Le type abstrait arbre

Table des matières

1) Les arbres

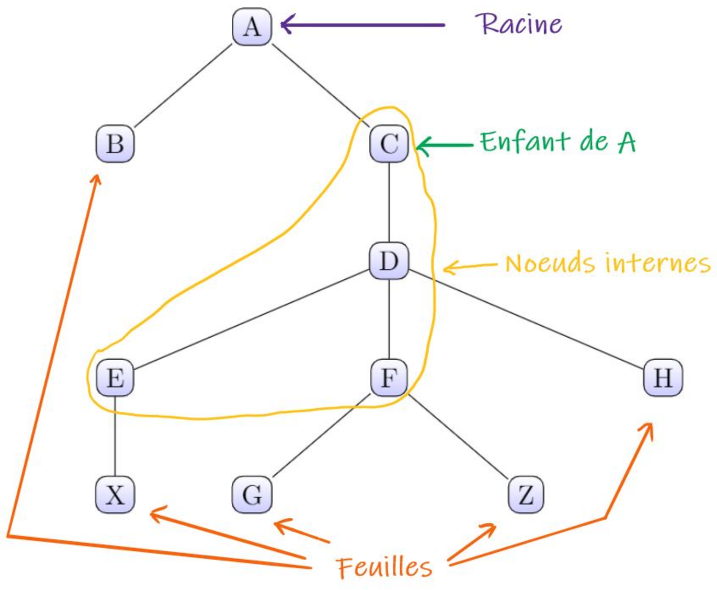
1.1) Définition

Nous allons travailler sur la structure de donnée "arbre". Cette structure n'est pas linéaire mais hiérarchique.

Définition

Un **arbre** est une structure de donnée constituée de nœuds.
Le **sommet** de l'arbre s'appelle la racine.
Le **nœud** B situé sous un nœud A est appelé enfant du nœud A
Un nœud qui ne possède pas d'enfant est appelé **feuille**.
Les nœuds autre que la racine et les feuilles sont appelés **nœuds internes**.
Une **branche** est une suite de nœud consécutifs de la racine vers une feuille.

Exemple :

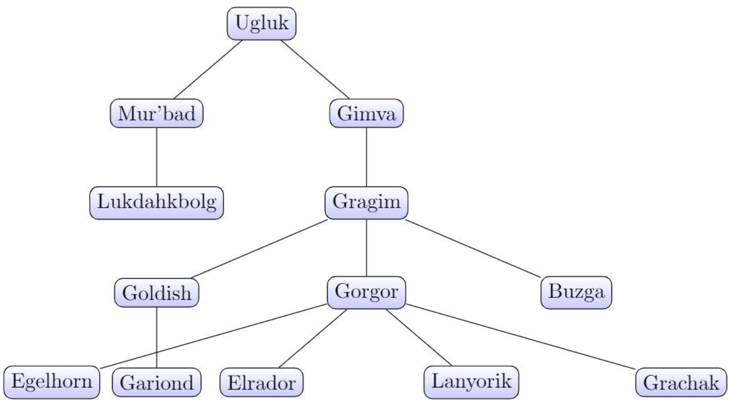


Dans cette arbre :

- il y a 10 nœuds.
- Le nœud A est la racine
- Il y a 5 feuilles donc 5 branches.
- Le nœud D est l'enfant du nœud C.
- Il y a 4 nœuds internes.

Exercice 1 :

On donne l'arbre suivant :



1. Quelle est la racine de cette arbre ?
2. Combien y-a-t-il de nœuds ?
3. Combien y-a-t-il de feuilles ?

4. Combien y-a-t-il de branches ?

5. L'ensemble des nœuds internes compte combien d'éléments ?

6. Quels sont les enfants de Gragim ?

1.2) Caractéristiques

Caractéristiques

On peut caractériser un arbre par différentes caractéristiques :

- **Son arité** : le nombre maximal d'enfants qu'un nœud peut avoir.

- **Sa taille** : le nombre de nœud qui le compose.

- **Sa hauteur** : le nombre de nœud que constitue la branche contenant le plus de nœuds (racime non comprise).

