Copie anonyme - n°anonymat : 244625

N3-00020
244625
Maths S

Code épreuve : 295	Nombre de pages : 22	Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques EMLyon

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 1 :

1. a) $\forall t \in [k, k+1], 0<k \leq t \leq k+1 \Rightarrow \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$ (par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$). Par croissance de l'intégration, comme $k < k+1$ et $t \mapsto \frac{1}{t}$ continue sur $[k, k+1]$:

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{k} \text{ soit :}$$

$$\left[\frac{t}{k+1}\right]_k^{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,dt \leq \left[\frac{t}{k}\right]_k^{k+1} \text{ donc :}$$

$$\boxed{\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,dt \leq \frac{1}{k}}$$

b) En sommant l'inégalité obtenue en 1.a) sur $[\![1, n-1]\!]$, $(n \geq 2)$: $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,dt \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$ et d'après la relation de Chasles :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \int_1^n \frac{1}{t}\,dt \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{n} \text{ soit :}$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$$\boxed{S_n - 1 \leq \int_1^n \frac{1}{t}\,dt \leq S_n - \frac{1}{n}}$$

c) On déduit de l'encadrement obtenu en 1.b) que:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 2,\ \begin{cases} S_n \leq \int_1^n \frac{1}{t}\,dt + 1 \\ S_n \geq \int_1^n \frac{1}{t}\,dt + \frac{1}{n} \end{cases} \quad \text{soit:}$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 2,\ \boxed{\int_1^n \frac{1}{t}\,dt + \frac{1}{n} \leq S_n \leq \int_1^n \frac{1}{t}\,dt + 1}$$

d) On a:

$$\forall n \geq 2,\ \int_1^n \frac{1}{t}\,dt = [\ln(t)]_1^n$$
$$= \ln(n)$$

Or $\ln$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $\forall n \geq 2,\ \ln(n) \geq \ln(2) > 0$

On a alors, d'après 2.c):

$\forall n \geq 2 \quad \ln(n) + \frac{1}{n} \leq S_n \leq \ln(n) + 1$ donc, comme $\ln(n) > 0$:

$\forall n \geq 2 \quad 1 + \frac{1}{n\ln(n)} \leq \frac{S_n}{\ln(n)} \leq 1 + \frac{1}{\ln(n)}$ or:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n\ln(n)} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\ln(n)}$$
$$= 0 \quad \text{(par quotient de limites).}$$

Donc par somme de limites: $\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n\ln(n)}\right) = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{\ln(n)}\right)$

$$= 1$$

2/

D'après le théorème d'encadrement, on a donc :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{S_n}{\ln(n)} = 1 \quad \text{d'où :} \quad \boxed{S_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln(n)}$$

2. a) rang(50) renvoie la fonction rang définie dans ce programme, évaluée en 50. Or cette fonction rang(a) renvoie le plus grand entier n tel que $S_n < a$. Ainsi, la fonction rang(50) renvoie le plus grand entier n tel que $S_n < 50$.

b) Comme $S_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln(n)$ d'après 1.c), alors au voisinage de 50 les fonctions ont un comportement similaire donc $S_n \geq 49$ revient à peu près à dire que $\ln(n) \geq 49$ soit $n \geq e^{49}$ donc lorsqu'on se rapproche de 50 pour la valeur de S_n, la valeur de n devient très grande : l'appel rang(50) renverrait en effet environ 2×10^{21} au vu du résultat de e^{49}.

3. a) $\sum_{k=1}^{n} t^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} t^k$ or $|t| \leq x < 1$ donc

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} t^{k-1} = \frac{1-t^n}{1-t}}$$

b) D'après 3.a), en intégrant l'égalité pour $t \in [0, x]$ ($t \mapsto \frac{1-t^n}{1-t}$ est continue sur $[0,x]$ car $\forall t \in [0,x], 1-t > 0$), il vient :

$$\int_0^x \sum_{k=1}^{n} t^{k-1} dt = \int_0^x \frac{1-t^n}{1-t} dt$$

d'où : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\int_0^x t^{k-1}dt = \int_0^x \frac{1}{1-t}dt - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt$ (par linéarité de l'intégration)

donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{t^k}{k}\right]_0^x = \left[-\ln(1-t)\right]_0^x - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt$ d'où :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt}$$

c) $\forall t \in [0, x]$, on a $0 \leq t \leq x$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq t^n \leq x^n$

Or $t < 1$ donc $1-t > 0$ donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \frac{t^n}{1-t} \leq \frac{x^n}{1-t}$

