(z)$, che è

$$z^2 f''(z) + zf'(z) + (z^2 - \nu^2)f(z) = 0$$

che è un'equazione di Bessel. Quindi, concludo che una soluzione dell'ipergeometrica confluente $u(w)$ si può scrivere in termini di una soluzione dell'equazione di Bessel $f(z)$ nella varibile z, oppure viceversa.

$$\boxed{u(w) = Ae^{w/2} w^{-\nu} f_\nu\left(\frac{w}{2i}\right)} \implies \boxed{f_\nu(w) = Be^{-iz} z^\nu u(2iz)} \tag{6.5.11}$$

A seconda di chi è u ottengo funzioni di Bessel diverse e il resto del paragrafo ti preoccupi di vedere chi ottieni in base alla scelta di u.

- Scelto

$$u(2iz) = \Phi(\nu + 1/2, 2\nu + 1, 2iz)$$

puoi dimostrare che effettivamente f_ν è legato alla J_ν guardando l'andamento in $z \to 0$, inoltre determinando la costante di proporzionalità B riesci anche a trovare un'espressione alternativa

$$J_\nu(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu + 1)} e^{-iz} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \Phi\left(\nu + \frac{1}{2}, 2\nu + 1, 2iz\right) \tag{6.5.12}$$

si potrebbe dimostrare sviluppando e^{-iz} e Φ che mettendo insieme mi fanno ottenere lo sviluppo di J_ν, ma non lo farò.

- Scelta invece

$$u(2iz) = \Psi(\nu + 1/2, 2\nu + 1, 2iz)$$

trovi

$$H_\nu^{(2)}(z) = \frac{2i}{\sqrt{\pi}}(2z)^\nu e^{i(\pi\nu - z)}\Psi\left(\nu + \frac{1}{2}, 2\nu + 1, 2iz\right) \tag{6.5.13}$$

questa invece l'abbiamo dimostrata utilizzando la relazione 6.4.10, poiché se la inserisci nel pezzo di destra di 6.5.13, scrivi $e^{i(\pi\nu - z)} = e^{i\frac{\pi}{2}\nu}e^{i(\frac{\pi}{2}\nu - z)} = i^\nu e^{i(\frac{\pi}{2}\nu - z)}$, poi portanto dentro i termini $(2iz)^\nu e^{-iz}$, riesco a riconoscere la relazione 6.5.12 e quindi a scrivere $H_\nu^{(2)}(z)$ come una combinazione lineare di $J_{\pm\nu}(z)$ e per di più posso vedere che i coefficienti davanti, se utilizzo la formula di duplicazione della Γ (ossia 4.2.3, sono esattamente quelli di 6.5.6.

•In modo analogo usando

$$u(2iz) = e^{2iz}\Psi(\nu + 1/2, 2\nu + 1, -2iz)$$

si trova

$$H_\nu^{(1)}(z) = \frac{-2i}{\sqrt{\pi}}(2z)^\nu e^{-i(\pi\nu - z)}\Psi\left(\nu + \frac{1}{2}, 2\nu + 1, -2iz\right) \tag{6.5.14}$$

6.5.3 Rappresentazione integrale della funzione di Bessel

In questo breve, ma intensissimo paragrafo cerchiamo una rappresentazione integrale della funzione di Bessel grazie alla relazione 6.5.12 con l'ipergeometrica confluente. I passaggi da fare sono pochissimi: espliciti la rappresentazione integrale di Φ, ossia scrivi la 6.5.12 con dentro la 6.4.5 (dove vale?), poi fai il cambio di variabile $t = \frac{1+u}{2}$ e cosi arrivi ad una scrittura del tipo

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \frac{\Gamma(2\nu + 1)}{\Gamma(\nu + 1)\Gamma(\nu + 1/2)^2}\frac{1}{2^{2\nu}}\int_{-1}^{1} \mathrm{d}u\ e^{izu}(1 - u^2)^{\nu - \frac{1}{2}}$$

ora devi semplificare il pezzo di Γ davanti all'integrale utilizzando la formula di duplicazione 4.2.3 e in più puoi notare che il pezzo $(1 - u^2)$ è pari, quindi nell'integrale sopravvive solo il pezzo pari dell'exp e cosi ottieni

$$\boxed{J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\Gamma(\nu + 1/2)}\int_{-1}^{1} \mathrm{d}u\ \cos(zu)(1 - u^2)^{\nu - \frac{1}{2}}} \tag{6.5.15}$$

oppure facendo ancora il cambio $u = \sin\varphi$ ottieni la rappresentazione equivalente, che chiamo **rappresentazione di Poisson per J_ν**

$$\boxed{J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\Gamma(\nu + 1/2)}\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\varphi\ (\cos\varphi)^{2\nu}\cos(z\sin\varphi)} \tag{6.5.16}$$

