

# Il Lemma di Farkas

Gabriele Rastello

16 aprile 2020

## 1 Problemi lineari

Linear programming, surprisingly, is not directly related to computer programming.

---

*Jiri Matousek, Bernd Gartner*

Sono problemi lineari tutti quei problemi in cui ci si prefigge di trovare il valore massimo (o minimo) che una certa funzione lineare di  $n$  variabili può assumere, dato un qualche numero di vincoli (anche essi lineari) su queste variabili. Prima di definire formalmente un problema lineare consideriamo un esempio.

### Esempio 1.1.

$$\begin{array}{ll} \text{Massimizza} & x_1 + x_2 \\ \text{rispetto ai vincoli} & x_1, x_2 \geq 0 \\ & x_2 - x_1 \leq 1 \\ & x_1 + 6x_2 \leq 15 \\ & 4x_1 - x_2 \leq 10 \end{array}$$

In  $\mathbb{R}^2$  ogni vincolo individua un semipiano. La zona di  $\mathbb{R}^2$  su cui vogliamo massimizzare  $x_1 + x_2$  è dunque l'intersezione di tutti questi semipiani ed è rappresentata in Figura 1.1. Osserviamo che quest'area non è vuota e che è un poligono convesso. Esiste dunque una coppia  $(x_1^*, x_2^*)$  che massimizza  $x_1 + x_2$ ; la coppia in questione può essere ottenuta cercando quale punto del poligono si trova “più distante” nella direzione di massima crescita della funzione (data dal suo gradiente  $(1, 1)$ ). Otteniamo così  $x_1^* = 3, x_2^* = 2$  e infine che il valore massimo di  $x_1 + x_2$  rispetto ai vincoli dati è 5.

**Definizione 1.2.** Un **problema lineare** consiste in una funzione lineare di  $n$  variabili detta **funzione obiettivo** (o **funzione di costo**) e in un insieme di  $m$  vincoli lineari. La funzione obiettivo ha la forma  $\mathbf{c}^T \mathbf{x} = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$  per qualche  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ ; lo stesso si

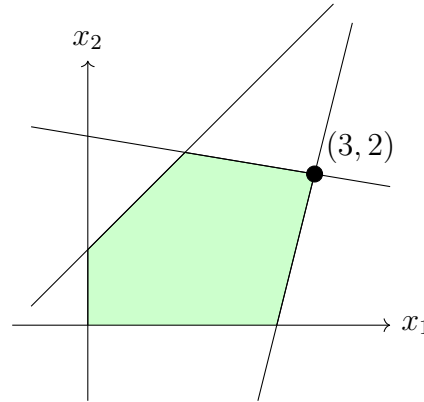


Figura 1.1

applica ai vincoli. Dare un problema lineare è allora equivalente a dare un vettore  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ , una matrice  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e un vettore  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ . Scriveremo compattamente

$$\begin{array}{ll} \text{Massimizza} & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{rispetto ai vincoli} & A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}. \end{array}$$

**Osservazione 1.3.** La Definizione 1.2 è del tutto generale. Infatti un problema di minimizzazione può essere trasformato in uno di massimizzazione cambiando segno alla funzione obiettivo. I vincoli espressi tramite un'uguaglianza  $\mathbf{a}^T \mathbf{x} = b$  sono equivalenti alla coppia di disuguaglianze  $\mathbf{a}^T \mathbf{x} \geq b$ ,  $\mathbf{a}^T \mathbf{x} \leq b$ . Ed infine le disuguaglianze possono essere espresse tutte quante nella forma  $\mathbf{a}^T \mathbf{x} \leq b$ .

**Definizione 1.4.** Un vettore  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  che soddisfa tutti i vincoli di un problema lineare è una **soluzione possibile** per il problema. Un problema è **soddisfacibile** se ammette una soluzione possibile ed è **insoddisfacibile** altrimenti. Una soluzione possibile  $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$  è una **soluzione ottimale** se  $\mathbf{c}^T \mathbf{x}^*$  è massimo tra i valori  $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$  con  $\mathbf{x}$  soluzione possibile.

**Osservazione 1.5.** Va osservato che, generalmente, un sistema lineare può avere più di una soluzione ottimale; come esempio si considerino i vincoli dell'Esercizio 1.1 applicati però alla funzione obiettivo  $\frac{1}{6}x_1 + x_2$ . È inoltre vero che, anche se un sistema è soddisfacibile, possono non esistere soluzioni ottimali; come esempio basta rimuovere i vincoli  $x_1 + 6x_2 \leq 15$  e  $4x_1 - x_2 \leq 10$  dall'Esercizio 1.1.

**Definizione 1.6.** Se un problema lineare ammette (almeno) una soluzione ottimale allora è detto **limitato**; se non ne ammette viene detto **illimitato**.

**Esempio 1.7.** Dato un insieme di punti  $\{(x_i, y_i) : i = 1, \dots, n\}$  di  $\mathbb{R}^2$  è possibile ottenere l'equazione di una retta che si avvicina il più possibile ai punti dati usando il *metodo dei minimi quadrati*. L'intera tecnica è basata sul cercare  $a, b \in \mathbb{R}$  tali che

$$\sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2$$

sia minimo. Un metodo alternativo (per certi lati migliore) consiste nel minimizzare direttamente la somma degli errori in valore assoluto:

$$\sum_{i=1}^n |ax_i + b - y_i|. \quad (*)$$

Seppure questa quantità non sia lineare il problema può essere ridotto ad un problema lineare. Si consideri infatti il problema

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizza} & e_1 + \dots + e_n \\ \text{rispetto ai vincoli} & e_i \geq ax_i + b - y_i \\ & e_i \geq -(ax_i + b - y_i) \quad , \text{ con } i = 1, \dots, n. \end{array}$$

Le variabili qui sono  $a, b, e_1, \dots, e_n$ . Ogni  $e_i$  è una variabile ausiliaria che rappresenta l'errore relativo al punto  $(x_i, y_i)$ ; infatti i vincoli ci assicurano che

$$e_i \geq \max(ax_i + b - y_i, -(ax_i + b - y_i)) = |ax_i + b - y_i|.$$

Nel caso di una soluzione ottimale tutte queste disuguaglianze devono valere come uguaglianze, altrimenti sarebbe possibile ridurre ulteriormente il corrispettivo  $e_i$ . Ne consegue che una soluzione ottimale del problema fornisce una retta che minimizza (\*).