Les graphes

Table des matières

1) Introduction

Au milieu du XX$^{\text{ème}}$ siècle, le physicien hongrois Eugène Wigner parle de "la déraisonnable efficacité des mathématiques dans les sciences de la nature". La modélisation mathématique facilite la compréhension d'un problème car elle détermine un seul vocabulaire formel pour différentes situations, et elle permet de trouver une méthode de résolution automatique via un programme informatique.

Le modèle mathématique que nous allons voir dans ce chapitre est le graphe.

On utilise les graphes dans de nombreuses situations :
- les réseaux de communication (internet, téléphonie) ;
- les réseaux sociaux ;
- les circuits électriques ;
- les bases de données relationnelles ;
- le codage ;
- la hiérarchie des fichiers informatiques ;

— la représentation des molécules ;
— en biologie pour la représentation de la séquence ARN.

2) Graphe non-orientés

2.1) Un premier exemple

Imaginez un réseau social ayant 6 abonnés : Jules, Simon, Arthur, Jean, Lucien, et Maxime où :
— Jules est ami avec Simon, Arthur et Jean
— Simon est ami avec Jules et Jean
— Arthur est ami avec Jules, Lucien et Jean
— Jean est ami avec tous les autres abonnés
— Lucien est ami avec Arthur, Jean et Maxime
— Maxime est ami avec Lucien et Jean

La description de ce réseau social, malgré son faible nombre d'abonnés, est déjà quelque peu rébarbative, alors imaginez cette même description avec un réseau social comportant des millions d'abonnés !

Il existe un moyen plus "visuel" pour représenter ce réseau social : on peut représenter chaque abonné par un cercle (avec le nom de l'abonné situé dans le cercle) et chaque relation "X est ami avec Y" par un segment de droite reliant X et Y ("X est ami avec Y" et "Y est ami avec X" étant représenté par le même segment de droite).

En modélisant ces prénoms par A,B,C,D,E et F, on obtient avec le réseau social décrit ci-dessus :

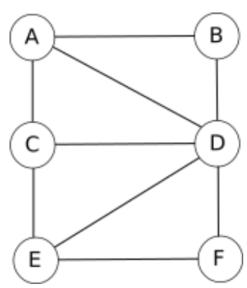


FIGURE 1 – Exemple de représentation d'un réseau social

Ce genre de figure s'appelle un **graphe non orientés**. Les graphes sont des objets mathématiques très utilisés, notamment en informatique. Les cercles sont appelés des sommets et les segments de droites qui relient 2 sommets des arêtes.

Plus formellement on dira qu'un graphe G est un couple $G = (V, E)$ avec V un ensemble de sommets et E un ensemble d'arêtes

Exercice 1 :

Construisez un graphe de réseau social à partir des informations suivantes :
— A est ami avec B et E
— B est ami avec A et C
— C est ami avec B,F et D
— D est ami avec C,F et E
— E est ami avec A,D et F
— F est ami avec C, D et E

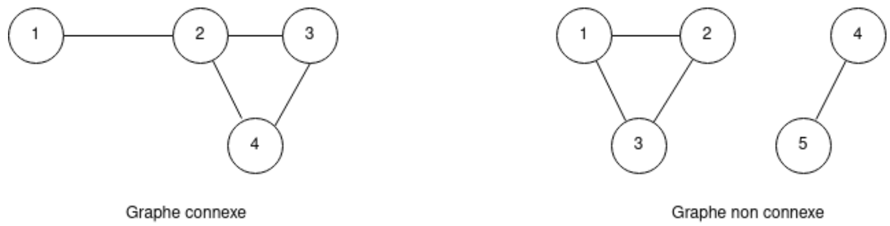


FIGURE 2

2.2) Vocabulaire des graphes non-orientés

— On note x-y **l'arête** (x-y) dans un graphe non orienté où x et y sont les deux extrémités.
— Deux arêtes d'un graphe sont dites **adjacentes** si elles ont au moins un sommet en commun.
— deux sommets d'un graphe non-orienté sont dits **adjacents** s'il existe une arête les joignants.
— dans un graphe non-orienté, on appelle **degré d'un sommet** x le nombre d'arête dont x est une extrémité.
— dans un graphe non-orienté, on appelle chaîne toute suite de sommets consécutifs reliés par des arêtes.
— une chaîne est dite **élémentaire** si elle ne comporte pas plusieurs fois le même sommet.
— une chaîne dont le sommet de début est le même que le sommet de fin est appelé cycle.
— un graphe non-orienté est dit connexe lorsqu'il existe une chaîne pour toute paire de sommet.