Par croissance de l'intégration ($0 < x$ et $t \mapsto \frac{t^n}{1-t}$ continue sur $[0, x]$), on a :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle 0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt \leq x^n \int_0^x \frac{1}{1-t}dt$ (par linéarité de l'intégration)

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle 0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt \leq -x^n\ln(1-x)$

Or $|x| < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} x^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -x^n\ln(1-x) = 0$ donc d'après le théorème de l'encadrement : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt = 0}$

d) D'après 3.c), par somme de limites :

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(-\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt\right) = -\ln(1-x)$ soit, d'après 3.b) :

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k} = \ln(1-x)$ donc :

$$\boxed{\text{La série } \sum_{k\geq 1}\frac{x^k}{k} \text{ converge, de somme } \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 244625

Code épreuve : 295	Nombre de pages : 22	Session : 2023
Épreuve de : Mathématiques EMLyon		

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

Exercice 2 :

1. a) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $X_k(\Omega) =]0,1[$ donc

$Z_n(\Omega) =]0,1[$.

Et $\forall x \in]0,1[$, $P(Z_n \leq x) = 1 - P(Z_n > x)$

$= 1 - P\left(\bigcap_{k=1}^{n} [X_k > x]\right)$

$= 1 - \prod_{k=1}^{n} P(X_k > x)$ (car $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes)

$= 1 - \prod_{k=1}^{n} (1-x)$ (car pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $X_k \hookrightarrow \mathcal{U}(]0,1[)$)

Donc $\forall x \in]0,1[$, $P(Z_n \leq x) = 1 - (1-x)^n$ et $Z_n(\Omega) =]0,1[$ donc

la fonction de répartition F_n de Z_n est définie par :

$$\boxed{F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1-(1-x)^n & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}}$$

b) • Z_n est une variable aléatoire admettant une fonction de

répartition F_n et :

• $\lim_{x \to 0^-} F_n(x) = 0$

$= 1 - (1-0)^n$

$= F_n(0)$

$\lim_{x \to 1^+} F_n(x) = 1$

$= 1 - (1-1)^n$

$= F_n(1)$ donc

F_n est continue sur $\mathbb{R}$ et comme $x \mapsto 1-(1-x)^n$ est de classe C^1 sur $[0,1]$ comme fonction polynomiale, F_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 et en 1 donc :

$\boxed{Z_n \text{ est une variable aléatoire à densité}}$

c) Par dérivation de la fonction de répartition F_n de Z_n sur $\mathbb{R}_-^*$, $]0,1[$ et $]1,+\infty[$ et en posant $f_n(0)=n$ et $f_n(1)=0$, on obtient une densité f_n de Z_n définie par :

$$\boxed{f_n(x) = \begin{cases} n(1-x)^{n-1} & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

2. def VarZ(n):

```
def VarZ(n):
    from numpy import min
    from numpy.random import random
    return min(random(n))
```

3. Soit $x \in]0,1]$. $\lim_{n \to +\infty} F_n(x) = \lim_{n \to +\infty} (1-(1-x)^n)$ or $|1-x|<1$ donc

$= 1$ et :

$\forall x \in \mathbb{R}_-, \lim_{n \to +\infty} F_n(x) = 0$

$\forall x \in]1,+\infty[, \lim_{n \to +\infty} F_n(x) = 1$

Soit F la fonction de répartition d'une variable aléatoire Z presque sûrement égale à 0 on a, $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x<0 \\ 1 \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}_-^* \cup]0,1[\cup]1,+\infty[$, $\lim_{n \to +\infty} F_n(x) = F(x)$ donc

$$\boxed{Z_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} Z}$$

4.

c)
```
def VarT(n):
    import numpy.random as rd
    import numpy as np

    x = rd.random(n)
    t = np.min(x) - x[n-1]
    return t
```

5. a) T_{500} semble discrète car la courbe en rectangle semble suivre une courbe plutôt homogène (en escaliers)

b) Oui car on y voit que $P(Z_{500} = X_{500}) = \frac{1}{500}$ à peu près.

Copie anonyme - n°anonymat : 244625

Code épreuve : 295	Nombre de pages : 22	Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques EMLyon

Emplacement QR Code

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Problème :

Préliminaire

1. D'après la propriété admise : $\dim(\mathcal{L}(E,\mathbb{R})) = \dim(E)\dim(\mathbb{R})$

Or $\dim(\mathbb{R}) = 1$ d'où l'égalité :

$$\boxed{\dim(E^*) = \dim(E)}$$

2. a) $\mathrm{Im}(\varphi) = \{\varphi(x),\ x\in E\}$ or $\varphi : E \to \mathbb{R}$ donc :

$\forall x\in E,\ \varphi(x)\in\mathbb{R}$ ainsi $\mathrm{Im}(\varphi) \subset \mathbb{R}$ donc :

$$\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) \leq \dim(\mathbb{R})$$
$$\leq 1$$

$\mathrm{Im}(\varphi)$ est un espace vectoriel de dimension inférieure ou égale à 1 donc

$$\boxed{\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) \in \{0,1\}}$$

b) $\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) \in \{0,1\}$ d'après 2.a), donc :

- Si $\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = 0$, on a $\mathrm{Im}(\varphi) = \{0\}$ soit $\{\varphi(x), x\in E\} = \{0\}$

donc $\forall x \in E, \varphi(x) = 0$ donc :

Dans ce cas, φ est nulle.

