

La propiedad quincuncial de las funciones elípticas de Jacobi

TRABAJO DE GRADO PRESENTADO

POR

JHONNY ANDRES LEAL, CÓDIGO 070250112012

DIEGO MAURICIO PEÑA, CÓDIGO 070250082013

AL

PROGRAMA DE MATEMÁTICAS CON ÉNFASIS EN ESTADÍSTICA

COMO REQUISITO PARCIAL

PARA OBTENER EL GRADO DE

PROFESIONAL EN MATEMÁTICAS CON ÉNFASIS EN ESTADÍSTICA

EN EL ÁREA DE

MATEMÁTICAS

UNIVERSIDAD DEL TOLIMA, FACULTAD DE CIENCIAS

IBAGUÉ, COLOMBIA

OCTUBRE 2018

Director: Leonardo Solanilla Jhonny Andres Leal, código 070250112012
Diego Mauricio Peña, código 070250082013

La propiedad quincuncial de las funciones elípticas de Jacobi

RESUMEN

En este trabajo de grado estudiamos las funciones elípticas jacobianas y sus inversas. En el transcurso de la presentación revelamos una propiedad –prácticamente ignorada en muchos textos– de las inversas, a saber: ellas definen biyecciones de los hemisferios de una esfera sobre ciertos paralelogramos planos. Esta propiedad permite, entonces, concebir mapas del globo terrestre, los cuales generalizan la famosa proyección quincuncial de Charles S. Peirce. Además de demostrar que todas las funciones consideradas poseen dicha propiedad quincuncial, damos expresiones prácticas concretas de las aplicaciones con miras a su implementación numérica.

ABSTRACT

In this undergraduate thesis we study the Jacobi elliptic functions together with their inverse functions. Along the way we elucidate a property –practically ignored in many texts– of the inverse functions, namely: they provide bijective maps of a hemisphere onto certain plane parallelograms. So, this property enables us to get geographical projections generalizing the famous quincuncial projection of Charles S. Peirce. Besides proving that all the considered functions possess such a quincuncial property, we give concrete practical formulas of the maps. We look forward to the numerical implementation of them.

Índice general

INTRODUCCIÓN	VIII
1. FUNCIONES THETA Y FUNCIONES ELÍPTICAS	12
1.1. La función theta clásica	13
1.2. Propiedades de la función theta clásica	13
1.3. Otras funciones theta, propiedades	13
1.4. Funciones elípticas	15
1.5. Propiedades de las funciones elípticas	17
2. FUNCIONES ELÍPTICAS INVERSAS	26
2.1. Inversas de las funciones elípticas	27
2.2. Fórmulas de adición, identidades elípticas	28
2.3. Inversión formal de las funciones elípticas pares	29
2.4. Inversión formal de las funciones elípticas impares	39
2.5. Cálculo infinitesimal y cómputo de las funciones inversas elípticas reales	46
3. QUINCUNCIALIDAD	53
3.1. Superficies topológicas y diferenciales	53
3.2. Superficies de Riemann	54
3.3. Aplicaciones conformes	54
3.4. Hemisferio y paralelogramo con frontera	55

3.5. Propiedad quincuncial	55
A MODO DE CONCLUSIÓN	58
BIBLIOGRAFÍA	61

Índice de figuras

INTRODUCCIÓN	VIII
1. <i>Quincux</i> bizantino	IX
2. Módulo de una función elíptica	X
1. FUNCIONES THETA Y FUNCIONES ELÍPTICAS	12
1.1. Definición de función elíptica	22
1.2. Paralelogramos fundamentales para las funciones elípticas básicas.	23
1.3. Paralelogramos fundamentales para sc , sd y cd	23
1.4. Algunos dominios maximales en los cuales las funciones elípticas básicas son inyectivas.	24
1.5. Algunos dominios maximales donde sc , sd y cd son inyectivas. . .	25
2. FUNCIONES ELÍPTICAS INVERSAS	26
2.1. Proyección quincuncial de Peirce.	27
2.2. Función real cn para varios valores de k	49
2.3. Función real dn para varios valores de k	50
2.4. Funciones reales cd , dc para varios valores de k	50
2.5. Funciones reales nc , nd para varios valores de k	51
2.6. Función real sn para ciertos valores de k	52
3. QUINCUNCIALIDAD	53

Introducción

LAS PROPIEDADES FUNDAMENTALES DE LAS FUNCIONES ELÍPTICAS –que fueron por demás cruciales en el momento de su emergencia histórica como funciones de una variable compleja– son la meromorfía y la doble periodicidad. Así se deja entrever ya en los trabajos fundacionales de Abel [18] y Jacobi [2]. A lo largo del siglo XIX, otras propiedades menos evidentes fueron revelándose, poco a poco, hasta la cima de la gran síntesis weierstrassiana. En este trabajo de grado, nos interesa particularmente una propiedad –prácticamente inédita–, que fue mostrándose poco a poco a lo largo de ese agitado siglo, primeramente como una tarea que Jacobi legó a su posteridad y más tarde como una herramienta para trazar mapas del globo terrestre con gran elegancia y utilidad práctica. Los primeros intentos a los que nos referimos se pueden consultar en el artículo de Richelot [7] o en el libro de texto de Durège [8]. Un paso adelante se dió en el famoso artículo de Peirce [3] y en una explicación adicional sobre su proyección geográfica, dada un poco después por Pierpont [11]. Todos estos antecedentes nos han conducido a la claridad y sistematización –no siempre trivial– del procedimiento peirciano dada en Solanilla, Oostra y Yáñez [16]. Aquí hablaremos de la propiedad quincuncial generalizada, noción definida más abajo, en el cuerpo del trabajo. El nombre proviene, naturalmente, del adjetivo usado por Peirce [3].

Los antiguos romanos, cuyo sistema de numeración era parcialmente duodecimal, denominaban *quincux* a la fracción $5/12$. Con el tiempo, un quince ha venido a significar la cara de un dado –blanco o marfil– que contiene cinco puntos

negros, dispuestos en un cuadrado con un punto en el centro y los demás simétricamente hacia las esquinas del cuadrado. Durante la segunda época dorada de la ortodoxa ciudad de Bizancio, el vocablo *quincux* pasó a significar una catedral de cinco cúpulas, con la más grande y llamativa cúpula elevándose sobre el centro de un cuadrado y las cuatro cúpulas pequeñas hacia los vértices.

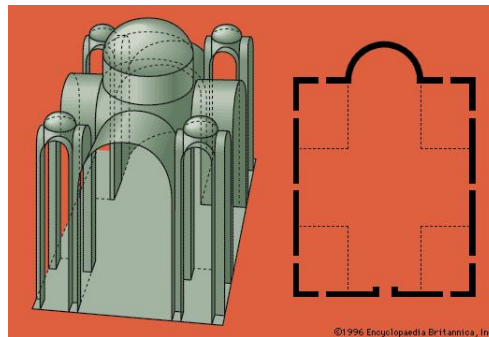


Figura 1: *Quincux* arquitectónico bizantino, de la Enciclopedia Británica de 1996.

Esto es interesante para el matemático porque sugiere la proyección vertical de un hemisferio sobre un cuadrado, idea fundamental de la proyección quincuncial de Peirce. De hecho, sabemos que una integral elíptica de la primera especie (inversa de una función elíptica abeliana) define una aplicación o mapa de un hemisferio sobre un rectángulo. Esta situación pone de manifiesto, apenas, un caso particular de las transformaciones de Schwarz-Christoffel. Otra evidencia en favor de nuestro propósito proviene de las gráficas tridimensionales del módulo de las funciones elípticas (jacobianas y de otros tipos), las cuales son conocidas de vieja data. En ella se observa que tales módulos estallan en los polos y se anulan en los ceros de una manera muy particular, que sugiere una especie de simetría radial “distorsionada” alrededor de los puntos singulares (ceros y polos). Los puntos del hemisferio caerían, pues, desde los “cuernos” o “conos” de los polos, definiendo especies de meridianos y paralelos “deformados” sobre el plano. En especial, los paralelos se aplicarían sobre ciertas “curvas concéntricas” o “paralelos distorsionados”. Como las funciones elípticas son conformes en casi todos los puntos de

su dominio, tales nuevas curvas definirían trayectorias ortogonales, imagen de los paralelos y los meridianos (geográficos) de la esfera.

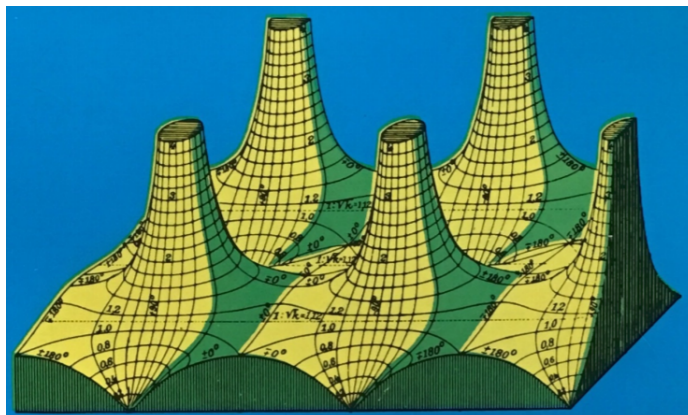


Figura 2: Módulo de una función elíptica en la portada del *Handbook of Mathematical Functions: with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, editado originalmente por Milton Abramowitz y Irene A. Stegun en 1964.

Hemos organizado la presentación en tres momentos. Primero, en el Capítulo 1, damos unos elementos básicos sobre las funciones elípticas jacobianas. Construimos rápidamente dichas funciones usando las funciones theta de Jacobi y enunciamos sus principales propiedades, las cuales se aplicarán después. Luego, en el Capítulo 2, tratamos las inversas de estas funciones elípticas. Comenzamos por calcular fórmulas explícitas para las inversas, lo cual exige el dominio de muchísimas identidades elípticas. Con esto, el problema se simplifica en un problema de una variable real. Danos, entonces, expresiones para las inversas reales. En el desarrollo del capítulo se pone en evidencia una propiedad crucial de las inversas: su quincuncialidad. Para concluir, en el Capítulo 3 proponemos una definición general de propiedad quincuncial y mostramos que las inversas de todas las doce funciones elípticas jacobianas poseen esta propiedad, para cualquier módulo elíptico. El alcance del trabajo es mucho mayor, pues –como ya se anunció en el resumen– derivamos fórmulas explícitas para las aplicaciones complejas que realizan la mentada propiedad quincuncial para las inversas elípticas. No conocemos

una referencia bibliográfica que trate o pruebe este hecho o un hecho similar.

Tenemos la convicción que este trabajo tiene grandes aplicaciones en cartografía, pues generaliza el lacónico artículo de Peirce [3], en el cual la función *cosinus amplitudinis* con módulo $1/\sqrt{2}$ proyecta un hemisferio sobre cierto cuadrado. En verdad, desde las aplicaciones de las Matemáticas, debemos señalar que el uso de las funciones elípticas en la elaboración de mapas planos de la tierra (o cartas geográficas) reviste gran interés para los cartógrafos. A los interesados en el tema, los remitimos al artículo clásico de Lee [12].

Agradecemos al profesor Fernando Zalamea, de la Universidad Nacional de Colombia en Bogotá, por hacernos entender, entre otras cosas, que la palabra latina *quincux* se refiere también a un modelo arquitectónico para una catedral bizantina. Nuestra gratitud es mucho mayor con el profesor Arnold Oostra, de la Universidad del Tolima, quien alguna vez preguntó –pensando en la proyección de Peirce– si todas las funciones elípticas se comportan como la función coseno de la amplitud cerca a sus puntos singulares. Este trabajo quiere ser una respuesta más o menos completa a su pregunta.

1

Funciones theta y funciones elípticas

AL FINAL DE SUS *FUNDAMENTA NOVA* DE 1829 [2], después de arduos trabajos, Jacobi descubrió que “la manera correcta” de establecer fácilmente las propiedades de las funciones elípticas (de Jacobi) se logra con ayuda de las funciones theta (de Jacobi). Como en este trabajo de grado queremos usar las funciones elípticas lo más pronto posible con miras a una implementación numérica posterior, recurrimos a las funciones theta. Los detalles que aquí se omiten sobre las funciones theta se pueden consultar en Rodríguez y Susa [6] o en textos estándar de Variable Compleja.

1.1. LA FUNCIÓN THETA CLÁSICA

Definición 1.1. La función $\theta : \mathbb{C} \times \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}$, del producto cartesiano del plano complejo \mathbb{C} con el semiplano superior complejo $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$ al plano complejo, definida por

$$\theta(z, \tau) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2 \tau + 2\pi i n z}$$

se llama función theta clásica de Jacobi.

1.2. PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN THETA CLÁSICA

Proposición 1.2. La función θ clásica tiene las cuatro propiedades siguientes y se caracteriza totalmente por ellas.

Holomorfía. θ es entera con respecto a z y holomorfa con respecto a τ en todo \mathbb{H} .

Periodicidad. θ es periódica con periodo elemental 1 con respecto a z para τ fijo. Es decir,
 $\theta(z + 1, \tau) = \theta(z, \tau)$, para todo $z \in \mathbb{C}$.

Modulación. $\theta(z + \tau, \tau) = \theta(z, \tau) e^{-\pi i \tau} e^{-2\pi i z}$, para todo par $(z, \tau) \in \mathbb{C} \times \mathbb{H}$.

Ceros. $\theta(z, \tau) = 0$ si y sólo si $z = \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2} + m + n\tau$, para $n, m \in \mathbb{Z}$.

El lector interesado puede encontrar la demostración de estos hechos en Rodríguez y Susa (2016).

1.3. OTRAS FUNCIONES THETA, PROPIEDADES

De particular importancia para la construcción de las funciones elípticas de Jacobi son las siguientes variantes de la función theta clásica.

Definición 1.3. *Funciones theta auxiliares.*

$$\theta_0(z, \tau) := \theta\left(z + \frac{1}{2}, \tau\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n e^{\pi i n^2 \tau + 2\pi i n z},$$

$$\theta_1(z, \tau) := e^{\pi i \frac{z}{4} + \pi i (z + \frac{1}{2})} \theta\left(z + \frac{\tau + 1}{2}, \tau\right) = i \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n e^{\pi i (n + \frac{1}{2})^2 \tau + 2\pi i (n + \frac{1}{2}) z},$$

$$\theta_2(z, \tau) := e^{\pi i \frac{z}{4} + \pi i z} \theta\left(z + \frac{\tau}{2}, \tau\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i (n + \frac{1}{2})^2 \tau + 2\pi i (n + \frac{1}{2}) z},$$

$$\theta_3(z, \tau) := \theta(z, \tau).$$

En especial, nos interesan la diferenciabilidad compleja, los periodos elementales, la modulación o propiedad modular y los ceros de estas nuevas funciones theta.

La holomorfía, o diferenciabilidad en los abiertos del plano, es clara. En segundo lugar, con respecto a z , se tiene lo siguiente.

funciones	periodo elemental
θ_0, θ_3	1
θ_1, θ_2	2

Esto se sigue inmediatamente de las características de la función theta clásica y de la periodicidad de la exponencial compleja:

$$\theta_0(z + 1, \tau) = \theta\left(z + \frac{3}{2}, \tau\right) = \theta\left(z + \frac{1}{2}, \tau\right) = \theta_0(z, \tau),$$

$$\begin{aligned} \theta_1(z + 2, \tau) &= e^{\pi i \frac{z}{4} + \pi i (z + 2 + \frac{1}{2})} \theta\left(z + 2 + \frac{\tau + 1}{2}, \tau\right) \\ &= e^{\pi i \frac{z}{4} + \pi i (z + \frac{1}{2})} \theta\left(z + \frac{\tau + 1}{2}, \tau\right) = \theta_1(z, \tau), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta_2(z + 2, \tau) &= e^{\pi i \frac{z}{4} + \pi i (z + 2)} \theta\left(z + 2 + \frac{\tau}{2}, \tau\right) \\ &= e^{\pi i \frac{z}{4} + \pi i z} \theta\left(z + \frac{\tau}{2}, \tau\right) = \theta_2(z, \tau). \end{aligned}$$

De otro lado, también con respecto a z , para $m, n \in \mathbb{Z}$,

función	únicos ceros
$\theta_0(z, \tau)$	$z = m + n\tau + \frac{\tau}{2}$
$\theta_1(z, \tau)$	$z = m + n\tau$
$\theta_2(z, \tau)$	$z = m + n\tau + \frac{1}{2}$
$\theta_3(z, \tau)$	$z = m + n\tau + \frac{\tau}{2} + \frac{1}{2}$

La ubicación de estos ceros es una consecuencia directa de los ceros de la función theta clásica, recordando que la función exponencial compleja nunca se anula.

