

Sistemas de Control

Sistemas de Control

Transfer Function and Impulse-Response Function

Integral De Convolucion

Diagramas De Bloques

Reduccion De Diagrama De Bloques

Transformaciones

Respuesta Con Multiple Inputs

Modelado en espacio de estados

General Representation

Applying State-Space Representation.

Correlation Between Transfer Functions and State-Space Equations

Linealizacion De Modelos No Lineales

Transfer Function and Impulse-Response Function

Un sistema linear de una single input con single output, **Linear time invariant (LTI)** system is completely described by a linear differential equation with constant coefficients:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t)$$

the coefficients a_i , b_j are constants. y suponiendo que las condiciones iniciales son 0, aplicar la transformada de Laplace nos da:

$$a_n s^n Y(s) + a_{n-1} s^{n-1} Y(s) + \dots + a_0 Y(s) = b_m s^m X(s) + b_{m-1} s^{m-1} X(s) + \dots + b_0 X(s)$$

por lo tanto podemos sacar $Y(s)$ y $X(s)$ como factor comun y escribir la relacion como una **funcion de transferencia**:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}$$

la función de transferencia nos da el ratio de la transformada de Laplace de la salida en relación con la entrada, dado que las condiciones iniciales sean 0.

el polinomio del denominador de la funcion de transferencia es llamado **polinomio característico**, mientras que la **ecuacion caracteristica** del sistema es formada cuando asumimos que el polinomio característico es igual a 0.

Propiedades del sistema tales coo la estabilidad o el comportamiento del sistema pueden ser examinados estudiando el polinomio caracteristica, podemos vera funcion de transferencia como:

$$G(s) = \frac{k(s + z_1)(s + z_2) \dots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_n)}$$

las raices del polinomio del numerador z_1, \dots, z_m son llamadas **zeros** y las raices del polinomio del denominador p_1, \dots, p_n son llamados polos, y k es la ganancia constante, la cual es siempre un numero real.

Integral De Convolucion

para un sistema linear invariante del tiempo la funcion de transferencia es:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

por lo tanto la salida puede ser escrita como:

$$Y(s) = G(s)X(s)$$

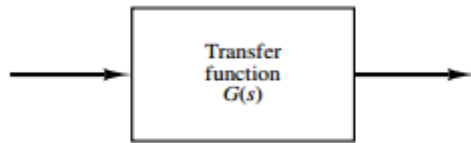
y ya sabemos que la multiplicacion en el dominio complejo es lo mismo que la convolucion en el dominio del tiempo, por lo tanto la salida es dada por:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t x(\tau)g(t - \tau) d\tau \\ &= \int_0^t g(t)x(t - \tau) dx \end{aligned}$$

donde $g(t)$ y $x(t)$ son 0 para $t < 0$, debido a las condiciones iniciales.

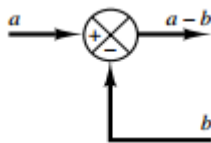
Diagramas De Bloques

un diagrama de bloques es la representacion grafica de la conexion entre subsistemas que forma un sistema. es una representacion de las funciones cumplidas por cada componente y del flujo de las señales.

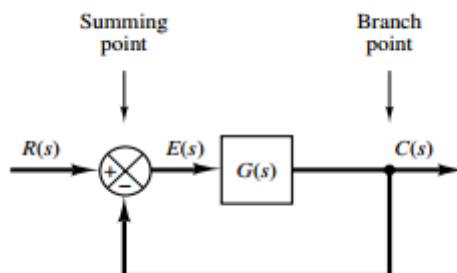


el diagrama de bloques de un sistema no es unico y puede haber multiples diagramas de bloques representando el mismo sistema.

para conectar estos bloques se pueden utilizar **puntos sumadores** los cuales indican una operacion de suma o resta.