Exemple :

Si on reprend l'arbre de la définition précédente.

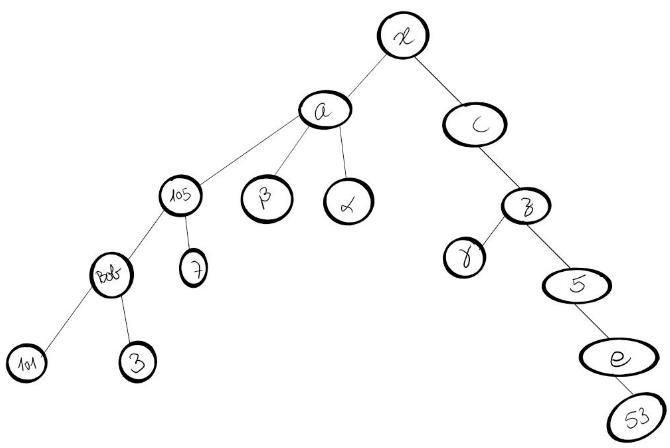
- L'arité de cet arbre est 3.

- La taille de cette arbre est 10.

- La hauteur de cet arbre est 4.

Exercice 2 :

On donne l'arbre suivant :



Déterminer l'arité, la taille et la hauteur de cette arbre.

Exercice 3 :

On donne le répertoire ci-joint. Représenter l'arborescence des répertoires et des fichiers à l'aide d'un arbre.

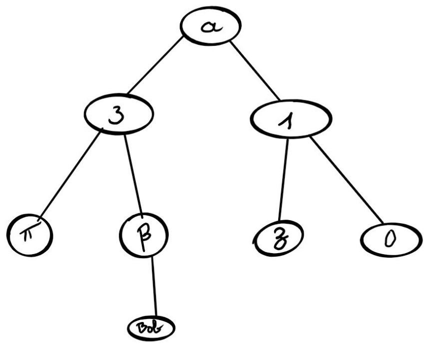
2) Arbres binaires

2.1) Définition

Arbre biniare

On appelle arbre binaire un arbre d'arité 2.
Les arbres binaires sont constitués de nœuds de 0, 1 ou 2 enfants.

Exemple :

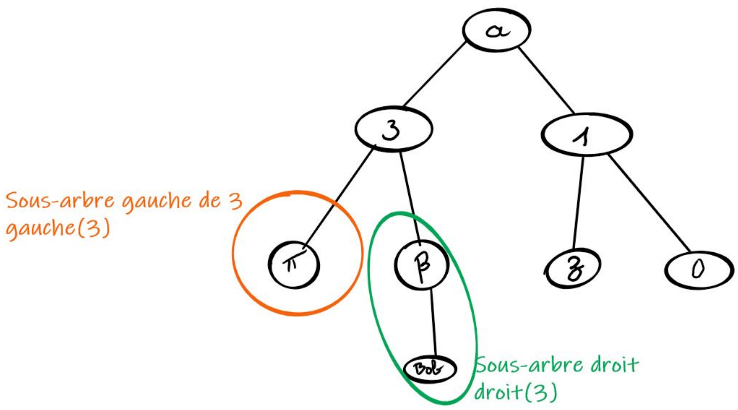


Sous-arbre

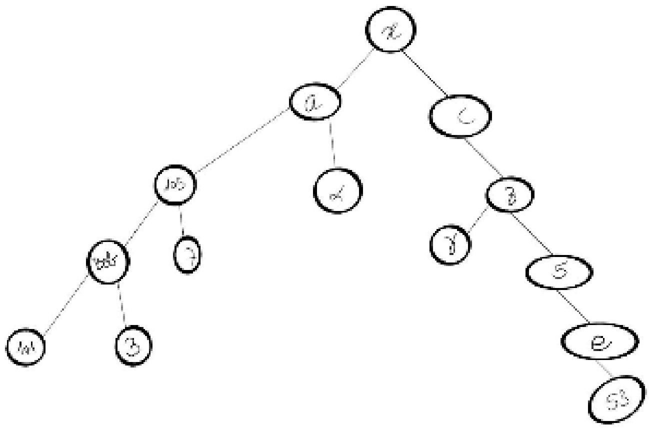
Quand un nœud a deux enfants, il possède un sous-arbre gauche et un sous-arbre droit.
Pour un nœud α, on notera :