Por ultimo, se tienen las siguientes versiones de la propiedad modular para estas funciones:

$$\begin{aligned}\theta_0(z + \tau, \tau) &= \theta\left(z + \frac{1}{2} + \tau, \tau\right) = \theta\left(z + \frac{1}{2}, \tau\right) e^{-\pi i \tau} e^{-2\pi i(z + \frac{1}{2})} \\ &= \theta\left(z + \frac{1}{2}, \tau\right) e^{-\pi i \tau} e^{-2\pi i z} e^{-\pi i} = -\theta_0(z, \tau) e^{-\pi i \tau} e^{-2\pi i z},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta_1(z + \tau, \tau) &= e^{\pi i \frac{\tau}{4} + \pi i(z + \frac{1}{2} + \tau)} \theta\left(z + \frac{\tau + 1}{2} + \tau, \tau\right) \\ &= e^{\pi i \frac{\tau}{4} + \pi i(z + \frac{1}{2})} e^{\pi i \tau} \theta\left(z + \frac{\tau + 1}{2}, \tau\right) e^{-\pi i \tau} e^{-2\pi i(z + \frac{\tau + 1}{2})} \\ &= -\theta_1(z, \tau) e^{-\pi i \tau} e^{-2\pi i z},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta_2(z + \tau, \tau) &= e^{\pi i \frac{\tau}{4} + \pi i(z + \tau)} \theta\left(z + \frac{\tau}{2} + \tau, \tau\right) \\ &= e^{\pi i \frac{\tau}{4} + \pi i z} e^{\pi i \tau} \theta\left(z + \frac{\tau}{2}, \tau\right) e^{-\pi i \tau} e^{-2\pi i(z + \frac{\tau}{2})} = \theta_2(z, \tau) e^{-\pi i \tau} e^{-2\pi i z}.\end{aligned}$$

1.4. FUNCIONES ELÍPTICAS

Las funciones elípticas de Jacobi son funciones de una variable compleja z , las cuales toman también valores complejos. Ellas dependen de un parámetro k , el cual

se supone aquí tal que $0 \leq |k| \leq 1$, aún cuando en otros contextos puede asumir otros valores, reales o complejos. Este k se llama módulo elíptico y el número k' , tal que $k^2 + k'^2 = 1$, es el módulo (elíptico) conjugado a k . Es fácil ver que la llamada integral “completa de la primera especie”

$$K(k) := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}}$$

es convergente, es decir, es un número real. De manera análoga, se pone $K'(k) := K(k')$, con el fin de definir la siguiente cantidad, que será muy útil de ahora en adelante:

$$\tau = i \frac{K'(k)}{K(k)}.$$

Definición 1.4. Las tres funciones elípticas básicas o “mayores” de Jacobi son:

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}(z; k) &= \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\theta_1\left(\frac{z}{2K}; \tau\right)}{\theta_0\left(\frac{z}{2K}; \tau\right)}, \\ \operatorname{cn}(z; k) &= \sqrt{\frac{k'}{k}} \frac{\theta_2\left(\frac{z}{2K}; \tau\right)}{\theta_0\left(\frac{z}{2K}; \tau\right)}, \\ \operatorname{dn}(z; k) &= \sqrt{k'} \frac{\theta\left(\frac{z}{2K}; \tau\right)}{\theta_0\left(\frac{z}{2K}; \tau\right)}. \end{aligned}$$

Los nombres latinos originales para sn , cn , dn son –respectivamente– *sinus amplitudinis*, *cosinus amplitudinis* y *delta amplitudinis*. Ellos evocan la manera como fueron definidas originalmente en los *Fundamenta Nova* (1829) [2]. Tal manera de definir las funciones elípticas jacobianas es equivalente a la nuestra y se usará en el próximo capítulo. En virtud de dicho origen trigonométrico, es útil definir las recíprocas multiplicativas

$$\operatorname{ns}(z; k) = \frac{1}{\operatorname{sn}(z; k)}, \quad \operatorname{nc}(z; k) = \frac{1}{\operatorname{cn}(z; k)}, \quad \operatorname{nd}(z; k) = \frac{1}{\operatorname{dn}(z; k)}.$$

De forma similar se obtienen las otras seis funciones elípticas “menores” de Jacobi:

$$\begin{aligned} sc(z; k) &= \frac{sn(z; k)}{cn(z; k)}, & sd(z; k) &= \frac{sn(z; k)}{dn(z; k)}, \\ cs(z; k) &= \frac{cn(z; k)}{sn(z; k)}, & cd(z; k) &= \frac{cn(z; k)}{dn(z; k)}, \\ ds(z; k) &= \frac{dn(z; k)}{sn(z; k)}, & dc(z; k) &= \frac{dn(z; k)}{cn(z; k)}. \end{aligned}$$

La mnemotecnica es ahora evidente: las dos letras indican un numerador y un denominador. En el mismo sentido, para una letra x , elegida entre s, c, d ; el signo nx vale por 1 entre xn , cuando sea el caso.

1.5. PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES ELÍPTICAS

Proposición 1.5. *Las funciones elípticas básicas de Jacobi son funciones meromorfas doblemente periódicas con las características que se resumen a continuación:*

función	periodos elementales	ceros	polos
$sn(z; k)$	$4K, 2iK'$	$2mK + 2niK'$	$2mK + (2n + 1)iK'$
$cn(z; k)$	$4K, 2(K + iK')$	$(2m + 1)K + 2niK'$	$2mK + (2n + 1)iK'$
$dn(z; k)$	$2K, 4iK'$	$(2m + 1)K + (2n + 1)iK'$	$2mK + (2n + 1)iK'$

Demostración. Los periodos puramente reales son fáciles de establecer:

$$sn(z + 4K; k) = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\theta_1\left(\frac{z+4K}{2K}; \tau\right)}{\theta_0\left(\frac{z+4K}{2K}; \tau\right)} = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\theta_1\left(\frac{z}{2K}; \tau\right)}{\theta_0\left(\frac{z}{2K}; \tau\right)} = sn(z; k),$$

$$cn(z + 4K; k) = \sqrt{\frac{k'}{k}} \frac{\theta_2\left(\frac{z}{2K} + 2; \tau\right)}{\theta_0\left(\frac{z}{2K} + 2; \tau\right)} = \sqrt{\frac{k'}{k}} \frac{\theta_2\left(\frac{z}{2K}; \tau\right)}{\theta_0\left(\frac{z}{2K}; \tau\right)} = cn(z; k),$$

$$dn(z + 2K; k) = \sqrt{k'} \frac{\theta\left(\frac{z}{2K} + 1; \tau\right)}{\theta_0\left(\frac{z}{2K} + 1; \tau\right)} = \sqrt{k'} \frac{\theta\left(\frac{z}{2K}; \tau\right)}{\theta_0\left(\frac{z}{2K}; \tau\right)} = dn(z; k).$$

Para los periodos con parte imaginaria, se usan las propiedades modulares:

$$\begin{aligned} sn(z + 2iK'; k) &= \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\theta_1\left(\frac{z+2iK'}{2K}; \tau\right)}{\theta_0\left(\frac{z+2iK'}{2K}; \tau\right)} = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\theta_1\left(\frac{z}{2K} + \frac{iK'}{K}; \tau\right)}{\theta_0\left(\frac{z}{2K} + \frac{iK'}{K}; \tau\right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\theta_1\left(\frac{z}{2K} + \tau; \tau\right)}{\theta_0\left(\frac{z}{2K} + \tau; \tau\right)} = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{-\theta_1\left(\frac{z}{2K}; \tau\right) e^{-\pi i \tau} e^{-2\pi i \frac{z}{2K}}}{-\theta_0\left(\frac{z}{2K}; \tau\right) e^{-\pi i \tau} e^{-2\pi i \frac{z}{2K}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\theta_1\left(\frac{z}{2K}; \tau\right)}{\theta_0\left(\frac{z}{2K}; \tau\right)} = sn(z; k), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} cn(z + 2(K + iK'); k) &= \sqrt{\frac{k'}{k}} \frac{\theta_2\left(\frac{z}{2K} + 1 + \tau; \tau\right)}{\theta_0\left(\frac{z}{2K} + 1 + \tau; \tau\right)} = \sqrt{\frac{k'}{k}} \frac{\theta_2\left(\frac{z}{2K} + \tau; \tau\right)}{\theta_0\left(\frac{z}{2K} + \tau; \tau\right)} \\ &= \sqrt{\frac{k'}{k}} \frac{-\theta_2\left(\frac{z}{2K}; \tau\right) e^{-\pi i \tau} e^{-2\pi i \frac{z}{2K}}}{-\theta_0\left(\frac{z}{2K}; \tau\right) e^{-\pi i \tau} e^{-2\pi i \frac{z}{2K}}} = \sqrt{\frac{k'}{k}} \frac{\theta_2\left(\frac{z}{2K}; \tau\right)}{\theta_0\left(\frac{z}{2K}; \tau\right)} \\ &= cn(z; k), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dn(z + 4iK'; k) &= \sqrt{k'} \frac{\theta\left(\frac{z+4iK'}{2K}; \tau\right)}{\theta_0\left(\frac{z+4iK'}{2K}; \tau\right)} = \sqrt{k'} \frac{\theta\left(\frac{z}{2K} + \frac{2iK'}{K}; \tau\right)}{\theta_0\left(\frac{z}{2K} + \frac{2iK'}{K}; \tau\right)} \\ &= \sqrt{k'} \frac{\theta\left(\frac{z}{2K} + 2\tau; \tau\right)}{\theta_0\left(\frac{z}{2K} + 2\tau; \tau\right)} = \sqrt{k'} \frac{\theta\left(\frac{z}{2K}; \tau\right) e^{-4\pi i \tau} e^{-4\pi i \frac{z}{2K}}}{\theta_0\left(\frac{z}{2K}; \tau\right) e^{-4\pi i \tau} e^{-4\pi i \frac{z}{2K}}} \\ &= \sqrt{k'} \frac{\theta\left(\frac{z}{2K}; \tau\right)}{\theta_0\left(\frac{z}{2K}; \tau\right)} = dn(z; k). \end{aligned}$$

Los ceros son los puntos donde se anulan los numeradores. Respectivamente para sn , cn y dn , valen

$$2mK + 2niK', (2m+1)K + 2niK' \text{ y } (2m+1)K + (2n+1)iK',$$

para $n, m \in \mathbb{Z}$.

Finalmente, los polos ocurren donde se anula el denominador $\theta_0\left(\frac{z}{2K}; \tau\right)$:

$$2mK + (2n + 1)Ki', n, m \in \mathbb{Z}.$$

□

Corolario 1.6. *Para las recíprocas multiplicativas de las funciones elípticas básicas, se tiene*

función	periodos elementales	ceros	polos
$ns(z; k)$	$4K, 2iK'$	$2mK + (2n + 1)iK'$	$2mK + 2niK'$
$nc(z; k)$	$4K, 2(K + iK')$	$2mK + (2n + 1)iK'$	$(2m + 1)K + 2niK'$
$nd(z; k)$	$2K, 4iK'$	$2mK + (2n + 1)iK'$	$(2m + 1)K + (2n + 1)iK'$

Estas propiedades son consecuencia inmediata de la proposición anterior.

Corolario 1.7. *Las demás funciones elípticas de Jacobi (no básicas) también son meromorfas, doblemente periódicas y poseen las siguientes propiedades:*

función	periodos elementales	ceros	polos
$sc(z; k)$	$2K, 4iK'$	$2mK + 2niK'$	$(2m + 1)K + 2niK'$
$sd(z; k)$	$4K, 2(K + iK')$	$2mK + 2niK'$	$(2m + 1)K + (2n + 1)iK'$
$cd(z; k)$	$4K, 2iK'$	$(2m + 1)K + 2niK'$	$(2m + 1)K + (2n + 1)iK'$
$cs(z; k)$	$2K, 4iK'$	$(2m + 1)K + 2niK'$	$2mK + 2niK'$
$ds(z; k)$	$4K, 2(K + iK')$	$(2m + 1)K + (2n + 1)iK'$	$2mK + 2niK'$
$dc(z; k)$	$4K, 2iK'$	$(2m + 1)K + (2n + 1)iK'$	$(2m + 1)K + 2niK'$

Demostración. Primero consideramos la periodicidad de sc . En primer lugar,

$$sc(z; k) = \frac{sn(z; k)}{cn(z; k)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\theta_1\left(\frac{z}{2K}; \tau\right)}{\theta_0\left(\frac{z}{2K}; \tau\right)}}{\frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{k}} \frac{\theta_2\left(\frac{z}{2K}; \tau\right)}{\theta_0\left(\frac{z}{2K}; \tau\right)}} = \frac{1}{\sqrt{k'}} \frac{\theta_1\left(\frac{z}{2K}; \tau\right)}{\theta_2\left(\frac{z}{2K}; \tau\right)}.$$

En el eje real, por la periodicidad de θ_1 y θ_2 ,

$$\begin{aligned} sc(z + 2K; k) &= \frac{1}{\sqrt{k'}} \frac{\theta_1\left(\frac{z+2K}{2K}; \tau\right)}{\theta_2\left(\frac{z+2K}{2K}; \tau\right)} = \frac{1}{\sqrt{k'}} \frac{\theta_1\left(\frac{z}{2K} + 1; \tau\right)}{\theta_2\left(\frac{z}{2K} + 1; \tau\right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{k'}} \frac{-\theta_1\left(\frac{z}{2K}; \tau\right)}{-\theta_2\left(\frac{z}{2K}; \tau\right)} = sc(z; k). \end{aligned}$$

En el eje imaginario,

$$\begin{aligned} sc(z + 4iK'; k) &= \frac{1}{\sqrt{k'}} \frac{\theta_1\left(\frac{z}{2K} + \frac{4iK'}{2K}; \tau\right)}{\theta_2\left(\frac{z}{2K} + \frac{4iK'}{2K}; \tau\right)} = \frac{1}{\sqrt{k'}} \frac{\theta_1\left(\frac{z}{2K} + 2\tau; \tau\right)}{\theta_2\left(\frac{z}{2K} + 2\tau; \tau\right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{k'}} \frac{\theta_1\left(\frac{z}{2K}; \tau\right) e^{-4\pi i \tau} e^{-4\pi i \frac{z}{2k}}}{\theta_2\left(\frac{z}{2K}; \tau\right) e^{-4\pi i \tau} e^{-4\pi i \frac{z}{2k}}} = sc(z, k). \end{aligned}$$

Estos son los mismos periodos de cs .

Para la periodicidad de sd , observemos que

$$sd(z; k) = \frac{sn(z; k)}{dn(z; k)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\theta_1\left(\frac{z}{2K}; \tau\right)}{\theta_0\left(\frac{z}{2K}; \tau\right)}}{\sqrt{k'} \frac{\theta\left(\frac{z}{2K}; \tau\right)}{\theta_0\left(\frac{z}{2K}; \tau\right)}} = \frac{1}{\sqrt{k'} \sqrt{k}} \frac{\theta_1\left(\frac{z}{2K}; \tau\right)}{\theta\left(\frac{z}{2K}; \tau\right)}.$$

En la parte real,

$$\begin{aligned} sd(z + 4K; k) &= \frac{1}{\sqrt{k'} \sqrt{k}} \frac{\theta_1\left(\frac{z+4K}{2K}; \tau\right)}{\theta\left(\frac{z+4K}{2K}; \tau\right)} = \frac{1}{\sqrt{k'} \sqrt{k}} \frac{\theta_1\left(\frac{z}{2K} + 2; \tau\right)}{\theta\left(\frac{z}{2K} + 2; \tau\right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{k'} \sqrt{k}} \frac{\theta_1\left(\frac{z}{2K}; \tau\right)}{\theta\left(\frac{z}{2K}; \tau\right)} = sd(z; k). \end{aligned}$$

En la parte imaginaria,

$$\begin{aligned}
 sd(z + 2(K + iK'); k) &= \frac{1}{\sqrt{k'}\sqrt{k}} \frac{\theta_1\left(\frac{z}{2K} + 1 + \tau; \tau\right)}{\theta\left(\frac{z}{2K} + 1 + \tau; \tau\right)} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{k'}\sqrt{k}} \frac{-\theta_1\left(\frac{z}{2K} + \tau; \tau\right)}{\theta\left(\frac{z}{2K} + \tau; \tau\right)} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{k'}\sqrt{k}} \frac{\theta_1\left(\frac{z}{2K}; \tau\right) e^{-\pi i \tau} e^{-2\pi i \frac{z}{2k}}}{\theta\left(\frac{z}{2K}; \tau\right) e^{-\pi i \tau} e^{-2\pi i \frac{z}{2k}}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{k'}\sqrt{k}} \frac{\theta_1\left(\frac{z}{2K}; \tau\right)}{\theta\left(\frac{z}{2K}; \tau\right)} = sd(z; k).
 \end{aligned}$$

ds tiene los mismos periodos.

Por ultimo, para cd ,

$$cd(z; k) = \frac{cn(z; k)}{dn(z; k)} = \frac{\frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{k}} \frac{\theta_2\left(\frac{z}{2K}; \tau\right)}{\theta_0\left(\frac{z}{2K}; \tau\right)}}{\sqrt{k'} \frac{\theta\left(\frac{z}{2K}; \tau\right)}{\theta_0\left(\frac{z}{2K}; \tau\right)}} = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\theta_2\left(\frac{z}{2K}; \tau\right)}{\theta\left(\frac{z}{2K}; \tau\right)}.$$

Así pues,

$$\begin{aligned}
 cd(z + 4K; k) &= \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\theta_2\left(\frac{z+4K}{2K}; \tau\right)}{\theta\left(\frac{z+4K}{2K}; \tau\right)} = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\theta_2\left(\frac{z}{2K} + 2; \tau\right)}{\theta\left(\frac{z}{2K} + 2; \tau\right)} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\theta_2\left(\frac{z}{2K}; \tau\right)}{\theta\left(\frac{z}{2K}; \tau\right)} = cd(z, k).
 \end{aligned}$$

También,

$$\begin{aligned}
 cd(z + 2iK'; k) &= \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\theta_2\left(\frac{z+2iK'}{2K}; \tau\right)}{\theta\left(\frac{z+2iK'}{2K}; \tau\right)} = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\theta_2\left(\frac{z}{2K} + \tau; \tau\right)}{\theta\left(\frac{z}{2K} + \tau; \tau\right)} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\theta_2\left(\frac{z}{2K}; \tau\right) e^{-\pi i \tau} e^{-2\pi i \frac{z}{2k}}}{\theta\left(\frac{z}{2K}; \tau\right) e^{-\pi i \tau} e^{-2\pi i \frac{z}{2k}}} = cd(z; k).
 \end{aligned}$$

Para dc se obtienen los mismo periodos.

