Математическая статистика, ИУ7-66

Домашняя работа №1
Вариант 3

Задача 1

Математическое ожидание скорости ветра у земли в данной местности составляет 8 км/ч. Оценить вероятность того, что скорость ветра превысит 20 км/ч и что она будет меньше 50 км/ч. Как изменятся искомые вероятности, если будет известно, что среднее квадратичное отклонение скорости ветра равно 2 км/ч?

Решение:

I. Пусть скорости ветра у земли - случайная величина X, тогда MX = 8 км/ч.

Первое неравенство Чебышева:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P\{X \geq \varepsilon\} \leq \frac{MX}{\varepsilon}$$

Используя его, найдем $P\{X > 20\}$:

$$P\{X > 20\} < \frac{8}{20}$$

$$P\{X > 20\} < 0.4$$

Найдем $P\{X < 50\}$:

$$P\{X < 50\} = 1 - P\{X \geq 50\}$$

$$P\{X \geq 50\} \leq \frac{8}{50}$$

$$P\{X \geq 50\} \leq 0.16$$

$$P\{X < 50\} \geq 1 - 0.16$$

$$P\{X < 50\} \geq 0.84$$

II.Пусть скорости ветра у земли - случайная величина X, тогда MX = 8 км/ч, $\sigma = 2$ км/ч.

Второе неравенство Чебышева:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P\{|X - m| \leq \varepsilon\} \geq 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

Используя его, найдем $P\{X > 20\}$:

$$P\{X > 20\} = 1 - P\{X \le 20\} = 1 - P\{X - 8 \le 12\}$$

$$P\{X - 8 \le 12\} \ge 1 - \frac{2^2}{12^2}$$

$$P\{X - 8 \le 12\} \ge \frac{1}{36}$$

$$P\{X > 20\} \le 0.027$$

Найдем $P\{X < 50\}$:

$$P\{X < 50\} = P\{X - 8 < 42\}$$

$$P\{X - 8 < 42\} > 1 - \frac{2^2}{42^2}$$

$$P\{X - 8 < 42\} > \frac{440}{441}$$

$$P\{X < 50\} > 0.997$$

Ответ:

I. $P\{X > 20\} < 0.4$, $P\{X < 50\} \ge 0.84$

II. $P\{X > 20\} \le 0.027$, $P\{X < 50\} > 0.997$

Задача 2

С использованием метода моментов для случайной выборки $\vec{X} = (X_1, ..., X_n)$ из генеральной совокупности X найти точечные оценки указанных параметров заданного закона распределения.

$$f_X(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, \quad x > 0$$

Решение:

Закон распределения случайной величины X зависит от двух неизвестных параметров, поэтому система метода моментов будет содержать два уравнения.

Можно заметить, что $X \sim \Gamma(\alpha, \frac{1}{\lambda})$.

Функция плотности СВ X, имеющей гамма-распределение ($X \sim \Gamma(k, \lambda)$):

$$f_X(x) = \frac{x^{a-1}}{b^a \Gamma(a)} e^{-\frac{x}{b}}, \quad x > 0$$

Мат. ожидание и дисперсия гамма-распределения:

$$MX = ab$$

$$DX = ab^2$$

Дано распределение

$$f_X(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, \quad x > 0$$

Его мат. ожидание и дисперсия:

$$MX = \frac{\alpha}{\lambda}$$

$$DX = \frac{\alpha}{\lambda^2}$$

Необходимо решить систему

$$\begin{cases} m_1(\lambda, \alpha) = \hat{\mu}_1(\vec{X}) \\ \overset{\circ}{m}_2 (\lambda, \alpha) = \hat{\nu}_1(\vec{X}) \end{cases}$$

Т. к. $m_1(\lambda, \alpha) = MX$ и $\hat{\mu}_1(\vec{X}) = \overline{X}$ первое уравнение системы примет вид:

$$\frac{\alpha}{\lambda} = \overline{X}$$

Т. к. $\overset{\circ}{m}_2 (\lambda, \alpha) = DX$ и $\hat{\nu}_1(\vec{X}) = \hat{\sigma}^2(\vec{X})$ второе уравнение системы примет вид:

$$\frac{\alpha}{\lambda^2} = \hat{\sigma}^2(\vec{X})$$

Получаем систему

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha}{\lambda} = \overline{X} \\ \\ \dfrac{\alpha}{\lambda^2} = \hat{\sigma}^2(\vec{X}) \end{cases}$$

Выразим α:

$$\alpha = \lambda \overline{X}$$

Подставим во второе уравнение

$$\frac{\lambda \overline{X}}{\lambda^2} = \hat{\sigma}^2(\vec{X})$$

$$\frac{\overline{X}}{\lambda} = \hat{\sigma}^2(\vec{X})$$

$$\lambda = \frac{\overline{X}}{\hat{\sigma}^2(\vec{X})} = \frac{n\overline{X}}{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2}$$

$$\alpha = \frac{\overline{X}^2}{\hat{\sigma}^2(\vec{X})} = \frac{n\overline{X}^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2}$$

Ответ:

$$\lambda = \frac{n\overline{X}}{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2}, \quad \alpha = \frac{n\overline{X}^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2}$$