6.5.4 Andamento asintotico delle funzioni di Bessel †

In questo paragrafo cerchi gli andamenti asintotici di J_ν, Y_ν e H_ν. Per prima cosa conoscendo lo sviluppo asintotico di della funzione ipergeometrica di II specie 6.4.11 (valido in generale se $|\arg z| \leq \pi/2+\delta$, anche se noi lo abbiamo ricavato per $z \to +\infty$) riesci a trovare lo sviluppo di $H_\nu^{(1)}$ e $H_\nu^{(2)}$ con semplici passaggi a partire dalle relazioni 6.5.14 e 6.5.13. Trovi con $z \to +\infty$

$$H_\nu^{(1)} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp\left\{-i\left(\frac{\pi\nu}{2}+\frac{\pi}{4}-z\right)\right\} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{h(\nu,k)}{(2iz)^k} \tag{6.5.17}$$

$$H_\nu^{(2)} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp\left\{i\left(\frac{\pi\nu}{2}+\frac{\pi}{4}-z\right)\right\} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h(\nu,k)}{(2iz)^k} \tag{6.5.18}$$

dove ho scritto

$$h(\nu,k) = (-1)^k \frac{\Gamma(a-c+1+k)\Gamma(a+k)}{\Gamma(a-c+1)\Gamma(a)k!}$$

e confermo il sospetto che avevo che le funzioni H_ν si comportassero come esponenziali a meno di fattori davanti e uno schift dato da $\pi/4$ e qualcosa che dipende da ν.

Più importante però è che dagli andamenti di H_ν possiamo ricavare gli andamenti di J_ν e Y_ν grazie alle relazioni 6.5.7 e 6.5.8. Con $z \to +\infty$ trovo cosi

$$J_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \Big[\cos\left(\frac{\pi\nu}{2}+\frac{\pi}{4}-z\right) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{h(\nu,2n)}{(2z)^{2n}} + \sin\left(\frac{\pi\nu}{2}+\frac{\pi}{4}-z\right) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{h(\nu,2n+1)}{(2z)^{2n+1}}\Big] \tag{6.5.19}$$

$$Y_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \Big[-\sin\left(\frac{\pi\nu}{2}+\frac{\pi}{4}-z\right) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{h(\nu,2n)}{(2z)^{2n}} + \cos\left(\frac{\pi\nu}{2}+\frac{\pi}{4}-z\right) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{h(\nu,2n+1)}{(2z)^{2n+1}} \tag{6.5.20}$$

cosi come noto che H_ν va come un exp ad ∞ posso vedere che prendendo i termini dominanti quando $z \to +\infty$ J_ν ed Y_ν si comportano come funzioni trigonometriche

$$J_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(\frac{\pi\nu}{2}+\frac{\pi}{4}-z\right)\left(1+O\left(\frac{1}{z}\right)\right) \tag{6.5.21}$$

$$Y_\nu(z) \sim -\sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(\frac{\pi\nu}{2}+\frac{\pi}{4}-z\right)\left(1+O\left(\frac{1}{z}\right)\right) \tag{6.5.22}$$

6.5.5 Funzioni di Bessel di indici semi-interi

Sono funzioni interessanti perché diventano funzioni elementari, ma difficile che vengano chieste all'esame e le vedi un po' veloci e solo per J_ν. Banalmente per capire chi sono prendi la definizione 6.5.2 in serie di J_ν e mettici il coefficiente ν che vuoi. Guarda

$$J_{1/2}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+3/2)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+1/2}$$

a questo punto esplicitando la Γ riesci a giungere a

$$J_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z \tag{6.5.23}$$

e analogamente a

$$J_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos z \tag{6.5.24}$$

Usando le relazioni di ricorrenza delle funzioni di Bessel, ossia 6.4.7, riesci a trovare cosa fa $J_{n\pm 1/2}$ e in particolare

$$J_{3/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left(\frac{1}{z} \sin z - \cos z\right) \tag{6.5.25}$$

Anche se di solito si utilizzando quelle che si chiamano **funzioni di Bessel sferiche**

$$j_n(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} J_{n+1/2}(z) \tag{6.5.26}$$

$$y_n(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} Y_{n+1/2}(z) \tag{6.5.27}$$

6.6 Funzioni ipergeometriche generalizzate

L'ultimo paragrafetto del corso è composto solamente da delle definizioni di chi è la **funzione ipergeometrica generalizzata** che è definita come

$${}_pF_q(a_r, c_s, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\prod_{r=1}^{p} (a_r)_k}{\prod_{s=1}^{q} (c_s)_k} \frac{z^k}{k!} \qquad p, q \in \mathbb{N} \tag{6.6.1}$$

che è una serie di potenze simile a quelle che abbiamo visto nell'ipergeometrica confluente e non. Si vede che la serie converge se $p \leq q+1$ e il raggio di convergenza è ∞ se $p < q+1$ e finito se $p = q+1$.