Para los ceros y los polos de estas funciones solamente basta observar sus nu-

meradores y el denominadores, y aplicar la proposición anterior. \square

Ya que las funciones elípticas son doblemente periódicas, su región fundamental es un paralelogramo. Esto implica que es suficiente estudiar su comportamiento en uno de tales paralelogramos, debido a que tal comportamiento se repite igualmente en cada uno de ellos. Los paralelogramos fundamentales forman un “embaldosado” que cubre la totalidad del plano. De manera alternativa, muy elegantemente, se puede definir una relación de equivalencia en el plano para identificar los puntos del plano que difieren por múltiplos enteros de los periodos. Con ello, se obtiene que las funciones elípticas tienen como dominio a un toro. Por último, se puede agregar el infinito al codominio para lograr que las funciones elípticas estén definidas de un toro en la esfera de Riemann. En concreto, para lo que sigue del trabajo, las funciones elípticas son funciones meromorfas doblemente periódicas $ej : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{S}$, de un toro a una esfera de Riemann, las cuales tienen dos ceros y dos polos en el toro que les sirve de dominio. Sobre esta definición, en la cual el dominio y el codominio son conocidas superficies de Riemann, volveremos en los próximos capítulos.

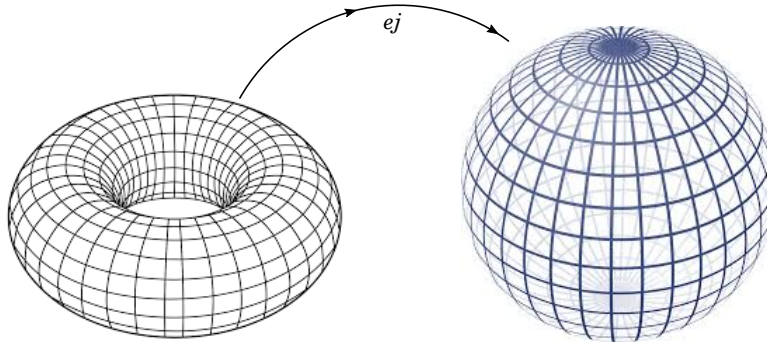


Figura 1.1: Definición de función elíptica.

Las Figuras siguientes muestran (posibles elecciones de) regiones o paralelogramos fundamentales para las doce funciones elípticas de Jacobi. Primeramente, la Figura 1.2 enseña paralelogramos fundamentales para las funciones básicas. Los

ceros se indican con pequeños rombos y los polos con circunferencias. Para las recíprocas multiplicativas de estas funciones, se debe intercambiar el lugar de los ceros y los polos.

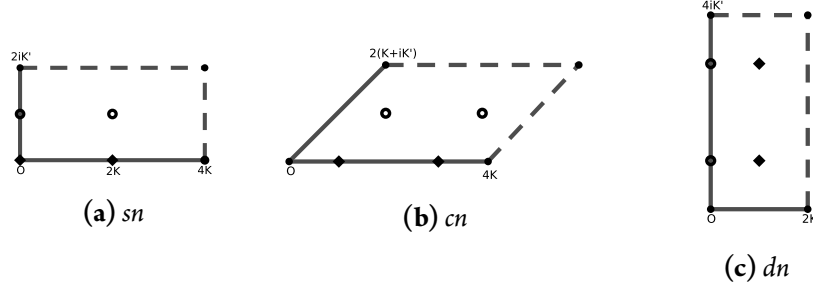


Figura 1.2: Paralelogramos fundamentales para las funciones elípticas básicas.

Algunos rectángulos elementales válidos para las funciones sc , sd y cd se ilustran en la Figura 1.3, con las mismas convenciones anteriores. De nuevo, los paralelogramos correspondientes para cs , ds y dc se obtienen intercambiando las posiciones de ceros y polos.

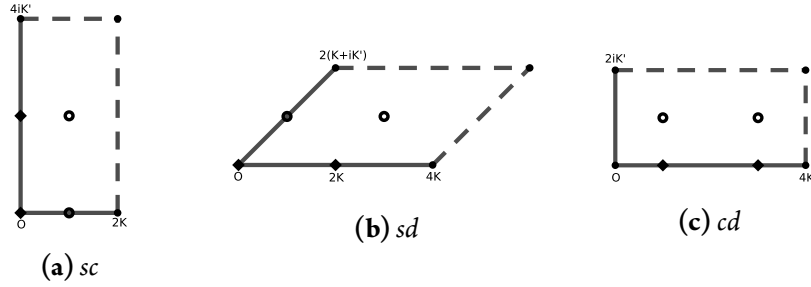


Figura 1.3: Paralelogramos fundamentales para sc , sd y cd .

Puesto que lo que nos interesa aquí tiene que ver con las inversas de las funciones elípticas jacobianas, debemos considerar la cuestión de su inyectividad. A propósito, dos puntos del toro van al infinito de la esfera de Riemann y otros dos puntos van al $0 \in \mathbb{C}$. En verdad, las funciones elípticas son dos-a-uno y hay varias

simetrías que resuelven fácilmente para nosotros la manera de restringir el dominio para obtener funciones inyectivas y biyectivas.

La primera de estas simetrías tiene que ver con los conocidos teoremas de Liouville para las funciones elípticas, en general. Al respecto, por cuestiones de espacio, remitimos el lector al original de Liouville [10]; o a las presentaciones más detalladas de Robert [1], o al trabajo de grado de Gutiérrez y Trujillo [19]. Como consecuencia de tales notables resultados, los dominios tóricos de nuestras funciones pueden dividirse en dos partes o mitades, cada una de las cuales contiene solamente un cero y un polo. Con esta restricción del dominio, las funciones de Jacobi se vuelven inyectivas. A continuación, para cada función básica, esbozamos (resaltando y rellenando) una de las dos mitades posibles, teniendo la precaución de no dejar el cero y el polo en la frontera de tal región (esto es posible por la doble periodicidad: el dominio es un toro).

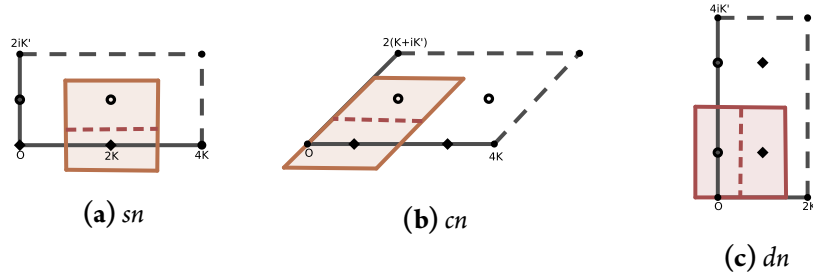


Figura 1.4: Algunos dominios maximales en los cuales las funciones elípticas básicas son inyectivas.

Para las demás funciones elípticas jacobianas, los dominios de inyectividad son como en la Figura 1.5.

La segunda simetría tiene que ver con el hecho de que los puntos singulares (cero y polo) se aplican sobre los polos sur y norte de la esfera. En concordancia, las divisiones en línea punteada de los dibujos antes mencionados (Figuras 1.4 y 1.5) parten el dominio de inyectividad en dos partes, correspondientes a los hemisferios sur y norte. La frontera de cada una de estas mitades o subparalelogramos del do-

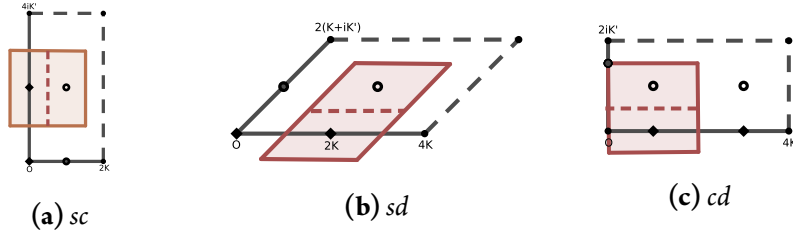


Figura 1.5: Algunos dominios maximales donde sc , sd y cd son inyectivas.

minio de inyectividad se aplica sobre el ecuador o paralelo de latitud cero. Sobre esto volveremos en el Capítulo 3. Allí precisamos completamente el asunto de la biyectividad.

En este capítulo hemos definido las funciones elípticas de Jacobi por medio de las funciones theta y hemos establecido algunas propiedades importantes que las caracterizan. Quedan, sin embargo, muchas otras propiedades, sobre todo las llamadas identidades elípticas, similares a las famosísimas identidades trigonométricas. En el capítulo que sigue vamos a estudiar las funciones inversas de las funciones elípticas de Jacobi con la ayuda de tales identidades elípticas.

2

Funciones elípticas inversas

LA PROYECCIÓN QUINCUNCIAL DE PEIRCE [3] es, según su descubridor, útil para la meteorología y la magnetología. En ella se compone la proyección estereográfica con la inversa de cn , el *cosinus amplitudinis* de Jacobi, de módulo $k = 1/\sqrt{2}$. Además, ella aplica los hemisferios norte y sur de la esfera terrestre sobre sendos cuadrados, a la manera que indica la Figura 2.1.

En este capítulo generalizamos este resultado para todas las doce funciones elípticas de Jacobi, provistas de un módulo arbitrario k . El hilo conductor ha consistido en extender –con cierto trabajo adicional– el algoritmo desarrollado en Solanilla, Oostra y Yáñez [16].

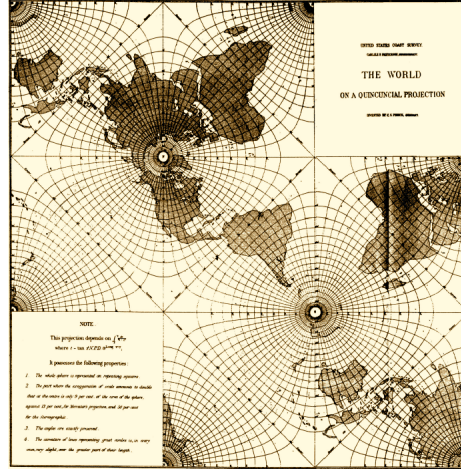


Figura 2.1: Proyección quincuncial de Peirce.

2.1. INVERSAS DE LAS FUNCIONES ELÍPTICAS

Consideramos la inversa $ej^{-1} : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{T}$, de una función elíptica jacobiana cualquiera $ej(z; k)$, de módulo elíptico k . Tal como es usual en Geometría, identificaremos a esta aplicación con su lectura plana. Para ello, tomamos coordenadas esféricas geográficas $\theta \in (0, 2\pi)$ –longitud¹– y $l \in (-\pi/2, \pi/2)$ –latitud–. Nuestra aplicación toma una forma más agradable con la introducción del parámetro $p = l + \pi/2 \in (0, \pi)$. Ciertamente, nuestro mapa de la esfera será la proyección estereográfica $(\theta, p) \mapsto \zeta = x + iy$, de la esfera pinchada al plano complejo. Con la ayuda de p , ella toma la conveniente forma $\zeta = \tan(p/2) \exp(i\theta)$, el punto del plano de Argand con módulo complejo $\rho = \tan(p/2)$ y argumento principal θ . Para el toro tomamos la inversa de la restricción de la aplicación cociente (recordemos la equivalencia que define el toro) a una región donde la función elíptica es inyectiva (digamos, una de las mitades del dominio del inyectividad). Por influencia de la Cartografía, llamamos proyecciones elípticas a las funciones inversas que estamos considerando (aplanadas o no).

En efecto, estamos interesados en las proyecciones elípticas definidas en un he-

¹En este punto ya no necesitamos a la función theta clásica y, así, podemos usar su letra griega.

misferio (digamos, el hemisferio norte pinchado en el polo) sobre un subparalelogramo de inyectividad. De esta forma, las variables se relacionan mediante funciones $(\theta, p) = \zeta \mapsto z = x + iy$, donde

$$z = ej^{-1}(\zeta; k) \text{ si y sólo si } \zeta = ej(z; k),$$

para un k cualquiera, el cual (como veremos muy pronto) se debe especificar siempre en este Capítulo.

También necesitamos profundizar en otras propiedades importantes de las funciones elípticas de Jacobi.

2.2. FÓRMULAS DE ADICIÓN, IDENTIDADES ELÍPTICAS

Las formulas de adición de las funciones elípticas básicas de Jacobi son, por cierto, una de sus propiedades más importantes. Para no alargar innecesariamente esta presentación, las aceptamos sin demostración. El lector interesado puede recurrir directamente a Abel [18] o a Solanilla, Tamayo y Pareja [15] para ver dos demostraciones distintas de tales fórmulas. En fin, estas fórmulas esenciales dominan las investigaciones originarias de Abel [18] y de Jacobi [2]. Este último, empero, las abandona al final de los *Fundamenta nova* por las funciones theta, que reportan ventajas computacionales considerables.

Para un módulo elíptico dado k , las fórmulas de adición básicas son

$$\begin{aligned} sn(z + h; k) &= \frac{sn(z; k) cn(h; k) dn(h; k) + sn(h; k) cn(z; k) dn(z; k)}{1 - k^2 sn^2(z; k) sn^2(h; k)}, \\ cn(z + h; k) &= \frac{cn(z; k) cn(h; k) - sn(z; k) sn(h; k) dn(z; k) dn(h; k)}{1 - k^2 sn^2(z; k) sn^2(h; k)}, \\ dn(z + h; k) &= \frac{dn(z; k) dn(h; k) - k^2 sn(z; k) sn(h; k) cn(z; k) cn(h; k)}{1 - k^2 sn^2(z; k) sn^2(h; k)}, \end{aligned}$$

para $z, h \in \mathbb{C}$, cuando las operaciones algebraicas tengan sentido.

A partir de estas fórmulas básicas, se encuentran las fórmulas de adición para las

demás funciones elípticas de Jacobi (los módulos quedan claros de lo anterior):

$$\begin{aligned}
ns(z+h) &= \frac{1 - k^2 sn^2 z sn^2 h}{snz cnh dnh + snh cnz dnz}, & nc(z+h) &= \frac{1 - k^2 sn^2 z sn^2 h}{cnz cnh - snz snh dnz dnh}, \\
nd(z+h) &= \frac{1 - k^2 sn^2 z sn^2 h}{dnz dnh - k^2 snz snh cnz cnh}, & sc(z+h) &= \frac{snz cnh dnh + snh cnz dnz}{cnz cnh - snz snh dnz dnh}, \\
sd(z+h) &= \frac{snz cnh dnh + snh cnz dnz}{dnz dnh - k^2 snz snh cnz cnh}, & cs(z+h) &= \frac{cnz cnh - snz snh dnz dnh}{snz cnh dnh + snh cnz dnz}, \\
cd(z+h) &= \frac{cnz cnh - snz snh dnz dnh}{dnz dnh - k^2 snz snh cnz cnh}, & ds(z+h) &= \frac{dnz dnh - k^2 snz snh cnz cnh}{snz cnh dnh + snh cnz dnz}, \\
dc(z+h) &= \frac{dnz dnh - k^2 snz snh cnz cnh}{cnz cnh - snz snh dnz dnh}.
\end{aligned}$$

Además de las poderosas fórmulas de adición, nos permitiremos usar otras muchas identidades elípticas. Ellas incluyen identidades del tipo pitagórico, como por ejemplo,

$$\begin{aligned}
sn^2(z; k) + cn^2(z; k) &= 1, \\
k^2 sn^2(z; k) + dn^2(z; k) &= 1, \\
k^2 cn^2(z; k) + k'^2 &= dn^2(z; k).
\end{aligned}$$

También debemos saber que las funciones cn , dn , cd , nc , nd y dc son pares. Las demás funciones elípticas son impares.

Y aún más, emplearemos libremente las 74 identidades dadas en *Wolfram MathWorld* [20], las contenidas en la *Digital Library of Mathematical Functions* [4] y todas las propiedades que podamos demostrar a partir de ellas. A medida que se necesiten identidades que no sean tan evidentes, se las irá mencionando a conveniencia, en el momento adecuado.

2.3. INVERSIÓN FORMAL DE LAS FUNCIONES ELÍPTICAS PARES

En esta sección encontramos expresiones útiles para las funciones inversas de las funciones elípticas pares. Ciertamente, éstas se dejan manipular más fácilmente

que las impares (tratadas en la sección siguiente). En verdad, el proceso de Solanilla, Oostra y Yañez [16], para la función $cn(z; 1/\sqrt{2})$, se generaliza –con cierto trabajo extra– para cualquier función elíptica par de módulo k , cualquiera.

