

Figure 1. The proposed model for the development of the self-concept of the self. The model illustrates the relationship between the self-concept of the self and the self-concept of the other. The self-concept of the self is defined as the individual's perception of their own characteristics and abilities. The self-concept of the other is defined as the individual's perception of the characteristics and abilities of others. The model suggests that the self-concept of the self is influenced by the self-concept of the other, and vice versa. The self-concept of the self is also influenced by the self-concept of the other's self-concept of the self. The self-concept of the other is also influenced by the self-concept of the other's self-concept of the other. The model is based on the theory of the self-concept of the self and the self-concept of the other.

4 $42 f < 6g.$ 6.

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. 20. 21. 22. 23. 24. 25. 26. 27. 28. 29. 30. 31. 32. 33. 34. 35. 36. 37. 38. 39. 40. 41. 42. 43. 44. 45. 46. 47. 48. 49. 50. 51. 52. 53. 54. 55. 56. 57. 58. 59. 60. 61. 62. 63. 64. 65. 66. 67. 68. 69. 70. 71. 72. 73. 74. 75. 76. 77. 78. 79. 80. 81. 82. 83. 84. 85. 86. 87. 88. 89. 90. 91. 92. 93. 94. 95. 96. 97. 98. 99. 100. 101. 102. 103. 104. 105. 106. 107. 108. 109. 110. 111. 112. 113. 114. 115. 116. 117. 118. 119. 120. 121. 122. 123. 124. 125. 126. 127. 128. 129. 130. 131. 132. 133. 134. 135. 136. 137. 138. 139. 140. 141. 142. 143. 144. 145. 146. 147. 148. 149. 150. 151. 152. 153. 154. 155. 156. 157. 158. 159. 160. 161. 162. 163. 164. 165. 166. 167. 168. 169. 170. 171. 172. 173. 174. 175. 176. 177. 178. 179. 180. 181. 182. 183. 184. 185. 186. 187. 188. 189. 190. 191. 192. 193. 194. 195. 196. 197. 198. 199. 200. 201. 202. 203. 204. 205. 206. 207. 208. 209. 210. 211. 212. 213. 214. 215. 216. 217. 218. 219. 220. 221. 222. 223. 224. 225. 226. 227. 228. 229. 230. 231. 232. 233. 234. 235. 236. 237. 238. 239. 240. 241. 242. 243. 244. 245. 246. 247. 248. 249. 250. 251. 252. 253. 254. 255. 256. 257. 258. 259. 260. 261. 262. 263. 264. 265. 266. 267. 268. 269. 270. 271. 272. 273. 274. 275. 276. 277. 278. 279. 280. 281. 282. 283. 284. 285. 286. 287. 288. 289. 290. 291. 292. 293. 294. 295. 296. 297. 298. 299. 300. 301. 302. 303. 304. 305. 306. 307. 308. 309. 310. 311. 312. 313. 314. 315. 316. 317. 318. 319. 320. 321. 322. 323. 324. 325. 326. 327. 328. 329. 330. 331. 332. 333. 334. 335. 336. 337. 338. 339. 340. 341. 342. 343. 344. 345. 346. 347. 348. 349. 350. 351. 352. 353. 354. 355. 356. 357. 358. 359. 360. 361. 362. 363. 364. 365. 366. 367. 368. 369. 370. 371. 372. 373. 374. 375. 376. 377. 378. 379. 380. 381. 382. 383. 384. 385. 386. 387. 388. 389. 390. 391. 392. 393. 394. 395. 396. 397. 398. 399. 400. 401. 402. 403. 404. 405. 406. 407. 408. 409. 410. 411. 412. 413. 414. 415. 416. 417. 418. 419. 420. 421. 422. 423. 424. 425. 426. 427. 428. 429. 430. 431. 432. 433. 434. 435. 436. 437. 438. 439. 440. 441. 442. 443. 444. 445. 446. 447. 448. 449. 450. 451. 452. 453. 454. 455. 456. 457. 458. 459. 460. 461. 462. 463. 464. 465. 466. 467. 468. 469. 470. 471. 472. 473. 474. 475. 476. 477. 478. 479. 480. 481. 482. 483. 484. 485. 486. 487. 488. 489. 490. 491. 492. 493. 494. 495. 496. 497. 498. 499. 500. 501. 502. 503. 504. 505. 506. 507. 508. 509. 510. 511. 512. 513. 514. 515. 516. 517. 518. 519. 520. 521. 522. 523. 524. 525. 526. 527. 528. 529. 530. 531. 532. 533. 534. 535. 536. 537. 538. 539. 540. 541. 542. 543. 544. 545. 546. 547. 548. 549. 550. 551. 552. 553. 554. 555. 556. 557. 558. 559. 560. 561. 562. 563. 564. 565. 566. 567. 568. 569. 570. 571. 572. 573. 574. 575. 576. 577. 578. 579. 580. 581. 582. 583. 584. 585. 586. 587. 588. 589. 590. 591. 592. 593. 594. 595. 596. 597. 598. 599. 600. 601. 602. 603. 604. 605. 606. 607. 608. 609. 610. 611. 612. 613. 614. 615. 616. 617. 618. 619. 620. 621. 622. 623. 624. 625. 626. 627. 628. 629. 630. 631. 632. 633. 634. 635. 636. 637. 638. 639. 640. 641. 642. 643. 644. 645. 646. 647. 648. 649. 650. 651. 652. 653. 654. 655. 656. 657. 658. 659. 660. 661. 662. 663. 664. 665. 666. 667. 668. 669. 670. 671. 672. 673. 674. 675. 676. 677. 678. 679. 680. 681. 682. 683. 684. 685. 686. 687. 688. 689. 690. 691. 692. 693. 694. 695. 696. 697. 698. 699. 700. 701. 702. 703. 704. 705. 706. 707. 708. 709. 710. 711. 712. 713. 714. 715. 716. 717. 718. 719. 720. 721. 722. 723. 724. 725. 726. 727. 728. 729. 730. 731. 732. 733. 734. 735. 736. 737. 738. 739. 740. 741. 742. 743. 744. 745. 746. 747. 748. 749. 750. 751. 752. 753. 754. 755. 756. 757. 758. 759. 760. 761. 762. 763. 764. 765. 766. 767. 768. 769. 770. 771. 772. 773. 774. 775. 776. 777. 778. 779. 780. 781. 782. 783. 784. 785. 786. 787. 788. 789. 790. 791. 792. 793. 794. 795. 796. 797. 798. 799. 800. 801. 802. 803. 804. 805. 806. 807. 808. 809. 810. 811. 812. 813. 814. 815. 816. 817. 818. 819. 820. 821. 822. 823. 824. 825. 826. 827. 828. 829. 830. 831. 832. 833. 834. 835. 836. 837. 838. 839. 840.

[illegible]
$$= f_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^{\beta_1 \dots \beta_n}; \quad g = \sum_{j_1, j_2, \dots, j_n} g_{j_1 j_2 \dots j_n}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}, \quad j_i = 2$$
[illegible]








Figure 1: A diagram illustrating the relationship between the sets A and B . The diagram shows two overlapping regions, A and B , with their intersection labeled $A \cap B$. The regions are defined by the sets A and B , and their intersection is labeled $A \cap B$.

[illegible]
$$A = f \quad g$$
[illegible]
$$\begin{array}{l}
 \text{Figure 1.1: } A \sqcup B = A + B; \\
 \text{Figure 1.2: } A \setminus B = A - B; \\
 \text{Figure 1.3: } A \cap B = A \cdot B; \\
 \text{Figure 1.4: } A \cup \overline{A} = 1 \text{ (the universal set).}
 \end{array}$$

$j = N < 1$

[illegible]

$$PfAg = \frac{N_A}{N}$$

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. 20. 21. 22. 23. 24. 25. 26. 27. 28. 29. 30. 31. 32. 33. 34. 35. 36. 37. 38. 39. 40. 41. 42. 43. 44. 45. 46. 47. 48. 49. 50. 51. 52. 53. 54. 55. 56. 57. 58. 59. 60. 61. 62. 63. 64. 65. 66. 67. 68. 69. 70. 71. 72. 73. 74. 75. 76. 77. 78. 79. 80. 81. 82. 83. 84. 85. 86. 87. 88. 89. 90. 91. 92. 93. 94. 95. 96. 97. 98. 99. 100. 101. 102. 103. 104. 105. 106. 107. 108. 109. 110. 111. 112. 113. 114. 115. 116. 117. 118. 119. 120. 121. 122. 123. 124. 125. 126. 127. 128. 129. 130. 131. 132. 133. 134. 135. 136. 137. 138. 139. 140. 141. 142. 143. 144. 145. 146. 147. 148. 149. 150. 151. 152. 153. 154. 155. 156. 157. 158. 159. 160. 161. 162. 163. 164. 165. 166. 167. 168. 169. 170. 171. 172. 173. 174. 175. 176. 177. 178. 179. 180. 181. 182. 183. 184. 185. 186. 187. 188. 189. 190. 191. 192. 193. 194. 195. 196. 197. 198. 199. 200. 201. 202. 203. 204. 205. 206. 207. 208. 209. 210. 211. 212. 213. 214. 215. 216. 217. 218. 219. 220. 221. 222. 223. 224. 225. 226. 227. 228. 229. 230. 231. 232. 233. 234. 235. 236. 237. 238. 239. 240. 241. 242. 243. 244. 245. 246. 247. 248. 249. 250. 251. 252. 253. 254. 255. 256. 257. 258. 259. 260. 261. 262. 263. 264. 265. 266. 267. 268. 269. 270. 271. 272. 273. 274. 275. 276. 277. 278. 279. 280. 281. 282. 283. 284. 285. 286. 287. 288. 289. 290. 291. 292. 293. 294. 295. 296. 297. 298. 299. 300. 301. 302. 303. 304. 305. 306. 307. 308. 309. 310. 311. 312. 313. 314. 315. 316. 317. 318. 319. 320. 321. 322. 323. 324. 325. 326. 327. 328. 329. 330. 331. 332. 333. 334. 335. 336. 337. 338. 339. 340. 341. 342. 343. 344. 345. 346. 347. 348. 349. 350. 351. 352. 353. 354. 355. 356. 357. 358. 359. 360. 361. 362. 363. 364. 365. 366. 367. 368. 369. 370. 371. 372. 373. 374. 375. 376. 377. 378. 379. 380. 381. 382. 383. 384. 385. 386. 387. 388. 389. 390. 391. 392. 393. 394. 395. 396. 397. 398. 399. 400. 401. 402. 403. 404. 405. 406. 407. 408. 409. 410. 411. 412. 413. 414. 415. 416. 417. 418. 419. 420. 421. 422. 423. 424. 425. 426. 427. 428. 429. 430. 431. 432. 433. 434. 435. 436. 437. 438. 439. 440. 441. 442. 443. 444. 445. 446. 447. 448. 449. 450. 451. 452. 453. 454. 455. 456. 457. 458. 459. 460. 461. 462. 463. 464. 465. 466. 467. 468. 469. 470. 471. 472. 473. 474. 475. 476. 477. 478. 479. 480. 481. 482. 483. 484. 485. 486. 487. 488. 489. 490. 491. 492. 493. 494. 495. 496. 497. 498. 499. 500. 501. 502. 503. 504. 505. 506. 507. 508. 509. 510. 511. 512. 513. 514. 515. 516. 517. 518. 519. 520. 521. 522. 523. 524. 525. 526. 527. 528. 529. 530. 531. 532. 533. 534. 535. 536. 537. 538. 539. 540. 541. 542. 543. 544. 545. 546. 547. 548. 549. 550. 551. 552. 553. 554. 555. 556. 557. 558. 559. 560. 561. 562. 563. 564. 565. 566. 567. 568. 569. 570. 571. 572. 573. 574. 575. 576. 577. 578. 579. 580. 581. 582. 583. 584. 585. 586. 587. 588. 589. 590. 591. 592. 593. 594. 595. 596. 597. 598. 599. 600. 601. 602. 603. 604. 605. 606. 607. 608. 609. 610. 611. 612. 613. 614. 615. 616. 617. 618. 619. 620. 621. 622. 623. 624. 625. 626. 627. 628. 629. 630. 631. 632. 633. 634. 635. 636. 637. 638. 639. 640. 641. 642. 643. 644. 645. 646. 647. 648. 649. 650. 651. 652. 653. 654. 655. 656. 657. 658. 659. 660. 661. 662. 663. 664. 665. 666. 667. 668. 669. 670. 671. 672. 673. 674. 675. 676. 677. 678. 679. 680. 681. 682. 683. 684. 685. 686. 687. 688. 689. 690. 691. 692. 693. 694. 695. 696. 697. 698. 699. 700. 701. 702. 703. 704. 705. 706. 707. 708. 709. 710. 711. 712. 713. 714. 715. 716. 717. 718. 719. 720. 721. 722. 723. 724. 725. 726. 727. 728. 729. 730. 731. 732. 733. 734. 735. 736. 737. 738. 739. 740. 741. 742. 743. 744. 745. 746. 747. 748. 749. 750. 751. 752. 753. 754. 755. 756. 757. 758. 759. 760. 761. 762. 763. 764. 765. 766. 767. 768. 769. 770. 771. 772. 773. 774. 775. 776. 777. 778. 779. 780. 781. 782. 783. 784. 785. 786. 787. 788. 789. 790. 791. 792. 793. 794. 795. 796. 797. 798. 799. 800. 801. 802. 803. 804. 805. 806. 807. 808. 809. 810. 811. 812. 813. 814. 815. 816. 817. 818. 819. 820. 821. 822. 823. 824. 825. 826. 827. 828. 829. 830. 831. 832. 833. 834. 835. 836. 837. 838. 839. 840.