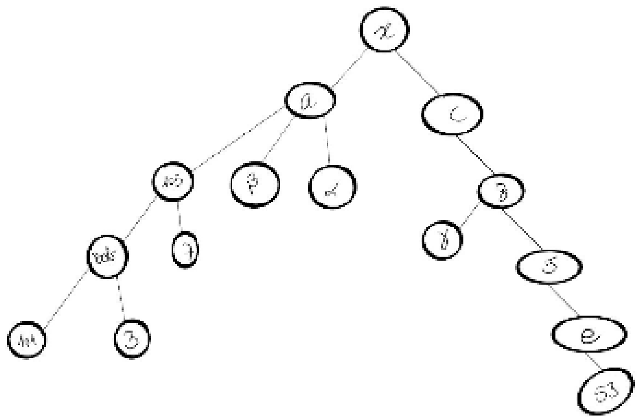
- gauche(α) : le sous-arbre gauche du nœud α ;
- droit(α) : le sous-arbre droit du nœud α.

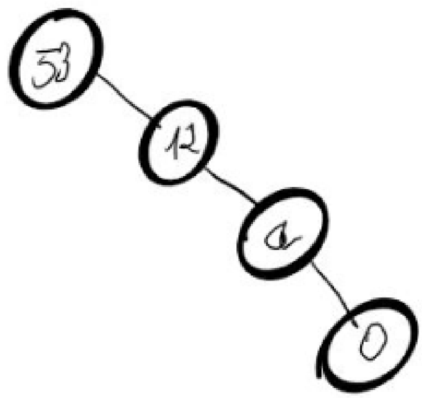
Exemple :



Exercice 4 : Parmi les arbres suivants lesquels sont binaires ?

1. 

2. 

3. 

2.2) Mesures sur les arbres binaires

Les arbres binaires étant particuliers, on peut calculer un certains nombres de caractéristiques d'un arbre binaire.

a) Taille d'un arbre

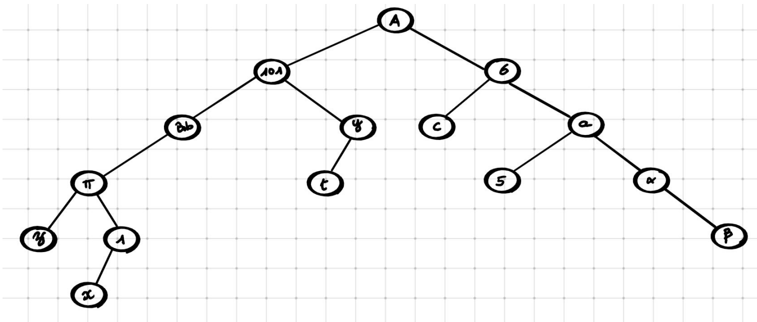
Taille d'un arbre B

La taille d'un arbre B correspond au nombre de ses nœuds, elle est définie par :

- Taille(B)=0, si B est un arbre vide
- Taille(B)=1+Taille(gauche(B))+Taille(droit(B)) sinon

Exercice 5 :

On donne l'arbre suivant :



Déterminer la taille de cette arbre.

b) Hauteur d'un nœud ou profondeur d'un nœud

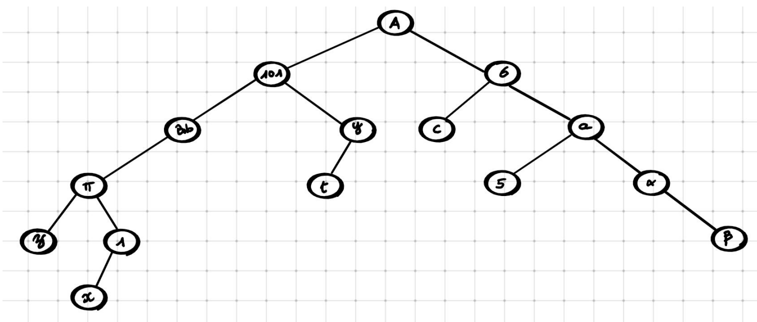
Hauteur d'un nœud ou profondeur d'un nœud