3) Les graphes orientés

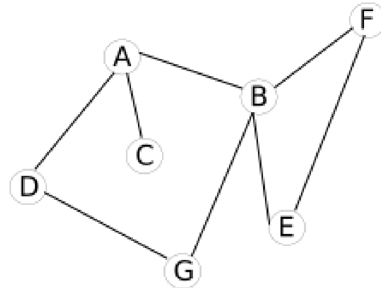
3.1) Un premier exemple

Les logiciels de cartographie permettant, connaissant votre position grâce à un récepteur GPS, d'indiquer la route à suivre pour se rendre à endroit B. Comment modéliser l'ensemble des lieux et des routes ? Simplement à l'aide d'un graphe ! Chaque lieu est un sommet et les routes qui relient les lieux entre eux sont des arêtes.

Soit les lieux suivants : A, B, C, D, E, F et G.

Les différents lieux sont reliés par les routes suivantes :
— il existe une route entre A et C ;
— il existe une route entre A et B ;
— il existe une route entre A et D ;
— il existe une route entre B et F ;
— il existe une route entre B et E ;
— il existe une route entre B et G ;
— il existe une route entre D et G ;
— il existe une route entre E et F.

Ici aussi, la représentation sous forme de graphe s'impose :

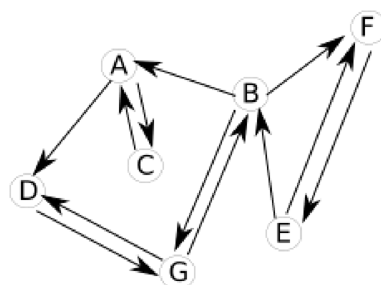


Problème : avec cette représentation du réseau routier sous forme de graphe, il est impossible de tenir compte des routes en sens unique (par exemple il est possible d'aller de A vers D mais pas de D vers A)

Voici de nouvelles contraintes :

— il existe une route entre A et C (double sens) ;
— il existe une route entre A et B (sens unique B->A) ;
— il existe une route entre A et D (sens unique A->D) ;
— il existe une route entre B et F (sens unique B->F) ;
— il existe une route entre B et E (sens unique E->B) ;
— il existe une route entre B et G (double sens) ;
— il existe une route entre D et G (double sens) ;
— il existe une route entre E et F (double).

Pour tenir compte de ces nouvelles contraintes, on utilisera un graphe orienté :



Dans un graphe orienté, les arêtes possèdent une orientation. Ces "arêtes orientées" sont souvent appelées "arcs". On dira qu'un graphe orienté G est un couple G = (V,A) avec V un ensemble de sommets et A un ensemble d'arcs.

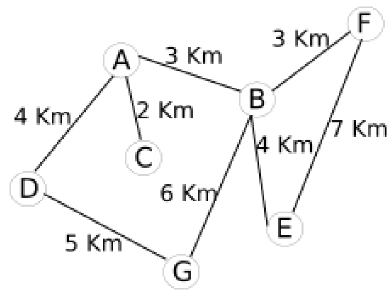
3.2) Vocabulaire

— On note x→ y l'arc (x,y) dans un graph orienté où x est son extrémité initiale et y son extrémité finale. y est le successeur de x et x est le prédécesseur de y.
— deux arcs d'un graphe sont adjacents s'ils possèdent au moins une extrémité commune ;
— Deux sommets d'un graphe orienté sont dits adjacents s'il existe un arc les joignant.
— Dans un graphe orienté, on appelle degré d'un sommet x le nombre d'arcs dont x est une extrémité.
— Dans un graphe orienté, on appelle chemin toute suite de sommet consécutifs relié par des arcs.
— Un chemin est dit éléméntaire s'il ne comporte pas plusieurs fois le même sommet.
— Un chemin dont le somme de début est le même que le sommet de fin est appelé circuit.

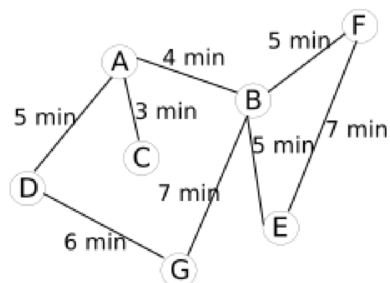
4) Les graphes étiquetés et pondérés

4.1) Exemple

Parfois il est intéressant d'associer aux arrêtes ou aux arcs des valeurs, on parle alors de graphes pondérés. Si nous revenons à notre "graphe cartographie", il est possible d'associer à chaque arête la distance en Km entre les 2 lieux :



