

一、關於「臺灣省教育廳長」之職權  
 查「臺灣省教育廳長」之職權，係指「臺灣省教育廳」之行政首長而言，其職權範圍應以「臺灣省教育廳」之職掌為限。查「臺灣省教育廳」之職掌，係指「臺灣省」之教育行政事務，包括「臺灣省」之教育政策之擬定、教育經費之籌措、教育設施之改善、教育人員之培訓、教育品質之提升等事項。

1. 2019年12月31日，公司总资产为1,000,000,000.00元，归属于上市公司股东的净资产为500,000,000.00元，归属于上市公司股东的净利润为100,000,000.00元。

[illegible]
$$D, \quad M, \quad m,$$

$$S = \inf_M S(M)$$

$$S(M) = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m \prod_{k=1}^p \prod_{l=1}^q \prod_{m=1}^r \prod_{n=1}^s \prod_{o=1}^t \prod_{p=1}^u \prod_{q=1}^v \prod_{r=1}^w \prod_{s=1}^x \prod_{t=1}^y \prod_{u=1}^z \prod_{v=1}^{\infty} M.$$

$$S = \sup_m S(m)$$

$$S = S = S \quad D, \quad S, \quad S$$

$8'' > 0$   $M - D$   $M, S(M) \in \mathbb{N}$ .

1. 在  $\mathbb{R}^n$  中，设  $D$  是一个开集， $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  是一个实值函数。如果  $f$  在  $D$  上连续，那么  $f$  在  $D$  上的任意闭子集上也是连续的。

множества. Множество  $D$  — непустое, замкнутое, ограни-  
ченное. Множество  $D$  — выпуклое.

Пусть  $\Pi$  — произвольное разбиение отрезка  $[0, 1]$ .

Пусть  $Z$  — произвольное разбиение отрезка  $[0, 1]$ . Пусть  $f$  — непрерывная функция, определенная на  $D$ .

Пусть  $\Pi$  — произвольное разбиение отрезка  $[0, 1]$ . Пусть  $f$  — непрерывная функция, определенная на  $D$ .

- i.  $D$  — непустое, замкнутое, ограниченное;
- ii.  $f$  — непрерывная функция, определенная на  $D$ ;
- iii.  $f(x; y) > 0; (x; y) \in D$ ;
- iv. Пусть  $G$  — множество, определенное условиями:
  1.  $(x; y) \in D$ ;
  2.  $z = f(x; y)$ ;
  3.  $(x; y; z) \in G$ .

Пусть  $\Pi$  — произвольное разбиение отрезка  $[0, 1]$ .

$$G = \{(x; y; z) : (x; y) \in D; 0 \leq z \leq f(x; y)\}$$

Пусть  $\Pi$  — произвольное разбиение отрезка  $[0, 1]$ .

Пусть  $V(G)$  — множество вершин  $G$ .

Пусть  $D = \bigcup_{i=1}^n D_i$ ;  $i = \overline{1; n}$ , где  $D_i$  — непустое, замкнутое, ограниченное, выпуклое множество.

- i.  $D = \bigcup_{i=1}^n D_i$ ;
- ii.  $\text{int} D_i \cap \text{int} D_j = \emptyset$ ;  $i \neq j$ .

Пусть  $\text{int} M$  — внутренность множества  $M$ .

Пусть  $D_i$  — непустое, замкнутое, ограниченное, выпуклое множество;  $i = \overline{1; n}$ .

Пусть  $G$  — множество, определенное условиями:  $D_i$  — непустое, замкнутое, ограниченное, выпуклое множество;  $i = \overline{1; n}$ . Пусть  $M \subset V_i$ ,  $f(M_i) \subset S_i$ ,  $M \subset S_i$  — непустое, замкнутое, ограниченное, выпуклое множество. Пусть  $G$  — множество, определенное условиями:  $D_i$  — непустое, замкнутое, ограниченное, выпуклое множество;  $i = \overline{1; n}$ .