La hauteur d'un nœud ou la profondeur de x correspond au nombre d'arêtes au dessus x pour revenir à la racine, elle est définie par :

- HauteurDeNoeud(x)=0, si x est la racine de l'arbre.
- HauteurDeNoeud(x)=1+HauteurDeNoeud(y) si y est le père de x. sinon

Exercice 6 :

On donne l'arbre suivant :



Déterminer la hauteur des nœuds bob et α

c) Hauteur d'un arbre

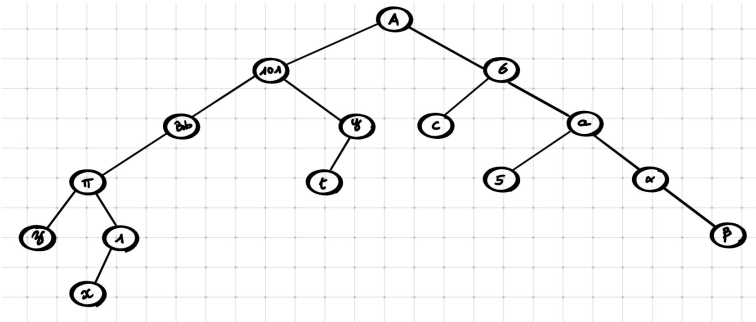
Hauteur d'un arbre

La hauteur d'un arbre B correspond au nombre d'arêtes entre la racine et la feuille la plus éloignée :

- Hauteur(B)=Max(HauteurDeNoeud(x)), où x décrit l'ensemble des nœud de B.

Exercice 7 :

On donne l'arbre suivant :



Déterminer la hauteur de cet arbre.

d) Longueur de cheminement d'un arbre

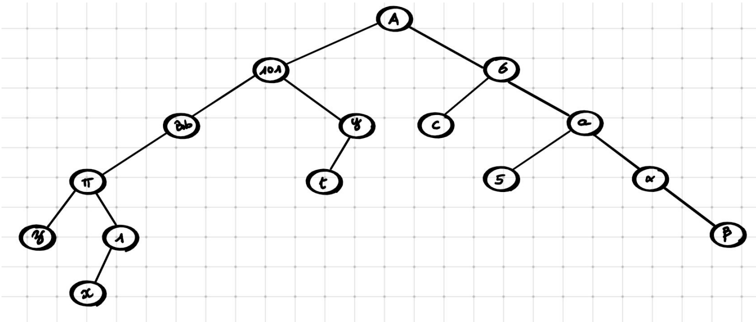
Longueur de cheminement d'un arbre

La longueur de cheminement d'un arbre B correspond à la somme des hauteurs de chacun des nœuds :

- $LC(B) = \sum_{i=1}^{T(B)} H(x_i)$

Exercice 8 :

On donne l'arbre suivant :



Déterminer la longueur de cheminement de cet arbre.

e) Longueur de cheminement externe d'un arbre

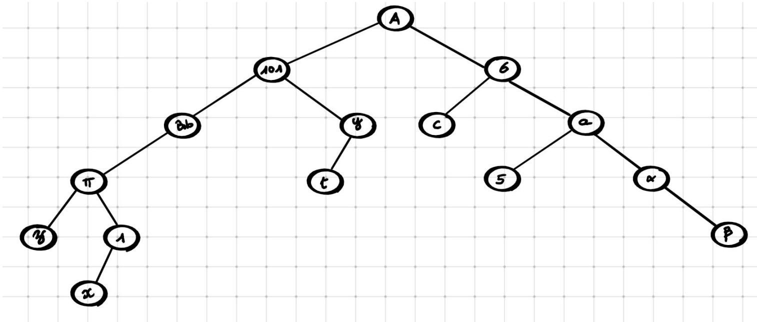
Longueur de cheminement externe d'un arbre