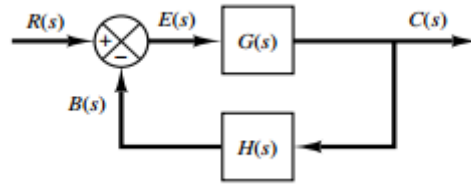
Tambien tenemos puntos de rama, desde los cuales la salida de una señal se alimenta a otros bloques o puntos sumadores:



cuando la salida es retroalimentada al punto sumador es necesario convertir la forma de la señal de salida a la misma que la de la señal de entrada.

ejemplo: digamos que tenemos un controlador de temperatura, entonces la salida va a ser la temperatura controlada, pero no podemos simplemente alimentarle una temperatura a esto, le tenemos que alimentar un voltaje, por lo tanto hace falta convertir esa temperatura de salida en un voltaje antes de retroalimentarlo a la entrada.

Esta conversión es hecha por un elemento de retroalimentación con una función de transferencia $H(s)$.



Aca tenemos un sistema de lazo cerrado donde tenemos una entrada de referencia $R(s)$, una salida $C(s)$ y una retroalimentación $B(s)$, la cual estará definida por la función de retroalimentación y la salida, es decir $B(s) = H(s)C(s)$, y un error proveniente de la comparación entre la referencia y B , $E(s)$.

En este diagrama también podemos observar la *función de transferencia de lazo abierto*, la cual es es:

$$\text{Open-loop transfer function} = \frac{B(s)}{E(s)} = G(s)H(s)$$

la señal de retroalimentación $B(s)$ en relación de el error de la señal $E(s)$.

También llamamos a la relación entre la salida $C(s)$ y el error de la señal $E(s)$ como *función de transferencia de propagación*:

$$\text{Feedforward transfer function} = \frac{C(s)}{E(s)} = G(s)$$

si la función de transferencia de feedback es 1 entonces las funciones de transferencia de propagación y de open loop son las mismas.

vemos que la salida es:

$$C(s) = G(s)E(s)$$

pero el error está dado por la diferencia entre la referencia y la retroalimentación, por lo tanto es:

$$\begin{aligned} E(s) &= R(s) - B(s) \\ &= R(s) - H(s)C(s) \end{aligned}$$

por lo tanto la salida entonces será:

$$C(s) = G(s)[R(s) - H(s)C(s)]$$

pero queremos tener la función de transferencia que nos relacione la entrada $R(s)$ con la salida $C(s)$, por lo tanto tenemos que despejar:

$$\begin{aligned} C(s) &= G(s)R(s) - H(s)C(s)G(s) \\ C(s) + H(s)C(s)G(s) &= G(s)R(s) \\ 1 + H(s)G(s) &= G(s) \frac{R(s)}{C(s)} \\ \frac{1 + H(s)G(s)}{G(s)} &= \frac{R(s)}{C(s)} \\ \frac{C(s)}{R(s)} &= \frac{G(s)}{1 + H(s)G(s)} \end{aligned}$$

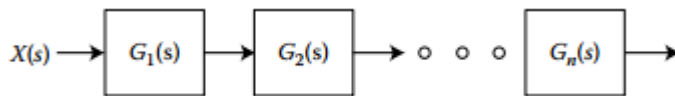
Y esta función de transferencia es la que llamamos *función de transferencia de lazo cerrado* y nos da la salida en función de la entrada:

$$C(s) = \frac{G(s)}{1 + H(s)G(s)} R(s)$$

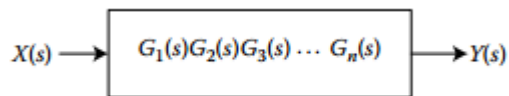
Reduccion De Diagrama De Bloques

Dado un diagrama de bloques la manera en la que se opera es la siguiente:

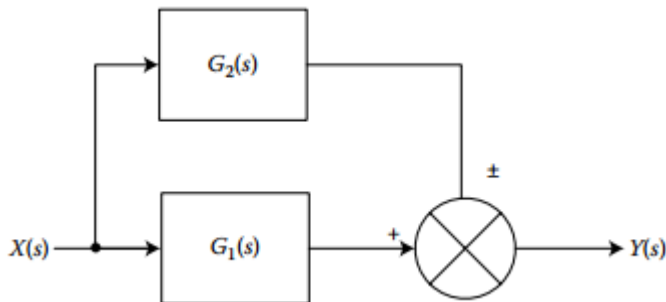
si tenemos bloques en serie, entonces se estan multiplicando las funciones de transferencia, lo que corresponde a una convolucion en dominio del tiempo:



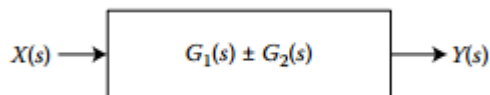
pasa a ser:



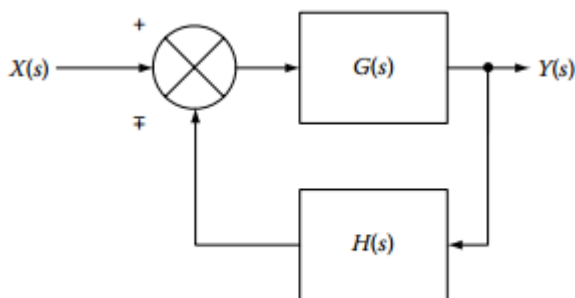
si tenemos ramas en paralelo sin feedback concluyendo en un punto sumador entonces:



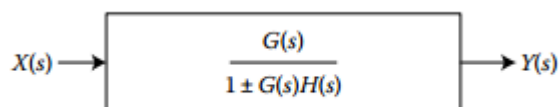
podemos representar esto como la suma de las funciones de transferencia:



si tenemos feedback entonces aplicamos la *funcion de transferencia de lazo cerrado* para representar ese subsistema.



pasa a ser:



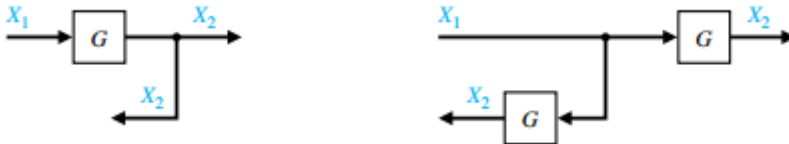
Transformaciones

Hay ciertas transformaciones que podemos utilizar para desplazar bloques y ayudarnos a simplificar estos diagramas:

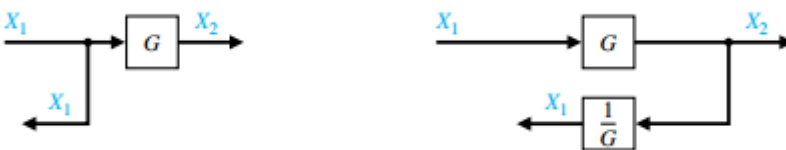
mover un punto de suma desde atras de un bloque



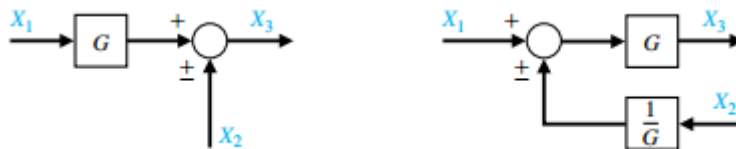
Mover un punto de retroalimentacion enfrente de un bloque