Задача 3

С использованием метода максимального правдоподобия для случайной выборки $\vec{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ из генеральной совокупности X найти точечные оценки параметров заданного закона распределения. Вычислить выборочные значения найденных оценок для выборки $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_5)$.

$$f_X(x) = \frac{1}{\theta\sqrt{2\pi x}} e^{-x/(2\theta^2)}, \quad x > 0$$

$$\vec{x} = (4.2,\ 7.8,\ 16.3,\ 11.6,\ 8.3)$$

Решение:

Функция правдоподобия:

$$L(\vec{x}, \theta) = f(x_1, \theta) \cdot ... \cdot f(x_n, \theta)$$

$$L(\vec{x}, \theta) = \left(\frac{1}{\theta\sqrt{2\pi x_1}} e^{-x_1/(2\theta^2)}\right) \cdot ... \cdot \left(\frac{1}{\theta\sqrt{2\pi x_n}} e^{-x_n/(2\theta^2)}\right) = (2\pi)^{(n/2)} \cdot \theta^{(-n)} \cdot \left(\prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{x_i}}\right) \cdot exp\left(-\frac{1}{2\theta^2} \sum_{i=1}^n x_i\right)$$

Необходимо максимизировать $L(\vec{x}, \theta)$.

Натуральный логарифм является монотонно возрастающей функцией, поэтому можем максимизировать $lnL(\vec{x}, \theta)$, что будет удобнее.

$$lnL(\vec{x}, \theta) = \frac{n}{2}\ln(2\pi) - n\ln\theta + \ln\prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{x_i}} - \frac{1}{2\theta^2}\sum_{i=1}^n x_i$$

Необходимое условие экстремума:

$$\frac{\partial \ln L(\vec{x}, \theta)}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{n}{\theta} - \frac{1}{\theta^3}\sum_{i=1}^n x_i = 0$$

$$\theta^2 n - \sum_{i=1}^n x_i = 0$$

$$\theta^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \overline{X}$$

$$\hat{\theta} = \sqrt{\overline{X}}, \ \ \hat{\theta} = -\sqrt{\overline{X}}$$

Отрицательное значение θ не удовлетворяет свойству не отрицательности функции плотности.

$$\hat{\theta} = \sqrt{\overline{X}},$$

Проверим достаточное условие максимума:

$$\left.\frac{\partial^2 \ln L(\vec{x},\theta)}{\partial\theta^2}\right|_{\theta=\hat{\theta}} < 0$$

$$\left.\frac{n}{\theta^2} - \frac{3}{\theta^4}\sum_{i=1}^{n} x_i\right|_{\theta=\sqrt{\overline{X}}} < 0$$

$$\frac{n}{\overline{X}} - \frac{3n\overline{X}}{\overline{X}^2} < 0$$

$$-\frac{2n}{\overline{X}} < 0$$

Таким образом, действительно, $\hat{\theta} = \sqrt{\overline{X}}$.

Для выборки $\vec{x} = (4.2,\ 7.8,\ 16.3,\ 11.6,\ 8.3)$:

$$\hat{\theta} = \sqrt{\frac{4.2 + 7.8 + 16.3 + 11.6 + 8.3}{5}} = \sqrt{9.64} \approx 3.105$$

Ответ:

$\hat{\theta} = \sqrt{\overline{X}}$,

для выборки $\vec{x} = (4.2,\ 7.8,\ 16.3,\ 11.6,\ 8.3)$ $\ \hat{\theta} \approx 3.105$

Задача 4

Оценка значений сопротивления партии из n = 100 однотипных резисторов, составила $\overline{X}_n$ = 10 кОм. Считая, что ошибки измерений распределены по нормальному закону со среднеквадратичным отклонением σ = 1 кОм, найти вероятность того, что для резисторов всей партии среднее значение сопротивления лежит в пределах 10 ± 0.1 кОм.

Решение:

$X \sim N(m,\sigma)$

Известно, что доверительная оценка для математического ожидания при известной дисперсии находится:

$$P\left\{\overline{X_n} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha} < MX < \overline{X_n} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha}\right\} = 1 - 2\alpha,$$

где

$u_{1-\alpha}$ – квантиль уровня $1-\alpha$ стандартного нормального распределения,

n – объем выборки.

Необходимо найти значение α. Имеем $n = 100$, $\sigma = 1$.

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha} = 0.1$$

$$\frac{1}{\sqrt{100}} u_{1-\alpha} = 0.1$$

$$u_{1-\alpha} = \frac{0.1 \cdot \sqrt{100}}{1}$$

$$u_{1-\alpha} = 1$$

Из таблицы определим уровень квантиля $u_{1-\alpha}$:

$$1 - \alpha \approx 0.84 \Rightarrow \alpha = 0.16$$

$$P\{\overline{X_n} - 0.1 < MX < \overline{X_n} + 0.1\} = 1 - 2 \cdot 0.16 = 0.68$$

Ответ:

$$P\{\overline{X_n} - 0.1 < MX < \overline{X_n} + 0.1\} = 0.68$$