1. $P(A) > 0$

2. $P(\emptyset) = 0$

$x < 7$, $x \geq 6$, $x > 6$, $x \leq 7$

1. Пусть A, B — несовместные события, т.е. $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

Решение. Пусть N — общее число исходов, N_A — число исходов, благоприятствующих событию A .

1. Пусть $N_A > 0, N > 0$, тогда $P(A) = \frac{N_A}{N} > 0$.

2. Пусть $N = j, j = N$, тогда $P(A) = \frac{N_A}{N} = 1$.

$$P(A) = \frac{N_A}{N} = \frac{N}{N} = 1$$

3. Пусть A, B — совместные события, т.е. $P(A + B) < P(A) + P(B)$. Тогда $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

$$jA + Bj = jAj + jBj - jABj$$

4. Пусть A, B — совместные события, т.е. $AB = \emptyset$, тогда $N_{A+B} = N_A + N_B$.

$$P(A + B) = \frac{N_{A+B}}{N} = \frac{N_A + N_B}{N} = \frac{N_A}{N} + \frac{N_B}{N} = P(A) + P(B)$$

5. Пусть A, B — совместные события, т.е. $AB \neq \emptyset$. Тогда $N_{A+B} = N_A + N_B - N_{AB}$.

6. Пусть A, B — совместные события, т.е. $AB \neq \emptyset$. Тогда $N_{A+B} = N_A + N_B - N_{AB}$.

7. Пусть A, B — совместные события, т.е. $AB \neq \emptyset$. Тогда $N_{A+B} = N_A + N_B - N_{AB}$.

8. Пусть A, B — совместные события, т.е. $AB \neq \emptyset$. Тогда $N_{A+B} = N_A + N_B - N_{AB}$.

9. Пусть A, B — совместные события, т.е. $AB \neq \emptyset$. Тогда $N_{A+B} = N_A + N_B - N_{AB}$.

10. Пусть A, B — совместные события, т.е. $AB \neq \emptyset$. Тогда $N_{A+B} = N_A + N_B - N_{AB}$.

11. Пусть A, B — совместные события, т.е. $AB \neq \emptyset$. Тогда $N_{A+B} = N_A + N_B - N_{AB}$.

12. Пусть A, B — совместные события, т.е. $AB \neq \emptyset$. Тогда $N_{A+B} = N_A + N_B - N_{AB}$.

Пусть \mathcal{A} — семейство подмножеств Ω . Тогда \mathcal{A} называется σ -алгеброй, если:

1. $\Omega \in \mathcal{A}$.
2. Если $A \in \mathcal{A}$, то $A^c \in \mathcal{A}$.
3. Если $\{A_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$, то $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$.

Если \mathcal{A} — σ -алгебра, то \mathcal{A} называется σ -алгеброй событий. Если \mathcal{A} — σ -алгебра, то \mathcal{A} называется σ -алгеброй событий. Если \mathcal{A} — σ -алгебра, то \mathcal{A} называется σ -алгеброй событий.

Пусть \mathcal{A} — σ -алгебра. Тогда \mathcal{A} называется σ -алгеброй событий. Если \mathcal{A} — σ -алгебра, то \mathcal{A} называется σ -алгеброй событий.

Пусть \mathcal{A} — σ -алгебра.

Пусть \mathcal{A} — σ -алгебра. Тогда \mathcal{A} называется σ -алгеброй событий.

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Пусть \mathcal{A} — σ -алгебра. Тогда \mathcal{A} называется σ -алгеброй событий.

Пусть \mathcal{A} — σ -алгебра. Тогда \mathcal{A} называется σ -алгеброй событий.

Пусть \mathcal{A} — σ -алгебра. Тогда \mathcal{A} называется σ -алгеброй событий.

Пусть \mathcal{A} — σ -алгебра. Тогда \mathcal{A} называется σ -алгеброй событий.

Пусть \mathcal{A} — σ -алгебра. Тогда \mathcal{A} называется σ -алгеброй событий.

Пусть \mathcal{A} — σ -алгебра. Тогда \mathcal{A} называется σ -алгеброй событий.

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_A}{n}$$

Пусть \mathcal{A} — σ -алгебра. Тогда \mathcal{A} называется σ -алгеброй событий.



- $$\begin{aligned} & \vdash 2 \vdash \\ & \vdash ; 2 \vdash \\ & \vdash \Pi A_1, \dots, A_n, \dots 2, \Pi A_1 \dots A_n \dots 2 \vdash \\ & \vdash \Pi A; B 2 \vdash \Pi A \cap B 2 \end{aligned}$$

- [illegible]

Figure 1 is a schematic representation of the experimental design. It shows a sequence of events: 'Stimulus presentation' (a list of words), 'Response' (a button press), 'Feedback' (a green or red light), and 'Inter-trial interval' (a fixation cross). The sequence is repeated for multiple trials.

- Figure 1. The effect of the number of iterations on the accuracy of the proposed algorithm. The figure shows two plots. The top plot shows the accuracy of the proposed algorithm (in %) versus the number of iterations (from 0 to 100). The accuracy starts at approximately 95% and increases to about 98% after 100 iterations. The bottom plot shows the accuracy of the proposed algorithm (in %) versus the number of iterations (from 0 to 100). The accuracy starts at approximately 95% and increases to about 98% after 100 iterations.



































$$P: \quad / \quad R$$

| Year | Number of publications |
|------|------------------------|
| 1980 | 10 |
| 1981 | 15 |
| 1982 | 20 |
| 1983 | 25 |
| 1984 | 30 |
| 1985 | 35 |
| 1986 | 40 |
| 1987 | 45 |
| 1988 | 50 |
| 1989 | 55 |
| 1990 | 60 |
| 1991 | 65 |
| 1992 | 70 |
| 1993 | 75 |
| 1994 | 80 |
| 1995 | 85 |
| 1996 | 90 |
| 1997 | 95 |
| 1998 | 100 |
| 1999 | 105 |
| 2000 | 110 |
| 2001 | 115 |
| 2002 | 120 |
| 2003 | 125 |
| 2004 | 130 |
| 2005 | 135 |
| 2006 | 140 |
| 2007 | 145 |
| 2008 | 150 |
| 2009 | 155 |
| 2010 | 160 |

- $8A \geq 2 \Rightarrow P(A) > 0$
- $P(\emptyset) = 1$

A_1, \dots, A_n, \dots — независимые события, тогда —
 $P(A_1 + \dots + A_n + \dots) = P(A_1) + \dots + P(A_n) + \dots$

1. Пусть $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность независимых событий, тогда —
 $P(A_1 + \dots + A_n + \dots) = P(A_1) + \dots + P(A_n) + \dots$

2. Пусть $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность независимых событий, тогда —
 $P(A_1 + \dots + A_n + \dots) = P(A_1) + \dots + P(A_n) + \dots$

3. Пусть $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность независимых событий, тогда —
 $P(A_1 + \dots + A_n + \dots) = P(A_1) + \dots + P(A_n) + \dots$

4. Пусть $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность независимых событий, тогда —
 $P(A_1 + \dots + A_n + \dots) = P(A_1) + \dots + P(A_n) + \dots$

5. Пусть $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность независимых событий, тогда —
 $P(A_1 + \dots + A_n + \dots) = P(A_1) + \dots + P(A_n) + \dots$

6. Пусть $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность независимых событий, тогда —
 $P(A_1 + \dots + A_n + \dots) = P(A_1) + \dots + P(A_n) + \dots$

$$= f^{(1)}; \dots; g^{(j)}; \dots; g^{(j)}; j = 2$$

$$= f^{(1)}; \dots; g^{(j)}; \dots; g^{(j)}; j = 6$$

7. Пусть $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность независимых событий, тогда —
 $P(A_1 + \dots + A_n + \dots) = P(A_1) + \dots + P(A_n) + \dots$

$$\in; \dots$$

8. Пусть $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность независимых событий, тогда —
 $P(A_1 + \dots + A_n + \dots) = P(A_1) + \dots + P(A_n) + \dots$

$$A_2, \bar{A}_2$$

9. Пусть $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность независимых событий, тогда —
 $P(A_1 + \dots + A_n + \dots) = P(A_1) + \dots + P(A_n) + \dots$

$$A, A_2, \dots$$

10. Пусть $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность независимых событий, тогда —
 $P(A_1 + \dots + A_n + \dots) = P(A_1) + \dots + P(A_n) + \dots$

$$A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}, \quad A_1 + \dots + A_n \in \mathcal{A}.$$

— \mathcal{A} — σ -алгебра.

— \mathcal{A} — σ -алгебра.

— \mathcal{A} — σ -алгебра, \mathcal{B} — σ -алгебра, \mathcal{C} — σ -алгебра.

— \mathcal{A} — σ -алгебра, \mathcal{B} — σ -алгебра.

$$P: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$P(A) \geq 0$$

$$P(\Omega) = 1$$

$$P(A_1 + \dots + A_n) = P(A_1) + \dots + P(A_n)$$

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

$$P(\emptyset) = 0$$

$$A \subset B, \quad P(A) \leq P(B)$$

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB), \quad A, B \in \mathcal{A}$$

$$A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$$

$$P(A_1 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) - P(A_1 A_2) - \dots - P(A_1 A_2 A_3) - \dots - P(A_1 A_2 A_3 A_4) - \dots$$

1. $P(A + \bar{A}) = 1 = P(A) + P(\bar{A}) = 1 \Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

2. $P(\emptyset) = P(\bar{\Omega}) = 0$.