Hemos considerado necesario introducir una nueva notación para abreviar algunos símbolos usuales y para tener a la mano toda la información necesaria para encontrar las inversas. Los nuevos símbolos constan de una letra principal y cuatro atributos. Las letras principales van en el centro del símbolo y pueden ser únicamente dos: ρ , que indica el módulo complejo; o θ , para el argumento (principal) complejo. Alrededor de estas letras van cuatro subsímbolos más, los cuales especifican una función elíptica, una potencia a la cual se eleva la letra principal, un módulo elíptico y un punto en el que se evalúa la función elíptica. Estos atributos se escriben en sentido antihorario, comenzando por la esquina inferior derecha de la letra principal. Nada mejor que un par de ejemplos para explicar aquello a lo que nos referimos. En ellos presentamos el equivalente de nuestro símbolo en la notación usual de la Variable Compleja:

$$\begin{aligned} {}^k_z\rho_{sn}^2 &:= |sn(z; k)|^2, \\ {}^{k'}_{\tilde{w}}\theta_{cn}^1 &:= \text{Arg}(cn(\tilde{w}; k')). \end{aligned}$$

Podría parecer, inicialmente, que esta notación es exagerada. Al respecto, solamente podemos decir que ella permite escribir todas las inversas de todas las funciones elípticas de una manera unificada, amigable y significativa. En particular, veremos en la sección siguiente que, para la inversión de las funciones elípticas impares, se debe saber en cada momento el argumento y el módulo elíptico.

Vamos a realizar nuestro propósito en dos pasos. Comenzamos por encontrar expresiones que dependen de ciertos módulos complejos.

Lema 2.1. *Sean $z = x + iy \in \mathbb{C}$ un punto en el dominio (de inyectividad) de una función elíptica par y k un módulo elíptico. Los valores de x, y que definen las inversas respectivas satisfacen las condiciones del Cuadro 2.3.1.*

función	condición sobre x	condición sobre y
$cn(z; k)$	$cn(2x; k) = \frac{\frac{k^2}{z\rho_{cn}^2} - \frac{k^2}{z\rho_{sn}^2} \frac{k^2}{z\rho_{dn}^2}}{1 - k^2 \frac{k^4}{z\rho_{sn}^4}}$	$cn(2y; k') = \frac{1 - k^2 \frac{k^4}{z\rho_{sn}^4}}{\frac{k^2}{z\rho_{cn}^2} + \frac{k^2}{z\rho_{sn}^2} \frac{k^2}{z\rho_{dn}^2}}$
$dn(z; k)$	$dn(2x; k) = \frac{\frac{k^2}{z\rho_{dn}^2} - k^2 \frac{k^2}{z\rho_{sn}^2} \frac{k^2}{z\rho_{cn}^2}}{1 - k^2 \frac{k^4}{z\rho_{sn}^4}}$	$dc(2y; k') = \frac{\frac{k^2}{z\rho_{dn}^2} + k^2 \frac{k^2}{z\rho_{sn}^2} \frac{k^2}{z\rho_{cn}^2}}{1 - k^2 \frac{k^4}{z\rho_{sn}^4}}$
$cd(z; k)$	$cd(2x; k) = \frac{\frac{k^2}{z\rho_{cd}^2} - \frac{k^2}{z\rho_{sn}^2}}{1 - k^2 \frac{k^2}{z\rho_{sn}^2} \frac{k^2}{z\rho_{cd}^2}}$	$nd(2y; k') = \frac{\frac{k^2}{z\rho_{cd}^2} + \frac{k^2}{z\rho_{sn}^2}}{1 + k^2 \frac{k^2}{z\rho_{sn}^2} \frac{k^2}{z\rho_{cd}^2}}$
$nc(z; k)$	$cn(2x; k) = \frac{1 - k^2 \frac{k^4}{z\rho_{sn}^4}}{\frac{k^2}{z\rho_{cn}^2} - \frac{k^2}{z\rho_{sn}^2} \frac{k^2}{z\rho_{dn}^2}}$	$cn(2y; k') = \frac{\frac{k^2}{z\rho_{cn}^2} + \frac{k^2}{z\rho_{sn}^2} \frac{k^2}{z\rho_{dn}^2}}{1 - k^2 \frac{k^4}{z\rho_{sn}^4}}$
$nd(z; k)$	$dn(2x; k) = \frac{1 - k^2 \frac{k^4}{z\rho_{sn}^4}}{\frac{k^2}{z\rho_{dn}^2} - k^2 \frac{k^2}{z\rho_{sn}^2} \frac{k^2}{z\rho_{cn}^2}}$	$dc(2y; k') = \frac{1 - k^2 \frac{k^4}{z\rho_{sn}^4}}{\frac{k^2}{z\rho_{dn}^2} + k^2 \frac{k^2}{z\rho_{sn}^2} \frac{k^2}{z\rho_{cn}^2}}$
$dc(z; k)$	$cd(2x; k) = \frac{\frac{k^2}{z\rho_{dc}^2} - k^2 \frac{k^2}{z\rho_{sn}^2}}{1 - \frac{k^2}{z\rho_{sn}^2} \frac{k^2}{z\rho_{dc}^2}}$	$nd(2y; k') = \frac{\frac{k^2}{z\rho_{dc}^2} + k^2 \frac{k^2}{z\rho_{sn}^2}}{1 + \frac{k^2}{z\rho_{sn}^2} \frac{k^2}{z\rho_{dc}^2}}$

Cuadro 2.3.1: Dependencia de los módulos básicos.

Demostración. Del conjugado complejo $\bar{z} = x - iy$, obtenemos –como es usual– $2x = z + \bar{z}$ y $2yi = z - \bar{z}$. Así, se tiene que

1. Para cn , por su fórmula de adición,

$$cn(2x; k) = cn(z + \bar{z}; k) = \frac{cn(z; k)cn(\bar{z}; k) - sn(z; k)sn(\bar{z}; k)dn(z; k)dn(\bar{z}; k)}{1 - k^2 sn^2(z; k)sn^2(\bar{z}; k)}.$$

De forma similar, ya que sn es impar y cn, dn son pares,

$$cn(2yi; k) = cn(z - \bar{z}; k) = \frac{cn(z; k)cn(\bar{z}; k) + sn(z; k)sn(\bar{z}; k)dn(z; k)dn(\bar{z}; k)}{1 - k^2 sn^2(z; k)sn^2(\bar{z}; k)}.$$

Es fácil ver que $sn(\bar{z}; k) = \overline{sn(z; k)}$, $cn(\bar{z}; k) = \overline{cn(z; k)}$ y $dn(\bar{z}; k) = \overline{dn(z; k)}$. Además, para $cn(2yi)$ necesitamos la identidad $cn(iv; k) = 1/cn(v; k')$.

Esto no ofrece dificultad:

$$\begin{aligned} cn(o + iv; k) &= \frac{cn(o; k)cn(v; k')}{1 - dn^2(o; k)sn^2(v; k')} - i \frac{sn(o; k)dn(o; k)sn(v; k')dn(v; k')}{1 - dn^2(o; k)sn^2(v; k')} \\ &= \frac{cn(v; k')}{1 - sn^2(v; k')} = \frac{cn(v; k')}{cn^2(v; k')} = \frac{1}{cn(v; k')}. \end{aligned}$$

La fórmula en el Cuadro 2.3.1 se sigue inmediatamente.

2. Para dn , de manera análoga,

$$\begin{aligned} dn(2x; k) &= dn(z + \bar{z}; k) = \frac{dn(z; k)dn(\bar{z}; k) - k^2 sn(z; k)sn(\bar{z}; k)cn(z; k)cn(\bar{z}; k)}{1 - k^2 sn^2(z; k)sn^2(\bar{z}; k)}, \\ dn(2yi; k) &= dn(z - \bar{z}; k) = \frac{dn(z; k)dn(\bar{z}; k) + k^2 sn(z; k)sn(\bar{z}; k)cn(z; k)cn(\bar{z}; k)}{1 - k^2 sn^2(z; k)sn^2(\bar{z}; k)}. \end{aligned}$$

Esta vez necesitamos

$$\begin{aligned} dn(o + iv; k) &= \frac{dn(o; k)cn(v; k')dn(v; k')}{1 - dn^2(o; k)sn^2(v; k')} - i \frac{k^2 sn(o; k)cn(o; k)sn(v; k')}{1 - dn^2(o; k)sn^2(v; k')} \\ &= \frac{cn(v; k')dn(v; k')}{1 - sn^2(v; k')} = \frac{cn(v; k')dn(v; k')}{cn^2(v; k')} = \frac{dn(v; k')}{cn(v; k')}. \end{aligned}$$

La fórmula queda clara.

3. Por adición con cd ,

$$\begin{aligned} cd(2x; k) &= cd(z + \bar{z}; k) = \frac{cn(z; k)cn(\bar{z}; k) - sn(z; k)sn(\bar{z}; k)dn(z; k)dn(\bar{z}; k)}{dn(z; k)dn(\bar{z}; k) - k^2 sn(z; k)sn(\bar{z}; k)cn(z; k)cn(\bar{z}; k)}, \\ cd(2yi; k) &= cd(z - \bar{z}; k) = \frac{cn(z; k)cn(\bar{z}; k) + sn(z; k)sn(\bar{z}; k)dn(z; k)dn(\bar{z}; k)}{dn(z; k)dn(\bar{z}; k) + k^2 sn(z; k)sn(\bar{z}; k)cn(z; k)cn(\bar{z}; k)}. \end{aligned}$$

Para terminar, usamos

$$\begin{aligned} cd(o + iv; k) &= \frac{cn(o; k)cn(v; k') - i sn(o; k)dn(o; k)sn(v; k')dn(v; k')}{dn(o; k)cn(v; k')dn(v; k') - i k^2 sn(o; k)cn(o; k)sn(v; k')} \\ &= \frac{cn(v; k')}{cn(v; k')dn(v; k')} = \frac{1}{dn(v; k')}. \end{aligned}$$

Luego dividimos tanto numerador como denominador por el modulo de $dn^2(z; k)$ para así obtener la formula deseada.

Las tres funciones restantes son las recíprocas multiplicativas de las anteriores. □

Este lema reduce el problema de las inversas complejas a las restricciones de las funciones elípticas al eje real. Esto simplifica mucho las cosas ya que estas dichas restricciones son conocidas de vieja data.

Queda, empero, una dificultad que enfrentar: las expresiones anteriores deberían depender solamente de la función que se invierte y no de las otras. Esto se resuelve con ayuda de las identidades elípticas de tipo pitagórico.

Lema 2.2. *Los módulos complejos de las funciones elípticas pares se relacionan como se explica en el Cuadro 2.3.2. En breve, dado el módulo (complejo) de una de estas funciones, los demás módulos (complejos), necesarios para encontrar la inversa, dependen del módulo y el argumento (complejos) de la función dada.*

función	módulo(s) requerido(s)
$cn(z; k) = {}^k\rho_{cn}^1 \exp(i {}^k\theta_{cn}^1)$	${}^k\rho_{sn}^4 = 1 - 2 {}^k\rho_{cn}^2 \cos(2 {}^k\theta_{cn}^1) + {}^k\rho_{cn}^4$
$dn(z; k) = {}^k\rho_{dn}^1 \exp(i {}^k\theta_{dn}^1)$	${}^k\rho_{dn}^4 = k^4 {}^k\rho_{cn}^4 + 2k^2 k'^2 {}^k\rho_{cn}^2 \cos(2 {}^k\theta_{cn}^1) + k'^4$
$cd(z; k) = {}^k\rho_{cd}^1 \exp(i {}^k\theta_{cd}^1)$	${}^k\rho_{sn}^4 = k^{-4} (1 - 2 {}^k\rho_{dn}^2 \cos(2 {}^k\theta_{dn}^1) + {}^k\rho_{dn}^4)$
$nc(z; k) = {}^k\rho_{nc}^1 \exp(i {}^k\theta_{nc}^1)$	${}^k\rho_{cn}^4 = k^{-4} ({}^k\rho_{dn}^4 - 2k'^2 {}^k\rho_{dn}^2 \cos(2 {}^k\theta_{dn}^1) + k'^4)$
$nd(z; k) = {}^k\rho_{nd}^1 \exp(i {}^k\theta_{nd}^1)$	${}^k\rho_{sn}^4 = \frac{1 - 2 {}^k\rho_{cd}^2 \cos(2 {}^k\theta_{cd}^1) + {}^k\rho_{cd}^4}{1 - 2k^2 {}^k\rho_{cd}^2 \cos(2 {}^k\theta_{cd}^1) + k^4 {}^k\rho_{cd}^4}$
$dc(z; k) = {}^k\rho_{dc}^1 \exp(i {}^k\theta_{dc}^1)$	${}^k\rho_{sn}^4 = \frac{k^4 {}^k\rho_{nc}^4 + 2k^2 k'^2 {}^k\rho_{nc}^2 \cos(2 {}^k\theta_{nc}^1) + k'^4}{k^4 {}^k\rho_{nc}^4 + 2k^2 k'^2 {}^k\rho_{nc}^2 \cos(2 {}^k\theta_{nc}^1) + k'^4}$
	${}^k\rho_{sn}^4 = 1 - 2 {}^k\rho_{nc}^{-2} \cos(2 {}^k\theta_{nc}^1) + {}^k\rho_{nc}^{-4}$
	${}^k\rho_{dn}^4 = k^4 {}^k\rho_{nc}^4 + 2k^2 k'^2 {}^k\rho_{nc}^2 \cos(2 {}^k\theta_{nc}^1) + k'^4$
	${}^k\rho_{sn}^4 = 1 - 2 {}^k\rho_{nd}^{-2} \cos(2 {}^k\theta_{nd}^1) + {}^k\rho_{nd}^{-4}$
	${}^k\rho_{cn}^4 = {}^k\rho_{nd}^{-4} - 2k'^2 {}^k\rho_{nd}^{-2} \cos(2 {}^k\theta_{nd}^1) + k'^4$
	${}^k\rho_{sn}^4 = \frac{1 - 2 {}^k\rho_{dc}^2 \cos(2 {}^k\theta_{dc}^1) + {}^k\rho_{dc}^4}{k^4 - 2k^2 {}^k\rho_{dc}^2 \cos(2 {}^k\theta_{dc}^1) + {}^k\rho_{dc}^4}$

Cuadro 2.3.2: Reducción de módulos.

Demostración. Consideramos función por función.

1. Para cn partimos de $sn^2(z; k) + cn^2(z; k) = 1$. Es decir,

$${}^k\rho_{sn}^2 \exp(2i {}^k\theta_{sn}^1) = 1 - {}^k\rho_{cn}^2 \exp(2i {}^k\theta_{cn}^1).$$

La multiplicación de este complejo por su conjugado produce

$$\begin{aligned} {}^k_z\rho_{sn}^4 &= 1 - {}^k_z\rho_{cn}^2 \left(e^{2i {}^k_z\theta_{cn}^1} + e^{-2i {}^k_z\theta_{cn}^1} \right) + {}^k_z\rho_{cn}^4 \\ &= 1 - 2 {}^k_z\rho_{cn}^2 \cos \left(2 {}^k_z\theta_{cn}^1 \right) + {}^k_z\rho_{cn}^4. \end{aligned}$$

Por otra parte, $dn^2(z; k) = k^2 cn^2(z; k) + k'^2$. O sea,

$${}^k_z\rho_{dn}^2 \exp \left(2i {}^k_z\theta_{dn}^1 \right) = k^2 {}^k_z\rho_{cn}^2 \exp \left(2i {}^k_z\theta_{cn}^1 \right) + k'^2.$$

Conjugando y multiplicando,

$$\begin{aligned} {}^k_z\rho_{dn}^4 &= k^4 {}^k_z\rho_{cn}^4 + k^2 k'^2 {}^k_z\rho_{cn}^2 \left(e^{2i {}^k_z\theta_{cn}^1} + e^{-2i {}^k_z\theta_{cn}^1} \right) + k'^4 \\ &= k^4 {}^k_z\rho_{cn}^4 + 2k^2 k'^2 {}^k_z\rho_{cn}^2 \cos \left(2 {}^k_z\theta_{cn}^1 \right) + k'^4. \end{aligned}$$

2. De manera análoga, para dn , se parte de $k^2 sn^2(z; k) + dn^2(z; k) = 1$:

$$k^2 {}^k_z\rho_{sn}^2 e^{2i {}^k_z\theta_{sn}^1} = 1 - {}^k_z\rho_{dn}^2 e^{2i {}^k_z\theta_{dn}^1}.$$

Multiplicando por su conjugado,

$$\begin{aligned} k^4 {}^k_z\rho_{sn}^4 &= 1 - {}^k_z\rho_{dn}^2 \left(e^{2i {}^k_z\theta_{dn}^1} + e^{-2i {}^k_z\theta_{dn}^1} \right) + {}^k_z\rho_{dn}^4 \\ &= 1 - 2 {}^k_z\rho_{dn}^2 \cos \left(2 {}^k_z\theta_{dn}^1 \right) + {}^k_z\rho_{dn}^4. \end{aligned}$$

De otro lado, $k^2 cn^2(z; k) + k'^2 = dn^2(z; k)$, *id est*,

$$k^2 {}^k_z\rho_{cn}^2 e^{2i {}^k_z\theta_{cn}^1} = {}^k_z\rho_{dn}^2 e^{2i {}^k_z\theta_{dn}^1} - k'^2.$$

El módulo cumple, entonces,

$$\begin{aligned} k^4 {}^k_z\rho_{cn}^4 &= {}^k_z\rho_{dn}^4 - k'^2 {}^k_z\rho_{dn}^2 \left(e^{2i {}^k_z\theta_{dn}^1} + e^{-2i {}^k_z\theta_{dn}^1} \right) + k'^4 \\ &= {}^k_z\rho_{dn}^4 - 2k'^2 {}^k_z\rho_{dn}^2 \cos \left(2 {}^k_z\theta_{dn}^1 \right) + k'^4. \end{aligned}$$