La definizione 6.6.1 contiene non solo la funzione ipergeometrica e l'ipergeometrica confluente, ma anche altri tipi di funzioni più generali

$$F(a_1, a_2, c, z) =_2 F_1(a_1, a_2, c_z) \tag{6.6.2}$$

$$\Phi(a, c, z) =_1 F_1(a, c, z) \tag{6.6.3}$$

$$_0F_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z \tag{6.6.4}$$

$$_1F_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{k!} z^k = (1 - z)^{-a} \tag{6.6.5}$$

esiste anche una sua rappresentazione integrale

$$_{(p+1)}F_{(q+1)}(a_r, a, c_s, z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 \mathrm{d}t \; t^{a-1}(1-t)_p^{c-a-1} F_q(a_r, c_s, zt). \tag{6.6.6}$$

Appendici

Appendice A

Appunti esercizi

In questa sezione sono presenti degli appunti sulla risoluzione di esercizi che mi sono venuti in mente risolvendo i tutoraggi o esercizi vari.

Ripasso utile da METODI I Residuo Per calcolare un residuo o sviluppi la funzione nel punto che ti interessa e prendi il coefficiente del termine con $\frac{1}{z-z_0}$ oppure utilizzi la definizione:

$$\operatorname{Res}\big[f(z)\big]_{z=z_0} = \oint_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{2\pi i} f(z)$$

Importante che ti ricordi che per il residuo all'∞ ha il coefficiente cambiato di segno.

Equazioni differenziali (tratto da *"METODI MATEMATICI DELLA FISICA, Barbaro, Frau, Gambino, Sciuto"*).

Un'equazione scritta in forma normale è del tipo:

$$u''(z) + P(z)u'(z) + Q(z)u(z) = 0 \tag{A.0.1}$$

Le proprietà delle soluzioni le deduco sempre dal comportamento di $P(z)$ e $Q(z)$: se sono regolari in $z = z_0$ allora z_0 è punto regolare e le soluzioni dell'equazione A.0.1 sono regolari in z_0; altrimenti z_0 si dice punto singolare dell'equazione. Le singolarità si distinguono in due tipi: singolarita **fuchsiane** (o regolari) e singolarità **essenziali** (o irregolari).

Definizione Un punto si dice **punto singolare fuchsiano** se con $z \to z_0$ la funzione $P(z)$ ha al più un polo semplice e $Q(z)$ ha al più un polo doppio, ossia, esistono finiti:

$$p_0 = \lim_{z\to z_0} (z - z_0)P(z) \tag{A.0.2}$$

$$q_0 = \lim_{z\to z_0} (z - z_0)^2 Q(z) \tag{A.0.3}$$

Se per caso $p_0 \to \infty$ oppure $q_0 \to \infty$ allora è una singolarità essenziale.

Una generica soluzione generale dell'equazione differenziale sarà del tipo:

$$u(z) = \alpha u_1(z) + \beta u_2(z)$$

dove u_1 e u_2 sono soluzioni particolari di A.0.1 e linearmente indipendenti.

NOTA due soluzioni sono linearmente indipendenti se il loro wronskiano è diverso da 0, ossia se

$$W(z) = det \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{vmatrix} \neq 0$$

Ora, se vuoi rivedere velocemente come si trova una soluzione in un punto regolare puoi leggere in 2 minuti le pag. 82-83 delle dispense *"METODI MATEMATICI DELLA FISICA, Barbaro, Frau, Gambino, Sciuto"* .

Ti interessa di più per il **T8** è come si trovano soluzioni nell'intorno di un punto singolare fuchsiano.

Teorema di Fuchs Se z_0 è un punto singolare fuchsiano dell'equazione, allora esiste sempre almeno una soluzione della A.0.1 del tipo:

$$u_1(z) = (z - z_0)^{\rho_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k \tag{A.0.4}$$

e una seconda soluzione linearmente indipendente dalla prima della forma:

$$u_2(z) = (z - z_0)^{\rho_2} \sum_{k=0}^{\infty} d_k (z - z_0)^k + d u_1(z) \log(z - z_0) \qquad \text{con } d_0 \neq 0$$

Il problema di trovare le due soluzioni, grazie al teorema di Fuchs, si riconduce solamente a trovare i due coefficienti ρ_1 e ρ_2 che ricavo dall'**equazione indiciale**

$$\rho^2 + (p_0 - 1)\rho + q_0 = 0 \tag{A.0.5}$$

Una volta individuati, il termine con parte reale maggiore corrisponde a quello da mettere in u_1 e si distinguono vari casi per determinare la forma di u_2. Se $\rho_1 - \rho_2 \notin \mathbb{N}$ allora u_2 ha la stessa forma di A.0.4 e non c'è il termine logaritmico, ma se $\rho_1 - \rho_2 \in \mathbb{N}$ allora la seconda soluzione è quella enunciata dal teorema di Fuchs con il termine log.

