

# Il Lemma di Farkas

Gabriele Rastello

17 aprile 2020

## Indice

|          |  |          |
|----------|--|----------|
| <b>1</b> | <b>Problemi lineari</b>  | <b>1</b> |
| <b>2</b> | <b>Dualità e Lemma di Farkas</b>                                   | <b>4</b> |
| 2.1      | Problemi lineari duali e Teorema di Dualità . . . . .              | 4        |
| 2.2      | Il Lemma di Farkas . . . . .                                       | 4        |
| 2.3      | Dimostrazione del Teorema di Dualità dal Lemma di Farkas . . . . . | 4        |

## 1 Problemi lineari

Linear programming, surprisingly, is not directly related to computer programming.

---

*Jiri Matousek, Bernd Gartner*

Sono problemi lineari tutti quei problemi in cui ci si prefigge di trovare il valore massimo (o minimo) che una certa funzione lineare di  $n$  variabili può assumere, dato un qualche numero di vincoli (anche essi lineari) su queste variabili. Prima di definire formalmente un problema lineare consideriamo un esempio.

### Esempio 1.1.

$$\begin{array}{ll} \text{Massimizza} & x_1 + x_2 \\ \text{rispetto ai vincoli} & x_1, x_2 \geq 0 \\ & x_2 - x_1 \leq 1 \\ & x_1 + 6x_2 \leq 15 \\ & 4x_1 - x_2 \leq 10 \end{array}$$

In  $\mathbb{R}^2$  ogni vincolo individua un semipiano. La zona di  $\mathbb{R}^2$  su cui vogliamo massimizzare  $x_1 + x_2$  è dunque l'intersezione di tutti questi semipiani ed è rappresentata in Figura 1.1. Osserviamo che quest'area non è vuota e che è un poligono convesso. Esiste dunque una

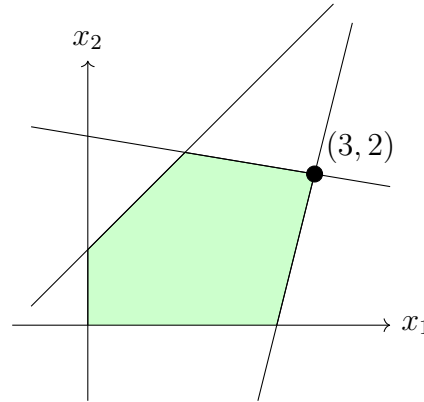


Figura 1.1

coppia  $(x_1^*, x_2^*)$  che massimizza  $x_1 + x_2$ ; la coppia in questione può essere ottenuta cercando quale punto del poligono si trova “più distante” nella direzione di massima crescita della funzione (data dal suo gradiente  $(1, 1)$ ). Otteniamo così  $x_1^* = 3, x_2^* = 2$  e infine che il valore massimo di  $x_1 + x_2$  rispetto ai vincoli dati è 5.

**Definizione 1.2.** Un **problema lineare** consiste in una funzione lineare di  $n$  variabili detta **funzione obiettivo** (o **funzione di costo**) e in un insieme di  $m$  vincoli lineari. La funzione obiettivo ha la forma  $\mathbf{c}^T \mathbf{x} = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$  per qualche  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ ; lo stesso si applica ai vincoli. Dare un problema lineare è allora equivalente a dare un vettore  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ , una matrice  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e un vettore  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ . Scriveremo compattamente

$$\begin{array}{ll} \text{Massimizza} & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{rispetto ai vincoli} & A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}. \end{array}$$

**Osservazione 1.3.** La Definizione 1.2 è del tutto generale. Infatti un problema di minimizzazione può essere trasformato in uno di massimizzazione cambiando segno alla funzione obiettivo. I vincoli espressi tramite un’uguaglianza  $\mathbf{a}^T \mathbf{x} = b$  sono equivalenti alla coppia di disuguaglianze  $\mathbf{a}^T \mathbf{x} \geq b, \mathbf{a}^T \mathbf{x} \leq b$ . Ed infine le disuguaglianze possono essere espresse tutte quante nella forma  $\mathbf{a}^T \mathbf{x} \leq b$ .

**Definizione 1.4.** Un vettore  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  che soddisfa tutti i vincoli di un problema lineare è una **soluzione possibile** per il problema. Un problema è **soddisfacibile** se ammette una soluzione possibile ed è **insoddisfacibile** altrimenti. Una soluzione possibile  $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$  è una **soluzione ottimale** se  $\mathbf{c}^T \mathbf{x}^*$  è massimo tra i valori  $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$  con  $\mathbf{x}$  soluzione possibile.

**Osservazione 1.5.** Va osservato che, generalmente, un sistema lineare può avere più di una soluzione ottimale; come esempio si considerino i vincoli dell’Esercizio 1.1 applicati però alla funzione obiettivo  $\frac{1}{6}x_1 + x_2$ . È inoltre vero che, anche se un sistema è soddisfacibile, possono non esistere soluzioni ottimali; come esempio basta rimuovere i vincoli  $x_1 + 6x_2 \leq 15$  e  $4x_1 - x_2 \leq 10$  dall’Esercizio 1.1.