3. Observemos que las fórmulas del teorema anterior para cd se pueden escribir, después de una división conveniente, como

$$cd(2x; k) = \frac{\frac{k}{z}\rho_{cd}^2 - \frac{k}{z}\rho_{sn}^2}{1 - k^2 \frac{k}{z}\rho_{sn}^2 \frac{k}{z}\rho_{cd}^2},$$

$$nc(2y; k') = \frac{\frac{k}{z}\rho_{cd}^2 + \frac{k}{z}\rho_{sn}^2}{1 + k^2 \frac{k}{z}\rho_{sn}^2 \frac{k}{z}\rho_{cd}^2}.$$

Esto significa que el único módulo requerido es el de la función sn . Por ello, consideramos

$$cd^2(z; k) = \frac{cn^2(z; k)}{dn^2(z; k)} = \frac{1 - sn^2(z; k)}{1 - k^2 sn^2(z; k)} \text{ y así, } sn^2(z; k) = \frac{1 - cd^2(z; k)}{1 - k^2 cd^2(z; k)}.$$

Es decir,

$$\frac{k}{z}\rho_{sn}^2 e^{2i \frac{k}{z}\theta_{sn}^1} = \frac{1 - \frac{k}{z}\rho_{cd}^2 e^{2i \frac{k}{z}\theta_{cd}^1}}{1 - k^2 \frac{k}{z}\rho_{cd}^2 e^{2i \frac{k}{z}\theta_{cd}^1}}.$$

Por multiplicación con el conjugado,

$$\begin{aligned} \frac{k}{z}\rho_{sn}^4 &= \frac{1 - \frac{k}{z}\rho_{cd}^2 (e^{2i \frac{k}{z}\theta_{cd}^1} + e^{-2i \frac{k}{z}\theta_{cd}^1}) + \frac{k}{z}\rho_{cd}^4}{1 - k^2 \frac{k}{z}\rho_{cd}^2 (e^{2i \frac{k}{z}\theta_{cd}^1} + e^{-2i \frac{k}{z}\theta_{cd}^1}) + k^4 \frac{k}{z}\rho_{cd}^4}, \\ &= \frac{1 - 2 \frac{k}{z}\rho_{cd}^2 \cos(2 \frac{k}{z}\theta_{cd}^1) + \frac{k}{z}\rho_{cd}^4}{1 - 2k^2 \frac{k}{z}\rho_{cd}^2 \cos(2 \frac{k}{z}\theta_{cd}^1) + k^4 \frac{k}{z}\rho_{cd}^4}. \end{aligned}$$

4. Como tenemos cierta diferencia entre las formas modulares de cd y dc , buscamos el modulo requerido sn de manera independiente a cd . Por esta razón, consideramos

$$dc^2(z; k) = \frac{dn^2(z; k)}{cn^2(z; k)} = \frac{1 - k^2 sn^2(z; k)}{1 - sn^2(z; k)} \text{ y así, } sn^2(z; k) = \frac{1 - dc^2(z; k)}{k^2 - dc^2(z; k)}.$$

Es decir,

$$\frac{k}{z}\rho_{sn}^2 e^{2i \frac{k}{z}\theta_{sn}^1} = \frac{1 - \frac{k}{z}\rho_{dc}^2 e^{2i \frac{k}{z}\theta_{dc}^1}}{k^2 - \frac{k}{z}\rho_{dc}^2 e^{2i \frac{k}{z}\theta_{dc}^1}}.$$

Por multiplicación con el conjugado,

$$\begin{aligned} \frac{{}^k\rho_{sn}^4}{z} &= \frac{1 - \frac{{}^k\rho_{dc}^2}{z} (e^{2i\frac{{}^k\theta_{dc}^1}{z}} + e^{-2i\frac{{}^k\theta_{dc}^1}{z}}) + \frac{{}^k\rho_{dc}^4}{z}}{k^4 - k^2 \frac{{}^k\rho_{dc}^2}{z} (e^{2i\frac{{}^k\theta_{dc}^1}{z}} + e^{-2i\frac{{}^k\theta_{dc}^1}{z}}) + \frac{{}^k\rho_{dc}^4}{z}}, \\ &= \frac{1 - 2 \frac{{}^k\rho_{dc}^2}{z} \cos\left(2 \frac{{}^k\theta_{dc}^1}{z}\right) + \frac{{}^k\rho_{dc}^4}{z}}{k^4 - 2k^2 \frac{{}^k\rho_{dc}^2}{z} \cos\left(2 \frac{{}^k\theta_{dc}^1}{z}\right) + \frac{{}^k\rho_{dc}^4}{z}}. \end{aligned}$$

Las demás funciones pares no exigen cálculos adicionales. □

La dificultad queda, pues, resuelta. Con el fin de mostrar las fórmulas completas, resumimos –poniendo juntos– los dos lemas anteriores.

Teorema 2.3. *Las proyecciones o inversas de todas las funciones elípticas jacobianas pares se explicitan en los Cuadros 2.3.3 y 2.3.4.*

Recordemos algunas características importantes de las expresiones en los Cuadros 2.3.3 y 2.3.4. Las funciones elípticas inversas de la columna derecha son las restricciones al eje real. Tales funciones serán llamadas, de ahora en adelante, funciones inversas reales. Las x se calculan con el módulo k ; las y con el módulo conjugado k' . No siempre se usa la misma función para x y para y . Las fórmulas del lado derecho dependen solamente del módulo y el argumento complejos de la función que se invierte. Si fijamos el módulo, obtenemos las imágenes de los paralelos en el hemisferio; si fijamos el argumento, las imágenes de los meridianos. En el lugar de los módulos va $\tan(p/2)$, en el lugar de los argumentos, la longitud geográfica θ .

$z = x + iy$	<i>partes real e imaginaria</i>
$cn^{-1}(\cdot, k)$	$x = \frac{1}{2}cn^{-1} \left(\frac{{}_k\rho_{cn}^2 - \sqrt{\left(1 - 2\frac{{}_k\rho_{cn}^2}{z}\cos\left(2\frac{{}_k\theta_1}{z}\right) + \frac{{}_k\rho_{cn}^4}{z}\right) \left({}_k^4\frac{{}_k\rho_{cn}^4}{z}\rho_{cn}^4 + 2k^2k'^2\frac{{}_k\rho_{cn}^2}{z}\cos\left(2\frac{{}_k\theta_1}{z}\right) + k'^4\right)}}{1 - k^2\left(1 - 2\frac{{}_k\rho_{cn}^2}{z}\cos\left(2\frac{{}_k\theta_1}{z}\right) + \frac{{}_k\rho_{cn}^4}{z}\right)}; k \right)$
	$y = \frac{1}{2}cn^{-1} \left(\frac{1 - k^2\left(1 - 2\frac{{}_k\rho_{cn}^2}{z}\cos\left(2\frac{{}_k\theta_1}{z}\right) + \frac{{}_k\rho_{cn}^4}{z}\right)}{k\rho_{cn}^2 + \sqrt{\left(1 - 2\frac{{}_k\rho_{cn}^2}{z}\cos\left(2\frac{{}_k\theta_1}{z}\right) + \frac{{}_k\rho_{cn}^4}{z}\right) \left({}_k^4\frac{{}_k\rho_{cn}^4}{z}\rho_{cn}^4 + 2k^2k'^2\frac{{}_k\rho_{cn}^2}{z}\cos\left(2\frac{{}_k\theta_1}{z}\right) + k'^4\right)}}; k' \right)$
$dn^{-1}(\cdot, k)$	$x = \frac{1}{2}dn^{-1} \left(\frac{{}_k\rho_{dn}^2 - k^{-2}\sqrt{\left(1 - 2\frac{{}_k\rho_{dn}^2}{z}\cos\left(2\frac{{}_k\theta_1}{z}\right) + \frac{{}_k\rho_{dn}^4}{z}\right) \left(\frac{{}_k^4}{z}\rho_{dn}^4 - 2k'^2\frac{{}_k\rho_{dn}^2}{z}\cos\left(2\frac{{}_k\theta_1}{z}\right) + k'^4\right)}}{1 - k^{-2}\left(1 - 2\frac{{}_k\rho_{dn}^2}{z}\cos\left(2\frac{{}_k\theta_1}{z}\right) + \frac{{}_k\rho_{dn}^4}{z}\right)}; k \right)$
	$y = \frac{1}{2}dc^{-1} \left(\frac{k\rho_{dn}^2 + k^{-2}\sqrt{\left(1 - 2\frac{{}_k\rho_{dn}^2}{z}\cos\left(2\frac{{}_k\theta_1}{z}\right) + \frac{{}_k\rho_{dn}^4}{z}\right) \left({}_k^4\frac{{}_k\rho_{dn}^4}{z}\rho_{dn}^4 - 2k'^2\frac{{}_k\rho_{dn}^2}{z}\cos\left(2\frac{{}_k\theta_1}{z}\right) + k'^4\right)}}{1 - k^{-2}\left(1 - 2\frac{{}_k\rho_{dn}^2}{z}\cos\left(2\frac{{}_k\theta_1}{z}\right) + \frac{{}_k\rho_{dn}^4}{z}\right)}; k' \right)$
$cd^{-1}(\cdot, k)$	$x = \frac{1}{2}cd^{-1} \left(\frac{{}_k\rho_{cd}^2 - \sqrt{\frac{1 - 2\frac{{}_k\rho_{cd}^2}{z}\cos\left(2\frac{{}_k\theta_1}{z}\right) + \frac{{}_k\rho_{cd}^4}{z}}{1 - 2k^2\frac{{}_k\rho_{cd}^2}{z}\cos\left(2\frac{{}_k\theta_1}{z}\right) + k^4\frac{{}_k\rho_{cd}^4}{z}}}; k \right)$
	$y = \frac{1}{2}nd^{-1} \left(\frac{1 - k^2\frac{{}_k\rho_{cd}^2}{z}\sqrt{\frac{1 - 2\frac{{}_k\rho_{cd}^2}{z}\cos\left(2\frac{{}_k\theta_1}{z}\right) + \frac{{}_k\rho_{cd}^4}{z}}{1 - 2k^2\frac{{}_k\rho_{cd}^2}{z}\cos\left(2\frac{{}_k\theta_1}{z}\right) + k^4\frac{{}_k\rho_{cd}^4}{z}}}}{k\rho_{cd}^2 + \sqrt{\frac{1 - 2\frac{{}_k\rho_{cd}^2}{z}\cos\left(2\frac{{}_k\theta_1}{z}\right) + \frac{{}_k\rho_{cd}^4}{z}}{1 - 2k^2\frac{{}_k\rho_{cd}^2}{z}\cos\left(2\frac{{}_k\theta_1}{z}\right) + k^4\frac{{}_k\rho_{cd}^4}{z}}}}; k' \right)$

Cuadro 2.3.3: Inversas de las funciones elípticas cn , dn y cd .

$z = x + iy$	partes real e imaginaria
$nc^{-1}(\cdot, k)$	$x = \frac{1}{2}cn^{-1} \left(\frac{1 - k^2 \left(1 - 2 \frac{k}{z}\rho_{nc}^{-2} \cos \left(2 \frac{k}{z}\theta_{nc}^1\right) + \frac{k}{z}\rho_{nc}^{-4}\right)}{k \frac{\rho_{nc}^{-2}}{z} - \sqrt{\left(1 - 2 \frac{k}{z}\rho_{nc}^{-2} \cos \left(2 \frac{k}{z}\theta_{nc}^1\right) + \frac{k}{z}\rho_{nc}^{-4}\right) \left(k^4 \frac{k}{z}\rho_{nc}^{-4} + 2k^2 k'^2 \frac{k}{z}\rho_{nc}^{-2} \cos \left(2 \frac{k}{z}\theta_{nc}^1\right) + k'^4\right)}}; k \right)$ $y = \frac{1}{2}cn^{-1} \left(\frac{k \frac{\rho_{nc}^{-2}}{z} + \sqrt{\left(1 - 2 \frac{k}{z}\rho_{nc}^{-2} \cos \left(2 \frac{k}{z}\theta_{nc}^1\right) + \frac{k}{z}\rho_{nc}^{-4}\right) \left(k^4 \frac{k}{z}\rho_{nc}^{-4} + 2k^2 k'^2 \frac{k}{z}\rho_{nc}^{-2} \cos \left(2 \frac{k}{z}\theta_{nc}^1\right) + k'^4\right)}}{1 - k^2 \left(1 - 2 \frac{k}{z}\rho_{nc}^{-2} \cos \left(2 \frac{k}{z}\theta_{nc}^1\right) + \frac{k}{z}\rho_{nc}^{-4}\right)}; k' \right)$
$nd^{-1}(\cdot, k)$	$x = \frac{1}{2}dn^{-1} \left(\frac{1 - k^{-2} \left(1 - 2 \frac{k}{z}\rho_{nd}^{-2} \cos \left(2 \frac{k}{z}\theta_{nd}^1\right) + \frac{k}{z}\rho_{nd}^{-4}\right)}{k \frac{\rho_{nd}^{-2}}{z} - k^{-2} \sqrt{\left(1 - 2 \frac{k}{z}\rho_{nd}^{-2} \cos \left(2 \frac{k}{z}\theta_{nd}^1\right) + \frac{k}{z}\rho_{nd}^{-4}\right) \left(k \frac{\rho_{nd}^{-4}}{z} - 2k'^2 \frac{k}{z}\rho_{nd}^{-2} \cos \left(2 \frac{k}{z}\theta_{nd}^1\right) + k'^4\right)}}; k \right)$ $y = \frac{1}{2}dc^{-1} \left(\frac{k \frac{\rho_{nd}^{-2}}{z} + k^{-2} \sqrt{\left(1 - 2 \frac{k}{z}\rho_{nd}^{-2} \cos \left(2 \frac{k}{z}\theta_{nd}^1\right) + \frac{k}{z}\rho_{nd}^{-4}\right) \left(k \frac{\rho_{nd}^{-4}}{z} - 2k'^2 \frac{k}{z}\rho_{nd}^{-2} \cos \left(2 \frac{k}{z}\theta_{nd}^1\right) + k'^4\right)}}{1 - k^{-2} \left(1 - 2 \frac{k}{z}\rho_{nd}^{-2} \cos \left(2 \frac{k}{z}\theta_{nd}^1\right) + \frac{k}{z}\rho_{nd}^{-4}\right)}; k' \right)$
$dc^{-1}(\cdot, k)$	$x = \frac{1}{2}cd^{-1} \left(\frac{1 - k^2 \frac{k}{z}\rho_{dc}^2 \sqrt{\frac{1 - 2 \frac{k}{z}\rho_{dc}^2 \cos \left(2 \frac{k}{z}\theta_{dc}^1\right) + \frac{k}{z}\rho_{dc}^4}{k^4 - 2k^2 \frac{k}{z}\rho_{dc}^2 \cos \left(2 \frac{k}{z}\theta_{dc}^1\right) + \frac{k}{z}\rho_{dc}^4}} + \frac{k \frac{\rho_{dc}^4}{z}}{k^4 - 2k^2 \frac{k}{z}\rho_{dc}^2 \cos \left(2 \frac{k}{z}\theta_{dc}^1\right) + \frac{k}{z}\rho_{dc}^4}}; k \right)$ $y = \frac{1}{2}nd^{-1} \left(\frac{1 + k^2 \frac{k}{z}\rho_{dc}^2 \sqrt{\frac{1 - 2 \frac{k}{z}\rho_{dc}^2 \cos \left(2 \frac{k}{z}\theta_{dc}^1\right) + \frac{k}{z}\rho_{dc}^4}{k^4 - 2k^2 \frac{k}{z}\rho_{dc}^2 \cos \left(2 \frac{k}{z}\theta_{dc}^1\right) + \frac{k}{z}\rho_{dc}^4}} + \frac{k \frac{\rho_{dc}^4}{z}}{k^4 - 2k^2 \frac{k}{z}\rho_{dc}^2 \cos \left(2 \frac{k}{z}\theta_{dc}^1\right) + \frac{k}{z}\rho_{dc}^4}}; k' \right)$

Cuadro 2.3.4: Inversas de las funciones elípticas nc , nd y dc .

Para lograr algo parecido las funciones elípticas impares, se necesita un esfuerzo adicional.

2.4. INVERSIÓN FORMAL DE LAS FUNCIONES ELÍPTICAS IMPARES

La inversión formal de la función snz encierra varias dificultades. El problema está ya manifiesto en el artículo de Richelot [7] y en la cuarta edición del popular libro de texto de Durège [8]. Desde nuestro punto de vista, el método usado para tratar las funciones elípticas pares simplemente no funciona o lleva a dificultades muy grandes, para las cuales las identidades elípticas conocidas no aportan mucho.

Nuestra manera de solucionar estas dificultades ha consistido en usar algunas identidades elípticas que revelan el comportamiento de ciertas funciones elípticas cuando se realizan algunos movimientos en su variable independiente o argumento. Tales movimientos son traslaciones y rotaciones. Los primeros están estrechamente relacionados a la periodicidad de las funciones.

Lema 2.4 (Algunas transformaciones del argumento complejo). *Las funciones elípticas impares verifican las identidades siguientes:*

$$\begin{aligned} sn(z + K; k) &= cd(z; k), \\ sd(z; k) &= -\frac{cn(z + K; k)}{k'} \quad y \\ sc(z; k) &= -i \cdot sn(iz; 1 - k) \end{aligned}$$

donde i denota la unidad imaginaria o raíz cuadrada principal de -1 .

Estos hechos sugieren ya una prueba para invertir formalmente a la funciones elípticas impares. A continuación, damos los detalles.