Abbiamo rivisto tutto tranne lo studio del comportamento all'infinito. Lo studio si fa con il solito cambio di coordinate $t = \frac{1}{z}$ e poi si guarda che succede con $t \to 0$. Se si scrive l'equazione A.0.1 con il cambio $t = \frac{1}{z}$ e in forma normale si ottengono

$$\tilde{P}\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{2}{t} - \frac{P(1/t)}{t^2}$$
$$\tilde{Q}\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{Q(1/t)}{t^4}$$

Il punto $t = 0$ $(z \to \infty)$ è punto ordinario se le funzioni $\tilde{P}$ e $\tilde{Q}$ sono regolari in $t = 0$ ovvero $P(z) = \frac{2}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right)$ e $Q(z) = O\left(\frac{1}{z^4}\right)$ per $z \to \infty$.

Invece le condizioni necessarie e sufficienti affiché il punto $z = \infty$ sia fuchsiano sono che le funzioni $\tilde{p}(t) = t\tilde{P}\left(\frac{1}{t}\right)$ e $\tilde{q}(t) = t^2\tilde{Q}\left(\frac{1}{t}\right)$ siano regolari in $t = 0$, ovvero:

$$P(z) = O\left(\frac{1}{z}\right) \qquad z \to \infty$$
$$Q(z) = O\left(\frac{1}{z^2}\right) \qquad z \to \infty$$

Se l'infinito è un punto singolare fuchsiano allora devo cercare le due soluzioni particolari linearmente indipendenti come ho fatto nel caso finito

$$u_1(z) = z^{-\rho_1} \sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^{-k}$$

e quindi

$$u_2(z) = \begin{cases} z^{-\rho_2} \sum_{k=0}^{+\infty} d_k z^{-k} & \text{se } \rho_1 - \rho_2 \notin \mathbb{N} \\ z^{-\rho_2} \sum_{k=0}^{+\infty} b_k z^{-k} - a u_1(z) \log z & \text{se } \rho_1 - \rho_2 \in \mathbb{N} \end{cases}$$

a seguito di alcuni passaggi arrivo a poter definire

$$p_0 = \lim_{z \to \infty} zP(z)$$
$$q_0 = \lim_{z \to \infty} z^2 Q(z)$$

e risolvendo l'**equazione indiciale per il punto all'infinito**

$$\rho^2 + (1 - p_0)\rho + q_0 = 0 \tag{A.0.6}$$

riesco a determinare le due soluzioni particolari.

A.1 T1 - Trasformazioni lineari fratte

È considerabile più un argomento da studiare di teoria, ma inserisco comunque una spiegazione di quello che è stato fatto in aula (anche se un po' superficiale).

Trasformazioni lineari fratte sono trasformazioni

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \qquad f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad , \quad a,b,c,d \in \mathbb{C} \quad t.c. \quad ad - bc \neq 0$$

poiché se $ad - bc = 0$ potrei avere $c = \lambda a$ e $d = \lambda b$ e quindi una f costante. È dimostrabile che le trasformazioni lineari fratte sono tutte e sole le mappe invertibili da $\bar{\mathbb{C}} \longrightarrow \bar{\mathbb{C}}$.
Le TLF si ottengono componendo le seguenti trasformazioni elementari:

- Traslazioni $T : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$
$$z \to z + a \quad a \in \mathbb{C}$$

- Dilatazioni complesse $D : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$
$$z \to \lambda z \quad \lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$$

- Inversione $I : \bar{\mathbb{C}} \longrightarrow \bar{\mathbb{C}}$
$$z \to \frac{1}{z}$$
$$I(|z|e^{i\vartheta}) = |z|^{-1}e^{-i\vartheta}$$

Infatti se te provi a fare $f(z) = T_b \circ I \circ D_\lambda \circ T_a(z)$ trovi esattamente una cosa della forma di f che ho scritto all'inizio. Nota che in questo caso trovi solo 3 parametri indipendenti che ti descrivono completamente la TLF.
altra cosa imprtante è che la composizione di TLF è ancora TLF (puoi provarlo facilmente) e quindi

$$f \in \text{TLF} \quad g \in \text{TLF}$$
$$f \circ g \in \text{TLF}$$
$$g \circ f \in \text{TLF}$$

che mi fa intuire che ci sarà uno spazio di 6 dimensioni in $\mathbb{R}$, o di 3 dimensioni in $\mathbb{C}$con una struttura di **gruppo**. Ossia ho un insieme dotato di un prodotto che non mi fa uscire dallo spazio, di un elemento identità che mi ridà l'elemento dell'insieme e un'operazione inversa che mi da l'identità.
Quando cerchi di calcolare l'inversa di una TLF puoi notare che se associ ad ogni trasformazione g_i una matrice G_i con i propri parametri vedi facilmente che