La longueur de cheminement externe d'un arbre B correspond à la somme des hauteurs de chacune des feuilles :

- $LCE(B) = \sum_{i=1}^{NF} H(f_i)$ où NF est le nombre de feuilles

Exercice 9 :

On donne l'arbre suivant :



Déterminer la longueur de cheminement externe de cet arbre.

f) Longueur de cheminement interne d'un arbre

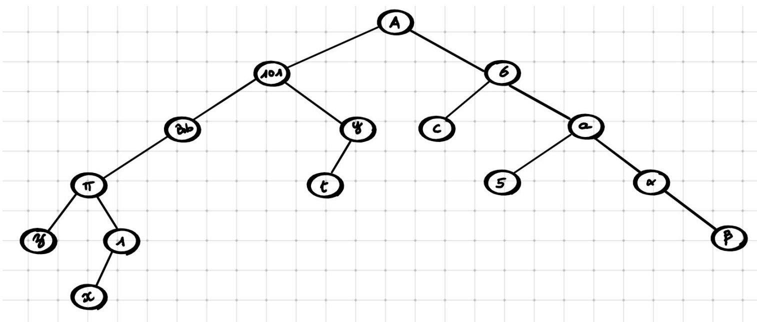
Longueur de cheminement interne d'un arbre

La longueur de cheminement interne d'un arbre B correspond à la somme des hauteurs des noeuds internes de B :

- $LCI(B) = \sum_{i=1}^{T(B)-NF} H(x_i)$ où x_i est un nœud interne.

Exercice 10 :

On donne l'arbre suivant :



Déterminer la longueur de cheminement interne de cet arbre.

Exercice 11 :

Déterminer une relation entre $LC(B)$,$LCE(B)$ et $LCI(B)$

g) Profondeur moyenne d'un arbre

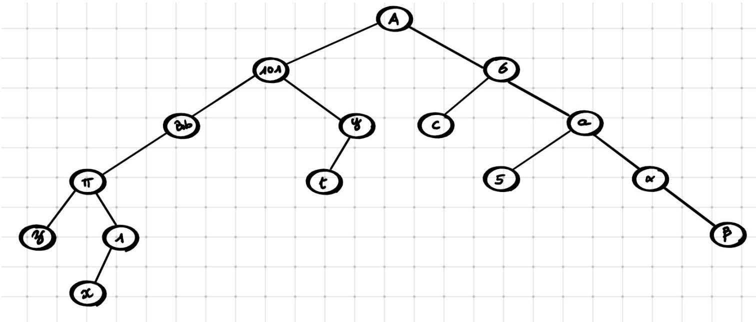
Profondeur moyenne d'un arbre

La profondeur moyenne d'un arbre B est définie par :

$$PM(B) = \frac{LC(B)}{T(B)}$$

Exercice 12 :

On donne l'arbre suivant :



Déterminer la profondeur moyenne de cet arbre.

h) Profondeur moyenne externe d'un arbre

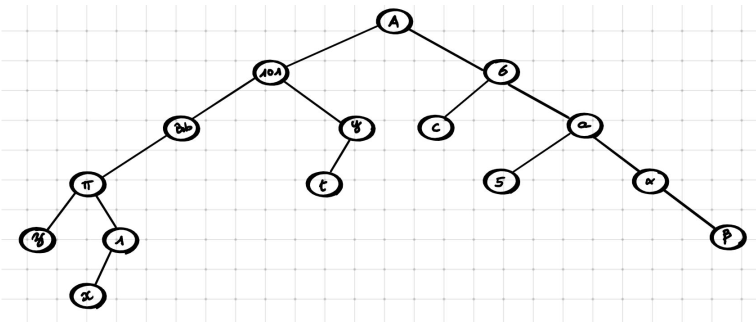
Profondeur moyenne externe d'un arbre

La profondeur moyenne externe d'un arbre B est définie par :

$$PME(B) = \frac{LCE(B)}{NF}$$

Exercice 13 :

On donne l'arbre suivant :



Déterminer la profondeur moyenne externe de cet arbre.