3. $A \cup B = A + (B \cap A)$

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A + (B \cap A)) = \\ &= P(A) + P(B \cap A) > P(A) \\ \Rightarrow P(B) &> P(A) \end{aligned}$$

4. $P(A) > 0$ and $P(A) \leq 1$.

$$P(A) \leq P(\Omega) = 1 \Rightarrow P(A) \leq 1$$

5. A, B

$$A + B = A + (B \cap A)$$

$$P(A + (B \cap A)) =$$

$$P(A + B) = P(A) + P(B \cap A)$$

$$B = AB + (B \cap A)^c,$$

$$P(B) = P(AB) + P(B \cap A)^c,$$

$$P((AB)(B \cap A)^c) = 0.$$

$$P(B) = P(AB) + P(B \cap A)^c \Rightarrow P(B \cap A)^c = P(B) - P(AB).$$

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

1. $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ — A и B независимы. Тогда $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

2. $P(A \cap B) > P(A)P(B)$ — A и B зависимы. Тогда $P(A \cap B) > P(A)P(B)$.

3. $P(A \cap B) < P(A)P(B)$ — A и B зависимы. Тогда $P(A \cap B) < P(A)P(B)$.

4. A и B — несовместные события, тогда $P(A \cap B) = 0$.

5. $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ — A и B независимы.

6. $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ — A и B независимы.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}; P(B) \neq 0$$

7. $P(A|B) = P(A)$ — A и B независимы.

8. $P(A|B) > P(A)$ — A и B зависимы.

9. $P(A|B) < P(A)$ — A и B зависимы.

10. $P(A|B) = P(A)$ — A и B независимы.

11. $P(A|B) = P(A)$ — A и B независимы.

12. $P(A|B) = P(A)$ — A и B независимы.

$$P(A|B)$$

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \quad \Rightarrow \quad P(A|B) > 0.$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1.$$

$$P(A_1 + \dots + A_n + \dots | B) = \frac{P((A_1 + \dots + A_n + \dots)B)}{P(B)} =$$

$$= \frac{1}{P(B)} P(A_1B + A_2B + \dots + A_nB + \dots) =$$

$$A_i|A_j \text{ не зависит от } j, i \neq j; A_iB \cap A_jB = A_jB \Rightarrow (A_iB) \setminus (A_jB) = \emptyset,$$

$$= \frac{1}{P(B)} [P(A_1B) + \dots + P(A_nB) + \dots] =$$

$$= \frac{P(A_1B)}{P(B)} + \dots + \frac{P(A_nB)}{P(B)} + \dots =$$

$$= P(A_1|B) + \dots + P(A_n|B) + \dots$$

Вспомогательная лемма. Пусть \mathcal{A} — разбиение пространства Ω на непересекающиеся события A_1, A_2, \dots, A_n , где $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$. Тогда для любого события B из \mathcal{A} справедливо:

Доказательство. Рассмотрим событие $A_i B$. Поскольку A_i и B принадлежат к одному и тому же разбиению, то $A_i B = A_i$ или $A_i B = \emptyset$. В первом случае $P(A_i B) = P(A_i)$, во втором — $P(A_i B) = 0$. Следовательно, $P(A_i B) = P(A_i) \cdot P(B)$.

□

1. Если $A \subset B$, то $P(A|B) = P(A)/P(B)$.

Доказательство. Поскольку $A \subset B$, то $A \cap B = A$. По формуле Байеса имеем:

Следовательно, $P(A|B) = P(A)/P(B)$.

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}; \quad P(B) \neq 0$$

Здесь $P(A|B)$ — условная вероятность события A при условии события B .

1. A, B — независимы;

2. $P(A) > 0$.

$$P(AB) = P(A)P(B|A)$$

Поэтому, если $P(A) > 0$, то справедливо равенство

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

$$P(AB) = P(A)P(B|A)$$

1. A_1, \dots, A_n — независимы;

2. $P(A_1 \dots A_{n-1}) > 0$.

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 A_2) \dots P(A_n|A_1 \dots A_{n-1})$$

1. Пусть $k = \overline{1; n-1}$, $A_1 \dots A_k A_1 \dots A_{n-1}$.

$$P(A_1 \dots A_k) > P(A_1 \dots A_{n-1}) > 0.$$

$$P(A_n|A_1 A_2 \dots A_{n-1}),$$

Пусть A и B — события, причём $A \subset B$. Тогда $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$. Если A и B независимы, то $P(AB) = P(A)P(B)$. В этом случае $P(A|B) = P(A)$.

Пусть A и B — события, причём $A \subset B$. Тогда $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$. Если A и B независимы, то $P(AB) = P(A)P(B)$. В этом случае $P(A|B) = P(A)$.

Пусть $P(B) > 0$.

Пусть A и B — события, причём $A \subset B$. Тогда $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$. Если A и B независимы, то $P(AB) = P(A)P(B)$. В этом случае $P(A|B) = P(A)$.

Пусть $P(A) > 0$.

Пусть A и B — события, причём $A \subset B$. Тогда $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$. Если A и B независимы, то $P(AB) = P(A)P(B)$. В этом случае $P(B|A) = P(B)$.

Пусть $P(A) > 0$.

Пусть A и B — события, причём $A \subset B$. Тогда $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$. Если A и B независимы, то $P(AB) = P(A)P(B)$. В этом случае $P(A|B) = P(A)$.

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A)$$

Пусть $P(A) > 0$.

Пусть A и B — события, причём $A \subset B$. Тогда $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$. Если A и B независимы, то $P(AB) = P(A)P(B)$. В этом случае $P(A|B) = P(A)$.

$$P(AB) = P(B)P(A|B) = P(B)P(A)$$

Пусть $P(A) > 0$.

Пусть A_1, \dots, A_n — события, причём $A_i \subset A_j$ для $i < j$. Тогда $P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1) \dots P(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$.

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1) \dots P(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

Пусть A_1, \dots, A_n — события, причём $A_i \subset A_j$ для $i < j$. Тогда $P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1) \dots P(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$.

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1) \dots P(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

$$H_1 + \dots + H_n = \Omega$$

$$H_1, \dots, H_n \text{ -- mutually exclusive events}$$

$$A^2 = \Omega$$

$$P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + \dots + P(A|H_n)P(H_n)$$

$$A = A^{H_1 + \dots + H_n} \quad (H_1 + \dots + H_n) = AH_1 + \dots + AH_n.$$

$$i \neq j: H_i \neq H_j, \quad (AH_i) \cap (AH_j) = \emptyset \quad (AH_i)(AH_j) = 0, \quad \dots, AH_i \text{ -- mutually exclusive events.}$$

$$\begin{aligned} P(A) &= P(AH_1 + \dots + AH_n) = \\ &= P(AH_1) + \dots + P(AH_n) = \\ &= P(H_i) > 0; \quad P(AH_i) = P(H_i)P(A|H_i) \\ &= P(A|H_1)P(H_1) + \dots + P(A|H_n)P(H_n) \end{aligned}$$

$$H_1, \dots, H_n \text{ -- mutually exclusive events}$$

$$P(A) > 0.$$

$$P(H_i|A) = \frac{P(A|H_i)P(H_i)}{P(A|H_1)P(H_1) + \dots + P(A|H_n)P(H_n)}; \quad i = \overline{1; n}$$

$$\begin{aligned} P(H_i|A) &= \frac{P(AH_i)}{P(A)} = \\ &= P(H_i|A) = \frac{P(A|H_i)P(H_i)}{P(A|H_1)P(H_1) + \dots + P(A|H_n)P(H_n)}; \quad i = \overline{1; n} \end{aligned}$$

$$P(H_i), i = \overline{1; n} \quad \text{и} \quad P(H_{ij}A), i = \overline{1; n}$$

$\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n) = \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$

[illegible][illegible]
$$p. \quad P_n(k) \quad n, \quad n$$

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$











$$x_i = \begin{pmatrix} (x_1, \dots, x_n), \\ 1, \\ 0, \end{pmatrix}$$

$$A = f \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{1}{t} dt \right) + g$$

$$A \quad \quad \quad k \quad \quad \quad n \quad k$$

A as k and n .

k - n - C_n^k .
 $X_{i_1} \dots X_{i_k} = p^k q^{n-k}$.

A ,
 C_n^k ,

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

n -
 p , k_1 , k_2 :

$$P_n(k_1 \leq k \leq k_2) = \sum_{i=k_1}^{k_2} C_n^i p^i q^{n-i}$$

A .

f , g :

$$A_i = f \dots g; i = \overline{k_1; k_2}$$

$$P(A_i) = P_n(i) = C_n^i p^i q^{n-i}$$

A :

$$A = A_{k_1} + A_{k_1+1} + \dots + A_{k_2} = P_n(k_1 \leq k \leq k_2)$$

$$=)$$

$$P(A) = (A_{k_1} + \dots + A_{k_2}) \overset{A_i}{=} \overset{A_j}{=} \overset{i \in j}{=} P(A_{k_1}) + \dots + P(A_{k_2}) =$$

$$= \sum_{i=k_1}^{k_2} P(A_i) = \sum_{i=k_1}^{k_2} C_n^i p^i q^{n-i}$$

p , $q = 1 - p$, $P_n(k > 1) = 1 - q^n$.

$A = f \dots g$.
 $\overline{A} = f \dots g$,

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - P_n(0) = 1 - C_0^0 p^0 q^{n-0} = 1 - q^n$$

A , \overline{A} :

A , \overline{A} :
 A , \overline{A} :
 A , \overline{A} :

$(; ; P)$ - Π -

A .

$X: \mathbb{R}$
$$f! : X(!) \rightarrow \mathcal{X}g \rightarrow \mathcal{X}$$

\mathbb{R}^n 上 n 个 1 元函数 f_1, \dots, f_n 的乘积 $f_1 \cdots f_n$ 在 \mathbb{R}^n 上可积，且

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_1 \cdots f_n = \prod_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}} f_i.$$















$$F_x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$F_X(x) = P\{X \leq x\}$$

$$0 \leq F(x) \leq 1;$$
$$F \sqsubseteq_{\text{H}} F(x_1) \sqsubseteq_{\text{H}} F(x_2); \quad x_1 \sqsubseteq_{\text{H}} x_2, \quad F(x_1) \sqsubseteq_{\text{H}} F(x_2);$$
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = F(x_0);$$
$$. Pfa \in X < bq = F(b) \quad F(a).$$
$$F(x) = P f \circ g \in [0; 1].$$
$$F_X(x) = P\{X \leq x\} = \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$
$$F_X = PfX \leq xg, \quad F_Y = PfgY \leq yg.$$

• $x_1 \leq x_2$, то $F(x_2) =$

$$F(x_2) = P\{X \leq x_2\} = P\left\{\underbrace{X \leq x_1}_A\right\} + P\left\{\underbrace{x_1 < X \leq x_2}_B\right\}$$

то $A \subset B$, то

$$F(x_2) = \underbrace{P\{X \leq x_1\}}_{F(x_1)} + \underbrace{P\{x_1 < X \leq x_2\}}_{>0} > F(x_1)$$

то $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$:

Рассмотрим последовательность x_1, x_2, x_3, \dots , то

$$x_1 < x_2 < x_3 < \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty.$$

тогда $A_n = \{X \leq x_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, то $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset A_{n+1} \subset \dots$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P\left\{\underbrace{X \leq +\infty}_\Omega\right\} = 1$.

то $x_1, x_2, \dots \rightarrow +\infty$, то $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$$

то $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, то

то $x_1, x_2, \dots \rightarrow -\infty$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$.