$$g_2 \circ g_1 \implies G_2 \cdot G_1$$

e quindi è evidente che hai un **isomorfismo tra gruppi**. Quindi hai

$$\text{TLF} \implies \text{matrici } 2 \times 2 \text{ invertibili } \det G \neq 0$$

il gruppo di quelle matrici è il **gruppo lineare** $GL(2, \mathbb{C})$. Per calcolare l'inversa di f puoi lavorare con le matrici che è più semplice, però facendo i conti

$$f(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \longrightarrow F = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

da Gal I trovi

$$F^{-1} = \frac{1}{\det F} \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} \Longrightarrow f^{-1}(w) = \frac{\delta w - \beta}{-\gamma w + \alpha}$$

però se guardi bene gli appunti presi in aula non sai bene che cosa chiedere al det della f iniziale, però individui il sottogruppo $SL(2, \mathbb{C})$ di $GL(2, \mathbb{C})$, che sono le matrici 2×2 con det $= 1$, quindi in questo caso hai $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, però rimane ancora il problema che data una matrice ho un'unica funzione, ma data una funzione non ho un'unica matrice, ma ce l'ho a meno di un segno, quindi posso costruire l'operazione quoziente e ottenere

$$\frac{SL(2, \mathbb{C})}{\mathbb{Z}_2} = PSL(2, \mathbb{C})$$

dove $\mathbb{Z}_2$ è un gruppo discreto $\{-1, 1\}$ la cui idea è che agisce su $SL(2, \mathbb{C})$ e mi da le matrici a meno del segno, e invece $PSL(2, \mathbb{C})$ è il **gruppo speciale lineare proiettivo**.
Tutto sto casino per trovare il vero isomorfismo

$$\text{TLF} \longleftrightarrow PSL(2, \mathbb{C})$$

IMPORTANTE la proprietà fondamentale delle TLF è che è una trasformazione univocamente determinata se conosco come vengono mappati 3 punti, ossia se conosco

$$(z_1, z_2, z_3) \longrightarrow (w_1, w_2, w_3)$$

A.2 T2 - Polidromia

Il concetto base qua è che le funzioni polidrome hanno il difetto di avere valori diversi in base al foglio di Riemann in cui ci si mette, ossia, prendono una certa fase in base al numero di giri che si fa attorno un punto di diramazione. Per determinare la polidromia per prima cosa devi specificare bene il foglio in cui ti trovi, quindi, definisci bene la variabile generale $\tilde{z} = |z|e^{i\theta}$ e poi espliciti il foglio in cui ti trovi definendo la variabile sul singolo foglio $z_n = \tilde{z}e^{2n\pi i} = |z|e^{i\theta}e^{2n\pi i}$, successivamente fai una scelta su dove mettere il taglio (ovviamente si deve fare una scelta che permetta di risolvere il problema), dopodiche butti dentro la tua $f(z)$ la z_n e cosi trovi un'espressione di $f_n(z)$. In base al numero di determinazioni della f_n puoi capire quanti fogli di

Riemann hai. La parte difficile in questi esercizi è se hai due pezzi polidromi moltiplicati o divisi, in cui conviene considerare bene separate le fasi e come variano in base a come ti muovi rispetto al taglio, vedi *esercizio 4* del foglio di tutoraggio. È buona cosa una volta scelto dove mettere il taglio di indicare come sono messi i vari angoli dei diversi punti di diramazione (solo al finito chiaramente) e che tipo di vincoli hanno, cosi da vedere meglio dove vengono mandati una volta che si gira attorno al punto ossia se per esempio $\theta \to \theta + 2\pi$ allora $z \to |z|e^{i\theta}e^{2\pi i}$ facendo un giro attorno al punto. Studiare la polidromia vuol dire, una volta determinata l'espressione di $f_n(z)$, vedere cosa succede quando fai un giro attorno ai punti di diramazione, cosi puoi determinare le indeterminazioni e quindi il numero di fogli di Riemann. N.B. girare attorno ad un punto e trovare $f_n(z) \to f_n(z)$ vuol dire che quel punto non è punto di diramazione. Se ti viene chiesto di calcolare il Res di una funzione polidroma devi controllare su quali fogli la f_n ha singolarità cercando una condizione su n (numero del foglio).

A.3 T3 - Integrali di funzioni polidrome

In questo tutoraggio devi risolvere integrali I in $\mathbb{R}$ fruttando integrali ausiliari J estesi in $\mathbb{C}$, l'unico inghippo è che sono di funzioni polidrome.

