Analisi Matematica I 21/10

$\mathbb{R}$

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ $\mathbb{R}^* = \{\mathbb{R}; -\infty; +\infty\}$

$A \subseteq \mathbb{R} \quad A \neq \{\} \Rightarrow \nexists M(A)$

$M(A) = m^{\in A} / \forall x \in A \nexists x > m$

$\exists M(A) \Rightarrow \exists! M(A)$

Assurdo

$\exists M_1(A), M_2(A) \quad M_1(A) \neq M_2(A)$

$M_1(A) \geq x / \forall x \in A, \; M_1(A) \in A$

$M_2(A) \geq x / \forall x \in A, \; M_2(A) \in A$

$M_1 \geq M_2$ $\Downarrow$ $M_1 = M_2$ ■

$M_1 > M_2$ $\Downarrow$ $M_2 \notin M(A)$

Insieme limitato superiormente

$\Leftarrow \exists$ Maggiorante(A)

$A \subseteq \mathbb{R} \quad A \neq \{\}$

$A \in$ Limitato Superiormente $\Leftarrow \exists L \in \mathbb{R} / L \geq a \; \forall a \in A$

Insieme Limitato Inferiormente

$\Leftarrow \exists$ Minorante (A)

$A \subseteq \mathbb{R}$ $A \neq \{\}$

$A \in$ Limitata Inferiormente $\Leftarrow \exists l \in \mathbb{R} / l \leq a \forall a \in A$

Insieme Limitato

$A \subseteq \mathbb{R}$ $A \neq \{\}$

$A \in$ Limitata $\Leftarrow$ $A \in$ Limitata Superiormente,
$A \in$ Limitata Inferiormente

Maggiorante

$A \subseteq \mathbb{R}$ $A \neq \{\}$

$M \in \mathbb{R} / M \geq a \forall a \in A$

$A = (-\infty; 3)$

$\nexists$ Minorante (A)

$\nexists A \in$ Limitata Inferiormente

$\exists$ Maggiorante (A) $x \geq 3 \forall x \in \mathbb{R}$

$\sup(A) = 3$

$A \in$ Limitata Superiormente

$A \subseteq \mathbb{R}$ $A \neq \{\}$

$A \in$ Limitata Superiormente $\Leftarrow \exists L \in \mathbb{R} / L \in$ Maggiorante(A)

$A \in$ Chiusa Superiormente $\Leftrightarrow \sup(A) \equiv$ Massimo(A)

$A \subseteq \mathbb{N}$ $A \in \{\}$

$\exists$ Minimo (A)

$A \subseteq \mathbb{N}$ $A \in$ Limitato Superiormente

$\exists$ Massimo (A)

$\forall n \in \mathbb{N}$ $n \in$ Punti Isolati$(\mathbb{N})$

$+\infty \in$ Punto Di Accumulazione $(\mathbb{N})$

Proprietà di Archimede

$\forall x \in \mathbb{R} \, \exists n \in \mathbb{N} / n > x$

$\Downarrow$

$\mathbb{N} \notin$ Limitato Superiormente

$\square$ ~ Assurdo

$\forall x \in \mathbb{R} \, \nexists n \in \mathbb{N} / n > x$

$\exists x \in$ Maggiorante$(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{N} \in$ Limitato Superiormente

$\exists \sup(\mathbb{N}) = M$

$n+1 \in \mathbb{N} \rightarrow x > n+1 \rightarrow n+1 \leq M$

$n \leq M-1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$(M-1) \in$ Maggioranti$(\mathbb{N})$

$\blacksquare$ Assurdo

$\mathbb{Q} \in$ Denso $(\mathbb{R})$

$\forall a, b \in \mathbb{R} / a < b \ \exists q \in \mathbb{Q} / a < q < b$

Assioma di Completezza

① $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset$
$B \subseteq \mathbb{R}, B \neq \emptyset$ / $\exists$ Separazione (A, B)

$\forall a \in A, \forall b \in B \Rightarrow a \leq b$

$\exists c \in \mathbb{R} / a \leq c \leq b$

(DEDEKIND)

②

$A \subseteq \mathbb{R} \ A \neq \emptyset$
$B \subseteq \mathbb{R} \ B \neq \emptyset$ / $\exists$ Separazione $(A; B)$

$A \cap B = \emptyset \wedge A \cup B \equiv \mathbb{R}$

$\exists! c \in \mathbb{R} / \forall a \in A \forall b \in B \Rightarrow a \leq c \leq b$

③ Maggioranti (A) $\quad \forall A \subseteq \mathbb{R} / A \neq \emptyset$

$\Updownarrow$ A

Limitato Superiormente

$\Downarrow$

$\exists$ Minimo (Maggioranti(A))

④ $\exists$ Massimo (Minoranti(A)) $\Leftarrow$ Maggioranti(A) $\in$ Limitato Inf.

$\forall A \subseteq \mathbb{R} / A \neq \emptyset$