то $A_i = \{X \leq x_i\}$, $i \in \mathbb{N}$.

$$\{X \leq x_n\} = \bigcup_{i=1}^n A_i$$

то A_1, A_2, \dots —

то $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ — $\{X \leq x_n\}$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = P(A) = 1$.

$$f(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f \in L^1(\mathbb{R}) \quad F(x) = \int_1^x f(t) dt \quad F \in C^1(\mathbb{R}) \quad F'(x) = f(x).$$

$$X.$$

$$P(a \leq X < b) = \int_a^b f(x) dx$$

$$X \sim \text{Exp}(\lambda) \quad f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad x \geq 0$$

$$\int_1^{\infty} f(x) dx = 1$$

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad x \geq 0$$

$$P(X \leq x_0 + \Delta x) - P(X \leq x_0) = \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} f(x) dx$$

$$X \sim \text{Exp}(\lambda) \quad f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad x \geq 0 \quad X_0 = 0$$

$$P(X = x_0) = 0$$

$$f(x) = F'(x) \geq 0.$$

$$P(a \leq X < b) = P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx.$$

$$PfX \in X < bg = F(b) - F(a)$$

1. $F = \int_a^x f(t) dt$, then $F(b) - F(a) = \int_a^b f(t) dt$

$$PfX \in X < bg = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_1^{x_1} f(x) dx = \lim_{x_1 \rightarrow 1} \int_1^{x_2} f(x) dx = \lim_{x_2 \rightarrow 1} F(x_2) - \lim_{x_1 \rightarrow 1} F(x_1) = F(1) - F(1) = 0$$

$$PfX_0 \in X < x_0 + Mxg = F(x_0 + Mx) - F(x_0)$$

1. $x_0 = 1$, $Mx = 1$, $f(x) = 1$, $F(x) = x$, $F(1) = 1$, $F(2) = 2$, $F(2) - F(1) = 1$

$$F(x_0 + Mx) - F(x_0) = F'(x_0) Mx$$

2. $(x_0; x_0 + Mx)$, $Mx = 1$, $f(x) = 1$, $F(x) = x$, $F(1) = 1$, $F(2) = 2$, $F(2) - F(1) = 1$

$$PfX_0 \in X < x_0 + Mxg = f(x_0)Mx$$

$$PfX = x_0g = \lim_{Mx \rightarrow 0} PfX_0 \in X < x_0 + Mxg =$$

$$= \lim_{Mx \rightarrow 0} [F(x_0 + Mx) - F(x_0)] = F'(x_0) Mx = 0$$

3. $y = f(x)$ on $[a; b]$, $c \in (a; b)$, $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$

4. $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$, $f(2) - f(1) = 4 - 1 = 3$, $f'(1.5) = 3$



1. $f_X(x) = \frac{1}{2} + f_0(x)$

2. $f_0(x) = f_0(x)$

$$f_0(x) = \frac{1}{2} + f_0(x)$$

$$f_0(x) = f_0(x)$$

$$f_0(x) = \frac{1}{2}$$

$$f_0(x) = \frac{1}{2}$$

3. $X \sim N(m; \sigma^2)$ Pfa 4×4 bg

$$Pfa \ 6 \ X < bg = h \int_a^b f_X(x) dx = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx =$$

$$= \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \left(\int_a^b e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx \right) \quad \begin{matrix} x = a \Rightarrow t = \frac{a-m}{\sigma} \\ x = b \Rightarrow t = \frac{b-m}{\sigma} \end{matrix} =$$

$$= \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{\frac{a-m}{\sigma}}^{\frac{b-m}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = h \cdot f_{0,1}(t) \quad i =$$

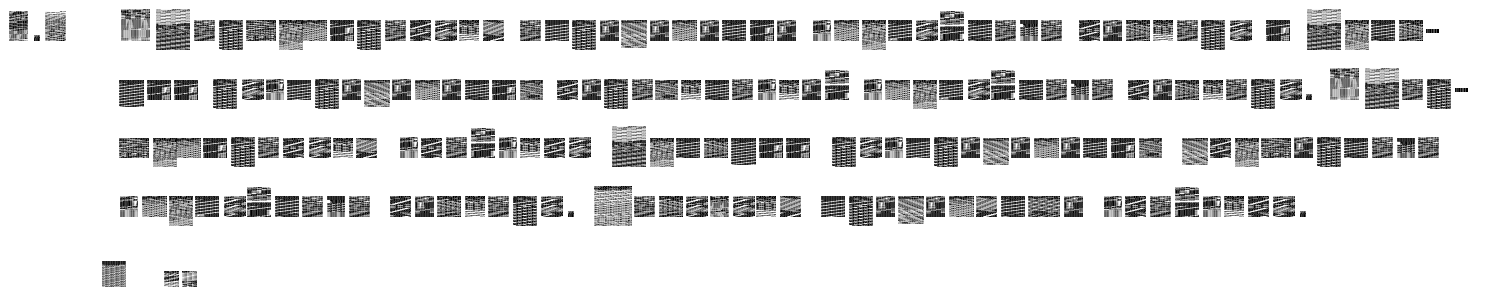
$$= \frac{b-m}{\sigma} - \frac{a-m}{\sigma} =$$

$$= \frac{1}{2} + f_0(t) =$$

$$= \frac{b-m}{\sigma} - \frac{a-m}{\sigma} =$$

4. $X \sim N(m; \sigma^2)$ Pfa 4×4 bg

$$Pfa \ 4 \times 4 \ bg = \frac{b-m}{\sigma} - \frac{a-m}{\sigma} = \frac{b-m}{\sigma} - \frac{a-m}{\sigma}$$



1. $(\cdot; \cdot; P)$ — n -мерная функция;

$X_i = X_1(i); \dots; X_n(i)$ — n независимых n -мерных случайных величин.

2. n -мерная функция

$$X = (X_1; \dots; X_n)$$

3. n -мерная функция

$$X = (X_1; \dots; X_n)$$

4. n -мерная функция

$$F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

5. n -мерная функция

$$F(x_1; \dots; x_n) = P\{X_1 < x_1; \dots; X_n < x_n\}$$

6. n -мерная функция

7. $0 \leq F(x_1; x_2) \leq 1$;

8. $F(x_1; x_2)$ — n -мерная функция

9. $F(x_1; x_2)$ — n -мерная функция

$$\lim_{x_1 \rightarrow -\infty; x_2 = \text{const}} F(x_1; x_2) = 0$$

$$\lim_{x_1 = \text{const}; x_2 \rightarrow -\infty} F(x_1; x_2) = 0$$

$$\lim_{x_1 \rightarrow +\infty; x_2 \rightarrow +\infty} F(x_1; x_2) = 1$$

$$\lim_{x_1 = \text{const}; x_2 \rightarrow +\infty} F(x_1; x_2) = F_{X_1}(x_1)$$

$$\lim_{x_1 \rightarrow +\infty; x_2 = \text{const}} F(x_1; x_2) = F_{X_2}(x_2)$$

$$F_{X_i}(x_i) = P\{X_i < x_i\}$$

10. n -мерная функция

$$D = \{(x; y): x \in [a_1; b_1]; y \in [a_2; b_2]\}$$

$$P\{a_1 \leq X < b_1; a_2 \leq X_2 < b_2\} = F(b_1; b_2) - F(a_1; b_2) - F(b_1; a_2) + F(a_1; a_2)$$

11. n -мерная функция

12. n -мерная функция

1. $\lim_{x_2 \rightarrow 1} F(x_1; x_2) = F(x_1; 1)$ $\lim_{x_1 \rightarrow 1} F(x_1; x_2) = F(1; x_2)$;

$\lim_{x_1 \rightarrow 1} F(x_1; x_2) = F(1; x_2)$ $\lim_{x_2 \rightarrow 1} F(x_1; x_2) = F(x_1; 1)$.

2. $\lim_{x_1 \rightarrow 1} F(x_1; x_2) = F(1; x_2)$.

3. $\lim_{x_1 \rightarrow 1} F(x_1; x_2) = F(1; x_2)$.

4. $\lim_{x_1 \rightarrow 1} F(x_1; x_2) = F(1; x_2)$.

5. $\lim_{x_1 \rightarrow 1} F(x_1; x_2) = F(1; x_2)$.

6. $F(x_1; x_2) = P f f X_1 < x_1 g f X_2 < x_2 g g$ $x_1 \rightarrow 1$ $\lim_{x_1 \rightarrow 1} F(x_1; x_2) = F(1; x_2)$.

7. $\lim_{x_1 \rightarrow 1} F(x_1; x_2) = F(1; x_2)$.

8. $F(x_1; x_2) = P f f X_1 < x_1 g f X_2 < x_2 g g$.

9. $\lim_{x_1 \rightarrow 1} F(x_1; x_2) = F(1; x_2)$.

10. $\lim_{x_1 \rightarrow 1} F(x_1; x_2) = F(1; x_2)$.

11. $\lim_{x_1 \rightarrow 1} F(x_1; x_2) = F(1; x_2)$.

12. $\lim_{x_1 \rightarrow 1} F(x_1; x_2) = F(1; x_2)$.

13. $F(x_1; x_2) = P f f X_1 < x_1 g f X_2 < x_2 g g$.

14. $\lim_{x_1 \rightarrow 1} F(x_1; x_2) = F(1; x_2)$.

15. $\lim_{x_1 \rightarrow 1} F(x_1; x_2) = F(1; x_2)$.

16. $\lim_{x_1 \rightarrow 1} F(x_1; x_2) = F(1; x_2)$.

17. $\lim_{x_1 \rightarrow 1} F(x_1; x_2) = F(1; x_2)$.

18. $\lim_{x_1 \rightarrow 1} F(x_1; x_2) = F(1; x_2)$.

$$\lim_{x_1 = \text{const}; x_2! + 1} F(x_1; x_2) = F_{X_1}(x_1)$$

$$\lim_{x_1! + 1; x_2 = \text{const}} F(x_1; x_2) = F_{X_2}(x_2)$$

$$F_{X_i}(x_i) = \prod_{j=1}^n F(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$$

$$D = f(x; y): x \in [a_1; b_1]; y \in [a_2; b_2]$$

$$P\{a_1 \leq X < b_1; a_2 \leq X_2 < b_2\} = F(b_1; b_2) - F(a_1; b_2) - F(b_1; a_2) + F(a_1; a_2)$$

$$F(x_1; x_2) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

$$F(x_1; x_2) = \int_{-\infty}^{x_1} F(x_1; x_2) dx_1$$

$$P\{a_1 \leq X_1 < b_1; a_2 \leq X_2 < b_2\}$$

$$f(x_1; x_2)$$

$$f(x_1 < x_1; a_2 \leq X < b_2)$$

$$f(x_1 < x_1; X_2 < b_2) = f(x_1 < x_1; a_2 \leq X_2 < b_2) + f(x_1 < x_1; X_2 < a_2)$$

$$P\{f(x_1 < x_1; X_2 < b_2)\} = P\{f(x_1 < x_1; a_2 \leq X_2 < b_2)\} + P\{f(x_1 < x_1; X_2 < a_2)\}$$

$$P\{f(x_1 < x_1; X_2 < b_2)\} = P\{f(x_1 < x_1; a_2 \leq X_2 < b_2)\} + P\{f(x_1 < x_1; X_2 < a_2)\}$$

$$P\{f(x_1 < x_1; X_2 < b_2)\}$$

$$P\{f(x_1 < x_1; a_2 \leq X_2 < b_2)\} = F(x_1; b_2) - F(x_1; a_2)$$

$$f(x_1 < b_1; a_2 \leq X_2 < b_2) = f(a_1 \leq X_1 < b_1; a_2 \leq X_2 < b_2) + f(x_1 < a_1; a_2 \leq X_2 < b_2)$$

$$f(x_1 < b_1; a_2 \leq X_2 < b_2) = f(a_1 \leq X_1 < b_1; a_2 \leq X_2 < b_2) + f(x_1 < a_1; a_2 \leq X_2 < b_2)$$

$$P\{f(x_1 < b_1; a_2 \leq X_2 < b_2)\} = P\{f(a_1 \leq X_1 < b_1; a_2 \leq X_2 < b_2)\} + P\{f(x_1 < a_1; a_2 \leq X_2 < b_2)\}$$

$$P\{f(x_1 < b_1; a_2 \leq X_2 < b_2)\} = P\{f(a_1 \leq X_1 < b_1; a_2 \leq X_2 < b_2)\} + P\{f(x_1 < a_1; a_2 \leq X_2 < b_2)\}$$

$$P\{f(x_1 < a_1; a_2 \leq X_2 < b_2)\} = P\{f(a_1 \leq X_1 < b_1; a_2 \leq X_2 < b_2)\} + P\{f(x_1 < a_1; a_2 \leq X_2 < b_2)\}$$

$$P\{f(x_1 < b_1; a_2 \leq X_2 < b_2)\}$$

$$P\{a_1 \leq X_1 < b_1; a_2 \leq X_2 < b_2\} = F(b_1; b_2) - F(b_1; a_2) - F(a_1; b_2) + F(a_1; a_2)$$

$$f(x_1, x_2)$$

2. $X_i = X_1(i); \dots; X_n(i)$ — \mathbb{R}^n — \mathbb{R} , \mathbb{R}^n — \mathbb{R} .

