Copie anonyme - n°anonymat : 244625

Code épreuve : 283 | Nombre de pages : 20 | Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques 2 approfondies ESCP BS - HEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Questions préliminaires

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $nx - 1 < \lfloor nx \rfloor \leq nx$ par définition de la partie entière donc :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x - \frac{1}{n} < \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leq x$ or $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ (par quotient de limites) donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (x - \frac{1}{n}) = x$

Donc d'après le théorème de l'encadrement :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} = x$$

2. Par définition de la partie entière :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{n}{2} - 1 < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq \frac{n}{2}$ donc :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $-\frac{n}{2} \leq -\lfloor \frac{n}{2} \rfloor < 1 - \frac{n}{2}$ donc :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n - \frac{n}{2} \leq n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ soit :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{n}{2} \leq n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ or $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n}{2} = +\infty$ (par produit de limites)

Donc :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) = +\infty$$

Partie I :

3. (a)

(b) arcsin est la bijection réciproque de la bijection sin continue sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et bijective de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ dans $[-1, 1]$ donc arcsin est continue sur $[-1, 1]$. De plus, sin est dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ de dérivée cos, s'annulant sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ uniquement en $-\frac{\pi}{2} = \sin(-1)$ et en $\frac{\pi}{2} = \sin(1)$ donc :

arcsin est dérivable sur $]-1, 1[$ et :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))}$$

Donc d'après 3.(a) :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

4.(a) La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1]$ et sa restriction sur $[0,1]$ est à valeurs de $[0,1]$ dans $[0,1]$. D'après 3.(b), $x \mapsto \arcsin(x)$ est continue sur $[-1,1]$ donc sur $[0,1]$, dérivable sur $]-1,1[$ donc sur $[0,1[$ et $\sqrt{1} = 1$ donc :

Par composition, G est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$.

Et $\forall x \in]0,1[, \quad G'(x) = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \times \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}$ soit :

$$\forall x \in]0,1[, \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$$

(b) $\forall x \in]0,1[$, $x > 0$ et $1-x > 0$ donc $x(1-x) > 0$

Par stricte croissance de $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $]0,1[$:

$\forall x \in]0,1[, \quad \sqrt{x(1-x)} > 0$ donc $g(x) > 0$

Inutile

$x \mapsto \sqrt{x(1-x)}$ est dérivable sur $]0,1[$ et ne s'annule pas sur $]0,1[$, à valeurs incluses dans $]0,1[$.
Or $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $]0,1[$ donc :

g est dérivable sur $]0,1[$ et :

$$\forall x \in]0,1[,\quad g'(x) = -\frac{1\left(\frac{-(2x-1)}{2\sqrt{x(1-x)}}\right)}{x(1-x)}$$