$$V(G) = \bigcup_{i=1}^n M \cup V_i \cup \bigcup_{i=1}^n f(M_i) \cup S_i$$

$\Pi$  — множество разбиений  $D$  на непересекающиеся замкнутые подмножества  $D_i$

$$V(G) = \lim_{\substack{\max \\ i=1;n} diam D_i \rightarrow 0} \bigotimes_{i=1}^n f(M_i) \otimes S_i$$

Пусть  $M$  — метрическое пространство

$$diam M = \sup_{P,Q \in M} |P-Q|$$

Пусть  $\mathcal{D}$  — разбиение  $D$  на непересекающиеся замкнутые подмножества  $D_i$

Пусть  $D$  — метрическое пространство  $Oxy$ .

Пусть  $D$  — метрическое пространство  $T = fD_1; \dots; D_n g$ .

i.  $D_i \subset D; i = \overline{1;n}$

ii.  $D = \bigcup_{i=1}^n D_i$

iii.  $int D_i \cap int D_j = \emptyset; i \neq j$ .

Пусть  $T$  — метрическое пространство

$$d(T) = \max_{i=\overline{1;n}} diam D_i$$

Пусть  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$  — непрерывная функция

Пусть  $D$  — метрическое пространство

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \lim_{d(T) \rightarrow 0} \bigotimes_{i=1}^n f(M_i) \otimes S_i$$

Пусть  $M_i \subset D_i; i = \overline{1;n}; M_i = S(D_i); i = \overline{1;n}; T = fD_1; \dots; D_n g$ .

Пусть  $M_i$  — метрическое пространство  $T$  — метрическое пространство  $D$

Вспомогательная функция  $f(x; y)$  задается на  $D$  следующим образом:

Пусть

$\Pi$  — разбиение области  $D$  относительно  $Oxy$ :

$f(x; y)$  — функция, определенная на  $\Pi$  и принимающая значения  $(x; y)$ .

Положим, что

на  $D$  заданы области  $D_i; i = \overline{1; n}$ , такие, что

$$D = \bigcup_{i=1}^n D_i$$

$$\text{int } D_i \cap \text{int } D_j = \emptyset; \quad i \neq j$$

тогда, в силу того, что  $D_i$  — области, лежащие в  $D$ , функция  $f(x; y)$  определена на  $D_i$ .  
Положим, что  $M_i$  — множество, лежащее в  $D_i$ .

$$M \ni m_i \rightarrow f(M_i) \in S_i$$

Пусть  $M_i \subset D_i$  — множество, такое, что  $M \ni S_i = S(D_i)$ .

Тогда

$$m = \bigcup_{i=1}^n M \ni m_i \rightarrow \bigcup_{i=1}^n f(M_i) \in S_i$$

Следовательно, для любого  $\varepsilon > 0$  найдется  $\delta > 0$  такое, что

$$m = \lim_{\max \text{diam } D_i \rightarrow 0} \bigcup_{i=1}^n f(M_i) \in S_i; \quad i = \overline{1; n}$$

Следовательно, для любого  $\varepsilon > 0$  найдется  $\delta > 0$  такое, что

если  $\max \text{diam } D_i < \delta$ , то  $\bigcup_{i=1}^n f(M_i) \in S_i$ .

Следовательно,

$$\iint_D (f + g) \, dx \, dy = \iint_D f \, dx \, dy + \iint_D g \, dx \, dy$$

$$\iint_D c f \, dx \, dy = c \iint_D f \, dx \, dy, \quad c = \text{const.}$$

2. Теорема о криволинейном интеграле.

Пусть

- 1.  $D = D_1 \cup D_2$ ,
- 2.  $\text{int } D_1 \cap \text{int } D_2 = \emptyset$ ,
- 3.  $f$  непрерывна на  $D_1$ ,
- 4.  $f$  непрерывна на  $D_2$ .

$$\iint_D f \, dx \, dy = \iint_{D_1} f \, dx \, dy + \iint_{D_2} f \, dx \, dy$$

3. Теорема о криволинейном интеграле по кривой.