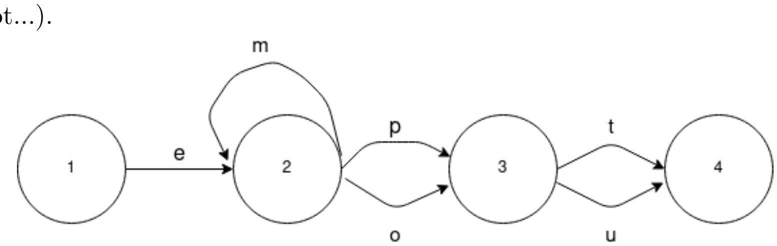
Il est aussi possible d'associer à chaque arête la durée du trajet entre 2 points :



En fonction du choix fait par le conducteur (trajet le plus court "en distance" ou trajet le plus court "en temps"), l'algorithme permettant de déterminer le "chemin le plus court entre 2 points" travaillera sur le graphe "graphe pondéré (Km) cartographie" ou sur le graphe "graphe pondéré (minutes) cartographie". À noter que le "graphe pondéré (minutes) cartographie" peut évoluer au cours du temps en fonction du trafic routier : une application comme Waze utilise les données en en provenance des utilisateurs de l'application afin de mettre à jour en temps réél leur "graphe pondéré (minutes) cartographie".

4.2) Vocabulaire

— On appelle **graphe étiqueté** tout graphe où chaque relation est affecté d'un symbole (par exemple, une lettre un mot...).



— Dans le cas où le symbole est un nombre positif, le graphe est appelé On appelle **graphe étiqueté** tout graphe où chaque relation est affecté d'un symbole (par exemple, une lettre un mot...).. Ce type de graphe est particulièrement adapté pour représenter les cartes routière (comme dans l'exemple précédent).

— Dans le cas d'un graphe pondéré, on appelle **poids** le nombre positif de l'étiquette de la relation. De ce fait, le poids d'un chemin est la somme des poids des arêtes (des arcs) qui le compose.

5) Implémentation d'un graphe à l'aide d'une matrice d'adjacence

Il existe deux méthodes permettant d'implémenter un graphe : les matrices d'adjacences et les listes d'adjacences.

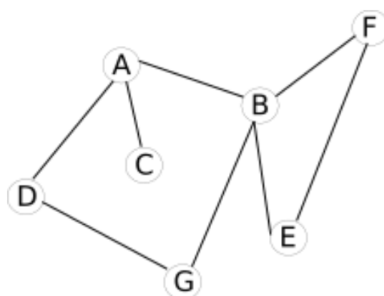
5.1) Définition d'une matrice

Une matrice est un tableau à double entrée. Exemple, la matrice A ci-dessous.

$$A = \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 & 8 & 10 \\ 4 & 5 & 6 & 6 & 9 \\ 7 & 8 & 9 & 6 & 5 \end{Bmatrix}$$

La matrice A ci-dessus est constitué de 3 lignes et 5 colonnes. On appelle matrice carrée une matrice qui comporte le même nombre de lignes et de colonnes. Les matrices d'adjacences sont des matrices carrées.

5.2) Exemple



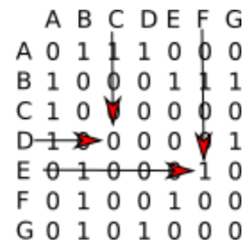
graphe cartographie

Voici la matrice d'adjacence de ce graphe :

$$A = \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

5.3) Comment construire une matrice d'adjacence ?

Il faut savoir qu'à chaque ligne correspond un sommet du graphe et qu'à chaque colonne correspond aussi un sommet du graphe. À chaque intersection ligne i-colonne j (ligne i correspond au sommet i et colonne j correspond au sommet j), on place un 1 s'il existe une arête entre le sommet i et le sommet j, et un zéro s'il n'existe pas d'arête entre le sommet i et le sommet j.



	A	B	C	D	E	F	G
A	0	1	1	1	0	0	0
B	1	0	0	0	1	1	1
C	1	0	0	0	0	0	0
D	1	0	0	0	0	0	1
E	0	1	0	0	0	1	0
F	0	1	0	0	1	0	0
G	0	1	0	1	0	0	0

matrice d'adjacence du graphe cartographie

— Il existe une arête entre le sommet E et le sommet F, nous avons donc placé un 1 à l'intersection de la ligne E et de la colonne F (il en est de même à l'intersection de la ligne F et de la colonne E)

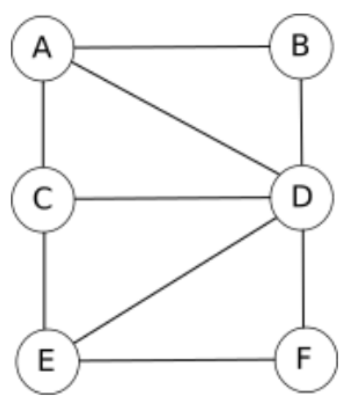
— Il n'existe pas d'arête entre le sommet D et le sommet C, nous avons donc placé un 0 à l'intersection de la ligne D et de la colonne C (il en est de même à l'intersection de la ligne C et de la colonne D)

Exercice 2 :

Vérifiez que la matrice d'adjacence proposée ci-dessus correspond bien au graphe "cartographie".