Mover un punto de retroalimentacion desde atras de un bloque

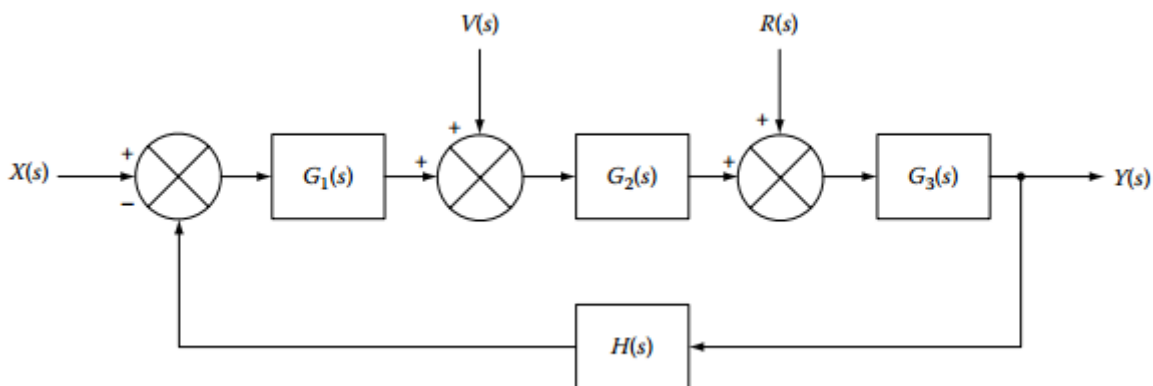


Mover un punto sumador frente a un bloque

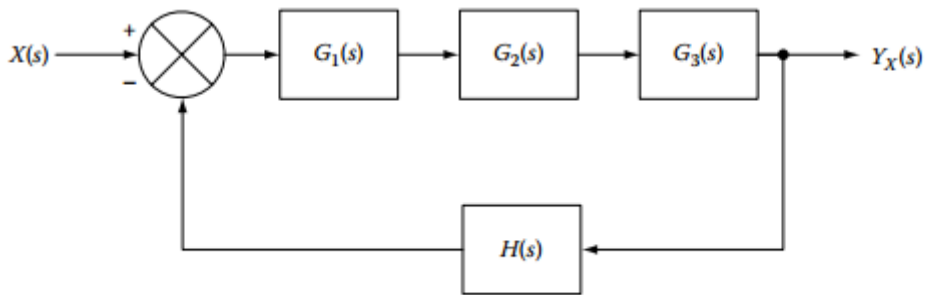


Respuesta Con Multiple Inputs

si tenemos multiples inputs o una disturbacion en el sistema entonces tendremos un sistema:



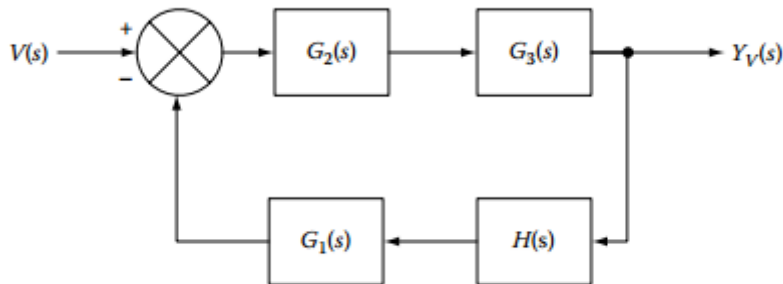
y trabajaremos con cada entrada en separado, produciendo Y_X , Y_V y Y_R , para encontrar Y_m graficamos el siguiente diagrama:



el cual nos permite encontrar:

$$Y_X(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)G_3(s)}{1 + H(s)G_1(s)G_2(s)G_3(s)} X(s)$$

ahora si queremos encontrar Y_V entonces el diagrama observado desde esta entrada es un poco diferente:



con lo que observamos que la salida sera:

$$Y_V(s) = \frac{G_2(s)G_3(s)}{1 + H(s)G_1(s)G_2(s)G_3(s)} V(s)$$

y para $R(s)$ tendremos:



cuya ecuacion de salida queda como un ejercicio para el lector.

Y finalmente la respuesta a la aplicacion simultanea sera la superposicion de las anteriores:

$$Y(s) = Y_X(s) + Y_V(s) + Y_R(s)$$

Modelado en espacio de estados

The primary disadvantage of the classical approach (using Frequency domain representation taking the system's [[Transfer Function]] with Laplace) is its limited applicability: It can be applied only to linear, time-invariant systems or systems that can be approximated as such.

The state-space approach can be used to represent nonlinear systems that have backlash, saturation, and dead zone.

Also multiple systems have multiple inputs and outputs that can be compactly represented in state-space.