Lema 2.5. *Sea $z = x + iy \in \mathbb{C}$ el valor de una función elíptica inversa impar de módulo elíptico k . Las partes real e imaginaria x, y de dichas funciones jacobianas se relacionan con ciertos módulos complejos tal como lo muestra en el Cuadro 2.4.1.*

función	condición sobre x	condición sobre y
$sn(z; k)$	$cd(2(x - K); k) = \frac{k\rho_{cd}^2 - k\rho_{sn}^2}{1 - k^2 \frac{k^2}{w\rho_{sn}^2} \frac{k^2}{w\rho_{cd}^2}}$	$nd(2y; k') = \frac{k\rho_{cd}^2 + k\rho_{sn}^2}{1 + k^2 \frac{k^2}{w\rho_{sn}^2} \frac{k^2}{w\rho_{cd}^2}}$
$isc(z; k)$	$nd(2x; l') = \frac{l\rho_{cd}^2 + l\rho_{sn}^2}{1 + l^2 \frac{l^2}{v-K\rho_{sn}^2} \frac{l^2}{v-K\rho_{cd}^2}}$	$cd(2(y + K); l) = \frac{l\rho_{cd}^2 - l\rho_{sn}^2}{1 - l^2 \frac{l^2}{v-K\rho_{sn}^2} \frac{l^2}{v-K\rho_{cd}^2}}$
$-k'sd(z; k)$	$cn(2(x + K); k) = \frac{k\rho_{cn}^2 - k\rho_{sn}^2 \rho_{dn}^2}{1 - k^2 \frac{k^2}{u\rho_{sn}^4}}$	$cn(2y; k') = \frac{1 - k^2 \frac{k^2}{u\rho_{sn}^4}}{k\rho_{cn}^2 + k\rho_{sn}^2 \frac{k^2}{u\rho_{dn}^2}}$
$ns(z; k)$	$cd(2(x - K); k) = \frac{1 - k^2 \frac{k^2}{w\rho_{sn}^2} \frac{k^2}{w\rho_{cd}^2}}{k\rho_{cd}^2 - k\rho_{sn}^2}$	$nd(2y; k') = \frac{1 + k^2 \frac{k^2}{w\rho_{sn}^2} \frac{k^2}{w\rho_{cd}^2}}{k\rho_{cd}^2 + k\rho_{sn}^2}$
$-ics(z; k)$	$nd(2x; l') = \frac{1 + l^2 \frac{l^2}{v-K\rho_{sn}^2} \frac{l^2}{v-K\rho_{cd}^2}}{l\rho_{cd}^2 + l\rho_{sn}^2}$	$cd(2(y + K); l) = \frac{1 - l^2 \frac{l^2}{v-K\rho_{sn}^2} \frac{l^2}{v-K\rho_{cd}^2}}{l\rho_{cd}^2 - l\rho_{sn}^2}$
$-k'^{-1}ds(z; k)$	$cn(2(x + K); k) = \frac{1 - k^2 \frac{k^2}{u\rho_{sn}^4}}{k\rho_{cn}^2 - k\rho_{sn}^2 \frac{k^2}{u\rho_{dn}^2}}$	$cn(2y; k') = \frac{k\rho_{cn}^2 + k\rho_{sn}^2 \frac{k^2}{u\rho_{dn}^2}}{1 - k^2 \frac{k^2}{u\rho_{sn}^4}}$

Cuadro 2.4.1: Dependencia de los módulos para las funciones impares. Aquí, usamos las convenciones $z = x + iy$, $w = z - K$; $v = iz$, $l = 1 - k$; $u = z + K$.

Demostración. Vamos considerando una por una:

1. Por el Lema 2.4, $sn(z; k) = \frac{cn(z - K; k)}{dn(z - K; k)} = cd(z - K; k)$. Poniendo $w = z - K = (x - K) + iy$, por nuestro conocimiento de cd , tenemos que

$$cd(2(x - K); k) = \frac{k\rho_{cd}^2 - k\rho_{sn}^2}{1 - k^2 \frac{k^2}{w\rho_{sn}^2} \frac{k^2}{w\rho_{cd}^2}},$$

$$nd(2y; k') = \frac{k\rho_{cd}^2 + k\rho_{sn}^2}{1 + k^2 \frac{k^2}{w\rho_{sn}^2} \frac{k^2}{w\rho_{cd}^2}}.$$

2. Por el Lema anterior, $sc(z; k) = -i \cdot sn(iz; 1 - k)$. Ponemos, pues, $v = iz = -y + ix$ para lograr $i \cdot scz = sn(v; 1 - k)$. Por lo que hemos visto para sn , con $l = 1 - k$,

$$cd(2(-y - K); l) = \frac{l\rho_{cd}^2 - l\rho_{sn}^2}{1 - l^2 \frac{l^2}{v-K\rho_{sn}^2} \frac{l^2}{v-K\rho_{cd}^2}},$$

$$nd(2x; l') = \frac{l\rho_{cd}^2 + l\rho_{sn}^2}{1 + l^2 \frac{l^2}{v-K\rho_{sn}^2} \frac{l^2}{v-K\rho_{cd}^2}}.$$

Antes de comparar con la tabla, recordemos que la función cd es par.

3. Para sdz , $-k'sd(z, k) = cn(z + K; k)$. Esta vez, por la inversa del coseno, con $u = z + K$,

$$cn(2(x + K); k) = \frac{{}_u^k \rho_{cn}^2 - {}_u^k \rho_{sn}^2 {}_u^k \rho_{dn}^2}{1 - k^2 {}_u^k \rho_{sn}^4},$$

$$cn(2y; k') = \frac{1 - k^2 {}_u^k \rho_{sn}^4}{{}_u^k \rho_{cn}^2 + {}_u^k \rho_{sn}^2 {}_u^k \rho_{dn}^2}.$$

Las demás funciones son recíprocas multiplicativas de las anteriores. □

Esta demostración ha sido posible porque hemos podido reducir las funciones impares a ciertas funciones pares evaluadas en un dominio resultante de cierto movimiento (traslación o rotación). Además, el módulo elíptico de tales funciones pares es distinto al de la función original.

Lema 2.6. *En el Cuadro 2.4.2 se muestra cómo, dado el módulo (complejo) de una función elíptica impar, los demás módulos (complejos), necesarios para encontrar su inversa, se expresan como funciones del módulo y el argumento (complejos) de la función impar dada.*

Demostración. Considerando cada función.

1. Para sn , tenemos $sn(z; k) = cd(z - K; k)$ (Lema 2.4). Es decir,

$${}_z^k \rho_{sn}^1 \exp(i {}_z^k \theta_{sn}^1) = {}_w^k \rho_{cd}^1 \exp(i {}_w^k \theta_{cd}^1).$$

De esta forma, logramos la igualdad entre los módulos y los argumentos (mód $2\pi\mathbb{Z}$). Ahora debemos relacionar los módulos de sn en z y $w = z - K$.

función	módulo(s) requerido(s)
$sn(z; k) = {}^k\rho_{sn}^1 \exp(i {}^k\theta_{sn}^1)$	${}^k\rho_{cd}^2 = {}^k\rho_{sn}^2$ ${}^k\rho_{sn}^2 = {}^k\rho_{sn}^2 {}^k\rho_{cn}^2 {}^k\rho_{dn}^{-2}$, donde ${}^k\rho_{cn}^4 = 1 - 2 {}^k\rho_{sn}^2 \cos(2 {}^k\theta_{sn}^1) + {}^k\rho_{sn}^4$ ${}^k\rho_{dn}^4 = 1 - 2k^2 {}^k\rho_{sn}^2 \cos(2 {}^k\theta_{sn}^1) + k^4 {}^k\rho_{sn}^4$
$sc(z; k) = {}^k\rho_{sc}^1 \exp(i {}^k\theta_{sc}^1)$	${}^l\rho_{cd}^2 = {}^l\rho_{sn}^2 = - {}^k\rho_{sc}^2$ ${}^l\rho_{sn}^2 = {}^l\rho_{sn}^2 {}^l\rho_{cn}^2 {}^l\rho_{dn}^{-2}$, donde ${}^l\rho_{cn}^4 = 1 + 2 {}^k\rho_{sc}^2 \cos(2 {}^k\theta_{sc}^1) + {}^k\rho_{sc}^4$ ${}^l\rho_{dn}^4 = 1 + 2l^2 {}^k\rho_{sc}^2 \cos(2 {}^k\theta_{sc}^1) + l^4 {}^k\rho_{sc}^4$
$sd(z; k) = {}^k\rho_{sd}^1 \exp(i {}^k\theta_{sd}^1)$	${}^k\rho_{cn}^2 = k'^2 {}^k\rho_{sd}^2$ ${}^k\rho_{sn}^4 = 1 - 2k'^2 {}^k\rho_{sd}^2 \cos(2 {}^k\theta_{sd}^1) + k'^4 {}^k\rho_{sd}^4$ ${}^k\rho_{dn}^4 = k^4 k'^4 {}^k\rho_{sd}^4 + 2k^2 k'^4 {}^k\rho_{sd}^2 \cos(2 {}^k\theta_{sd}^1) + k'^4$
$ns(z; k) = {}^k\rho_{ns}^1 \exp(i {}^k\theta_{ns}^1)$	${}^k\rho_{cd}^2 = {}^k\rho_{ns}^{-2}$ ${}^k\rho_{sn}^2 = {}^k\rho_{ns}^{-2} {}^k\rho_{cn}^2 {}^k\rho_{dn}^{-2}$, donde ${}^k\rho_{cn}^4 = 1 - 2 {}^k\rho_{ns}^{-2} \cos(2 {}^k\theta_{ns}^1) + {}^k\rho_{ns}^{-4}$ ${}^k\rho_{dn}^4 = 1 - 2k^2 {}^k\rho_{ns}^{-2} \cos(2 {}^k\theta_{ns}^1) + k^4 {}^k\rho_{ns}^{-4}$
$cs(z; k) = {}^k\rho_{cs}^1 \exp(i {}^k\theta_{cs}^1)$	${}^l\rho_{cd}^2 = {}^l\rho_{sn}^2 = - {}^k\rho_{cs}^{-2}$ ${}^l\rho_{sn}^2 = {}^l\rho_{sn}^2 {}^l\rho_{cn}^2 {}^l\rho_{dn}^{-2}$, donde ${}^l\rho_{cn}^4 = 1 + 2 {}^k\rho_{cs}^{-2} \cos(2 {}^k\theta_{cs}^1) + {}^k\rho_{cs}^{-4}$ ${}^l\rho_{dn}^4 = 1 + 2l^2 {}^k\rho_{cs}^{-2} \cos(2 {}^k\theta_{cs}^1) + l^4 {}^k\rho_{cs}^{-4}$
$ds(z; k) = {}^k\rho_{ds}^1 \exp(i {}^k\theta_{ds}^1)$	${}^k\rho_{cn}^2 = k'^{-2} {}^k\rho_{ds}^{-2}$ ${}^k\rho_{sn}^4 = 1 - 2k'^{-2} {}^k\rho_{ds}^{-2} \cos(2 {}^k\theta_{ds}^1) + k'^{-4} {}^k\rho_{ds}^{-4}$ ${}^k\rho_{dn}^4 = k^4 k'^{-4} {}^k\rho_{ds}^{-4} + 2k^2 k'^{-2} {}^k\rho_{ds}^{-2} \cos(2 {}^k\theta_{ds}^1) + k'^4$

Cuadro 2.4.2: Reducción de módulos para las funciones impares.

Para ello, nos valemos de la fórmula de adición

$$\begin{aligned}
 sn(w; k) &= \frac{sn(z; k)cn(z; k)dn(z; k) + sn(-K; k)cn(-K; k)dn(-K; k)}{1 - k^2 sn^2(z; k)sn^2(-K; k)} \\
 &= \frac{sn(z; k)cn(z; k)}{dn(z; k)}.
 \end{aligned}$$

De aquí se obtiene que ${}^k\rho_{sn}^2 = {}^k\rho_{sn}^2 {}^k\rho_{cn}^2 {}^k\rho_{dn}^{-2}$. De manera similar al caso de las funciones pares,

$${}^k\rho_{cn}^4 = 1 - 2 {}^k\rho_{sn}^2 \cos(2 {}^k\theta_{sn}^1) + {}^k\rho_{sn}^4.$$

Finalmente, de la identidad pitagórica fundamental $dn^2(z; k) = 1 - k^2 sn^2(z; k)$, se obtiene

$${}_z^k \rho_{dn}^4 = 1 - 2k^2 {}_z^k \rho_{sn}^2 \cos \left(2 {}_z^k \theta_{sn}^1 \right) + k^4 {}_z^k \rho_{sn}^4.$$

2. Como en el lema anterior, $isc(z; k) = sn(v; l) = cd(v - K, l)$, donde $v = iz$ y $l = 1 - k$. Es decir,

$$i {}_z^k \rho_{sc}^1 = {}_{v-K}^l \rho_{cd}^1.$$

Ahora, tal como en el inciso anterior, ${}_v^l \rho_{sn}^2 = {}_v^l \rho_{sn}^2 {}_v^l \rho_{cn}^2 {}_v^l \rho_{dn}^{-2}$. Esta vez,

$$\begin{aligned} {}_v^l \rho_{cn}^4 &= 1 - 2 {}_v^l \rho_{sn}^2 \cos \left(2 {}_v^l \theta_{sn}^1 \right) + {}_v^l \rho_{sn}^4, \\ {}_v^l \rho_{dn}^4 &= 1 - 2l^2 {}_v^l \rho_{sn}^2 \cos \left(2 {}_v^l \theta_{sn}^1 \right) + l^4 {}_v^l \rho_{sn}^4. \end{aligned}$$

Todo cobra sentido cuando se recuerda que $isc(z; k) = sn(v; l)$. O sea, ${}_v^l \rho_{sn}^1 = i {}_z^k \rho_{sc}^1 y {}_v^l \theta_{sn}^1 = {}_z^k \theta_{sc}^1 \pmod{2\pi\mathbb{Z}}$.

3. Hemos usado $-k' sd(z; k) = cn(u; k)$, donde $u = z + k$. Así pues,

$$-k' {}_z^k \rho_{sd}^1 \exp \left(i {}_z^k \theta_{sd}^1 \right) = {}_u^k \rho_{cn}^1 \exp \left(i {}_u^k \theta_{cn}^1 \right).$$

Los módulos de sn y dn se obtienen como para las funciones pares (Cuadro 2.3.2).

La reducción de las demás funciones se realiza ahora fácilmente. □

Todos los resultados para las funciones elípticas impares se ponen ahora juntos en el resultado siguiente

Teorema 2.7. *Las inversas de las funciones elípticas jacobianas impares se muestran respectivamente en los Cuadros 2.4.3 y 2.4.4.*