1. Vediamo un caso del tipo:

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^\alpha R(x) \mathrm{d}x \tag{A.3.1}$$

Con $R(x)$ funzione razionale. Ovviamente devi vedere le condizioni in cui l'integrale di partenza converga agli estremi di integrazione. Riscriviti la funzione con una varibile complessa $f(x) = f(z)$, ma ricordati che vuoi che valga l'uguaglianza quando sei su $\mathbb{R}$, quindi devi metterti sul foglio $n = 0$. Avendo una funzione polidroma devi mettere un taglio sul piano complesso, devi metterlo sul cammino di integrazione del tuo integrale di partenza (altrimenti non avrebbe senso tutto il procedimento), vedi la figura A.1. Puoi calcolare $\oint f(z)\mathrm{d}z$ sia come somma dei residui sia come somma di integrali di curve spezzate, ma nota che date le condizioni di convergenza agli estremi hai $\int_{C_\epsilon}$ e $\int_{C_R}$ che $\to 0$.

Quindi ora sei in una situazione in cui

$$J = \oint_{C_\gamma} f(z)\mathrm{d}z = I_+ + I_- = I + I_- = 2\pi i \sum Res\left[f(z)\right]_{z=z_0} \tag{A.3.2}$$

Dove I_+ e I_- sono gli integrali valutati sopra e sotto il taglio. Dove devi notare che l'integrale sopra il taglio I_+ è l'integrale di partenza stesso I. Ora,

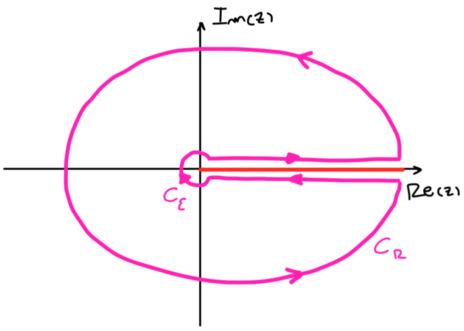


Figura A.1: Cammino di integrazione 1

calcolando com'è legato I_- con I e calcolando la somma dei residui puoi ricavarti l'integrale iniziale. Nel calcolare I_- ricorda che passando sotto il taglio la $f(z)$ prende un fattore di fase di 2π che se la funzione non è polidroma non cambia nulla, ma essendo sempre in casi di polidromia, ovviamente non è irrilevante, quindi calcoli $f_-(z)$ e riesci a legare I_- con I.

2. Vediamo il caso generale del tipo:

$$I(\alpha) = \int_a^b R(x)\mathrm{d}x$$

Con $R(x)$ funzione razionale. Controlli sempre che la funzione non faccia cose strane agli estremi di integrazione e come integrale ausiliario definisco:

$$J = \oint_{C_\gamma} \mathrm{d}z R(z) \log\left(\frac{z-a}{b-z}\right)$$

Se stai integrando tra $(0, +\infty)$ allora in J metti solo $\log z$. Il procedimento sostanzialmente è lo stesso che segui per il metodo **1**, quindi, metti il taglio lungo il cammino di integrazione (anche se la $R(x)$ non è polidroma aggiungento $\log z$ lo diventa), ti metti sul foglio 0 cosi da avere $f(z) = f(x)$, ti puoi scrivere la relazione A.3.2, valutando accuratamente chi sono f_+ ed f_- ricordando che sotto il taglio la funzione prende una fase di 2π e calcolando la somma dei residui concludi. Un'importante appunto è che se nell'integrale J compaiono delle potenze del log allora conviene ricordarsi che $\log^n(x) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} x^\alpha|_{\alpha=0}$ cosi si riesce a scrivere il proprio integrale in termini di derivate di $I(\alpha)$ di A.3.1.

3. Vediamo il caso del tipo:

$$I(\alpha) = \int_a^b \left(\frac{x-a}{b-x}\right)^\alpha Q(x)\mathrm{d}x$$

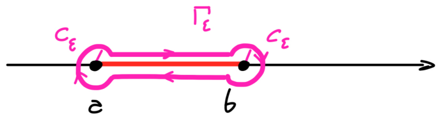


Figura A.2: Cammino di integrazione 3

Con $Q(x)$ funzione razionale. Come al solito vedi le condizioni di esistenza in cui la funzione non fa cose strane agli estremi. Puoi definire l'integrale ausiliario semplicemente come nel caso **1**, ossia, $J = \oint f(z)\mathrm{d}z$. Quindi avendo una funzione polindroma, esattamente come gli altri due casi, devo tagliare e lo metto tra i due estremi di integrazione vedi figura A.2.

Anche in questo caso grazie alla convergenza della funzione agli estremi hai che gli integrali su C_ϵ si cancellano. Ora, procedi come per gli altri due casi, ovvero, ti metti sul foglio 0, vedi i limiti sugli angoli dei punti di diramazione, ti studi già chi sono f_+ ed f_-, quindi studi la polidromia sopra e sotto il taglio e risolvendo un equazione del tipo A.3.2 riesci a concludere.