Пусть

- 1.  $f(x, y) > 0$  на  $D$ ,
- 2.  $f$  непрерывна на  $D$ .

$$\iint_D f \, dx \, dy > 0.$$

4. Теорема о криволинейном интеграле по кривой.

Пусть  $f(x, y)$  — непрерывная функция, определенная на области  $D$ , и пусть  $\gamma(t)$  — кривая, лежащая в области  $D$ , и пусть  $\gamma'(t)$  — касательная к кривой в точке  $\gamma(t)$ .

Тогда криволинейный интеграл по кривой  $\gamma$  равен:

$$\int_D f \, dx \, dy = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) \, dt$$

и  $\mathcal{L}_1$  и  $\mathcal{L}_2$  являются  $\mathcal{L}_1$ - и  $\mathcal{L}_2$ -нормами.

Пусть

- $f, g$  — функции, определенные на  $D$ ;
- $m \leq f(x; y) \leq M$  на  $D$ ;
- $g(x; y) > 0$  на  $D$ .

Тогда

$$m \iint_D g(x; y) dx dy \leq \iint_D f(x; y) g(x; y) dx dy \leq M \iint_D g(x; y) dx dy$$

и, следовательно,  $\iint_D g(x; y) dx dy > 0$ , то

$$m \leq \frac{\iint_D f(x; y) g(x; y) dx dy}{\iint_D g(x; y) dx dy} \leq M$$

и  $S = \iint_D g(x; y) dx dy$ .

Таким образом, для функции  $f(x; y)$  на области  $D$  справедливы неравенства

и

- $f = \frac{1}{S} \iint_D f(x; y) g(x; y) dx dy$ ;
- $D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : g(x; y) > 0\}$ .

Пусть  $M_0 = \frac{1}{S} \iint_D f(x; y) g(x; y) dx dy$ , тогда

$$f(M_0) = \frac{1}{S} \iint_D f(x; y) g(x; y) dx dy$$

и  $S = \iint_D g(x; y) dx dy$ .

Таким образом, для функции  $f(x; y)$  на области  $D$  справедливы неравенства

и, следовательно,  $\iint_D g(x; y) dx dy > 0$ , то

и

- $f = \frac{1}{S} \iint_D f(x; y) g(x; y) dx dy$ ;

g — функция, определенная на D :

$g$  — функция, определенная на D :

$D$  — произвольная область.

Пусть  $M_0 \in D$ , тогда

$$\iint_D f(x; y) g(x; y) dx dy = f(M_0) \iint_D g(x; y) dx dy$$

Если  $g(x; y) = 1$ , то получим формулу для вычисления площади области  $D$ .

Пусть  $D$  — область, ограниченная кривыми  $y = y_1(x)$  и  $y = y_2(x)$  в промежутке  $x \in [a; b]$ .

Тогда  $D$  можно описать в координатах  $Oxy$  следующим образом:

$$D = \{ (x; y) : a \leq x \leq b; y_1(x) \leq y \leq y_2(x) \}$$

Тогда формула для вычисления площади области  $D$  примет вид:

Пусть  $I$  — площадь области  $D$ .

$$\iint_D f(x; y) dx dy = I$$

Тогда  $D$  можно описать в координатах  $Oxy$  следующим образом:

$$D = \{ (x; y) : a \leq x \leq b; y_1(x) \leq y \leq y_2(x) \}$$

$$\int_a^b \left( \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x; y) dy \right) dx = F(x)$$

Тогда

$$\int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x; y) dy = \int_a^b F(x) dx = I$$