$z = x + iy$	partes real e imaginaria
$sn^{-1}(\cdot, k)$	$x = \frac{1}{2}cd^{-1} \left(\frac{k^2 \rho_{sn}^2 \left(1 - \sqrt{\frac{1 - 2 \frac{k^2}{z} \rho_{sn}^2 \cos(2 \frac{k\theta_1}{z}) + \frac{k^4}{z} \rho_{sn}^4}}{1 - 2k^2 \frac{k^2}{z} \rho_{sn}^2 \cos(2 \frac{k\theta_1}{z}) + k^4 \frac{k^4}{z} \rho_{sn}^4} \right)}{1 - k^2 \frac{k^4}{z} \rho_{sn}^4} \sqrt{\frac{1 - 2 \frac{k^2}{z} \rho_{sn}^2 \cos(2 \frac{k\theta_1}{z}) + \frac{k^4}{z} \rho_{sn}^4}}{1 - 2k^2 \frac{k^2}{z} \rho_{sn}^2 \cos(2 \frac{k\theta_1}{z}) + k^4 \frac{k^4}{z} \rho_{sn}^4}} \right); k + K$ $y = \frac{1}{2}nd^{-1} \left(\frac{k^2 \rho_{sn}^2 \left(1 + \sqrt{\frac{1 - 2 \frac{k^2}{z} \rho_{sn}^2 \cos(2 \frac{k\theta_1}{z}) + \frac{k^4}{z} \rho_{sn}^4}}{1 - 2k^2 \frac{k^2}{z} \rho_{sn}^2 \cos(2 \frac{k\theta_1}{z}) + k^4 \frac{k^4}{z} \rho_{sn}^4} \right)}{1 + k^2 \frac{k^4}{z} \rho_{sn}^4} \sqrt{\frac{1 - 2 \frac{k^2}{z} \rho_{sn}^2 \cos(2 \frac{k\theta_1}{z}) + \frac{k^4}{z} \rho_{sn}^4}}{1 - 2k^2 \frac{k^2}{z} \rho_{sn}^2 \cos(2 \frac{k\theta_1}{z}) + k^4 \frac{k^4}{z} \rho_{sn}^4}} \right); k'$
$sc^{-1}(\cdot, k)$	$x = \frac{1}{2}nd^{-1} \left(\frac{k^2 \rho_{sc}^2 \left(\sqrt{\frac{1 + 2 \frac{k^2}{z} \rho_{sc}^2 \cos(2 \frac{k\theta_1}{z}) + \frac{k^4}{z} \rho_{sc}^4}}{1 + 2(1 - k)^2 \frac{k^2}{z} \rho_{sc}^4 \cos(2 \frac{k\theta_1}{z}) + (1 - k)^4 \frac{k^4}{z} \rho_{sc}^4} - 1 \right)}{1 + (1 - k)^2 \frac{k^4}{z} \rho_{sc}^4} \sqrt{\frac{1 + 2 \frac{k^2}{z} \rho_{sc}^2 \cos(2 \frac{k\theta_1}{z}) + \frac{k^4}{z} \rho_{sc}^4}}{1 + 2(1 - k)^2 \frac{k^2}{z} \rho_{sc}^4 \cos(2 \frac{k\theta_1}{z}) + (1 - k)^4 \frac{k^4}{z} \rho_{sc}^4}} - 1 \right); 1 - k$ $y = -\frac{1}{2}cd^{-1} \left(\frac{k^2 \rho_{sc}^2 \left(1 + \sqrt{\frac{1 + 2 \frac{k^2}{z} \rho_{sc}^2 \cos(2 \frac{k\theta_1}{z}) + \frac{k^4}{z} \rho_{sc}^4}}{1 + 2(1 - k)^2 \frac{k^4}{z} \rho_{sc}^4 \cos(2 \frac{k\theta_1}{z}) + (1 - k)^4 \frac{k^4}{z} \rho_{sc}^4} \right)}{1 - (1 - k)^2 \frac{k^4}{z} \rho_{sc}^4} \sqrt{\frac{1 + 2 \frac{k^2}{z} \rho_{sc}^2 \cos(2 \frac{k\theta_1}{z}) + \frac{k^4}{z} \rho_{sc}^4}}{1 + 2(1 - k)^2 \frac{k^2}{z} \rho_{sc}^4 \cos(2 \frac{k\theta_1}{z}) + (1 - k)^4 \frac{k^4}{z} \rho_{sc}^4}} \right); (1 - k)' - K$
$sd^{-1}(\cdot, k)$	$x = \frac{1}{2}cn^{-1} \left(\frac{k'^2 \rho_{sd}^2 - \sqrt{\left(1 - 2k'^2 \frac{k^2}{z} \rho_{sd}^2 \cos(2 \frac{k\theta_1}{z}) + k'^4 \frac{k^4}{z} \rho_{sd}^4\right) \left(k'^4 k'^4 \frac{k^4}{z} \rho_{sd}^4 + 2k'^2 k'^4 \frac{k^2}{z} \rho_{sd}^2 \cos(2 \frac{k\theta_1}{z}) + k'^4\right)}}{1 - k^2 \left(1 - 2k'^2 \frac{k^2}{z} \rho_{sd}^2 \cos(2 \frac{k\theta_1}{z}) + k'^4 \frac{k^4}{z} \rho_{sd}^4\right)} \right); k - K$ $y = \frac{1}{2}cn^{-1} \left(\frac{k'^2 \rho_{sd}^2 + \sqrt{\left(1 - 2k'^2 \frac{k^2}{z} \rho_{sd}^2 \cos(2 \frac{k\theta_1}{z}) + k'^4 \frac{k^4}{z} \rho_{sd}^4\right) \left(k'^4 k'^4 \frac{k^4}{z} \rho_{sd}^4 + 2k'^2 k'^4 \frac{k^2}{z} \rho_{sd}^2 \cos(2 \frac{k\theta_1}{z}) + k'^4\right)}}{1 - k^2 \left(1 - 2k'^2 \frac{k^2}{z} \rho_{sd}^2 \cos(2 \frac{k\theta_1}{z}) + k'^4 \frac{k^4}{z} \rho_{sd}^4\right)} \right); k'$

Cuadro 2.4.3: Inversas de las funciones elípticas sn , sc y sd .

$z = x + iy$	partes real e imaginaria
$ns^{-1}(\cdot, k)$	$x = \frac{1}{2}cd^{-1} \left(\frac{1 - k^2 k \rho_{ns}^{-4}}{z \rho_{ns}} \sqrt{\frac{1 - 2k \rho_{ns}^{-2} \cos(2 \frac{k \theta_1}{z})}{1 - 2k^2 \frac{k \rho_{ns}^{-2} \cos(2 \frac{k \theta_1}{z})}{z \rho_{ns}} + k^4 \frac{k \rho_{ns}^{-4}}{z \rho_{ns}}}} + k \right) + K$
	$y = \frac{1}{2}nd^{-1} \left(\frac{k \rho_{ns}^{-2}}{z \rho_{ns}} \left(1 - \sqrt{\frac{1 - 2k \rho_{ns}^{-2} \cos(2 \frac{k \theta_1}{z})}{1 - 2k^2 \frac{k \rho_{ns}^{-2} \cos(2 \frac{k \theta_1}{z})}{z \rho_{ns}} + k^4 \frac{k \rho_{ns}^{-4}}{z \rho_{ns}}}} \right) + k' \right)$
$cs^{-1}(\cdot, k)$	$x = \frac{1}{2}nd^{-1} \left(\frac{1 + (1 - k)^2 k \rho_{cs}^{-4}}{z \rho_{cs}} \sqrt{\frac{1 + 2k \rho_{cs}^{-2} \cos(2 \frac{k \theta_1}{z})}{1 + 2(1 - k)^2 \frac{k \rho_{cs}^{-2} \cos(2 \frac{k \theta_1}{z})}{z \rho_{cs}} + (1 - k)^4 \frac{k \rho_{cs}^{-4}}{z \rho_{cs}}}}; 1 - k \right)$
	$y = -\frac{1}{2}cd^{-1} \left(\frac{k \rho_{cs}^{-2}}{z \rho_{cs}} \left(\sqrt{\frac{1 + 2k \rho_{cs}^{-2} \cos(2 \frac{k \theta_1}{z})}{1 + 2(1 - k)^2 \frac{k \rho_{cs}^{-2} \cos(2 \frac{k \theta_1}{z})}{z \rho_{cs}} + (1 - k)^4 \frac{k \rho_{cs}^{-4}}{z \rho_{cs}}}} - 1 \right) - \frac{1 - (1 - k)^2 k \rho_{cs}^{-4}}{z \rho_{cs}} \sqrt{\frac{1 + 2k \rho_{cs}^{-2} \cos(2 \frac{k \theta_1}{z})}{1 + 2(1 - k)^2 \frac{k \rho_{cs}^{-2} \cos(2 \frac{k \theta_1}{z})}{z \rho_{cs}} + (1 - k)^4 \frac{k \rho_{cs}^{-4}}{z \rho_{cs}}}}; (1 - k)' - K \right)$
$ds^{-1}(\cdot, k)$	$x = \frac{1}{2}cn^{-1} \left(\frac{k'^2 k \rho_{ds}^{-2}}{z \rho_{ds}} - \sqrt{\frac{1 - 2k'^2 k \rho_{ds}^{-2} \cos(2 \frac{k \theta_1}{z})}{1 - 2k'^4 k \rho_{ds}^{-4} \cos(2 \frac{k \theta_1}{z}) + (1 - k)^4 \frac{k \rho_{ds}^{-4}}{z \rho_{ds}}}}; k \right) - K$
	$y = \frac{1}{2}cn^{-1} \left(\frac{k'^2 k \rho_{ds}^{-2}}{z \rho_{ds}} + \sqrt{\frac{1 - 2k'^2 k \rho_{ds}^{-2} \cos(2 \frac{k \theta_1}{z})}{1 - 2k'^4 k \rho_{ds}^{-4} \cos(2 \frac{k \theta_1}{z}) + (1 - k)^4 \frac{k \rho_{ds}^{-4}}{z \rho_{ds}}}}; k' \right)$

Cuadro 2.4.4: Inversas de las funciones elípticas ns , cs y ds .

Con lo anterior hemos establecido que todas las funciones elípticas inversas dependen solamente del módulo. Esto nos remite (ahora sí) al asunto de las expresiones para calcular inversas de las funciones elípticas, un tema conocido que no ofrece una gran dificultad. Una vez las encontremos, tendremos que los paralelos de un hemisferio se aplican sobre ciertas curvas simples cerradas en cierto paralelogramo. Este hecho, que se define precisamente más abajo, constituye la esencia de la anhelada propiedad quincuncial.

Observaciones finales. Se entiende que las fórmulas presentadas en las tablas 2.3.3, 2.3.4, 2.4.3 y 2.4.4 están compuestas con la proyección estereográfica. Es decir, los módulos complejos ρ toman el valor $\tan(p/2)$, donde p es el parámetro de longitud explicado antes. Los argumentos complejos θ no ofrecen dificultad adicional porque coinciden con la longitud (geográfica) de la esfera. De otro lado, las fórmulas dadas en estas tablas pueden componerse con traslaciones para alcanzar otros paralelogramos dentro de otras regiones de inyectividad de las funciones elípticas consideradas. Con más generalidad, las simetrías asociadas al grupo generado por los periodos de una función elíptica produce que una gran variedad de elecciones posibles para los paralelogramos fundamentales y las regiones de inyectividad de las funciones elípticas.

2.5. CÁLCULO INFINITESIMAL Y CÓMPUTO DE LAS FUNCIONES INVERSAS ELÍPTICAS REALES

El objetivo de este trabajo es producir un conjunto de fórmulas valederas para calcular numéricamente las proyecciones elípticas. En la consecución de tal fin, hemos encontrado dos formas de realizar esta tarea. La primera de ellas es la más conocida y se remonta al mismo Jacobi [2]. Es fácil de implementar porque los programas traen ya consigo las funciones trigonométricas. Además, cada vez es más común encontrar implementaciones de la integral elíptica de la primera especie. Tal aproximación se ha usado con éxito en Solanilla, Oostra y Yañez [16]. La segunda es más novedosa y consiste en usar otras fórmulas integrales conocidas,

que dan el resultado directamente, sin componer funciones. El problema radica en programarlas, puesto que no son tan comunes como las anteriores. Dejamos a los especialistas del Análisis Numérico la tarea de decidir cuál de los dos métodos siguientes es más eficiente y pertinente para los cálculos.

LA DEFINICIÓN ORIGINAL DE JACOBI

En efecto, las funciones elípticas jacobianas son originalmente composiciones de cierta “amplitud angular” con ciertas funciones esencialmente trigonométricas. Dicha amplitud es la inversa de la integral elíptica de la primera especie con módulo $0 < |k| < 1$

$$F(\phi) = \int_0^\phi \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}},$$

donde $\phi \in [0, \pi/2]$. Formalmente, se pone $am = F^{-1}$. La primera definición de Jacobi –a la que nos referimos– no usa las funciones theta y es muy sencilla. Las funciones elípticas son simplemente

$$cnz = \cos amz, snz = \sin amz, dnz = \Delta amz, scz = \tan amz, \text{ etc.}$$

Aquí, $\Delta z = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 z}$. Esto vale para $z \in \mathbb{C}$. Aquí, empero, sólo necesitamos sus versiones reales. Esta definición explica los nombres latinos originales de coseno (seno, delta, tangente, etc.) de la amplitud (*cosinus amplitudinis*, *sinus amplitudinis*, etc.). Por el Teorema de la Función inversa y el Teorema Fundamental del Cálculo, la función amplitud *real* es siempre creciente y, así, éstas y las demás funciones están definidas –al menos– para todo $z \in \mathbb{R}$. Ahora bien,

$$cn^{-1}z = F(\arccos z), sn^{-1}z = F(\arcsin z) \text{ y } sc^{-1}z = F(\arctan z).$$

Para las demás funciones elípticas se puede recurrir a la proposición siguiente, basada en identidades elípticas básicas.

Proposición 2.8. Con sólo un poco más de esfuerzo,

$$\begin{aligned} dn^{-1}z &= F\left(\arcsen\left(\sqrt{\frac{1-z^2}{k^2}}\right)\right), \\ cd^{-1}z &= F\left(\arcsen\left(\sqrt{\frac{1-z^2}{1-k^2z^2}}\right)\right), \\ dc^{-1}z &= F\left(\arcsen\left(\sqrt{\frac{1-z^2}{k^2-z^2}}\right)\right). \end{aligned}$$

Demostración. 1. Para $w = dn^{-1}z$, partimos de $z = dnw = \sqrt{1-k^2sn^2w}$. Por esto, $sn^2w = \frac{1-z^2}{k^2}$. De lo dicho más arriba,

$$w = F\left(\arcsen\left(\sqrt{\frac{1-z^2}{k^2}}\right)\right).$$

Esta fórmula es, sobre todo, utilizable.

2. $w = cd^{-1}z$ se trata con la identidad

$$sn^2w = \frac{1 - cd^2w}{1 - k^2cd^2w} = \frac{1 - z^2}{1 - k^2z^2}.$$

La afirmación es inmediata.

3. Para $w = dc^{-1}z$, usamos

$$snw = \sqrt{\frac{1 - dc^2w}{k^2 - dc^2w}} = \sqrt{\frac{1 - z^2}{k^2 - z^2}}.$$

□

FÓRMULAS INTEGRALES

Sin buscarlo conscientemente, durante la elaboración de este trabajo, hemos encontrado en la literatura ciertas fórmulas integrales directas para las inversas que

necesitamos. Con el fin de abrir distintas posibilidades a la futura implementación numérica de las fórmulas, presentamos a continuación, sin demostración, dichos resultados.

Comencemos por la función coseno de la amplitud $cn : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Es sabido que su gráfica es como en la Figura 2.2. El eje horizontal lleva la coordenada x y el vertical, la imagen $cn(x, k) = cn(x)$. La gráfica es tomada de HHH/jacobi_cn.html, donde hemos usado la abreviatura HHH=https://www.boost.org/doc/libs/1_67_0/libs/math/doc/html/math_toolkit/jacobi. A todas luces, esta fun-

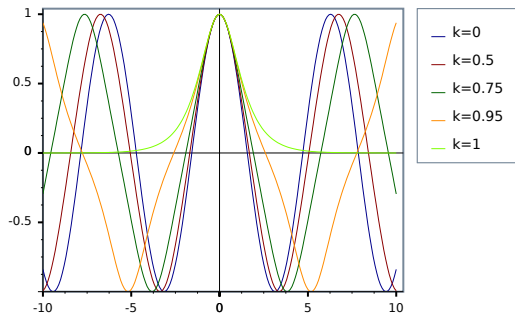


Figura 2.2: Función real cn para varios valores de k .

ción no es inyectiva. Así pues, como es costumbre con las funciones trigonométricas, podemos restringir su dominio para que lo sea. De esta forma obtenemos la función inversa $cn^{-1} : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Las inversas de las funciones elípticas son las antiguas integrales elípticas, que tanto estudió Legendre. Para el caso que nos ocupa, tenemos

$$cn^{-1}(x) = F(\cos^{-1} x) = \int_x^1 \frac{d\xi}{(1 - \xi^2)(k'^2 + k^2 \xi^2)},$$

donde F es la función que ya hemos mencionado. Compárense estas afirmaciones con [5], fórmula 22.15.13.

Algo parecido sucede para la versión real de dn , cuya gráfica x vs. $dn(x)$ se puede ver en la Figura 2.3 (Tomada de HHH/jacobi_dn.html). Esta vez, se tiene $dn^{-1} :$

$[k', 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$dn^{-1}(x) = F(\delta^{-1}x) = \int_x^1 \frac{d\xi}{(1-\xi^2)(\xi^2 - k'^2)},$$

donde $\delta x = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}$. Cf. [5], fórmula 22.15.14.

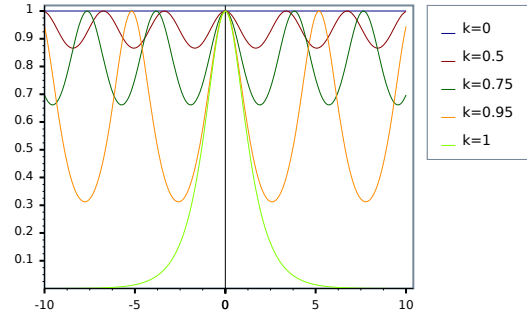


Figura 2.3: Función real dn para varios valores de k .

La Figura 2.4 muestra las funciones reales cd y dc (HHH/jacobi_cd.html y HHH/jacobi_dc.html, respectivamente). Notamos que dc explota o se va al infinito en algunos puntos, lo que sucede cuando cn se anula. Las fórmulas integrales

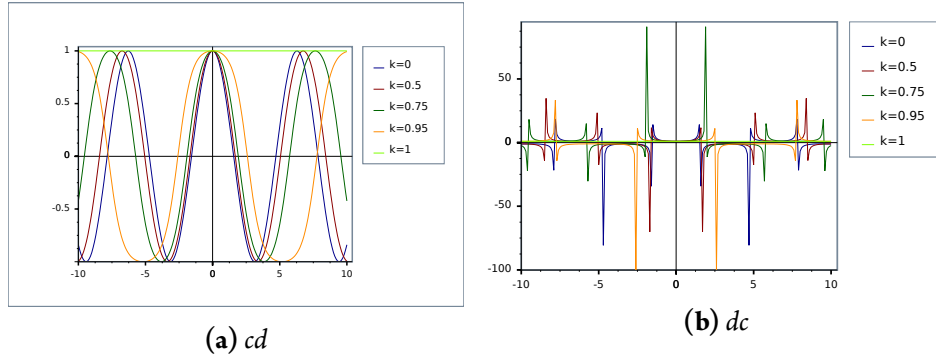


Figura 2.4: Funciones reales cd , dc para varios valores de k .

para las inversas $cd^{-1} : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ y $dc^{-1} : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ son respectivamente

$$cd^{-1}(x) = F(\varepsilon^{-1}x) = \int_x^1 \frac{d\xi}{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}, \quad \varepsilon x = \frac{\cos x}{\delta x},$$

$$dc^{-1}(x) = F(\eta^{-1}x) = \int_1^x \frac{d\xi}{(\xi^2-1)(\xi^2-k^2)}, \quad \eta x = \frac{\delta x}{\cos x}.$$

Cf. [5], fórmulas 22.15.15 y 22.15.18.