$$= \frac{2x-1}{2\left(x(1-x)\right)^{\frac{3}{2}}}$$

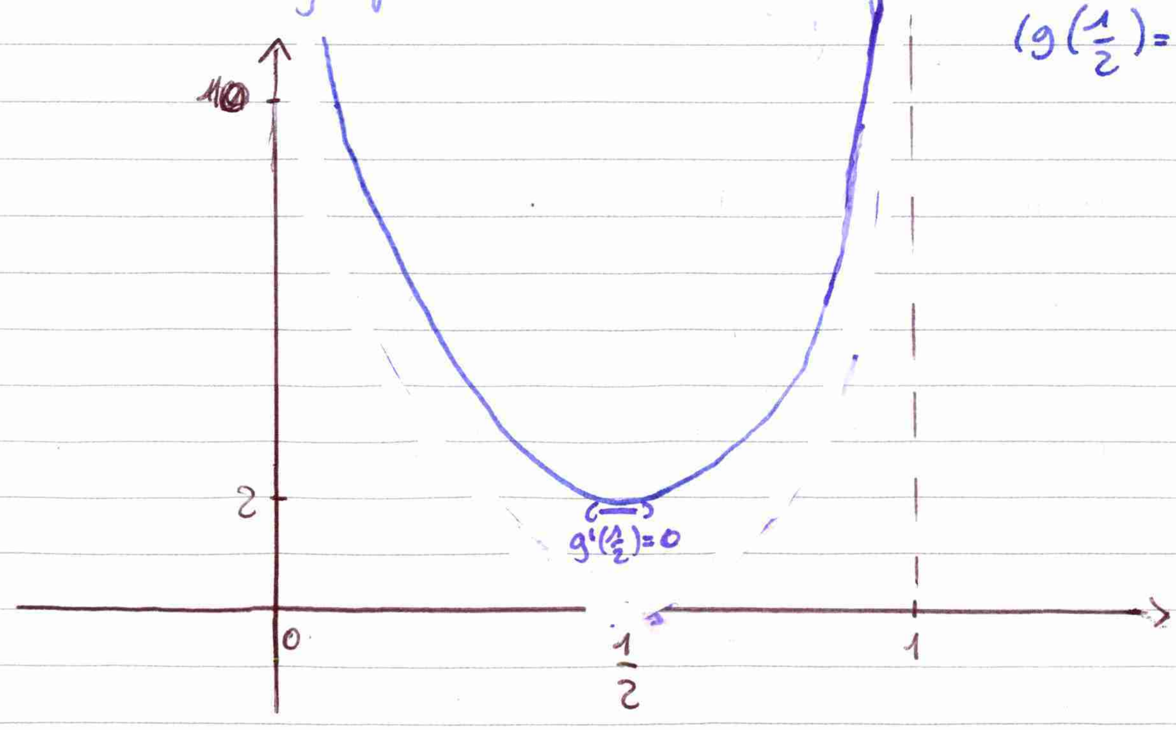
Or $\forall x \in]0,1[$, $\left(x(1-x)\right)^{\frac{3}{2}} > 0$ donc sur $]0,1[$: $g'(x) > 0 \iff 2x > 1$
$\iff x > \frac{1}{2}$

Donc g est strictement décroissante sur $]0,\frac{1}{2}]$ et strictement croissante sur $[\frac{1}{2},1[$.
De plus, $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = +\infty$ par quotient de limites

En utilisant le coefficient directeur de g donné par sa dérivée sur $]0,1[$ en certains points, et sa monotonie sur $]0,1[$,

on obtient le graphe suivant :

$\left(g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}^{2}} = 2\right)$



Copie anonyme - n°anonymat : 244625

Code épreuve : 283	Nombre de pages : 20	Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques 2 approfondies ESCP BS - HEC

Emplacement QR Code

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

5. (a) • f est positive sur $\mathbb{R}$ (car g l'est et $\frac{1}{\pi} > 0$)

• f est continue sur $\mathbb{R}$ (sauf éventuellement en 0 et 1)

• Soit $(A,B) \in \mathbb{R}^2$, $0 < A < B < 1$. g est continue sur $[A,B]$

Et $\int_A^B g(t)dt = [G(t)]_A^B$

$= G(B) - G(A)$

Or $\lim\limits_{A \to 0} 2\arcsin(\sqrt{A}) = 0$ (car $\lim\limits_{A \to 0} \sqrt{A} = 0$ et $\sin(0) = 0 \Rightarrow \arcsin(0) = 0$)
(car arcsin est continue en 0)

Et $\lim\limits_{B \to 1} 2\arcsin(\sqrt{B}) = 2 \times \frac{\pi}{2}$

$= \pi$ (car $\lim\limits_{B \to 1} \sqrt{B} = 1$ et $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1 \Rightarrow \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$)
(car arcsin est continue en 1)

Donc $\int_0^1 G(t)dt$ converge et vaut π, et comme f est nulle sur $\mathbb{R}_- \cup [1, +\infty[$: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge et vaut $\frac{\pi}{\pi} = 1$ donc :

f est une densité de probabilité.

(b) X admet une espérance $\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$ converge absolument

$\Leftrightarrow \int_0^1 tf(t)dt$ converge (car f est nulle sur $\mathbb{R}_- \cup [1, +\infty[$)

Soit $(A,B) \in \mathbb{R}^2$, $0 < A < B < 1$. g est continue sur $[A, B]$.