Итак

$$I = \int_a^b F(x) dx$$

$$\int_a^b \int_{\gamma_1(x)}^{\gamma_2(x)} f(x; y) dy dx$$

$$\int_a^b F(x) dx$$

$$F(x) = \int_{\gamma_1(x)}^{\gamma_2(x)} f(x; y) dy; \quad x \in [a; b]$$

$$I = \iint_D f(x; y) dx dy$$

$$D_{xy} \text{ -- область определения функции } f(x; y).$$

$$D_{uv} \text{ -- область определения функции } f(u; v)$$

$$D_{uv} \text{ -- область определения функции } f(u; v)$$

$$D_{uv} \text{ -- область определения функции } f(u; v)$$

$$\begin{pmatrix} x = x(u; v) \\ y = y(u; v) \end{pmatrix}$$

$$D_{xy} = (D_{uv})_x$$



$$J = \begin{pmatrix} x_u^0 & x_v^0 \\ y_u^0 & y_v^0 \end{pmatrix} \in \mathbb{O}$$

$$f \quad \quad \quad D_{xy}.$$

$$\int\limits_{D_{xy}} f(x; y) \, dx \, dy = \int\limits_{D_{uv}} f(x(u; v); y(u; v)) \, J(u; v) \, du \, dv$$

$$I = \iint_{D_{xy}} f(x; y) \, dx \, dy = \iint_D f(\cos \theta; \sin \theta) \, d\theta \, d\rho$$

$$I = \int_{D_{xy}} f(x; y) \, dx \, dy = \int_D f(a \cos \theta; b \sin \theta) \, ab \, d\theta \, d\rho$$

$$x(u; v), y(u; v) \text{ — функции, задающие}$$
$$x_u^0, x_v^0, y_u^0, y_v^0$$

1. Пусть  $G$  — область в пространстве  $Oxyz$ , ограниченная поверхностями  $z = z_1(x, y)$  и  $z = z_2(x, y)$ , где  $z_1(x, y) \leq z_2(x, y)$ . Тогда объем  $V(G)$  области  $G$  вычисляется по формуле:

где  $D_{xy}$  — проекция области  $G$  на плоскость  $Oxy$ .

Докажем формулу (1). Рассмотрим элемент объема  $dV$  в области  $G$ . Его проекция на плоскость  $Oxy$  — элемент площади  $dS$  в области  $D_{xy}$ .

$$S(D) = \iint_D 1 \, dx \, dy$$

Рассмотрим элемент объема  $dV$  в области  $G$ . Его проекция на плоскость  $Oxy$  — элемент площади  $dS$  в области  $D_{xy}$ . Тогда

где  $dV$  — элемент объема,  $dS$  — элемент площади.

Интегрируя по области  $D_{xy}$ , получим:

- $G$  — область в пространстве  $Oxyz$ ;
- $G = \{(x, y, z) : (x, y) \in D_{xy}, z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\}$ .

$$V(G) = \iiint_G 1 \, dx \, dy \, dz$$

Интегрируя по  $z$  в пределах от  $z_1(x, y)$  до  $z_2(x, y)$ , получим:

$$V(G) = \iint_{D_{xy}} [z_2(x, y) - z_1(x, y)] \, dx \, dy$$

Теорема. Пусть  $G$  — область в пространстве  $Oxyz$ , ограниченная поверхностями  $z = z_1(x, y)$  и  $z = z_2(x, y)$ , где  $z_1(x, y) \leq z_2(x, y)$ . Тогда объем  $V(G)$  области  $G$  вычисляется по формуле (1).

$$V(G) = \lim_{\max \text{diam} D_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta S_i$$

где  $\Delta S_i$  — площадь элемента  $\Delta S_i$  в области  $D_{xy}$ .

Докажем формулу (2). Рассмотрим элемент объема  $dV$  в области  $G$ .

Интегрируя по области  $D_{xy}$ , получим:



Группа  $G$  называется **разложимой**, если

$$G = \bigcup_{i=1}^n G_i; \text{ int } G_i \cap \text{int } G_j = \emptyset, \quad i \neq j$$

Группа  $G$  называется **разложимой по мерзлотам**, если существуют мерзлоты  $M_i \subset G_i, i = \overline{1; n}$ , такие, что  $\bigcup_{i=1}^n M_i = G$ ,  $M_i \cap M_j = \emptyset, i \neq j$ , и  $M_i \cap G_j = \emptyset, i \neq j$ .  
 $(x; y; z) \in f(M_i), (x; y; z) \in G_i$ .

$$m(G_i) = (M_i) \cap V_i$$

$\bigcup_{i=1}^n M_i = G$ .