Exercice 3 :

Établissez la matrice d'adjacence du graphe ci-dessous.

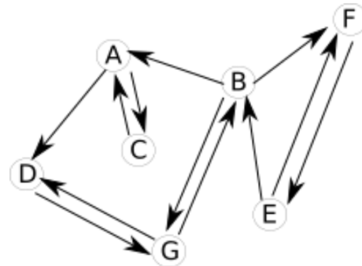


graphe réseau social

5.4) Matrice d'adjacence pour un graphe orienté

Le principe reste le même : si le sommet i (ligne) est lié au sommet j (colonne), nous avons un 1 à l'intersection (0 dans le cas contraire).

Exemple :



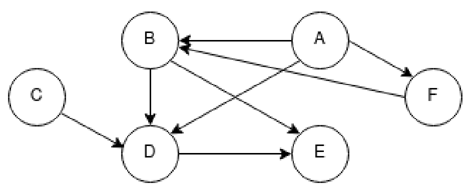
La matrice d'adjacence est :

$$A = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

Exercice 4 : Vérifiez que la matrice d'adjacence proposée ci-dessus correspond bien au graphe orienté "cartographie".

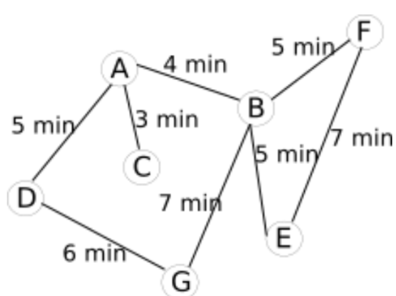
Exercice 5 :

Etablir la matrice du graphe orienté ci-dessous.



5.5) Matrice d'adjacence d'un graphe pondéré

On remplace les 1 par les valeurs liées à chaque arc.



La matrice d'adjacence est :

$$A = \left\{\begin{matrix} 0 & 4 & 3 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 5 & 5 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right\}$$

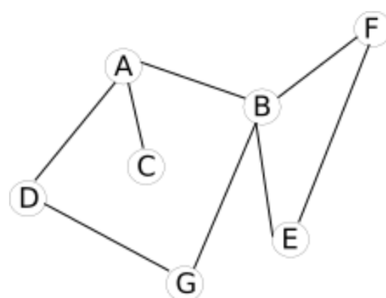
Exercice 6 : Vérifiez que la matrice d'adjacence proposée ci-dessus correspond bien au graphe pondéré (minutes) "cartographie".

6) Les listes d'adjacences

6.1) Pour les graphes non-orientés

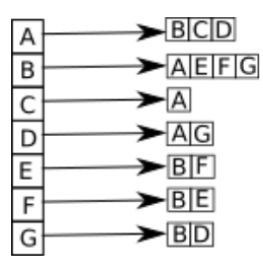
Pour commencer, on définit une liste des sommets du graphe. À chaque élément de cette liste, on associe une autre liste qui contient les sommets lié à cet élément :

Reprenons l'exemple du "graphe cartographie" :



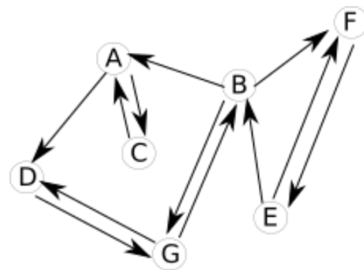
graphe cartographie

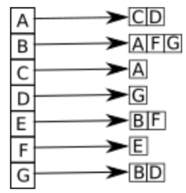
Voici la liste d'adjacence de ce graphe :



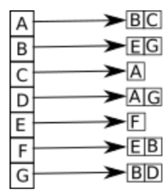
6.2) Pour les graphes orientés

Pour les graphes orientés, il est nécessaire de définir 2 listes : la liste des successeurs et la liste des prédécesseurs. Soit un arc allant d'un sommet A vers un sommet B (flèche de A vers B). On dira que B est un successeur de A et que A est un prédécesseur de B.





liste d'adjacence successeurs du graphe orienté cartographie



liste d'adjacence prédécesseurs du graphe orienté cartographie