En effectuant le changement de variable affine $\begin{cases} u = 1-x \\ du = -dx \end{cases}$,

$\int_A^B \cancel{x} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{1-A}^{1-B} -(1-u) \times \frac{1}{\sqrt{u(1-u)}} du$. (par linéarité de l'intégration)

$= -\frac{1}{\pi}\left(\int_{1-A}^{1-B} \frac{1}{\sqrt{u(1-u)}} du - \int_{1-A}^{1-B} \frac{u}{\sqrt{u(1-u)}} du\right)$ (par linéarité de l'intégration)

$= -\frac{1}{\pi}\left(\int_{1-A}^{1-B} g(u)\, du - \int_{1-A}^{1-B} ug(u) du\right)$

$= \int_{1-A}^{1-B} uf(u) - \int_{1-A}^{1-B} f(u)\, du$

Or $tf(t) \underset{t \to 0}{\sim} \frac{1}{\pi}\frac{t}{\sqrt{t}}$ et $tf(t) \underset{t \to 1}{\sim} \frac{1}{\pi}\frac{t}{\sqrt{t}}$

$\underset{t \to 0}{\sim} \frac{\sqrt{t}}{\pi}$ $\underset{t \to 1}{\sim} \frac{\sqrt{t}}{\pi}$

Donc $u \mapsto uf(u)$ admet une limite finie en 0 et 1 donc comme $(0,1) \in \mathbb{R}^2$, $\int_0^1 uf(u) du$ converge donc X admet une espérance, et en faisant tendre A vers 0 & B vers 1 :

$\int_0^1 x f(x)\,dx = \int_1^0 u f(u)\,du - \int_1^0 f(u)\,du$ soit d'après 5.(a) :

$E(X) = -E(X) - (-1)$

Donc $2E(X) = 1$ ainsi :

$$\boxed{E(X) = \frac{1}{2}}$$

6. (a) $U(\Omega) = [0,1]$ donc $\frac{\pi}{2} U(\Omega) = [0, \frac{\pi}{2}]$

donc $\sin^2\left(\frac{\pi}{2} U(\Omega)\right) = [0,1]$ donc

$V(\Omega) = [0,1]$. et :

$\forall t \in [0, \sin(1)]$, $F_V(t) = P(V \leq t)$ (où F_V désigne la fonction de répartition de V)

$= P\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} U\right) \leq \sqrt{t}\right)$ (par croissance de $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0,1]$)

$= P\left(U \leq \frac{2}{\pi} \arcsin(\sqrt{t})\right)$ (par croissance de arcsin sur $[0,1]$)

$= F_U\left(\frac{2}{\pi} \arcsin(\sqrt{t})\right)$ (où F_U désigne la fonction de répartition de U)

Or $\arcsin : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

donc $\arcsin : [0,1] \to [0, \frac{\pi}{2}]$

donc $\arcsin^2 : [0,1] \to [0, \frac{\pi^2}{4}]$ mais $\frac{2}{\pi} \times \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi}{2}$

$\frac{2}{\pi} \arcsin(\sqrt{t}) \in [0,1]$ donc :

$\forall t \in [0,1]$, $F_V(t) = \frac{2}{\pi} \arcsin(\sqrt{t})$

$= \frac{G(t)}{\pi}$ et comme G est

une primitive de g, $\frac{G}{\pi}$ est une primitive de f donc X et V ont même fonction de répartition, ainsi :

<u>V suit la loi arcsinus</u>

(b)