A.4 T6 - Sviluppi asintotici (metodo di Laplace)

Questo tipo di esercizi si risolvono sostanzialmente cercando sempre di ricondursi ad un integrale del tipo: $\int_a^b e^{tf(x)}g(x)\mathrm{d}x$ e poi applicando sviluppi noti. Il problema poi si sposta nel cercare un punto in cui la $f(x)$ è massima. Una volta individuato si sa dalla teoria che l'integrale, quando il parametro $t \to +\infty$, si localizza in quel punto. Trovato il massimo devo solo capire in quale dei due casi tra 5.3.1 oppure 5.3.2 mi trovo per poter usare lo sviluppo noto. Nota che nel caso dovessi sbagliare, ad esempio pensi di essere nel caso 5.3.1 invece che 5.3.2, te ne accorgi poiché è vero che in entrambi i casi consideri un punto di massimo, ma nel primo caso (non gaussiano), non per forza è anche un punto stazionario (sono diverse le ipotesi dei teoremi), quindi se facendo i conti ti ritrovi con una derivata prima non è nulla nel punto di massimo sicuramente sei nel primo, se invece $f' = 0$ conviene controllare bene se sei indeciso, ma disegnando non puoi sbagliare ;) , quindi cerca sempre di fare un grafico della funzione ad esponente cosi da individuare il punto di massimo e cominciare ad intuire se sei in un possibile caso gaussiano (occhio se la funzione è pari). N.B. se ti accorgi di essere nel caso 5.3.1, ma hai un massimo in $x = a$ con un integrale tra $[a, b]$, basta semplicemente fare un cambio di variabile del tipo $x - a$ e spostare il punto di massimo in $x = 0$; se, invece, hai un massimo assoluto in $x = b$ sempre integrando tra $[a, b]$ allora sempre con un cambio di variabile del tipo $b - x$ ti riporti al caso 5.3.1 semplice.

A.5 T7 - Sviluppi asintotici (metodo del punto a sella)

In questo tutoraggio devi sempre cercare il termine dominante di uno sviluppo asintotico (come hai fatto sostanzialmente nel **T6**). Sono tutti esercizi in cui hai sempre un integrale del tipo $\int_\gamma e^{sf(z)}g(z)\mathrm{d}z$ con γ curva nel piano $\mathbb{C}$ di z e vuoi svilupparlo quando $s \to \infty$. L'idea di questi esercizi è quella sempre di ricondurti ad avere un integrale gaussiano (modificando il cammino di integrazione γ) e poter utilizzare il teorema che porta alla formula 5.3.2.

Discorso teorico (discorso fatto bene negli appunti): formalmente devi sviluppare con Taylor la $f(z)$ in un punto z_0 di massimo ($f'(z_0) = 0$) per la funzione, cosi $f(z) = f(z_0) + \frac{1}{2}f''(z_0)(z-z_0)^2 + O((z-z_0)^3)$. Definisco $f''(z_0) = |f''(z_0)|e^{i\alpha}$ e $(z - z_0) = |z - z_0|e^{i\varphi}$. L'angolo φ è arbitrario essendo la fase di $z - z_0$, ossia, l'angolo con cui passo attraverso a z_0, quindi per risolvere bene il problema devo scegliere accuratamente chi è φ. Per avere qualcosa da integrare di tipo gaussiano devo avere un qualcosa nell'exp di negativo per una potenza di $(z - z_0)^2$, ossia ti serve $s\frac{1}{2}f''(z_0)(z-z_0)^2 = s\frac{1}{2}|f''(z_0)||z-z_0|^2e^{i(\alpha+2\varphi)} = -sAx^2 < 0$ dove $A = \frac{1}{2}|f''(z_0)|$, $x = |z - z_0|$ e quindi obbligatoriamente $-1 = e^{i(\alpha+2\varphi)} \implies \boxed{\varphi = \dfrac{\pi-\alpha}{2}}$. So che le funzioni analitiche hanno solo punti di sella, quindi z_0 è punto a sella e la condizione con cui lo devo attraversare, con la curva γ deformata, per arrivare ad ottenere un integrale gaussiano (ossia, con un pezzo $-Ax^2$) è quella riquadrata. Un secondo motivo per cui il cammino giusto da seguire è quello dato dal riquadro è che in generale posso sempre scrivere $e^{s\frac{1}{2}f''(z_0)(z-z_0)^2} = e^{\mathbb{R}}e^{i\mathbb{R}} = e^{\mathbb{R}}e^{\frac{i}{2}sIm(f''(z_0)(z-z_0)^2)}$ e in generale $e^{isIm(...)}$ è una semplice fase che se diversa da 1 mi darebbe contributo all'integrale del tipo $\int \mathrm{d}x f(x)e^{is\sin(\alpha x)}$ e il termine oscillante con $s \to \infty$ impazzirebbe e darebbe $\int ... = 0$, MA se mi metto nella condizione di massimo (il riquadro) allora ho $e^{isIm(...)} = 1$ poiché $Im(...) = 0$, quindi non da contributo. Concludendo posso supporre di essere in una zona particolarmente bella di $\mathbb{C}$ senza altri punti di sella, cosi dai teoremi del metodo di Laplace, posso estendere l'integrale a $(-\infty, +\infty)$ e posso cambiare variabile $z = z_0 + xe^{i\varphi}$ ($\mathrm{d}z = e^{i\varphi}\mathrm{d}x$) cosi posso utilizzare il teorema che porta alla formula 5.3.2, ovvero, la formula 5.4.1.

