Pasos de Cálculo para el Modelo de Autómatas Celulares

Sergio Augusto Gélvez Cortés

May 14, 2019

Supuestos Básicos

- El modelo consta de un retículo de celdas cuadradas de dimensiones $n \times n$. Cada celda contiene valores de altitud (promedio del terreno en la celda), grosor de la capa de lava (la acumulación de lava en la celda en el área de la celda) y temperatura promedio.
- El volumen de lava en una celda (área de la celda por grosor de la capa de lava) cambia por erupción o por transporte de masa de lava.

- En caso de erupción, se incrementa el volumen de la celda, resultando en un incremento del grosor de la lava en la celda.
- La lava no se mueve de una celda a otra si el grosor de la capa de lava es inferior al grosor crítico.
- Solo hay transferencia de calor por transmisión directa de masa. No hay convección ni hay fuga hacia el suelo, lo que deja unicamente a la radiación como mecanismo de escape del calor.

Consideraciones físicas

- La lava es un fluído reológicamente complejo, del tipo Bingham.
- La viscosidad depende de la temperatura.
- Otras características físicas dependen de la temparatura a su vez.

Modelo Matemático (Miyamoto y Sasaki)

El volumen transferido esta dado por la ecuación:

$$\Delta V = \frac{\rho S_y h_c^2 w}{3\eta}\left[\left(\frac{h}{h_c}\right)^3 - \frac{3}{2}\left(\frac{h}{h_c}\right)^2 + \frac{1}{2}\right]\Delta t \qquad (1)$$

Donde:
S_y = Esfuerzo umbral (parámetro del fluido Bingham)
η = Viscosidad
h_c = Grosor crítico
w = Ancho de la celda.

El grosor crítico se define:

$$h_c = \Delta h / w \tag{2}$$

$\Delta h =$ diferencia de grosor entre las celdas.
La cantidad de calor transferido por el volumen esta dada por:

$$\Delta Q_v = \Delta V \bar{T} \tag{3}$$

$\bar{T} =$ temperatura promedio de la celda.
Las condiciones de frontera del retículo funcionan como un límite, es decir, no afectan a las celdas adyacentes.

El calor que se pierde por radiación está definido por:

$$\Delta Q_r = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = -\epsilon \sigma_{SB} T^4 \tag{4}$$

donde:
C_p : Calor específico.
ϵ : Emisividad.
σ_{SB} : Constante de Stefan-Boltzmann
$\approx 5.6704 \times 10^{-8} W m^{-2} K^{-4}$

Algoritmo Base

- Paso 1 : Inicializar, $n \times n$ asignaciones de tres variables altitud (A), temperatura (T), grosor (h), una 3-upla [A,T,h]. De momento se realiza cargando un archivo de datos de altitud, que consiste en una cuadrícula con valores asignados en cada punto. Los valores de los cráteres se piden de manera interactiva. Se asumen las celdas vacías.
- Paso 2 : Calcular viscosidad η y umbral de esfuerzo S_y, a partir de un empirismo

$$\eta = 10^{20e^{-0.0001836(T-273)}} \tag{5}$$

$$S_y = 10^{11.67-0.0089(T-273)} \tag{6}$$

- Paso 3 : Calcular h_c (grosor crítico) dado por (2).
- Paso 4 : Evaluar h, si es mayor que h_c entonces hay transferencia de materia y calor dadas por las ecuaciones (1) y (3), si no, no hay transferencia.

- Paso 5 : Reconocer si hay una salida de magma en la celda que esta siendo evaluada, si es así, se agrega volumen de magma a dicha celda, a la temperatura inicial de la erupción.
- Paso 6 : Calcular la pérdida de calor por radiación. Esta dada por:

$$\Delta Q_{rad} = \epsilon A \sigma_{SB} T^4 \Delta t \tag{7}$$

  con $A = w^2$
- Paso 7 : Sumar los cambios de calor

$$\Delta Q = \Delta Q_v - \Delta Q_{rad} \tag{8}$$

- Paso 8 : Calcular la nueva temperatura de la celda

$$\Delta T = \frac{\Delta Q}{\rho C_p A h} \tag{9}$$

$$T = T + \Delta T \tag{10}$$

con
C_p = Calor específico de la lava.

- Paso 9 : Fin de los cálculos para el intervalo de tiempo. Si la temperatura de todas las celdas es inferior al valor de solidificación se detiene el proceso, si no, se retorna al paso dos.


MY WORK HERE IS DONE
memegenerator.net