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def arcsin():
    U= rd.random( )
    V=(np.sin((np.pi/2)*U))**2
    return V
```

7. Soit $t \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$.

$0 \leq \frac{k}{n} \leq t \leq \frac{k+1}{n}$ donc $0 \leq 1-\frac{k+1}{n} \leq 1-t \leq 1-\frac{k}{n}$

Par croissance de la fonction racine sur $\mathbb{R}_+$:

$$0 \leq \sqrt{\frac{k}{n}}\sqrt{1-\frac{k+1}{n}} \leq \sqrt{t}\sqrt{1-t} \leq \sqrt{\frac{k+1}{n}}\sqrt{1-\frac{k}{n}}$$ et par

décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{(k+1)(n-k)}{n^2}}} \leq g(t) \leq \frac{1}{\sqrt{\frac{k(n-k+1)}{n^2}}}$$ soit

$$\frac{n}{\sqrt{(k+1)(n-k)}} \leq g(t) \leq \frac{n}{\sqrt{k(n-k+1)}}$$ et par croissance

de l'intégration, comme $\frac{k}{n} < \frac{k+1}{n}$:

Copie anonyme - n°anonymat : 244625

Code épreuve : 283 | Nombre de pages : 20 | Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques 2 approfondies ESCP BS - HEC

Consignes
• Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
• Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
• Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
• Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
• Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \frac{n}{\sqrt{(k+1)(n-k)}}\,dt \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} g(t)\,dt \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \frac{n}{\sqrt{k(n-k+1)}}$$ soit :

$$\frac{n}{\sqrt{(k+1)(n-k)}}\left(\frac{k+1-k}{n}\right) \leq G\left(\frac{k+1}{n}\right) - G\left(\frac{k}{n}\right) \leq \frac{\cancel{n}}{\sqrt{k(n-k+1)}}\left(\frac{k+1-k}{\cancel{n}}\right)$$

D'où $$\frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k)}} \leq G\left(\frac{k+1}{n}\right) - G\left(\frac{k}{n}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{k(n-k+1)}}$$

Donc $$\frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} \leq G\left(\frac{k}{n}\right) - G\left(\frac{k-1}{n}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{(k-1)(n-k)}}$$ (en décalant k d'un rang)

Et comme $0 < n-k \leq n-k+1$ et que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$: $0 < \sqrt{n-k} \leq \sqrt{n-k+1}$ mais $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ donc : $$\frac{1}{\sqrt{k(n-k+1)}} \leq \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}$$

On peut alors conclure :

$$G\left(\frac{k+1}{n}\right) - G\left(\frac{k}{n}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} \leq G\left(\frac{k}{n}\right) - G\left(\frac{k-1}{n}\right)$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Partie II :

Soit $i \in [\![1, n]\!]$.

9. $X_i + 1(\Omega) = \{0, 2\}$ donc $\frac{1}{2}(X_i+1)(\Omega) = \{0,1\}$

Et $P(Y_i = 1) = P(X_i = 1)$

$= \theta$ donc

$Y_i \hookrightarrow \mathcal{B}(\theta)$

$$\frac{1}{2}(S_n + n) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(X_i+1)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} Y_i \quad \text{or } \forall i \in [\![1,n]\!],\ Y_i \hookrightarrow \mathcal{B}(\theta).$$

Par stabilité par la somme de la loi binomiale de même paramètre :

$\frac{1}{2}(S_n + n) \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \theta)$

10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$ donc S_{n+1} dépend de S_n :

Les variables aléatoires $S_1, \ldots, S_n$ ne sont pas mutuellement indépendantes.

11. $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}} + \overline{S_n}\right)$, $\frac{1}{2}\left(1 + \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}} + \overline{S_n}\right)$ sont deux variables aléatoires fonction des variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ indépendantes et de même loi, et fonction indépendante de θ.

Ce sont donc des estimateurs de θ.