3. \mathbb{R}^n

4. $(\cdot; \cdot; P)$ — \mathbb{R}^n — \mathbb{R} ;

5. $X_i = X_1(i); \dots; X_n(i)$ — \mathbb{R}^n — \mathbb{R} , \mathbb{R}^n — \mathbb{R} .

6. n — \mathbb{R}^n — \mathbb{R}

$$X = (X_1; \dots; X_n)$$

7. \mathbb{R}^n — \mathbb{R}

$$X = (X_1; \dots; X_n)$$

8. \mathbb{R}^n — \mathbb{R}

$$F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

9. \mathbb{R}^n — \mathbb{R}

$$F(x_1; \dots; x_n) = P f(x_1 < x_1; \dots; x_n < x_n)$$

10. \mathbb{R}^n — \mathbb{R}

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

11. \mathbb{R}^n — \mathbb{R}

$$F(x_1; \dots; x_n) = \int_1^{x_1} \int_1^{x_2} \dots \int_1^{x_i} \int_1^{x_n} f(t_1; \dots; t_n) dt_n$$

12. F — \mathbb{R}^n — \mathbb{R}

13. $(x_1; \dots; x_n) \in \mathbb{R}^n$.

14. \mathbb{R}^n — \mathbb{R}



§ 1. Пусть $n = 2$:

$$F(x_1; x_2) = \int_1^{x_1} \int_1^{x_2} f(t_1; t_2) dt_1 dt_2$$

Вспомогательная функция $f(x_1; x_2)$ называется функцией плотности вероятности. Она удовлетворяет условиям:

1. $f(x_1; x_2) \geq 0$ для всех x_1, x_2 .

2. $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1; x_2) dx_1 dx_2 = 1$.

$$P(a_1 \leq X_1 \leq b_1; a_2 \leq X_2 \leq b_2) = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} f(x_1; x_2) dx_1 dx_2$$

Из условия 2 следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1; x_2) dx_1 dx_2 = 1.$$

3. Если $f(x_1; x_2) = 0$ для всех x_1, x_2 , то $(x_1^0; x_2^0) = (-\infty; -\infty)$ и

$$P(x_1^0 \leq X_1 \leq x_1^0 + \Delta x_1; x_2^0 \leq X_2 \leq x_2^0 + \Delta x_2) = f(x_1^0; x_2^0) \Delta x_1 \Delta x_2$$

и $\Delta x_1, \Delta x_2 \rightarrow 0$.

4. Если $f(x_1; x_2) = 0$ для всех x_1, x_2 , то $(x_1^0; x_2^0) = (-\infty; -\infty)$ и

$$P(X_1 \leq x_1^0; X_2 \leq x_2^0) = 0$$

5.

$$P(X_1 \leq x_1; X_2 \leq x_2) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} f(t_1; t_2) dt_1 dt_2$$

6.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1; x_2) dx_2 &= f_{X_1}(x_1) \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1; x_2) dx_1 &= f_{X_2}(x_2) \end{aligned}$$

f_{X_1}, f_{X_2} — функции, определенные на \mathbb{R}^1 и принимающие неотрицательные значения. Тогда f_{X_1}, f_{X_2} являются плотностями вероятности для X_1, X_2 , если

для любых $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^1$

$$f(x_1; x_2) = \begin{pmatrix} f_{X_1}(x_1) \\ f_{X_2}(x_2) \end{pmatrix}$$

выполняются следующие условия:

1. $f(x_1; x_2) \geq 0$ для всех $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^1$.
 2. $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1; x_2) dx_1 dx_2 = 1$.

Если выполнены эти условия, то $f(x_1; x_2)$ называется совместной плотностью вероятности.

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1; x_2) dx_2.$$

Аналогично, $f_{X_2}(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1; x_2) dx_1$. Если $F(x_1; x_2)$ — совместная функция распределения, то

$$F_{X_1}(x_1) = \lim_{t_2 \rightarrow \infty} F(x_1; t_2) = \lim_{t_2 \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{t_2} f(t_1; t_2) dt_1 dt_2 = \int_{-\infty}^{x_1} f_{X_1}(t_1) dt_1$$

$$f_{X_1}(x_1) = \frac{dF_{X_1}(x_1)}{dx_1} = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{F(x_1 + \Delta x_1) - F(x_1)}{\Delta x_1} = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{\int_{-\infty}^{x_1 + \Delta x_1} f_{X_1}(t_1) dt_1 - \int_{-\infty}^{x_1} f_{X_1}(t_1) dt_1}{\Delta x_1} = f_{X_1}(x_1)$$

$$\lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{\int_{-\infty}^{x_1 + \Delta x_1} f_{X_1}(t_1) dt_1 - \int_{-\infty}^{x_1} f_{X_1}(t_1) dt_1}{\Delta x_1} = f_{X_1}(x_1)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1; t_2) dt_2$$

Таким образом, $f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1; t_2) dt_2$.

Если X, Y — независимые случайные величины, то их совместная плотность вероятности имеет вид

$$F(x; y) = F_X(x) F_Y(y)$$

$$F(x; y) = F_X(x) F_Y(y).$$

$$\begin{aligned} P\{x_1 \leq X < x_2; y_1 \leq Y < y_2\} &= \\ &= h \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} f(x, y) dx dy = \\ &= F(x_1; y_1) + F(x_2; y_2) - F(x_1; y_2) - F(x_2; y_1) = \\ &= F_X(x_1) F_Y(y_1) + F_X(x_2) F_Y(y_2) - F_X(x_1) F_Y(y_2) - F_X(x_2) F_Y(y_1) = \\ &= [F_X(x_2) - F_X(x_1)] [F_Y(y_2) - F_Y(y_1)] = \\ &= h \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} f(x, y) dx dy = \\ &= P\{x_1 \leq X < x_2\} P\{y_1 \leq Y < y_2\} \end{aligned}$$

$$P\{x_1 \leq X < x_2; y_1 \leq Y < y_2\} = P\{x_1 \leq X < x_2\} P\{y_1 \leq Y < y_2\}.$$

$$P\{x_1 \leq X < x_2; y_1 \leq Y < y_2\} = P\{x_1 \leq X < x_2\} P\{y_1 \leq Y < y_2\}$$

$$\begin{aligned} F(x; y) &= P\{X \leq x; Y \leq y\} = P\{1 \leq X \leq x; 1 \leq Y \leq y\} = \\ &= h \int_1^x \int_1^y f(x, y) dy dx = \\ &= P\{1 \leq X \leq x\} P\{1 \leq Y \leq y\} = F_X(x) F_Y(y) \end{aligned}$$

$$F(x; y) = F_X(x) F_Y(y).$$

$$f(x; y) = \frac{\partial^2 F(x; y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} [F_X(x) F_Y(y)] = \frac{dF_X(x)}{dx} \frac{dF_Y(y)}{dy} = f_X(x) f_Y(y)$$

$$f(x; y) = f_X(x) f_Y(y).$$

$$\begin{aligned}
 F(x; y) &= \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(t; v) dv = \int_{-\infty}^x f_X(t) \int_{-\infty}^y f_Y(v) dv = \\
 &= \int_{-\infty}^x f_X(t) dt \int_{-\infty}^y f_Y(v) dv = F_X(x) F_Y(y) \\
 &= \int_{-\infty}^x \{f_X(t)\} dt \int_{-\infty}^y \{f_Y(v)\} dv
 \end{aligned}$$

$$X_1, \dots, X_n,$$

$$X_i \perp X_j \quad i \neq j;$$

$$F(x_1, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdots F_{X_n}(x_n)$$

$$F = \prod_{i=1}^n F_{X_i}(x_i), \quad F_{X_i} = \prod_{j=1}^n F_{X_j}(x_j), \quad X_i; i = \overline{1, n}.$$

$$X_1, \dots, X_n$$

$$X_1, \dots, X_n = \left(\begin{array}{c} \end{array} \right)$$

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdots f_{X_n}(x_n)$$

1. 在 2019 年 12 月 31 日，本公司应收账款的账龄结构如下：

| 账龄 | 金额（元） | 占比（%） |
|----------|--------------|--------|
| 1 年以内 | 1,234,567.89 | 85.67 |
| 1 年至 2 年 | 123,456.78 | 8.56 |
| 2 年至 3 年 | 45,678.90 | 3.21 |
| 3 年以上 | 12,345.67 | 0.86 |
| 合计 | 1,416,059.24 | 100.00 |

2. 在 2019 年 12 月 31 日，本公司应收账款的坏账准备计提情况如下：

| 坏账准备计提方法 | 金额（元） | 占比（%） |
|----------|--------------|--------|
| 单项计提 | 12,345.67 | 0.86 |
| 组合计提 | 1,403,713.57 | 99.14 |
| 合计 | 1,416,059.24 | 100.00 |

3. 在 2019 年 12 月 31 日，本公司应收账款的坏账准备计提比例如下：

| 账龄 | 计提比例（%） |
|----------|---------|
| 1 年以内 | 5.00 |
| 1 年至 2 年 | 10.00 |
| 2 年至 3 年 | 20.00 |
| 3 年以上 | 100.00 |

4. 在 2019 年 12 月 31 日，本公司应收账款的坏账准备计提金额如下：

| 账龄 | 计提金额（元） |
|----------|-----------|
| 1 年以内 | 61,728.39 |
| 1 年至 2 年 | 12,345.67 |
| 2 年至 3 年 | 9,135.78 |
| 3 年以上 | 12,345.67 |
| 合计 | 95,550.51 |