i) Profondeur moyenne interne d'un arbre

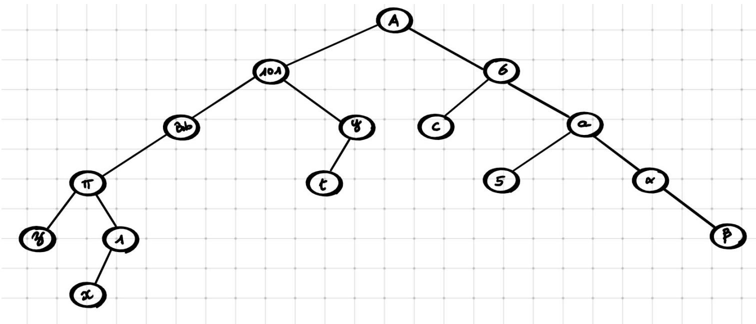
Profondeur moyenne interne d'un arbre

La profondeur moyenne interne d'un arbre B est définie par :

$$PMI(B) = \frac{LCI(B)}{T(B) - NF}$$

Exercice 14 :

On donne l'arbre suivant :

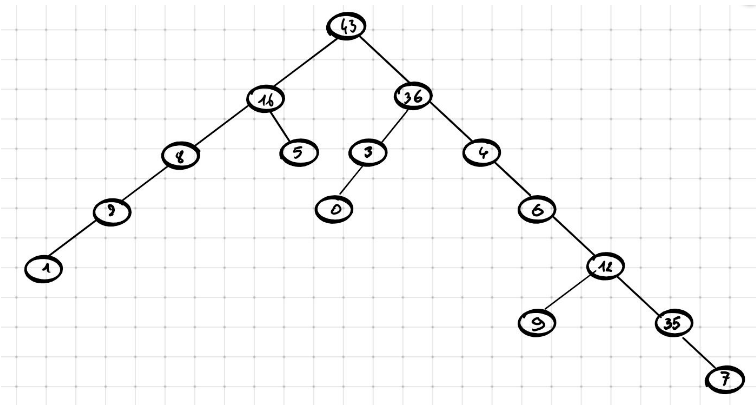


Déterminer la profondeur moyenne interne de cet arbre.

Remarque : La longueur de cheminement et la profondeur moyenne seront utiles pour les algorithmes sur les arbres binaires.

Exercice 15 :

On donne l'arbre B suivant :



Déterminer : la racine ; le nombre de feuilles ; le nombre de branches ; l'arité ; sa taille : $T(B)$; la hauteur de B : $H(B)$; $LC(B)$; $LCE(B)$; $LCI(B)$; $PM(B)$; $PME(B)$; $PMI(B)$.

3) Arbre binaire de recherche

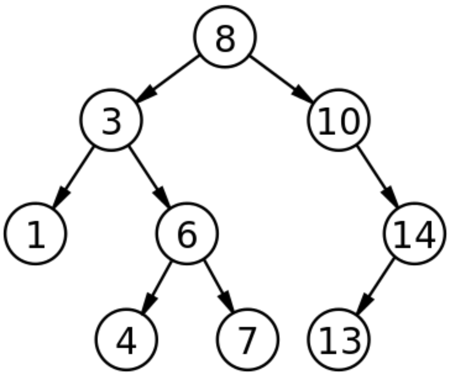
3.1) Définition

Arbre binaire de recherche

Un arbre binaire de recherche est un arbre binaire dans lesquels l'étiquette d'un nœud est appelé clé et est un entier. L'arbre binaire vérifie deux propriétés :