$$\left(\theta-\frac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \text{ (réel au carré) donc } \theta^2-2\times\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}\geq 0$$

$$\text{soit } \frac{1}{4}\geq \theta(1-\theta) \text{ donc } \frac{1}{2}\geq\sqrt{\theta(1-\theta)}$$

(car $t\mapsto\sqrt{t}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$)

Soit $N \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. D'après le théorème limite central :

$$\frac{\overline{S_n}-E(\overline{S_n})}{\sqrt{V(\overline{S_n})}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} N$$

Or par linéarité de l'espérance, $E(\overline{S_n})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)$

Et comme $X_1,\dots,X_n$ sont indépendantes, $V(\overline{S_n})=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}V(X_i)$

Or $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $E(X_i)=\theta-(1-\theta)$
$=2\theta-1$

Et d'après le théorème de transfert, $E(X_i^2)=\theta+(1-\theta)$
$=1$

Donc $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $V(X_i)=1-(2\theta-1)^2$ (d'après la formule de Koenig-Huygens)

$$=1-(4\theta^2-4\theta+1)$$
$$=4\theta(1-\theta) \quad \text{ainsi :}$$

$$\frac{\overline{S_n}-(2\theta-1)}{\sqrt{\frac{n4\theta(1-\theta)}{n^2}}}=\frac{\overline{S_n}-2\theta+1}{2\sqrt{\theta(1-\theta)}}\sqrt{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} N$$

Donc $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $\lim\limits_{n\to+\infty}P\left(-x\leq\frac{\overline{S_n}-2\theta+1}{2\sqrt{\theta(1-\theta)}}\sqrt{n}\leq x\right)=\Phi(x)-\Phi(-x)$

Soit $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $\lim\limits_{n\to+\infty}P\left(-\frac{x}{\sqrt{n}}2\sqrt{\theta(1-\theta)}\leq\overline{S_n}-2\theta+1\leq\frac{x}{\sqrt{n}}2\sqrt{\theta(1-\theta)}\right)=2\Phi(x)-1$

Donc $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $\lim\limits_{n\to+\infty}P\left(-\frac{1}{2}\left(-\overline{S_n}-1+\frac{x}{\sqrt{n}}2\sqrt{\theta(1-\theta)}\right)\leq\theta\leq-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{n}}2\sqrt{\theta(1-\theta)}-\overline{S_n}-1\right)\right)=2\Phi(x)-1$

Code épreuve : 283	Nombre de pages : 20	Session : 2023
Épreuve de : Mathématiques 2 approfondies ESCP BS - HEC		

Or $1 \geqslant 2\sqrt{\theta(1-\theta)}$ donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\left[\frac{1}{2}\left(\bar{S}_n + 1 - \frac{x}{\sqrt{n}} 2\sqrt{\theta(1-\theta)}\right), \frac{1}{2}\left(\bar{S}_n + 1 + \frac{x}{\sqrt{n}} 2\sqrt{\theta(1-\theta)}\right)\right] \supset \left[\frac{1}{2}\left(\bar{S}_n + 1 - \frac{x}{\sqrt{n}}\right), \frac{1}{2}\left(\bar{S}_n + 1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right]$$

Par croissance de la probabilité, et pour $x = t_\alpha \in \mathbb{R}_+^*$:

$$P\left(\frac{1}{2}\left(\bar{S}_n + 1 - \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}}\right) \leqslant \theta \leqslant \frac{1}{2}\left(\bar{S}_n + 1 + \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}}\right)\right) \geqslant P\left(\frac{1}{2}\left(\bar{S}_n + 1 - \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}} 2\sqrt{\theta(1-\theta)}\right) \leqslant \theta \leqslant \frac{1}{2}\left(\bar{S}_n + 1 + \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}} 2\sqrt{\theta(1-\theta)}\right)\right)$$

Donc par passage à la limite :

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(\frac{1}{2}\left(\bar{S}_n - \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}} + 1\right) \leqslant \theta \leqslant \frac{1}{2}\left(\bar{S}_n + 1 + \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}}\right)\right) \geqslant 2\phi(t_\alpha) - 1$$

$$\geqslant 2 - \frac{2\alpha}{2} - 1$$

$$\geqslant 1 - \alpha$$