Torniamo a parlare di cose pratiche da fare. Dato un integrale inanzitutto individua chi sono $f(z)$ e $g(z)$, trova i possibili punti di sella e individua dove devi far passare il nuovo cammino di integrazione. Aiutati con un disegno. Scrivi $f''(z_0) = |f''(z_0)|e^{i\alpha}$ e individua chi è α cosi da poter calcolare la condizione sul φ, ovvero, con che angolo devi passare attraverso il punto a sella. Ora, hai concluso perché puoi cambiare $z - z_0 = xe^{i\varphi}$, estendere l'integrale tra $(-\infty, +\infty)$ cosi da trovarti nel caso gaussiano e poter utilizzare la formula 5.3.2 tenendo conto del cambio variabile (oppure direttamente la 5.4.1).

Riferimento ai testi

‡Riferimenti al libro "METODI MATEMATICI per la FISICA" di C. Rossetti È un libri di testo molto vasto e che copre altri corsi oltre questo, ma alcuni argomenti sono spiegati molto bene, anche se gli appunti presi a lezione sono quasi identici. (La numerazione dei capitoli è sbagliata).

Cap. - Argomento	**capitolo**
1. Mappe conformi e Continuazione analitica	Cap. I, par. 20
2. Funzioni Polidrome	Cap. I, par. 21
3. Integrali di funzioni polidrome	Cap. I, par. 22
4. Funzione Gamma di Eulero	/
5. Funzione Zeta di Riemann	/
6. Sviluppi asintotici	Cap. I, par. 20.1, 26.3, 27-28
7. Equazioni differenziali Fuchsiane	Cap. VIII, par. 5-7
8. Funzione Ipergeometrica	Cap. IX, par. 1
9. Funzione Ipergeometrica confluente	Cap. IX, par. 4-4.3,5-5.4

†Riferimenti alle dispense "Appunti dalle lezioni di METODI MATEMATICI DELLA FISICA II" di S. Sciuto Sono delle dispense rispetto cui le lezioni (e di conseguenza gli appunti) sono state fatte in modo *quasi ovunque uguali*, quindi magari vanno viste per piccole precisazioni, ma non più di tanto.

Cap. - Argomento	**capitolo**
01, 02 - Mappe conformi e Continuazione analitica	2.3, 2.4, 2.5
03 - Funzioni polidrome	2.6, 2.6.1
03.1 - Funzioni polidrome: il logaritmo	2.6.2, 2.6.3
03.2 - Studio di funzioni polidrome	2.6.4
03.3 - Funzioni polidrome: potenze	2.6.5
04.1, 04.2, 04.2.1 - Funzione Γ, funzione B, Relazioni di Γ usando B	2.5, 2.6.6
05 - Sviluppi asintotici	3.1, 3.2
05.1 - Proprietà serie asintotiche	3.3
05.3 - Sviluppi asintotici di integrali	3.4
05.3.1 - Metodo di Laplace	3.5
05.3.2 - Sviluppo asintotico di gamma con il metodo di Laplace	3.6

05.4 - Metodo del punto a sella	3.7
05.5 - Metodo della fase stazionaria	3.7.1
06.5.4 - Andamento asintotico delle funzioni di Bessel	3.7.1

◇**Riferimenti alle dispense "Lecture Notes on Mathematical Methods of Theoretical Physics" di G. Passarino** Non vengono indicati i singoli capitoli, ma le sezioni in modo generico e le pagine sono indicate rispetto le dispense prese per intero, ma ho separato le varie parti di interesse in pezzi singoli (pdf sul pc). Sono dispense forse eccessive per l'importanza e il livello di approfonodimento del corso, le ho trovate quasi confusionarie.

Cap. - Argomento	**capitolo**
03 - Funzioni polidrome	p.53-61 e 63-70 sup Riemann
04 - Funzione Gamma di Eulero	72-86
04 - Funzione Zeta di Riemann	101-116
06 - Funzione Ipergeometrica	195-236
06 - Funzione Ipergeometrica confluente	217-228, 232-233