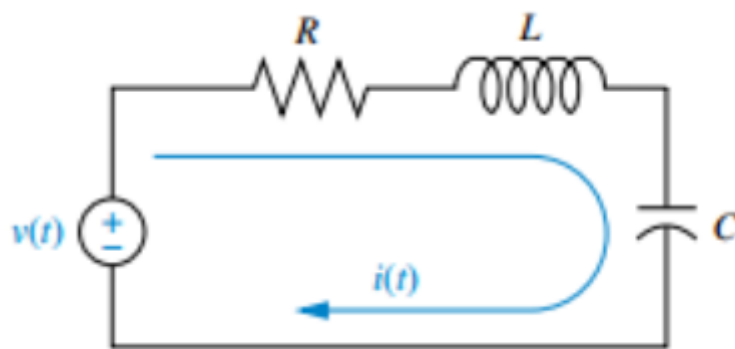
The time-domain approach can also be used for the same class of systems modeled by the classical approach.

Approach

1. Select a particular subset of all possible system variables and call them the *state* variables.
2. for a n th order system we write n simultaneous, first order differential equations in terms of state variables. we call this system of simultaneous differential equations **State Equations**
3. if we know the initial condition of all the states variables at t_0 as well as the system input for $t \geq 0$, we can solve the simultaneous DEs for the states variables for $t \geq 0$
4. We algebraically combine the state variables with the system's input and find other system variables for $t \geq t_0$, we call this equation the **Output Equation**
5. We consider the state equations and the output equations a viable representation of the system. we call this representation of the system a **State-Space Representation**

Example:

Let's say we have the following circuit:



We then have:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = v(t)$$

we can convert this to charge:

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = v(t)$$

Then we turn this into a system of equations:

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ \frac{di}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{pmatrix} v(t)$$

General Representation

The **State Equations** are a set of n simultaneous first order ODEs with n variables, where the variables to be solved for are the state variables.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$$

where:

- \mathbf{x} = state vector
- $\dot{\mathbf{x}}$ = Derivative respect time of state vector
- \mathbf{u} = input or control vector
- \mathbf{A} = system matrix

- \mathbf{B} = Input Matrix

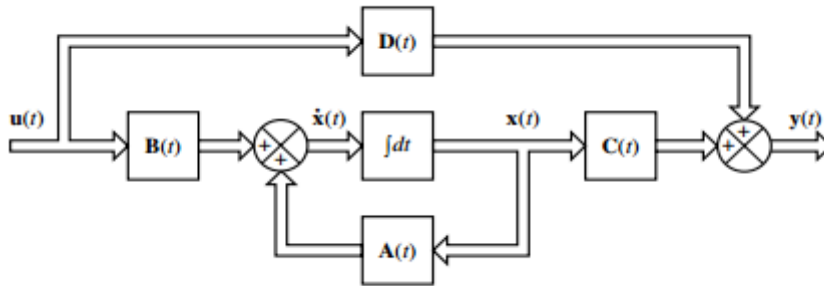
And the **output equation** it's the algebraic equation that expresses the output of the system as a linear combinations for the state variables and the inputs.

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

where:

- \mathbf{y} = Output vector
- \mathbf{C} = Output Matrix
- \mathbf{D} = Feedforward matrix

we can also think of this system as the following [Block diagram](#)



Applying State-Space Representation.

the first step it's to select the state vector with the following considerations:

1. A minimum number of state variables must be selected as components of the state vector. and this number must be sufficient to describe completely the state of the system.
2. the components of the state vector must be [[Linear Independence | linearly independent]]. (Variables and their successive derivatives are linearly independent)

The minimum number of variables required equals the order of the differential equation.

Often state variables are chosen to be physical variables of a system, such as position and velocity in a mechanical system. Cases arise where these variables, although linearly independent, are also **decoupled**.

title: System of Decoupled equations

Some linearly independent variables are not needed to solve for any of the other linearly independent variables.

Another case that increases the size of the state vector rises when the added variable is not linearly independent of the other members of the state vector. This usually occurs when a variable is selected as a state variable but its dependence on the other state variables is not immediately apparent.