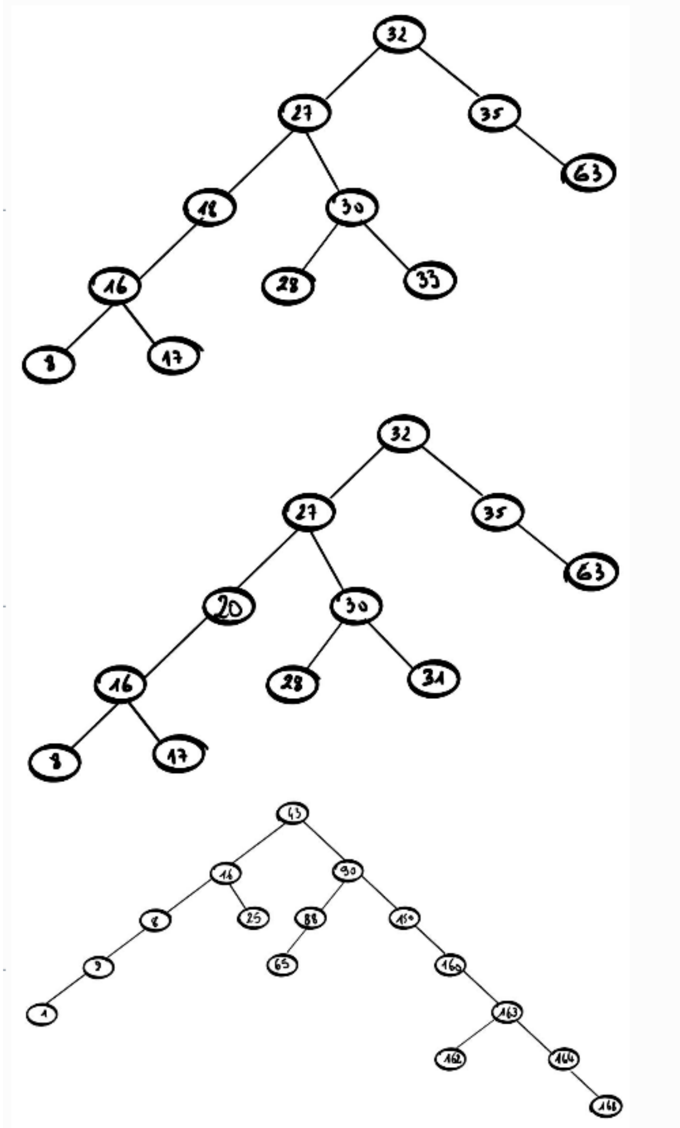
- Les clés de tous les nœuds du sous-arbre gauche gauche d'un n œud x sont inférieures ou égales à la clé de x.
- Les clés de tous les nœuds du sous-arbre droit d'un nœud x sont strictement supérieures à la clé de x.

Exemple :



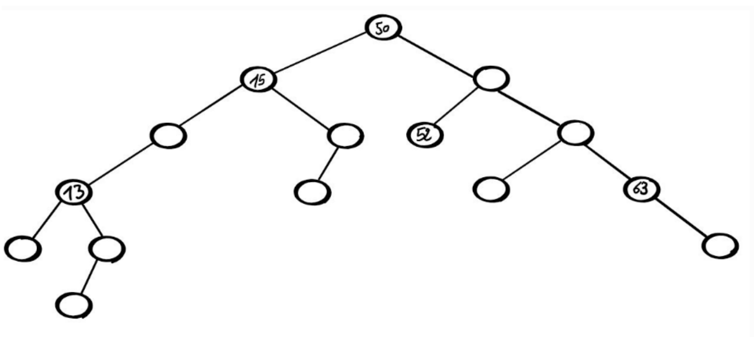
Exercice 16 :

Quels sont parmi les arbres proposés ci-dessous les arbres binaires de recherche ?



Exercice 17 :

Complétez cet ABR.



