Il Lemma di Farkas

Gabriele Rastello

16 aprile 2020

1 Problemi lineari

> Linear programming, surprisingly, is not directly related to computer programming.
>
> *Jiri Matousek, Bernd Garter*

Sono problemi lineari tutti quei problimi in cui ci si prefigge di trovare il valore massimo (o minimo) che una certa funzione lineare di n variabili può assumere, dato un qualche numero di vincoli (anche essi lineari) su queste variabili. Prima di definire formalmente un problema lineare consideriamo un esempio.

Esempio 1.1.

$$\begin{array}{ll} \text{Massimizza} & x_1 + x_2 \\ \text{rispetto ai vincoli} & x_1, x_2 \geq 0 \\ & x_2 - x_1 \leq 1 \\ & x_1 + 6x_2 \leq 15 \\ & 4x_1 - x_2 \leq 10 \end{array}$$

In $\mathbb{R}^2$ ogni vincolo individua un semipiano. La zona di $\mathbb{R}^2$ su cui vogliamo massimizzare $x_1 + x_2$ è dunque l'intersezione di tutti questi semipiani ed è rappresentata in Figura 1.1. Osserviamo che quest'area non è vuota e che è un poligono convesso. Esiste dunque una coppia (x_1^*, x_2^*) che massimizza $x_1 + x_2$; la coppia in questione può essere ottenuta cercando quale punto del poligono si trova "più distante" nella direzione di massima crescita della funzione (data dal suo gradiente $(1, 1)$). Otteniamo così $x_1^* = 3, x_2^* = 2$ e infine che il valore massimo di $x_1 + x_2$ rispetto ai vincoli dati è 5.

Definizione 1.2. Un **problema lineare** consiste in una funzione lineare di n variabili detta **funzione obiettivo** (o **funzione di costo**) e in un insieme di m vincoli lineari. La funzione obiettivo ha la forma $\mathbf{c}^T\mathbf{x} = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n$ per qualche $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$; lo stesso si

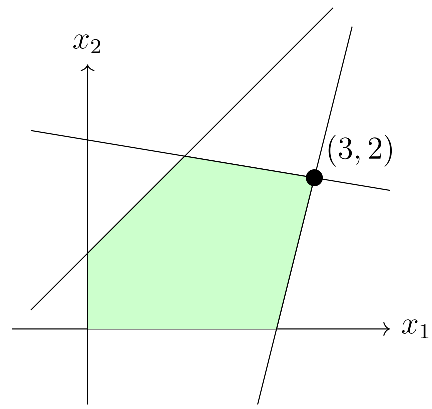

Figura 1.1

applica ai vincoli. Dare un problema lineare è allora equivalente a dare un vettore $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, una matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e un vettore $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Scriveremo compattamente

$$\begin{array}{ll} \text{Massimizza} & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{rispetto ai vincoli} & A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}. \end{array}$$

Osservazione 1.3. La Definizione 1.2 è del tutto generale. Infatti un problema di minimizzazione può essere trasformato in uno di massimizzazione cambiando segno alla funzione obiettivo. I vincoli espressi tramite un'uguaglianza $\mathbf{a}^T\mathbf{x} = b$ sono equivalenti alla coppia di disuguaglianze $\mathbf{a}^T\mathbf{x} \geq b$, $\mathbf{a}^T\mathbf{x} \leq b$. Ed infine le disuguaglianze possono essere espresse tutte quante nella forma $\mathbf{a}^T\mathbf{x} \leq b$ e.