Example: damped oscillator

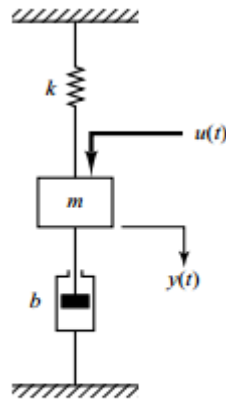


Figure 2-15
Mechanical system.

from this diagram we figure out the equation of motion:

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = u$$

considering this linear system, the force $u(t)$ is the input to the system and the displacement $y(t)$ of the mass is the output.

this is a second order system, that means that we'll have two integrators, let's define the state variables $x_1(t) = y(t)$ and $x_2 = \dot{y}(t)$, then we'll have:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y(t) \\ x_2(t) &= \dot{y}(t) \end{aligned}$$

so their derivatives are going to be:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \dot{y}(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \ddot{y}(t) \end{aligned}$$

and we can get \ddot{y} from the equations of motion:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{m}(-ky - b\dot{y}) + \frac{1}{m}u \end{aligned}$$

which in terms of x_1 and x_2 is:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{m}(-kx_1 - bx_2) + \frac{1}{m}u \end{aligned}$$

which we can frame as:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}}_B u$$

and given that we're only looking at the position we can write the output equation as:

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_C \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

and if we were to see this as a block diagram we'd have:

Correlation Between Transfer Functions and State-Space Equations

if we consider a system whose transfer function is given by:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s)$$

this system may be represented in state space by:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ y &= \mathbf{C}\mathbf{x} + Du\end{aligned}$$

then if we applied the Laplace transform to this system we would get:

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{A}\mathbf{X}(s) = \mathbf{B}U(s)$$

which is the same as:

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{B}U(s)$$

and by multiplying in the left side by $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$, then we get:

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}U(s)$$

by substituting this into the equation for the measured output y then we have:

$$Y(s) = [\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + D]U(s)$$

then our transfer function is:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + D$$

so now we have an expression for the transfer function in terms of A , B , C and D , and given that the right hand side has an inverted term this can also be written as:

$$G(s) = \frac{Q(s)}{|s\mathbf{I} - \mathbf{A}|}$$

so $|s\mathbf{I} - \mathbf{A}|$ gives us the **characteristic equation**, which means that the **Eigenvalues** of \mathbf{A} are the poles of $\mathbf{G}(s)$, which is called the **Transfer Matrix**.

Linealización De Modelos No Lineales

si tenemos un sistema cuyo modelo no lineal esta dado por:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y)\end{aligned}$$

entonces podemos linearizar este sistema al rededor de un **Punto Fijo** o punto de equilibrio, esto es un punto tal que si el sistema esta ahí, de ahí no se mueve sin una perturbacion externa.

suponiendo que tenemos un punto fijo (x^*, y^*) entonces:

$$\begin{aligned}f(x^*, y^*) &= 0 \\ g(x^*, y^*) &= 0\end{aligned}$$

entonces podemos hacer un desplazamiento de nuestro origen a las coordenadas del punto fijo:

$$u = x - x^*, \quad v = y - y^*$$

y ahora tenemos que derivar las ecuaciones diferenciales para nuestras nuevas variables , para esto necesitamos derivar, y como x^* es constante tenemos $\dot{u} = \dot{x}$, por substitution entonces tenemos:

$$\dot{u} = f(x^* + u, y^* + v)$$

y usando [Series de Taylor](#) con la regla de la cadena vemos que:

$$\dot{u} = f(x^*, y^*) + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + O(u^2, v^2, uv)$$

donde $O(u^2, v^2, uv)$ es como representamos los terminos de orden 2 o mayor los cuales para perturbaciones pequeñas de u y v son minimos.

entonces podemos reescribir el sistema como:

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \text{Quadratic Terms}$$

donde la matrix:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}$$

es la matrix [Jacobiana](#) del punto fijo, y este es el analogo multivariable de $f'(x^*)$.

El efecto de los esta aproximacion eliminando los terminos quadraticos se puede hacer siempre que el punto fijo no sea un caso limite, esto se puede hacer en los casos robustos, es decir, cuando:

- ambos eigenvalores tienen una parte real positiva
- ambos eigenvalores tienen una parte real negativa
- cuando un eigenvalor es positivo y el otro negativo
no se puede aplicar cuando:
- ambos eigenvalores son puros imaginarios
- en casos cuando un eigenvalor es 0