Группа  $G$  называется **разложимой по мерзлотам**, если

$$m(G) = \bigcup_{i=1}^n m(G_i) = \bigcup_{i=1}^n (M_i) \cap V_i$$

Группа  $G$  называется **разложимой по мерзлотам**, если существуют мерзлоты  $M_i \subset G_i, i = \overline{1; n}$ , такие, что  $\bigcup_{i=1}^n M_i = G$ ,  $M_i \cap M_j = \emptyset, i \neq j$ , и  $M_i \cap G_j = \emptyset, i \neq j$ .

$$m(G) = \lim_{\max_{i=1; n} \text{diam } G_i \rightarrow 0} \bigcup_{i=1}^n (M_i) \cap V_i$$

Группа  $G$  называется **разложимой по мерзлотам**, если

Группа  $G$  называется **разложимой по мерзлотам**, если существуют мерзлоты  $M_i \subset G_i, i = \overline{1; n}$ , такие, что  $\bigcup_{i=1}^n M_i = G$ ,  $M_i \cap M_j = \emptyset, i \neq j$ , и  $M_i \cap G_j = \emptyset, i \neq j$ .

$$f: G \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Группа  $G$  называется **разложимой по мерзлотам**, если

Группа  $G$  называется **разложимой по мерзлотам**, если существуют мерзлоты  $M_i \subset G_i, i = \overline{1; n}$ , такие, что  $\bigcup_{i=1}^n M_i = G$ ,  $M_i \cap M_j = \emptyset, i \neq j$ , и  $M_i \cap G_j = \emptyset, i \neq j$ .

Группа  $T = fG_1; \dots; G_n$  называется **разложимой по мерзлотам**, если

Группа  $T$  называется **разложимой по мерзлотам**, если существуют мерзлоты  $M_i \subset G_i, i = \overline{1; n}$ , такие, что  $\bigcup_{i=1}^n M_i = T$ ,  $M_i \cap M_j = \emptyset, i \neq j$ , и  $M_i \cap T_j = \emptyset, i \neq j$ .

$$\int_G f(x; y; z) dx dy dz = \lim_{d(T) \rightarrow 0} \bigcup_{i=1}^n \int_{M_i} f(M_i) \cap V_i$$

11. Пусть  $f$  — непрерывная функция на  $G$ ,  $G$  — область, ограниченная кривыми  $y = y_1(x)$ ,  $y = y_2(x)$ ,  $x = x_1$ ,  $x = x_2$ .

Пусть  $G$  — область, ограниченная кривыми  $y = y_1(x)$ ,  $y = y_2(x)$ ,  $x = x_1$ ,  $x = x_2$ .

Доказать, что

$$\iint_G (f(x, y) - g(x, y)) dx dy dz = \iint_G f(x, y) dx dy dz - \iint_G g(x, y) dx dy dz$$

$$\iint_G f(x, y) dx dy dz = c \iint_G f(x, y) dx dy dz, \quad c = \text{const}, \quad \iint_G f(x, y) dx dy dz = c \iint_G f(x, y) dx dy dz$$

Доказать, что

Пусть

$$G = G_1 \cup G_2, \\ \text{int } G_1 \cap \text{int } G_2 = \emptyset, \\ f \text{ — непрерывная функция на } G_1, \\ f \text{ — непрерывная функция на } G_2.$$

Доказать, что

$$\iint_G f(x, y) dx dy dz = \iint_{G_1} f(x, y) dx dy dz + \iint_{G_2} f(x, y) dx dy dz$$

Доказать, что

Пусть

$$f(x, y) > 0 \text{ на } G, \\ f \text{ — непрерывная функция на } G. \\ \iint_G f(x, y) dx dy dz > 0.$$

Доказать, что

1. 2019年12月31日，公司总资产为1,000,000,000.00元，归属于上市公司股东的净资产为500,000,000.00元，归属于上市公司股东的净利润为100,000,000.00元。