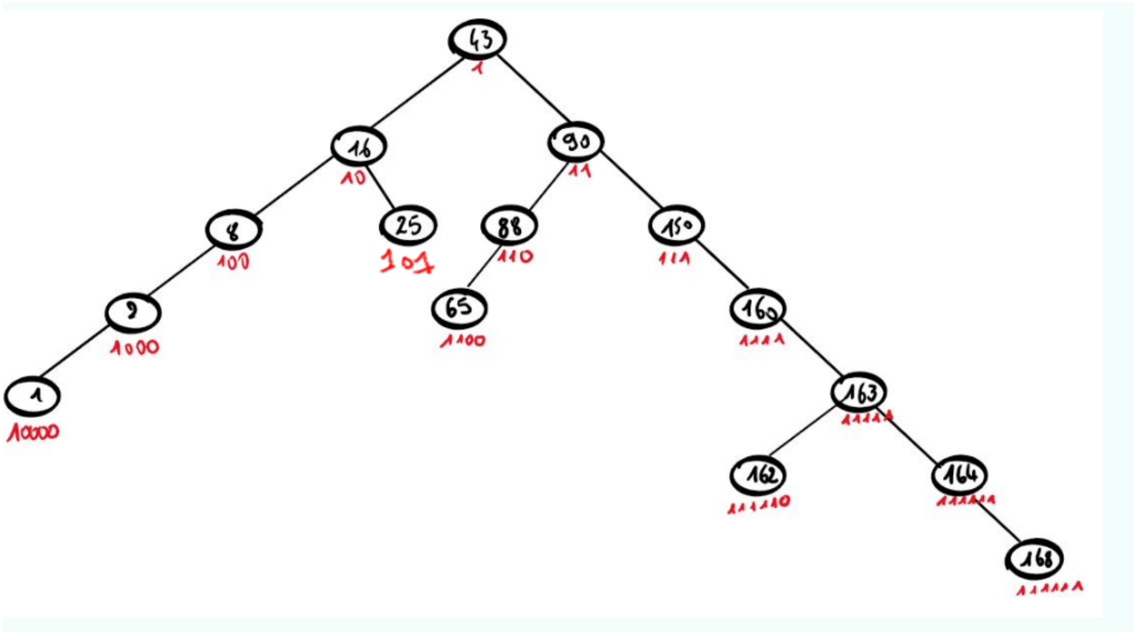
3.2) Propriétés

Un étiquetage intéressant d'un arbre de recherche est le suivant :

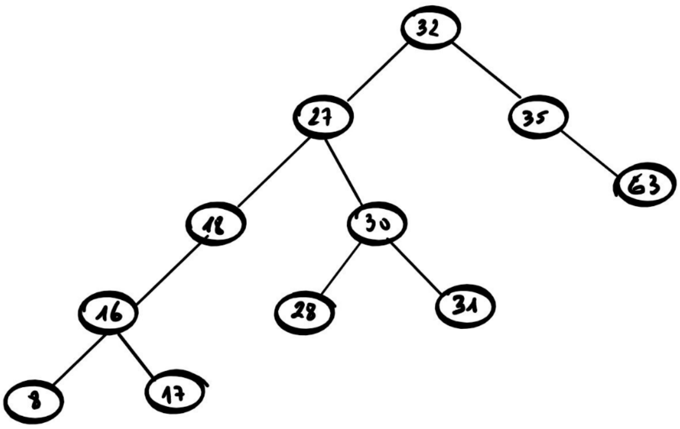
- La racine est étiquetée 1 ;

- La premier nœud du sous arbre gauche prend l'étiquette de son père auquel on ajoute un 0 ;
- La premier nœud du sous arbre droit prend l'étiquette de son père auquel on ajoute un 1.

Exemple :



Exercice 18 : Étiqueter comme l'exemple précédent l'arbre suivant :



Remarque : On observe que les étiquettes des nœuds de profondeur p sont constituées de p + 1 bits, et sont deux à deux distinctes. On en déduit que toutes les étiquettes des nœuds dun même arbre sont deux à deux distinctes.

Les étiquettes peuvent être vues comme les écritures de numéros en base 2 : on a ainsi numéroté les différents nœuds de larbre.

4) Une implémentation de l'objet arbre binaire de recherche en Python

Voici l'implémentation d'un arbre binaire de recherche en python.

```
class ABR:
def __init__(self,val):
self.valeur=val
self.gauche=None
self.droit=None

def inserer(self,x):
if x<self.valeur:
if self.gauche!=None:
self.gauche.inserer(x)
else:
self.gauche=ABR(x)
else:
if self.droit!=None:
self.droit.inserer(x)
else:
self.droit=ABR(x)
```

Exercice 19 : Créer l'arbre de l'exercice 18 avec cette implémentation

Exercice 20 : Créer une méthode `taille()`

Exercice 21 : Créer une méthode `hauteur()`