**Definizione 1.6.** Se un problema lineare ammette (almeno) una soluzione ottimale allora è detto **limitato**; se non ne ammette viene detto **illimitato**.

Concludiamo la sezione con un esempio di applicazione dei problemi lineari all'analisi numerica (in particolare alla regressione lineare) e con un'osservazione sulla difficoltà computazionale della ricerca di soluzioni (possibili e ottimali) ad un dato problema lineare.

**Esempio 1.7.** Dato un insieme di punti  $\{(x_i, y_i) : i = 1, \dots, n\}$  di  $\mathbb{R}^2$  è possibile ottenere l'equazione di una retta che si avvicina il più possibile ai punti dati usando il *metodo dei minimi quadrati*. L'intera tecnica è basata sul cercare  $a, b \in \mathbb{R}$  tali che

$$\sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2$$

sia minimo. Un metodo alternativo (e per certi lati migliore) consiste nel minimizzare direttamente la somma degli errori in valore assoluto:

$$\sum_{i=1}^n |ax_i + b - y_i|. \quad (*)$$

Seppure questa quantità non sia lineare il problema può essere ridotto ad un problema lineare. Si consideri infatti il problema

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizza} & e_1 + \dots + e_n \\ \text{rispetto ai vincoli} & e_i \geq ax_i + b - y_i \\ & e_i \geq -(ax_i + b - y_i) \quad , \text{ con } i = 1, \dots, n. \end{array}$$

Le variabili qui sono  $a, b, e_1, \dots, e_n$ . Ogni  $e_i$  è una variabile ausiliaria che rappresenta l'errore relativo al punto  $(x_i, y_i)$ ; infatti i vincoli ci assicurano che

$$e_i \geq \max(ax_i + b - y_i, -(ax_i + b - y_i)) = |ax_i + b - y_i|.$$

Nel caso di una soluzione ottimale tutte queste disuguaglianze devono valere come uguaglianze, altrimenti sarebbe possibile ridurre ulteriormente il corrispettivo  $e_i$ . Ne consegue che una soluzione ottimale del problema fornisce una retta che minimizza (\*).

**Osservazione 1.8.** Consideriamo un problema lineare generico

$$\begin{array}{ll} \text{Massimizza} & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{rispetto ai vincoli} & \mathbf{A} \mathbf{x} \leq \mathbf{b}. \end{array}$$

e supponiamo di sapere che  $0 \leq \mathbf{c}^T \mathbf{x} \leq M$  per un  $M \in \mathbb{R}$  e ogni soluzione possibile  $\mathbf{x}$ . Supponiamo inoltre di avere una procedura che ci permetta di sapere quando un arbitrario problema lineare è soddisfacibile. Allora possiamo approssimare il valore massimo di  $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$  con una tecnica di ricerca binaria:

- (1) aggiungiamo al problema iniziale il vincolo  $\mathbf{c}^T \mathbf{x} \geq \frac{M}{2}$  e determiniamo se questo nuovo problema è soddisfacibile,
- (2) se lo è allora il massimo di  $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$  si trova tra  $\frac{M}{2}$  e  $M$ , altrimenti si trova tra 0 e  $\frac{M}{2}$ ,
- (3) ripetendo i passi (1) e (2) su questo nuovo intervallo possiamo molto velocemente localizzare il massimo.

Questo ci dice che, computazionalmente, il problema di ricerca di una soluzione ottimale è tanto difficile quanto quello di ricerca di una soluzione qualunque.

## 2 Dualità e Lemma di Farkas

### 2.1 Problemi lineari duali e Teorema di Dualità

**Osservazione 2.1.** Consideriamo un problema lineare

$$\begin{array}{ll} \text{Massimizza} & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{rispetto ai vincoli} & \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}. \end{array} \quad (P)$$

Per ogni  $x_i$  si considerino due variabili  $y_i, y'_i$  e si sostituisca ogni occorrenza di  $x_i$  nel problema con  $y_i - y'_i$ . Aggiungendo i vincoli  $\mathbf{y}, \mathbf{y}' \geq 0$  si ottiene un secondo problema lineare

$$\begin{array}{ll} \text{Massimizza} & \mathbf{c}'^T \mathbf{z} \\ \text{rispetto ai vincoli} & \mathbf{A}'\mathbf{z} \leq \mathbf{b}' \\ & \mathbf{z} \geq 0 \end{array} \quad (P^*)$$

nelle variabili  $\mathbf{y}, \mathbf{y}'$  (qui rappresentate come un unico gruppo  $\mathbf{z}$  per semplicità) che è del tutto equivalente al sistema di partenza. Infatti una soluzione del primo fornisce una soluzione del secondo perché ogni numero reale può essere scritto come differenza di due reali positivi; mentre ogni soluzione del secondo fornisce una soluzione del primo ottenuta come  $x_i = y_i - y'_i$ . È dunque sempre possibile supporre che un problema lineare sia dato nella forma  $(P^*)$ .

### 2.2 Il Lemma di Farkas

### 2.3 Dimostrazione del Teorema di Dualità dal Lemma di Farkas

## Riferimenti bibliografici

- [1] Jiri Matousek & Bernd Gartner, *Understanding and Using Linear Programming*, Springer, 2007.