Donc l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\left(\bar{S}_n - \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}} + 1\right), \frac{1}{2}\left(\bar{S}_n + \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}} + 1\right)\right]$ est un intervalle de confiance asymptotique du paramètre θ au niveau de confiance $1 - \alpha$.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

12. (a) ~~Soit $k \in \mathbb{N}$.~~

S_{2k+1} est une somme de $2k+1$ variables aléatoires valant -1 ou 1. $2k+1$ étant impair, il est impossible que la valeur de ces variables aléatoires se compense (c'est-à-dire qu'on en ait autant qui valent 1 que qui valent -1, car $2k+1$ ne peut pas être divisé en 2 groupes du même nombre de variables aléatoires).

Donc $S_{2k+1} \neq 0$ donc

$$P(S_{2k+1} = 0) = 0$$

(b) Soit $k \in \mathbb{N}$.

$[S_{2k} = 0]$ est réalisé si et seulement si k variables du vecteur $(X_1, \dots, X_{2k})$ valent -1 et les k autres valent 1

soit si et seulement si $\sum_{i=1}^{2k} Y_i = k$

Or d'après 9., $\sum_{i=1}^{2k} Y_i \hookrightarrow \mathcal{B}(2k, \theta)$ donc :

$$P(S_{2k} = 0) = P\left(\sum_{i=1}^{2k} Y_i = k\right)$$

$$= \binom{2k}{k} \theta^k (1-\theta)^{2k-k}$$

Donc : $P(S_{2k}=0) = \binom{2k}{k}\theta^k(1-\theta)^k$

13. Comme $n = \max\{k \in [\![1,n]\!]\}$, alors si $S_{2n}=0$ est réalisé, $n = \max\{k\in[\![1,n]\!],\ S_{2n}=0\}$ et réciproquement, par définition de L_n, si $L_n = n$ alors $S_{2n}=0$ donc :

$[L_n = n] = [S_{2n}=0]$ donc d'après 12.(b) :

$$P(L_n=n) = \binom{2n}{n}\theta^n(1-\theta)^n$$

14. (a) Si $L_n=k$ est réalisé, alors $S_{2k}=0$ et pour tout $i\in[\![2k+1,2n]\!]$, $S_i\neq 0$ (sinon, $\exists l\in[\![2k+1,2n]\!]$, $S_i=0$ donc $L_n \geqslant \lfloor\frac{i}{2}\rfloor \neq k$)

De même, si $S_{2k}=0$ et que $\forall i\in[\![2k+1,2n]\!], S_i\neq 0$ alors $k=\max\{k\in[\![1,n]\!],\ S_{2k}=0\}$ donc $L_n=k$. Ainsi :

$$[L_n=k] = [S_{2k}=0]\cap\left(\bigcap_{i=2k+1}^{2n}[S_i\neq 0]\right) \quad \text{soit}$$

$$[L_n=k] = [S_{2k}=0]\cap[S_{2k+1}\neq 0]\cap\ldots\cap[S_{2n}\neq 0]$$

(b) Si $[S_{2k}=0]$ est réalisé, alors pour que : $\forall i\in[\![2k+1,2n]\!]$, $[S_i\neq 0]$ soit réalisé, il faut et il suffit qu'après X_{2k}, les variables aléatoires $X_{2k+1}, X_{2k+2},\ldots, X_{2n}$ ne se compensent plus entre elles afin que leur somme ne revienne pas à la somme $S_{2k}=0$ et comme

$X_{2k+1},\dots,X_{2n}$ et $X_1,\dots,X_{2(n-k)}$ suivent la même loi, on peut conclure que :

$$P_{[S_{2k}=0]}([S_{2k+1}\neq 0]\cap\dots\cap[S_{2n}\neq 0]) = P([S_1\neq 0]\cap\dots\cap[S_{2(n-k)}\neq 0])$$

15. D'après 12.(b), $\forall k\in\mathbb{N}$, $P(S_{2k}=0)\neq 0$.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $k\in[\![0,n]\!]$, on a alors :

$$P_{[S_{2k}=0]}([S_{2k+1}\neq 0]\cap\dots\cap[S_{2n}\neq 0]) = \frac{P([S_{2k}=0]\cap([S_{2k+1}\neq 0]\cap\dots\cap[S_{2n}\neq 0]))}{P(S_{2k}=0)}$$

(d'après la formule de Bayes)

Donc d'après 14. :

$P(L_n=k) = p_{n-k}P(S_{2k}=0)$, soit d'après 12.(b) :

$$P(L_n=k) = \binom{2k}{k}\theta^k(1-\theta)^k p_{n-k}$$

16. (a) Soit $\omega\in\Omega$, $\forall i\in[\![1,R]\!]$, $X_i(\omega)\in\{-1,1\}$ donc

$\forall j\in[\![1,R]\!]$, $S_j(\omega)$ est une somme d'entiers donc est un entier. De plus, $\forall j\in[\![1,R]\!]$, $S_{j+1}(\omega)=\begin{cases} S_j(\omega)-1 & \text{si } X_{j+1}(\omega)=-1 \\ S_j(\omega)+1 & \text{si } X_{j+1}(\omega)=1\end{cases}$

Donc $\{S_1(\omega),\dots,S_R(\omega)\}$ est un ensemble d'entiers dont la valeur varie de 1 entre chaque élément donc

$\{S_1(\omega),\dots,S_R(\omega)\}$ est un intervalle d'entiers.

Copie anonyme - n°anonymat : 244625

Code épreuve : 283 | Nombre de pages : 20 | Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques 2 approfondies ESCP BS - HEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

Partie III :

21. (a)