Las gráficas de las funciones restantes, nc y nd , se delinean en la Figura 2.5 (HHH/jacobi_nc.html y HHH/jacobi_nd.html, respectivamente). Las inversas $nc^{-1} :$

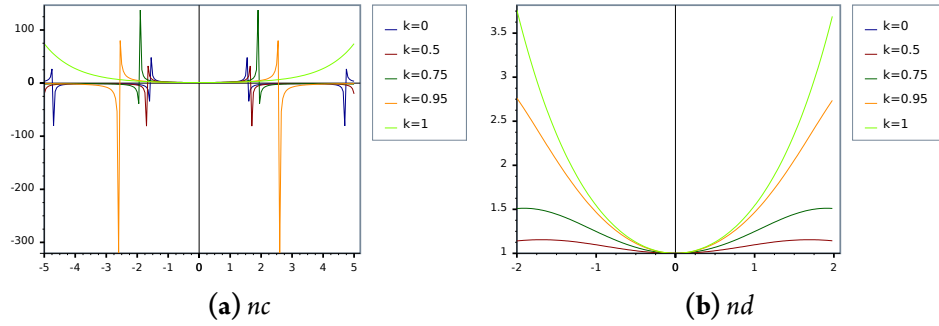


Figura 2.5: Funciones reales nc , nd para varios valores de k .

$[1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ y $nd^{-1} : [1, 1/k'] \rightarrow \mathbb{R}$ están dadas respectivamente por

$$nc^{-1}(x) = F(\lambda^{-1}x) = \int_1^x \frac{d\xi}{(\xi^2-1)(k^2+k'^2\xi^2)}, \quad \lambda x = \frac{1}{\cos x} = \sec x,$$

$$nd^{-1}(x) = F(\mu^{-1}x) = \int_1^x \frac{d\xi}{(\xi^2-1)(1-k'^2\xi^2)}, \quad \mu x = \frac{1}{\delta x}.$$

Cf. [5], fórmulas 22.15.19 y 22.15.17.

Con sólo estas funciones pares podemos obtener las inversas de todas las funciones elípticas jacobianas. Ahora, con el fin de exhibir al menos una fórmula similar para las funciones impares, presentamos enseguida a la inversa de la función seno de la amplitud (real). Las demás se pueden consultar en las referencias mencionadas.

La gráfica x vs. $sn(x)$ se ilustra en la Figura 2.6 (HHH/jacobi_sn.html). Para ella, $sn^{-1} : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$sn^{-1}(x) = F(\sin^{-1} x) = \int_0^x \frac{d\xi}{(1 - \xi^2)(1 - k^2 \xi^2)}.$$

Cf. [5], fórmula 22.15.12. Claro que la referencia a esta fuente bibliográfica no es necesaria, puesto que se trata de la integral elíptica de la primera especie (forma canónica), con un cambio de variable bastante evidente.

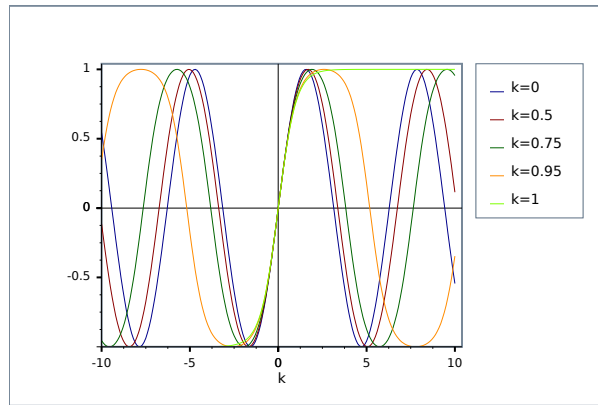


Figura 2.6: Función real sn para ciertos valores de k .

3

Quincuncialidad

PARA TERMINAR EL TRABAJO, FORMALIZAMOS el camino recorrido dentro de una noción de propiedad quincuncial. En la consecución de tal fin, dotamos a los hemisferios de una esfera unitaria con una estructura canónica de superficie de Riemann y consideramos aplicaciones a un paralelogramo dado. Las aplicaciones deben cumplir algunas propiedades especiales para que se pueda hablar de aplicaciones quincunciales.

3.1. SUPERFICIES TOPOLÓGICAS Y DIFERENCIALES

Partimos del concepto conocido de superficie, es decir, una variedad de dos dimensiones, *cf.* [9]. Asumimos algunas nociones básicas de Topología.

Una superficie topológica es un espacio topológico de Hausdorff S , en el cual

cada punto posee una vecindad U que es homeomorfa a un subconjunto abierto de \mathbb{R}^2 (usual). Dichos homeomorfismos $f : U \rightarrow V$ se llaman mapas de la superficie S . Un atlas topológico para S es una familia de mapas $\{f_a, U_a\}$ tal que los dominios U_a forman un cubrimiento abierto de S .

Un atlas topológico $\{f_a, U_a\}$ para una superficie S es diferenciable si todos los cambios de mapa $f_\beta \circ f_a^{-1}$ son de clase C^∞ (entre abiertos de \mathbb{R}^2 , cuando $U_a \cap U_\beta \neq \emptyset$). Un mapa es compatible con un atlas diferenciable si, al añadirlo al atlas, se obtiene –de nuevo– un atlas diferenciable. Una estructura diferencial para una superficie S es un atlas maximal, es decir, un atlas formado por todos los mapas compatibles con un atlas diferenciable dado.

Una superficie diferencial es una superficie topológica provista con una estructura diferencial.

3.2. SUPERFICIES DE RIEMANN

Sea pues S una superficie diferencial, cuyos mapas se denotan ahora con la letra z , para evocar una variable compleja. Un atlas diferenciable para S se dice conforme si los cambios de mapa $z_\beta \circ z_a^{-1}$ son todos holomorfos (analíticos). Una estructura conforme para S se obtiene agregando todos los mapas compatibles con un atlas conforme dado, es decir, el atlas ampliado sigue siendo conforme después de añadir cada nuevo mapa. Una superficie de Riemann es una superficie diferencial con una estructura conforme.

3.3. APLICACIONES CONFORMES

Ahora bien, una aplicación continua $h : S \rightarrow S'$ entre superficies de Riemann es holomorfa o analítica si, en coordenadas locales z para S y z' para S' , todas las lecturas planas $z' \circ h \circ z^{-1}$ son holomorfas (cuando estén definidas). Una aplicación h es conforme si la derivada $\frac{\partial h}{\partial z}$ nunca se anula. h es conforme en casi todas partes si esta derivada se anula solamente en un conjunto finito de puntos del dominio de h . Cf. [9], página 19.

3.4. HEMISFERIO Y PARALELOGRAMO CON FRONTERA

En lo que sigue, \mathbb{M}_1 es un hemisferio abierto de la esfera unitaria y \mathbb{M}_2 es un paralelogramo abierto del plano euclidiano. Se dota a estos conjuntos con la topología y la estructura conforme que heredan como subconjuntos de \mathbb{R}^3 (biholomorfos al disco abierto del plano).

En un paso adicional, debemos agregar –respectivamente– las clausuras $\partial\mathbb{M}_1$ y $\partial\mathbb{M}_2$ a estas superficies para obtener variedades con frontera. Notamos que dichas clausuras son curvas cerradas. En concordancia, llamaremos a nuestras superficies de Riemann con frontera con los nombres $\mathbb{M}_1 \cup \partial\mathbb{M}_1$ y $\mathbb{M}_2 \cup \partial\mathbb{M}_2$. A cada una de estas superficies con frontera se les dota con la topología respectiva de subespacio de \mathbb{R}^3 .

3.5. PROPIEDAD QUINCUNCIAL

La noción de propiedad quincuncial que buscamos tiene que ver con las características de una aplicación $f : \mathbb{M}_1 \rightarrow \mathbb{M}_2$ que se extiende conformemente a las fronteras, salvo por un número finito de puntos.

En primer lugar, notamos que el exigir que la aplicación f sea biholomorfa (holomorfa biyectiva con inversa holomorfa) desemboca irremediabilmente en un asunto trivial, ya conocido:

Teorema 3.1 (Teorema de la aplicación de Riemann, *Riemann Mapping Theorem*). *Dado un subconjunto abierto simplemente conexo no vacío $D \subset \mathbb{C}$, que no sea todo el plano, existe una aplicación biholomorfa $r : D \rightarrow \mathbb{D}$, sobre el disco abierto unitario*

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$$

Cf. [17], p. 172. Además, ésta no es la situación que hemos considerado en los capítulos anteriores. Lo que sí es interesante es que la aplicación r es conforme en virtud del Teorema de la función inversa: debemos tener que $r'(z) \neq 0$ en todo D .

En nuestro caso buscamos una aplicación meromorfa, con un solo polo, en lugar

de una función holomorfa. Tal es lo que se logra con la proyección estereográfica. En otras palabras, bien debemos usar el atlas maximal que contiene a esta famosa proyección, o bien debemos introducir el polo en el nivel de las aplicaciones. Escogemos este último camino, por medio de una función que es biconforme (biyectiva conforme con inversa conforme), excepto en un punto.

Estas reflexiones nos llevan a formular las condiciones buscadas como se explica a continuación. Decimos que una aplicación $f : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}$ posee la propiedad quincuncial si

- La restricción $f|_{\mathbb{M}_1}$, de f a un hemisferio abierto $\mathbb{M}_1 \subset \mathbb{S}$, es una aplicación biconforme salvo en un punto, sobre cierto $\mathbb{M}_2 \subset \mathbb{S}$.
- $f|_{\mathbb{M}_1}$ se puede extender a la frontera $\partial\mathbb{M}_1$ de $\mathbb{M}_1 \cup \partial\mathbb{M}_1$ sobre $\mathbb{M}_2 \cup \partial\mathbb{M}_2$, de tal manera que se pueden introducir un número finito de puntos en los cuales la magnificación de la aplicación extendida se hace infinita, cf. [16].

Se hubiese podido exigir que la restricción fuese biconforme en casi en todas partes, pero entonces la inyectividad hubiera reducido el conjunto finito de puntos a un conjunto unitario.

En virtud de las propiedades de las funciones elípticas mencionadas o demostradas en los Capítulos 1 y 2, obtenemos el

Teorema 3.2. *Sea $ej : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{S}$ una función elíptica de Jacobi cualquiera. Entonces, la inversa elíptica ej^{-1} posee la propiedad quincuncial. Además, estas inversas realizan lo siguiente:*

- *Mediante una elección conveniente del hemisferio \mathbb{M}_1 que sirve de dominio restringido, se puede lograr que el polo del hemisferio sea el punto singular. Dicho punto singular se aplica al centro –punto de encuentro de las diagonales– del paralelogramo \mathbb{M}_2 que sirve de rango (mitad o subparalelogramo de la región de inyectividad).*
- *Con la elección anterior, el paralelo $\partial\mathbb{M}_1$ (frontera de \mathbb{M}_1 , llamado usualmente ecuador) se aplica sobre la frontera $\partial\mathbb{M}_2$ del paralelogramo, con la posibilidad de estallar en un número finito de puntos.*

- *Las imágenes de los demás paralelos del hemisferio \mathbb{M}_1 se obtienen fijando el módulo complejo ρ de la función considerada y variando la longitud θ entre 0 y 2π en las expresiones para x , y obtenidas en el Capítulo 2. Las imágenes de los meridianos, se logran –de forma análoga– fijando θ y permitiendo que ρ tome todos sus valores posibles.*

A modo de conclusión

EL TEOREMA 3.2 contiene la principal conclusión de este trabajo. Este resultado deja, sin embargo, muchas preguntas abiertas, las cuales vale la pena formular:

- ¿Son las inversas de las funciones elípticas de Jacobi las únicas aplicaciones que tienen la propiedad quincuncial? Acaso, ¿existe una clase más grande de aplicaciones con esta propiedad?
- En relación con lo anterior, ¿caracteriza de alguna forma la propiedad quincuncial a las funciones elípticas (inversas)?
- Con respecto a las ecuaciones paramétricas $x(\rho, \theta), y(\rho, \theta)$ que realizan la propiedad quincuncial, ¿es posible eliminar los parámetros ρ, θ para describir algebraicamente las imágenes de los paralelos y los meridianos del hemisferio? Sobre esto hay evidencia de que puede ser así, tal como se puede ver en [14], Capítulo 2.
- ¿Cómo es, en general, el comportamiento de las inversas elípticas cuando se aproximan a los puntos de la frontera $\partial\mathbb{M}_1$?

Hay otro asunto que no queda como pregunta porque ya está resuelto: las aplicaciones con la propiedad quincuncial producen teselaciones en el sentido que los paralelogramos del rango recubren o pavimentan el plano sin que queden espacios sin cubrir y sin que ellos se traslapen. Tales teselados son similares a los encontrados por Peirce [3], véase la Figura 2.1.

En la base del método usado para este trabajo están las transformaciones elípticas de Jacobi. A propósito, tales transformaciones son el objeto principal de los famosos *Fundamenta nova* [2] de 1829. Los mismos asuntos se han bosquejado también en Solanilla [13]. En efecto, la solución al problema de las funciones elípticas impares ha sido posible gracias a las llamadas transformaciones imaginarias y reales de Jacobi. Tales transformaciones tienen un significado geométrico muy preciso: expresan la forma cómo las funciones elípticas jacobianas se transforman cuando ocurren movimientos euclidianos muy particulares (traslaciones por K , rotaciones de 90° , dilataciones por el módulo elíptico). Tales movimiento pueden ocurrir tanto en el punto donde la función es evaluada, como en el valor de la función.

Queda pendiente la implementación numérica de las fórmulas desarrolladas en este trabajo.

Bibliografía

- [1] A. Robert. *Elliptic Curves*. Springer-Verlag, 1973.
- [2] C. G. J. Jacobi. *Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum*. Sumptibus fratrum Bornträger, 1829.
- [3] C. S. Peirce. A Quincuncial Projection of the Sphere. *American Journal of Mathematics*, 2(4):394–396, 1879.
- [4] Digital Library of Mathematical Functions. Jacobian Elliptic Functions. Properties. <https://dlmf.nist.gov/22.6>, September 2015.
- [5] Digital Library of Mathematical Functions. Jacobian Elliptic Functions. Inverse Functions. <https://dlmf.nist.gov/22.15>, August 2018.
- [6] E. J. Rodríguez y J. F. Susa. *Propiedades y aplicaciones de la función theta de Jacobi*. Universidad del Tolima, Matemáticas con énfasis en Estadística, trabajo de pregrado, 2016.
- [7] F. J. Richelot. Darstellung einer beliebigen gegebenen Größe durch $\operatorname{sn}(u + w, k)$. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 45:225–232, 1853.
- [8] H. Durège. *Theorie der elliptischen Funktionen*. Druck und Verlag von B. G. Teubner, 4th (vierte Auflage) edition, 1887.
- [9] J. Jost. *Compact Riemann Surfaces. An Introduction to Contemporary Mathematics*. Springer, 1997.
- [10] J. Liouville. Leçons sur les fonctions doublement périodiques faites en 1847 par M. J. Liouville. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, LXXX-VIII(4):277–310, 1880.

- [11] J. Pierpont. Note on the C. S. Peirce's Paper on 'A Quincuncial Projection of the Sphere'. *American Journal of Mathematics*, 18(2):145–152, 1896.
- [12] L. P. Lee. Some Conformal Projections Based on Elliptic Functions. *Geographical Review*, 55(4):563–580, 1965.
- [13] L. Solanilla. *Las transformaciones elípticas de Jacobi*. Sello editorial Universidad del Tolima, 2014.
- [14] L. Solanilla, A. C. Tamayo y G. Pareja. *Integrales elípticas con notas históricas*. Sello editorial Universidad de Medellín, 2010.
- [15] L. Solanilla, A. C. Tamayo y G. Pareja. *Funciones elípticas. La función seno generalizado*. Sello Editorial Universidad del Medellín, 2013.
- [16] L. Solanilla, A. Oostra y J. P. Yáñez. Peirce Quincuncial Projection. *Revista Integración*, 34(1):23–38, 2016.
- [17] L. V. Ahlfors. *Complex Analysis. An Introduction to the Theory of Analytic Functions of One Complex Variable*. McGraw-Hill Book Company, Inc., 1953.
- [18] N. H. Abel. Recherches sur les fonctions elliptiques. *Journal für die reine und angewandte Mathematik, herausgeben vor Crelle*, 2, 3:263–388, 1827-1828.
- [19] R. D. Gutiérrez y J. E. Trujillo. *Curvas y funciones elípticas*. Universidad del Tolima, Matemáticas con énfasis en Estadística, trabajo de pregrado, 2015.
- [20] Wolfram MathWorld. Jacobi elliptic functions. <http://mathworld.wolfram.com/JacobiEllipticFunctions.html>, August 2018.

Colophon

THIS THESIS WAS TYPESET using \LaTeX , originally developed by Leslie Lamport and based on Donald Knuth's \TeX . The body text is set in 11 point Arno Pro, designed by Robert Slimbach in the style of book types from the Aldine Press in Venice, and issued by Adobe in 2007. A template, which can be used to format a PhD thesis with this look and feel, has been released under the permissive MIT (X11) license, and can be found online at github.com/suchow/ or from the author at suchow@post.harvard.edu.