5. 在 2019 年 12 月 31 日，本公司应收账款的坏账准备计提比例与计提金额如下：

| 账龄 | 计提比例（%） | 计提金额（元） |
|----------|---------|-----------|
| 1 年以内 | 5.00 | 61,728.39 |
| 1 年至 2 年 | 10.00 | 12,345.67 |
| 2 年至 3 年 | 20.00 | 9,135.78 |
| 3 年以上 | 100.00 | 12,345.67 |

$$\begin{aligned} & \text{if } (X; Y) \text{ is a } \Pi\text{-pair, then } Y \text{ is a } \Pi\text{-pair and } Y_0 \text{ is a } \Pi\text{-pair} \\ & \text{if } X \text{ is a } \Pi\text{-pair, then } Y = y_0 \end{aligned}$$
1. $(X; Y) = \begin{cases} (1; 1) & \text{с вероятностью } \frac{1}{4}, \\ (1; 2) & \text{с вероятностью } \frac{1}{4}, \\ (2; 1) & \text{с вероятностью } \frac{1}{4}, \\ (2; 2) & \text{с вероятностью } \frac{1}{4}. \end{cases}$
$$X \in \mathbb{R}^{n \times m}, Y \in \mathbb{R}^{n \times g}$$
$$p_{ij} = Pf(X; Y) = (x_i; y_j)g; \quad i = \overline{1; m}; j = \overline{1; n},$$

$$P_{X_i} = PfX = x_i g; \quad i = \overline{1, m},$$

$$P_{Y_j} = PfY = y_j g; j = \overline{1; n};$$

$$Y = y_j \quad j = 1, 2, \dots, J.$$
$$PfX = x_i j Y = y_j g = h \quad i =$$
$$= \frac{PffX = x_i g \quad fY = y_j gg}{PfY = y_j g} = \frac{Pf(X; Y) = (x_i; y_j)g}{P_{Y_j}} = \frac{p_{ij}}{P_{Y_j}}$$
$$Y = y_j \quad X = x_i \quad (X; Y)$$

$$ij = \frac{p_{ij}}{P_{Y_i}}$$

$$ij, \quad i = \overline{1; m}, \quad X = \{x_{ij}\}, \quad Y = y_j.$$

Пусть $Y = y$ — событие, состоящее из исходов $X = x_i$, таких, что

$$p_{ij} = P\{Y = y_j | X = x_i\} = \frac{p_{ij}}{p_{X_i}}$$

где $p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\}$ — совместная вероятность. Тогда

$$P\{Y = y_j | X = x_i\} = \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{P\{X = x_i\}}$$

где $P\{X = x_i\} = \sum_{j=1}^m p_{ij}$ — безусловная вероятность. Тогда

Пусть $X = x$ — событие, состоящее из исходов $Y = y$, таких, что

$$f_X(x | Y = y) = \frac{f(x; y)}{f_Y(y)}$$

где $f(x; y) = P\{X = x, Y = y\}$ — совместная плотность вероятности. Тогда

Пусть $Y = y$ — событие, состоящее из исходов $X = x$, таких, что

$$f_Y(y | X = x) = \frac{f(x; y)}{f_X(x)}$$

где $f_X(x) = P\{X = x\}$ — безусловная плотность вероятности.

Пусть X и Y — независимые случайные величины. Тогда

1. $P\{X = x, Y = y\} = P\{X = x\} \cdot P\{Y = y\}$.

2. $f_X(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$.

3. $F_X(x | Y = y) = F_X(x)$, где $F_X(x) = P\{X \leq x\}$.

4. $F_Y(y | X = x) = F_Y(y)$, где $F_Y(y) = P\{Y \leq y\}$.

5. $P\{X = x, Y = y\} = P\{X = x\} \cdot P\{Y = y\}$.

X, Y — независимы.

$$f_X(x|Y=y) = f_X(x) \quad \forall x, y, \quad f_X(x|Y=y) = f_X(x).$$

$$f_Y(y|X=x) = f_Y(y) \quad \forall x, y, \quad f_Y(y|X=x) = f_Y(y).$$

$$(X; Y) = 0, \quad \text{т.е. } X \text{ и } Y \text{ независимы.}$$

X, Y — независимы.

$$PfX = x_i | Y = y_j = PfX = x_i \quad j = \overline{1; n}.$$

$$PfY = y_j | X = x_i = PfY = y_j \quad i = \overline{1; m}.$$

$$X \in \{x_1; \dots; x_m\}; Y \in \{y_1; \dots; y_n\}.$$

Рассмотрим случай, когда X и Y независимы.

В этом случае совместная функция распределения $f_{XY}(x, y)$ равна произведению маргинальных функций $f_X(x)$ и $f_Y(y)$. То есть $f_{XY}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$. Это означает, что знание значения X не дает никакой информации о значении Y , и наоборот.

Таким образом,

$$X \text{ и } Y \text{ независимы} \Leftrightarrow f_{XY}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y).$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dy, \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dx.$$

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \Leftrightarrow X \text{ и } Y \text{ независимы}.$$

Рассмотрим теперь случай, когда X и Y зависимы.

$$X \text{ и } Y \text{ зависимы} \Leftrightarrow f_{XY}(x, y) \neq f_X(x) \cdot f_Y(y).$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dy,$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dx.$$

$$\text{Если } X \text{ и } Y \text{ независимы, то } f_{XY}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y), \text{ где } f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dy, \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dx.$$

$$Y = f(X).$$

Рассмотрим

1. Y — непрерывная случайная величина;

$$f_Y(y) = f_X(\varphi(y)) \varphi'(y).$$

Доказательство.

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{\varphi(X) \leq y\}$$

$$\begin{cases} \varphi^{-1}(y) = \varphi^{-1}(y); & \text{если } \varphi'(X) < 0 \text{ и } X < \varphi^{-1}(y); \\ \varphi^{-1}(y) = \varphi^{-1}(y); & \text{если } \varphi'(X) < 0 \text{ и } X > \varphi^{-1}(y); \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi^{-1}(y) = \varphi^{-1}(y); & \text{если } \varphi'(X) < 0 \text{ и } X < \varphi^{-1}(y); \\ \varphi^{-1}(y) = \varphi^{-1}(y); & \text{если } \varphi'(X) < 0 \text{ и } X > \varphi^{-1}(y); \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Если } \varphi'(X) < 0, & F_Y(y) = P\{\varphi(X) \leq y\} = P\{X \leq \varphi^{-1}(y)\} = F_X(\varphi^{-1}(y)); \\ \text{Если } \varphi'(X) > 0, & F_Y(y) = P\{\varphi(X) \leq y\} = P\{X \geq \varphi^{-1}(y)\} = 1 - P\{X < \varphi^{-1}(y)\} = 1 - F_X(\varphi^{-1}(y)). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= F_Y'(y) = \frac{d}{dy} [F_X(\varphi^{-1}(y))] = F_X'(\varphi^{-1}(y)) \varphi^{-1}{}'(y); \\ &= \frac{d}{dy} [1 - F_X(\varphi^{-1}(y))] = -F_X'(\varphi^{-1}(y)) \varphi^{-1}{}'(y); \\ &= f_X(\varphi^{-1}(y)) |\varphi^{-1}{}'(y)| \end{aligned}$$

Пример 1.

1. X — независимые случайные величины;

2. $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция, $\varphi'(x) \neq 0$, n — натуральное число;

3. φ — монотонная функция;

4. $y \in \mathbb{R}$, $x_1 = x_1(y); \dots; x_k = x_k(y)$ ($k \leq n$) — корни уравнения $y = \varphi(x)$, $l_1; \dots; l_k$ — корни уравнения $y = \varphi(x)$.

Тогда плотность вероятности $f_Y(y)$ определяется формулой

$$f_Y(y) = \sum_{j=1}^k f_X(x_j(y)) |\varphi'(x_j(y))|$$

где $x_j(y)$ — корни уравнения $y = \varphi(x)$, $l_j; j = \overline{1, k}$

Найти функцию распределения Y , где $Y = \min(X_1, X_2)$.

Решение.

1. $(X_1; X_2)$ — двумерная случайная величина;

2. $' : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

3. $Y = '(X_1; X_2) = \min(X_1, X_2)$ — функция от двумерной случайной величины.

Найдем функцию распределения $F_Y(y)$ и плотность $f_Y(y)$.
 По определению $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\min(X_1, X_2) \leq y)$.
 Тогда $F_Y(y) = 1 - P(\min(X_1, X_2) > y) = 1 - P(X_1 > y, X_2 > y)$.

Поскольку X_1, X_2 независимы, то $P(X_1 > y, X_2 > y) = P(X_1 > y)P(X_2 > y)$.

Тогда $F_Y(y) = 1 - [P(X_1 > y)]^2 = 1 - [1 - F_X(y)]^2$, где $F_X(y)$ — функция распределения X_1 .

$$F_Y(y) = \iint_{D(y)} f(x_1; x_2) dx_1 dx_2$$

где f — совместная плотность (X_1, X_2) , а $D(y) = \{(x_1, x_2) : \min(x_1, x_2) \leq y\}$.

Решение.

$$\begin{aligned}
 F_Y(y) &= P\{Y < y\} = \\
 &= h \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) \mathbb{I}_{\{\min(x_1, x_2) < y\}} dx_1 dx_2 = \\
 &= h \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) \mathbb{I}_{\{x_1 < y \text{ или } x_2 < y\}} dx_1 dx_2 = \\
 &= \int_{D(y)} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2
 \end{aligned}$$

Решение.

1. Пусть X_1, X_2 — независимые случайные величины, имеющие одинаковое распределение с плотностью $f(x)$.

2. X_1, X_2 — независимые случайные величины, имеющие одинаковое распределение с плотностью $f(x)$.

3. X_1, X_2 — независимые случайные величины, имеющие одинаковое распределение с плотностью $f(x)$.

$$Y = X_1 + X_2 \quad f'(x_1; x_2) = x_1 + x_2.$$

$$f_Y(y) = \int_1^{y-1} f_{X_2}(y-x_1) f_{X_1}(x_1) dx_1$$

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\{Y < y\} = P\{X_1 + X_2 < y\} = \iint_{D(y)} f(x_1; x_2) dx_1 dx_2 = \\ &= \int_1^{y-1} \int_1^{y-x_1} f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) dx_2 dx_1 = \int_1^{y-1} f_{X_1}(x_1) F_{X_2}(y-x_1) dx_1 = \\ &= \int_1^{y-1} f_{X_1}(x_1) F_{X_2}(y-x_1) dx_1 = \int_1^{y-1} f_{X_1}(x_1) F_{X_2}(y-x_1) dx_1 \end{aligned}$$

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \int_1^{y-1} f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(y-x_1) dx_1$$

$$M[X] = \sum_i p_i x_i$$

$$X; p_i = P\{X = x_i\}.$$

$$M[X] = \int_1^{\infty} x f(x) dx$$

$f(x)$ — плотность вероятности X .

Если X принимает значения x_i с вероятностями p_i , то $\sum_i p_i = 1$, $M[X] = \sum_i p_i x_i$.

1. Если $PfX = x_0 g = 1$, то X имеет плотность g , $MX = x_0$;

2. $M[aX + b] = a MX + b$;

3. $M[X_1 + X_2] = MX_1 + MX_2$;

4. Если X_1, X_2 независимы, то $M[X_1 X_2] = (MX_1)(MX_2)$.

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = x_0$$

$$MX = \sum_{i=1}^n p_i x_i = x_0$$

$$\begin{aligned} M[aX + b] &= \int_1^{\infty} (ax + b) f(x) dx = a \int_1^{\infty} x f(x) dx + b \int_1^{\infty} f(x) dx = a MX + b \end{aligned}$$

Если X имеет плотность $f(x)$, то $M[X] = \int_1^{\infty} x f(x) dx$. Если X имеет плотность $f(x)$, то $M[X] = \int_1^{\infty} x f(x) dx$.