1

— **З** —











  $G$  —   $Oxyz$ ,   $\Pi$  

$$f: G \rightarrow \mathbb{C}$$

$$G = G_1 \amalg G_2 \amalg \cdots \amalg G_n, \quad i = \overline{1; n},$$

$$G_i = \langle x_i, y_i, z_i \mid x_i^2 = y_i^2 = z_i^2 = 1, x_i y_i = y_i x_i, x_i z_i = z_i x_i, y_i z_i = z_i y_i \rangle.$$
$$T = fG_1; \dots; G_n g - \prod_{i=1}^n G_i.$$
$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-x^2} dx = G(f)$$

$$\int_G f(x; y; z) \, dx \, dy \, dz = \lim_{d(T) \rightarrow 0} \prod_{i=1}^n f(M_i) \, \mu(V_i)$$

   $G$  —           $Oxyz.$

$\mathcal{G}$ 
 $\mathcal{Z}$

$$G = \{f(x; y; z) : (x; y) \in D_{xy}; z_1(x; y) \leq z \leq z_2(x; y)\}$$

$$D_{xy} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = I$$

Let  $G$  be a  $z$ -simple region in  $\mathbb{R}^3$  and let  $f(x; y; z)$  be a continuous function defined on  $G$ . Then

$$\int_{z_1(x; y)}^{z_2(x; y)} f(x; y; z) \, dz = F(x; y)$$

where

$F(x; y) = \int_{z_1(x; y)}^{z_2(x; y)} f(x; y; z) \, dz$

$$\iint_{D_{xy}} F(x; y) \, dx \, dy = \iiint_G f(x; y; z) \, dx \, dy \, dz = I$$

$$I = I_1 + I_2$$

where  $I_1$  and  $I_2$  are the volumes of the regions  $G_1$  and  $G_2$ .

Let  $D_{xy}$  be the projection of  $G$  on the  $xy$ -plane. Then

$$D = \{(x; y) : a \leq x \leq b; \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\}$$

and

$$\iiint_G f(x; y; z) \, dx \, dy \, dz = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \int_{z_1(x; y)}^{z_2(x; y)} f(x; y; z) \, dz \, dy \, dx$$

Proof. Let  $G$  be a  $z$ -simple region in  $\mathbb{R}^3$ . Then  $G$  can be written as the union of two regions  $G_1$  and  $G_2$  which are both  $z$ -simple. Let  $D_{xy}$  be the projection of  $G$  on the  $xy$ -plane. Then

$D_{xy} = D_1 \cup D_2$

$$G_{xyz} = (G_{uv})_! = \begin{cases} u = x(u; v; ! ) \\ v = y(u; v; ! ) \\ z = z(u; v; ! ) \end{cases}$$

where  $!$  is the Jacobian determinant

$$G_{uv} = (G_{uv})_!$$

where  $y$  is the Jacobian determinant

$$J = \begin{vmatrix} x_u^0 & x_v^0 & x_l^0 \\ y_u^0 & y_v^0 & y_l^0 \\ z_u^0 & z_v^0 & z_l^0 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow G_{uvl}$$

$$\int_{G_{xyz}} f(x; y; z) \, dx \, dy \, dz = \int_{G_{uvl}} f(x(u; v; l); y(u; v; l); z(u; v; l)) |J| \, du \, dv \, dl$$

$$\begin{aligned} x &= \cos \theta' \\ y &= \sin \theta' \\ z &= z \end{aligned}$$

$$\int_{G_{xyz}} f(x; y; z) \, dx \, dy \, dz = \int_{G_{\theta' z}} f(\cos \theta'; \sin \theta'; z) \, d\theta' \, dz$$

$$\begin{aligned} x &= \cos \theta \cos \theta' \\ y &= \cos \theta \sin \theta' \\ z &= z \sin \theta \end{aligned}$$

$$\int_{G_{xyz}} f(x; y; z) \, dx \, dy \, dz = \int_{G_{\theta \theta' z}} f(\cos \theta \cos \theta'; \cos \theta \sin \theta'; z \sin \theta) \sin \theta \, d\theta \, d\theta' \, dz$$