```
import numpy.random as rd
def DernierPassage(n):
    L = 0
    S = 0
    for i in range(1, 2*n+1):
        S=S+2*(rd.random()-1); L=i*(S==0)
    return L
```

(b) Au vu de la forme régulière des 10000 réalisations de la variable aléatoire $\frac{L_{100}}{100}$ (toutes les simulations ont une valeur similaire), on peut conjecturer que la suite $\left(\frac{L_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoire converge en loi.

22.(a) Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{n=1}^{N} (u_{n+1} - u_n) = u_{N+1} - u_1 \quad \text{(par télescopage)}$$

$$= \ln\left(\frac{\sqrt{N+1}}{4^{N+1}} \times \frac{(2N+2)!}{(N+1)!\,(2N+2-N-1)!}\right) - \ln\left(\frac{1}{4} \times 2\right)$$

$$= \ln\left(\frac{\sqrt{N+1}\,(2N+2)!}{4^{N+1}((N+1)!)^2}\right) + \ln(2)$$

$$= \ln\left(\frac{(2N+2)!}{4^{N+1}\sqrt{N+1}\,N!\,(N+1)!}\right) + \ln(2)$$

Or $\left(\dfrac{(2N+2)!}{4^{N+1}\sqrt{N+1}\,N!\,(N+1)!}\right)_{N \in \mathbb{N}^*}$ admet une limite finie $l \in \mathbb{R}_+^*$.

(à démontrer) et ln est continue en l donc :

<u>La série $\sum_{n \geq 1} (u_{n+1} - u_n)$ converge.</u>

(b) La série de terme général $\ln(C_{n+1}) - \ln(C_n)$ converge d'après 22.(a)

Donc $\exists \ell \in \mathbb{R}, \lim\limits_{N \to +\infty} \sum\limits_{n=1}^{N} (u_{n+1} - u_n) = \ell$ donc par télescopage:

$$\exists \ell \in \mathbb{R}, \lim_{N \to +\infty} u_{N+1} = \ell - u_1$$

Soit $\exists \ell \in \mathbb{R}, \lim\limits_{N \to +\infty} \ln(C_N) = \ell - u_1$ or exp est continue en $\ell - u_1$ donc:

$\exists \ell \in \mathbb{R}, \lim\limits_{n \to +\infty} C_n = e^{\ell - u_1}$ ainsi:

<u>La suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente</u>

23. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$P\left(\frac{L_n}{n} \leq x\right) = P(L_n \leq nx) \quad \text{or } L_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$$

$$= \sum_{\substack{k=0 \\ k \in [\![0,n]\!]}}^{\lfloor nx \rfloor} P(L_n = k) \quad \text{or } x \in]0,1[\text{ donc } \lfloor nx \rfloor \leq n$$

ainsi:

$$P\left(\frac{L_n}{n} \leq x\right) = \sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} \binom{2k}{k} \theta^k (1-\theta)^k p_{n-k} \quad (\text{d'après 15.})$$

$$= \sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} \binom{2k}{k} \theta^k (1-\theta)^k \frac{1}{4^{n-k}} \binom{2(n-k)}{n-k} \quad (\text{d'après 20.})$$

$$= \frac{1}{4^n} \sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} \binom{2k}{k} (4\theta(1-\theta))^k \binom{2(n-k)}{n-k} \quad \text{et } \theta = \frac{1}{2} \text{ donc:}$$

$$P\left(\frac{L_n}{n} \leq x\right) = \frac{1}{4^n} \sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} \binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k}$$