X_1 and X_2 are independent random variables. Let i, j be indices such that $i \in I$ and $j \in J$. Then

$$\begin{aligned}
 M[X_1 + X_2] &= h'(x_1; x_2) = x_1 + x_2 \\
 &= \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} (x_{1,i} + x_{2,j}) p_{ij} = \sum_{i \in I} x_{1,i} p_{ij} + \sum_{j \in J} x_{2,j} p_{ij} = \\
 &= \sum_{i \in I} x_{1,i} p_{ij} + \sum_{j \in J} x_{2,j} p_{ij} = M X_1 + M X_2
 \end{aligned}$$

Let $f(x_1, x_2)$ be the joint probability density function of X_1 and X_2 . Then

$$\begin{aligned}
 M[X_1 X_2] &= h'(x_1; x_2) = x_1 x_2 \\
 &= \int_{\mathbb{R}^2} x_1 x_2 f(x_1; x_2) dx_1 dx_2 = \\
 &= \int_{\mathbb{R}^2} x_1 x_2 f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) dx_1 dx_2 = \\
 &= \left(\int_{\mathbb{R}} x_1 f_{X_1}(x_1) dx_1 \right) \left(\int_{\mathbb{R}} x_2 f_{X_2}(x_2) dx_2 \right) = (M X_1)(M X_2)
 \end{aligned}$$

Let X be a random variable with probability mass function p_i and probability density function $f(x)$. Then

$$\begin{aligned}
 M[X] &= \sum_{i \in I} x_i p_i \\
 M[X] &= \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx
 \end{aligned}$$

Let $(X; Y)$ be a random vector with probability mass function p_{ij} and probability density function $f(x, y)$. Then

мы имеем $(X; Y) -$ независимые случайные величины, и

$$M[\varphi'(X; Y)] = \sum_{i,j} \varphi'(x_i; y_j) p_{ij}$$

$$p_{ij} = Pf(X; Y) = (x_i; y_j)g.$$

Если $(X; Y) -$ непрерывные случайные величины, то

$$M[\varphi'(X; Y)] = \iint_{R^2} \varphi'(x; y) f(x; y) dx dy$$

$$R^2$$

где $f -$ плотность совместного распределения X и Y .

Вспомогательная теорема. Пусть X и Y независимые случайные величины, $f(x)$ и $g(y)$ их функции плотности. Тогда для любой функции $\varphi(x, y)$ справедливо равенство

Доказательство. Пусть X и Y независимые случайные величины, $f(x)$ и $g(y)$ их функции плотности. Тогда для любой функции $\varphi(x, y)$ справедливо равенство

$$D[X] = M[(X - m)^2]$$

$$m = MX.$$

Доказательство. Пусть $X -$ случайная величина, $f(x)$ ее функция плотности, и

$$DX = hDX = M[(X - m)^2]; \quad \varphi'(x) = (x - m)^2; \quad i = \sum_i (x_i - m)^2 p_i$$

$$p_i = PfX = x_i g.$$

Доказательство. Пусть $X -$ случайная величина, $f(x)$ ее функция плотности, и

$$D[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m)^2 f(x) dx$$

$$1$$

где $f -$ плотность совместного распределения X .

Доказательство. Пусть X и Y независимые случайные величины, $f(x)$ и $g(y)$ их функции плотности. Тогда для любой функции $\varphi(x, y)$ справедливо равенство

Доказательство. Пусть X и Y независимые случайные величины, $f(x)$ и $g(y)$ их функции плотности. Тогда для любой функции $\varphi(x, y)$ справедливо равенство

$$1. DX > 0;$$

$$2. \text{ If } PfX = x_0 g = 1, \text{ then } DX = 0.$$

$$3. D[aX + b] = a^2 DX;$$

$$4. D[X] = M[X^2] - (MX)^2;$$

$$5. \text{ If } X_1, X_2 \text{ are independent, then } D[X_1 + X_2] = DX_1 + DX_2.$$

Example 1.

$$1. DX = MY, \text{ where } Y = (X - m)^2. \text{ If } Y > 0, \text{ then } DX = MY > 0.$$

$$\begin{matrix} X & x_0 \\ P & 1 \end{matrix}$$

$$MX = m = x_0.$$

$$DX = \sum_i (x_i - m)^2 p_i = (x_0 - x_0)^2 \cdot 1 = 0.$$

$$\begin{aligned} D[aX + b] &= M[(aX + b) - M(aX + b)]^2 = M[(aX + b) - aMX - b]^2 = \\ &= M[(a(X - MX))^2] = a^2 M[(X - MX)^2] = a^2 DX \end{aligned}$$

$$1. \text{ Let } m = MX;$$

$$\begin{aligned} DX &= M[(X - m)^2] = M[X^2 - 2mX + m^2] = M[X^2] - 2m \underbrace{M[X]}_{m^2} + m^2 = \\ &= M[X^2] - m^2 \end{aligned}$$

Example 2.

$$\begin{aligned} D(X_1 + X_2) &= h \sum_i i = M[(X_1 + X_2)^2] - (M(X_1 + X_2))^2 = \\ &= M[X_1^2] + M[X_2^2] + 2M[X_1 X_2] - (MX_1)^2 - (MX_2)^2 - 2MX_1 MX_2 = \\ &= hX_1; X_2 - \dots, \text{ where } M[X_1 X_2] = MX_1 MX_2 = \\ &= (M[X_1^2] - (MX_1)^2) + (M[X_2^2] - (MX_2)^2) = DX_1 + DX_2 \end{aligned}$$

Theorem 1. DX is the variance of X .
 The variance of X is the average of the squared deviations from the mean.
 The variance of X is the second moment of X minus the square of the first moment.

$$\text{Variance of } X = \overline{D[X]}$$

1.1.11. \mathbb{R}^n 1.1.12. \mathbb{R}^n 1.1.13. \mathbb{R}^n 1.1.14. \mathbb{R}^n 1.1.15. \mathbb{R}^n 1.1.16. \mathbb{R}^n 1.1.17. \mathbb{R}^n 1.1.18. \mathbb{R}^n 1.1.19. \mathbb{R}^n 1.1.20. \mathbb{R}^n

1.1.21. \mathbb{R}^n 1.1.22. \mathbb{R}^n 1.1.23. \mathbb{R}^n 1.1.24. \mathbb{R}^n 1.1.25. \mathbb{R}^n 1.1.26. \mathbb{R}^n 1.1.27. \mathbb{R}^n 1.1.28. \mathbb{R}^n 1.1.29. \mathbb{R}^n

$$M[X] = \sum_i p_i x_i$$

1.1.30. \mathbb{R}^n 1.1.31. \mathbb{R}^n 1.1.32. \mathbb{R}^n 1.1.33. \mathbb{R}^n 1.1.34. \mathbb{R}^n 1.1.35. \mathbb{R}^n 1.1.36. \mathbb{R}^n 1.1.37. \mathbb{R}^n 1.1.38. \mathbb{R}^n

$$X; p_i = PfX = x_i g.$$

1.1.39. \mathbb{R}^n 1.1.40. \mathbb{R}^n 1.1.41. \mathbb{R}^n 1.1.42. \mathbb{R}^n 1.1.43. \mathbb{R}^n 1.1.44. \mathbb{R}^n 1.1.45. \mathbb{R}^n 1.1.46. \mathbb{R}^n 1.1.47. \mathbb{R}^n

$$M[X] = \int_1^{\infty} x f(x) dx$$

1.1.48. \mathbb{R}^n 1.1.49. \mathbb{R}^n 1.1.50. \mathbb{R}^n 1.1.51. \mathbb{R}^n 1.1.52. \mathbb{R}^n 1.1.53. \mathbb{R}^n 1.1.54. \mathbb{R}^n 1.1.55. \mathbb{R}^n

$$f(x) = \dots X.$$

1.1.56. \mathbb{R}^n 1.1.57. \mathbb{R}^n 1.1.58. \mathbb{R}^n 1.1.59. \mathbb{R}^n 1.1.60. \mathbb{R}^n 1.1.61. \mathbb{R}^n 1.1.62. \mathbb{R}^n 1.1.63. \mathbb{R}^n

$$D[X] = M[(X - m)^2]$$

1.1.64. \mathbb{R}^n 1.1.65. \mathbb{R}^n 1.1.66. \mathbb{R}^n 1.1.67. \mathbb{R}^n 1.1.68. \mathbb{R}^n 1.1.69. \mathbb{R}^n 1.1.70. \mathbb{R}^n

$$m = MX.$$

1.1.71. \mathbb{R}^n 1.1.72. \mathbb{R}^n 1.1.73. \mathbb{R}^n 1.1.74. \mathbb{R}^n 1.1.75. \mathbb{R}^n 1.1.76. \mathbb{R}^n 1.1.77. \mathbb{R}^n 1.1.78. \mathbb{R}^n

$$DX = hDX = M[(X - m)^2]; ' (x) = (x - m)^2 i = \sum_i (x_i - m)^2 p_i$$

1.1.79. \mathbb{R}^n 1.1.80. \mathbb{R}^n 1.1.81. \mathbb{R}^n 1.1.82. \mathbb{R}^n 1.1.83. \mathbb{R}^n 1.1.84. \mathbb{R}^n 1.1.85. \mathbb{R}^n

$$p_i = PfX = x_i g.$$

1.1.86. \mathbb{R}^n 1.1.87. \mathbb{R}^n 1.1.88. \mathbb{R}^n 1.1.89. \mathbb{R}^n 1.1.90. \mathbb{R}^n 1.1.91. \mathbb{R}^n 1.1.92. \mathbb{R}^n

$$D[X] = \int_1^{\infty} (x - m)^2 f(x) dx$$

1.1.93. \mathbb{R}^n 1.1.94. \mathbb{R}^n 1.1.95. \mathbb{R}^n 1.1.96. \mathbb{R}^n 1.1.97. \mathbb{R}^n 1.1.98. \mathbb{R}^n 1.1.99. \mathbb{R}^n

$$f = \dots X.$$

1.1.100. \mathbb{R}^n 1.1.101. \mathbb{R}^n 1.1.102. \mathbb{R}^n 1.1.103. \mathbb{R}^n 1.1.104. \mathbb{R}^n 1.1.105. \mathbb{R}^n 1.1.106. \mathbb{R}^n

1.1.107. \mathbb{R}^n 1.1.108. \mathbb{R}^n 1.1.109. \mathbb{R}^n 1.1.110. \mathbb{R}^n

Бернулли, то есть независимых испытаний.

Пусть $X \sim B(n; p)$, X — число успехов в n независимых испытаниях с вероятностью успеха p . Тогда $X_i, i = \overline{1; n}$

$$X_i = \begin{cases} 1; & \text{если } i\text{-е испытание успешное,} \\ 0; & \text{если } i\text{-е испытание неуспешное.} \end{cases}$$

Поскольку X_1, \dots, X_n независимы, то $X = X_1 + \dots + X_n$.

Так как $X_i \sim B(1; p); i = \overline{1; n}$, то $MX_i = p, DX_i = pq$.

$$X = \sum_{i=1}^n X_i$$

$$MX = M \sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n MX_i = np$$

$$DX = D \sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n DX_i = npq$$

Найдем функцию вероятности X ()

$$PfX = kg = \frac{k}{k!} e^{-k} ; k = 0; 1; 2; \dots$$

Найдем MX и DX .

$$\begin{aligned} MX &= \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{k}{k!} e^{-k} = e^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{k}{k!} = e^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k-1)!} = \\ &= e^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1) + 1}{(k-1)!} = e^{-1} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{i}{i!} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \right) = e^{-1} (e + e) = 2e^{-1} \end{aligned}$$

$$DX = M[X^2] - (MX)^2.$$

$$MX^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{k}{k!} e^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{k}{(k-1)!} e^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k-1)!} e^{-k} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i+1}{i!} e^{-(i+1)} = e^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i+1}{i!} e^{-i} = e^{-1} (e + e) = 2e^{-1}$$

Таким образом, $DX = 2e^{-1} - (2e^{-1})^2 = 2e^{-1} - 4e^{-2} = 2e^{-1} (1 - 2e^{-1})$.

$$PfX = kg = pq^k; k = 0; 1; 2; \dots$$

$$MX = \sum_{k=0}^{\infty} k pq^k = \sum_{k=1}^{\infty} k pq^k = pq \sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1} =$$

$$= pq \sum_{k=1}^{\infty} \{Z^k\} = pq(1 + 2q + 3q^2 + 4q^3 + \dots)$$

$$(1 + q + q^2 + \dots)^0 = \frac{1}{1-q} \Rightarrow 1 + 2q + 3q^2 + 4q^3 + \dots = \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p^2} =$$

$$= pq \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p}$$

$$DX = \frac{q}{p^2}$$

$$X \sim R(0; 1)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}; & x \in (a; b) \\ 0; & \text{else} \end{cases}$$

$$MX = \int_a^b x f(x) dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x dx = \frac{1}{2(b-a)} (b^2 - a^2) = \frac{a+b}{2}$$

$$DX = \int_a^b x^2 \frac{a+b}{2} f(x) dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2 \frac{a+b}{2} dx =$$

$$= \frac{1}{3(b-a)} x^3 \frac{a+b}{2} \Big|_a^b = \frac{1}{3(b-a)} \frac{(b-a)^3}{8} - \frac{(a-b)^3}{8} =$$

$$= \frac{(b-a)^3}{12(b-a)} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$X \sim \text{Exp}(\lambda)$$

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\lambda x}; & x > 0 \\ 0; & x < 0 \end{cases}$$

$$MX = \int_0^{\infty} x f(x) dx = \int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} dx = \int_0^{\infty} x d(-e^{-\lambda x}) = -x e^{-\lambda x} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx =$$

$$= -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}$$

$$DX = M[X^2] - (MX)^2,$$

$$\begin{aligned} M[X^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 de^{-x} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x} + \int_{-\infty}^0 x e^{-x} dx = \frac{2}{2} \\ &= \int_{-\infty}^0 \underbrace{\{x\}}_{=MX} dx \end{aligned}$$

Therefore,

$$DX = \frac{2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Example 2. Let $X \sim N(\mu; \sigma^2)$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}; x \in \mathbb{R}$$

$$MX = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \mu \quad m = \mu =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (t + \mu) e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} te^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt + \mu \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt = \mu$$

$$DX = M[(X - MX)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x - \mu}{\sigma} = t; dx = dt =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} te^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt^2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t de^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt = h \dots i =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} te^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} + \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt = \frac{1}{\sigma^2}$$

Свойства ковариации. Пусть X и Y — случайные величины, тогда:

$$\text{cov}(X; Y) = M[(X - m_X)(Y - m_Y)].$$

Свойства ковариации. Пусть X и Y — случайные величины, тогда:

$$\text{cov}(X; Y) = M[(X - m_X)(Y - m_Y)]$$

$$m_X = MX, m_Y = MY.$$

Свойства ковариации. Пусть X и Y — случайные величины, тогда:

Свойства ковариации. Пусть X и Y — случайные величины, тогда:

$$\text{cov}(X; Y) = \sum_i \sum_j (x_i - m_X)(y_j - m_Y)p_{ij}$$

$$p_{ij} = P\{f(X; Y) = (x_i; y_j)\}g.$$

Свойства ковариации. Пусть X и Y — случайные величины, тогда:

$$\text{cov}(X; Y) = \iint_{R^2} (x - m_X)(y - m_Y)f(x; y) dx dy$$

$$f = \text{плотность вероятности совместного распределения } X \text{ и } Y.$$

Свойства ковариации. Пусть X и Y — случайные величины, тогда:

$$D(X + Y) = DX + DY + 2 \text{cov}(X; Y);$$

$$\text{cov}(X; X) = DX;$$

$$\text{cov}(X, Y) = 0, \text{ если } X \text{ и } Y \text{ независимы};$$

$$\text{cov}(a_1X + b_1; a_2Y + b_2) = a_1a_2 \text{cov}(X; Y)$$

$$|\text{cov}(X; Y)| \leq \sqrt{DX \cdot DY}, \text{ где } |\text{cov}(X; Y)| = \sqrt{DX \cdot DY} \text{ (и только тогда, когда } Y = aX + b \text{)}.$$

$$\text{cov}(X; Y) = M[XY] - (MX)(MY).$$

Свойства ковариации. Пусть X и Y — случайные величины, тогда:

$$\begin{aligned}
 D(X + Y) &= M[(X + Y - M[X + Y])^2] = hMX = m_1; MY = m_2 i = \\
 &= M[(X - m_1)(Y - m_2)]^2 = \\
 &= \left\{ \frac{M[(X - m_1)^2]}{=DX} \right\} + \left\{ \frac{M[(Y - m_2)^2]}{=DY} \right\} + 2 \left\{ \frac{M[(X - m_1)(Y - m_2)]}{\text{cov}(X; Y)} \right\} = \\
 &= DX + DY + 2 \text{cov}(X; Y)
 \end{aligned}$$

$$\text{cov}(X; X) = M[(X - m)(X - m)] = M[(X - m)^2] = DX.$$

$$\begin{aligned}
 \text{cov}(X; Y) &= M[(X - m_1)(Y - m_2)] = \\
 &= hX; Y - m_1 m_2 i = h(X - m_1)(Y - m_2) i = \\
 &= [M(X - m_1)] [M(Y - m_2)] = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{cov}(a_1 X + b_1; a_2 X + b_2) &= \\
 &= M[(a_1 X + b_1 - M(a_1 X + b_1))(a_2 X + b_2 - M(a_2 X + b_2))] = \\
 &= M[(a_1 X + b_1 - a_1 m_1 - b_1)(a_2 X + b_2 - a_2 m_2 - b_2)] = \\
 &= M[a_1 a_2 (X - m_1)(X - m_2)]
 \end{aligned}$$

$$Z(t) = tX + Y.$$

$$D[Z(t)] = D[tX + Y] = h t^2 DX + 2t \text{cov}(X; Y) + DY i =$$

$$D[Z(t)] > 0, \text{ for } t \in R, \text{ and } D \leq 0.$$

$$\frac{D}{4} = (\text{cov}(X; Y))^2 - DX \cdot DY \leq 0 \Rightarrow |\text{cov}(X; Y)| \leq \sqrt{DX \cdot DY}$$

$$\Rightarrow \text{cov}(X; Y) = \pm \sqrt{DX \cdot DY}.$$

$$\begin{aligned}
 |\text{cov}(X; Y)| &= \sqrt{DX \cdot DY} \Rightarrow \text{cov}(X; Y) = \pm \sqrt{DX \cdot DY} = 0 \Rightarrow \\
 \Rightarrow D[Z(t)] &= t^2 DX + 2t \text{cov}(X; Y) + DY = t^2 DX + 2t \cdot 0 + DY = t^2 DX + DY \\
 \Rightarrow D[Z(a)] &= 0 \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow Z(a) &= aX + Y = b \Rightarrow Z(a) = aX + Y = b \Rightarrow \\
 \Rightarrow Y &= aX + b
 \end{aligned}$$

Значит, $\rho(Z(a)) = 0$.

$$\begin{aligned} Y = aX + b \Rightarrow \rho(Z(a)) = \frac{b}{DX} \Rightarrow D[Z(a)] = 0 \Rightarrow \rho(Z(a)) = 0 \\ \Rightarrow \text{cov}(X; Y) = \frac{DZ(a)}{DX} = \frac{b}{DX}. \end{aligned}$$

■.

$$\begin{aligned} \text{cov}(X; Y) &= M[(X - m_X)(Y - m_Y)] = M[XY - m_Y X + m_X Y - m_X m_Y] = \\ &= M[XY] - m_Y M[X] + m_X M[Y] - m_X m_Y = M[XY] - m_X m_Y \end{aligned}$$

Вспомогательная теорема. Пусть X и Y — независимые случайные величины. Тогда $\text{cov}(X; Y) = 0$.
 Доказательство. По определению ковариации $\text{cov}(X; Y) = M[(X - m_X)(Y - m_Y)]$. Поскольку X и Y независимы, то $(X - m_X)$ и $(Y - m_Y)$ также независимы. Следовательно, $M[(X - m_X)(Y - m_Y)] = M[X - m_X] M[Y - m_Y] = 0 \cdot 0 = 0$.
 Таким образом, $\text{cov}(X; Y) = 0$.

■ $\rho(X; Y) = \frac{\text{cov}(X; Y)}{\sqrt{DX} \sqrt{DY}}$.

Доказательство. По определению коэффициента корреляции $\rho(X; Y) = \frac{\text{cov}(X; Y)}{\sqrt{DX} \sqrt{DY}}$.

$$\text{cov}(X; Y) = M[(X - m_X)(Y - m_Y)]$$

$$m_X = MX, m_Y = MY.$$

Вспомогательная теорема. Пусть X и Y — независимые случайные величины. Тогда $\rho(X; Y) = 0$.
 Доказательство. По определению коэффициента корреляции $\rho(X; Y) = \frac{\text{cov}(X; Y)}{\sqrt{DX} \sqrt{DY}}$. Поскольку $\text{cov}(X; Y) = 0$, то $\rho(X; Y) = 0$.

$$\rho(X; Y) = \rho_{XY} = \frac{\text{cov}(X; Y)}{\sqrt{DX} \sqrt{DY}}$$

$$\rho_{XY} \sqrt{DX} \sqrt{DY} > 0.$$

Вспомогательная теорема. Пусть X и Y — независимые случайные величины. Тогда $\rho_{XX} = 1$.

$$\rho_{XX} = 1;$$

$$\rho_{XY} = \rho_{YX}; \text{ если } X \text{ и } Y \text{ независимы, то } \rho_{XY} = 0;$$

$$\rho(a_1 X + b_1; a_2 Y + b_2) = \rho(X; Y), \text{ если } a_1 a_2 > 0;$$

$$\text{и } a_1 a_2 < 0;$$

Группа X — группа автоморфизмов. Пусть $X = f1; 2; 3; 4; 5; 6 g$.

1. Пусть \mathcal{A} — алгебра, порожденная элементами

e_1, \dots, e_n . Пусть $n = jXj$ и m — натуральное число. Пусть X , m — натуральное число.

2. Пусть C_n^m —

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

3. Пусть \mathcal{A} — алгебра, порожденная элементами

e_1, \dots, e_n . Пусть $n = jXj$ и m — натуральное число. Пусть X .

4. Пусть $(1; 2; 4)$, $(5; 5; 4)$.

5. Пусть A_n^m —

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

6. Пусть \mathcal{A} — алгебра, порожденная элементами

e_1, \dots, e_n . Пусть $n = jXj$ и m — натуральное число. Пусть X .

7. Пусть $P_n = A_n^n = n!$

8. Пусть $A_n^m = P_m C_n^m$

$$A_n^m = P_m C_n^m$$

2. \mathbb{R}^n - n -мерное евклидово пространство.

3. \mathbb{R}^n - n -мерное евклидово пространство. $n = jXj$ - m - n -мерное евклидово пространство.

4. \mathbb{R}^n - n -мерное евклидово пространство. $(1; 2; 3; 4; 5); (1; 4; 4; 4; 2)$.

5. \mathbb{R}^n - n -мерное евклидово пространство.

$$A_n^m = n^m$$

6. \mathbb{R}^n - n -мерное евклидово пространство.

7. \mathbb{R}^n - n -мерное евклидово пространство. $n = jXj$ - m - n -мерное евклидово пространство. $x_i \in X$ - n_i ; $i = \overline{1; k}$ - n -мерное евклидово пространство.

8. \mathbb{R}^n - n -мерное евклидово пространство.

$$P_n(n_1; n_2; \dots; n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}; n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$$