- Si $\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = 1$, on a $\mathrm{Im}(\varphi) \subset \mathbb{R}$ et $\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = \dim(\mathbb{R})$

donc $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in E, \varphi(y) = x$ donc :

Dans ce cas, φ est surjective.

$\boxed{\varphi \text{ est donc soit nulle, soit surjective}}$

c) Si $\varphi \neq 0_{E^*}$, alors φ est surjective soit $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}$ d'après 2.b). Or, d'après le théorème du Rang, comme $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$:

$\dim(E) = \dim(\mathrm{Im}(\varphi)) + \dim(\mathrm{Ker}(\varphi))$ et $\dim(\mathbb{R}) = 1$ donc :

$\dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = \dim(E) - 1$ or $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{x \in E, \varphi(x) = 0\}$ donc

$\mathrm{Ker}(\varphi) \subset E$ ainsi :

$\boxed{\mathrm{Ker}(\varphi) \text{ est un hyperplan de } E}$

Partie I :

3. a) • $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$

• $\forall (P,Q) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad g(\lambda P+Q) = \int_0^1 (\lambda P+Q)(t)\,dt$

$$= \lambda \int_0^1 P(t)\,dt + \int_0^1 Q(t)\,dt \text{ (par linéarité de l'intégration)}$$

$$= \lambda g(P) + g(Q)$$

Donc g est linéaire et ainsi : $\boxed{g \in E^*}$

b) Soit $P : x \mapsto 1$, $g(P) = \int_0^1 dt$

$= 1$

$\neq 0$ donc g n'est pas l'application nulle.

D'après 2.c), $\mathrm{Ker}(g)$ est donc un hyperplan de $E = \mathbb{R}_p[x]$.

Or $\dim(\mathbb{R}_p[x]) = p+1$ donc :

$$\boxed{\dim(\mathrm{Ker}(g)) = p}$$

c) Soit $k \in [\![1, p]\!]$.

$$g(Q_k) = \int_0^1 \left(t^k - \frac{1}{k+1}\right) dt$$

$$= \left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 - \frac{1}{k+1} \quad \text{(par linéarité de l'intégration)}$$

$= 0$ donc pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $Q_k \in \mathrm{Ker}(g)$

Or pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $\deg(Q_k) = k$ donc :

La famille $(Q_1, \dots, Q_p)$ est une famille de fonctions polynomiales de degré échelonné donc c'est une famille libre, constituée de $p = \dim(\mathrm{Ker}(g))$ fonctions polynomiales de $\mathrm{Ker}(g)$ donc :

$$\boxed{\text{La famille } (Q_1, \dots, Q_p) \text{ est une base de } \mathrm{Ker}(g)}$$

4. a) • $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$

• $\forall (P, Q) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad f(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q)(0)$

$$= \lambda P(0) + Q(0)$$

$$= \lambda f(P) + f(Q)$$

Donc f est linéaire et ainsi : $\boxed{f \in E^*}$

b) Soit $P \in E$. Alors $\exists (a_0, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^{p+1}, \forall x \in \mathbb{R}, P(x) = \sum_{k=0}^{p} a_k x^k$.

Donc $P \in \mathrm{Ker}(f) \iff f(P) = 0$

$$\iff P(0) = 0$$

$$\iff a_0 = 0$$

$$\iff \exists (a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^p, \forall x \in \mathbb{R}, P(x) = \sum_{k=1}^{p} a_k x^k$$

$$\iff P \in \mathrm{Vect}(x, \dots, x^p)$$

D'où $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(x, \dots, x^p)$

Copie anonyme - n°anonymat : 244625

Code épreuve : 295	Nombre de pages : 22	Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques EMLyon

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

5. a) f et g sont deux éléments non-nuls de E^* donc d'après 2.b), $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(\mathrm{Ker}(g))$
$= 1$

Or $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$ donc : $\boxed{\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(g)}$

b) f est non nulle donc $\exists x_0 \in E,\ f(x_0) \neq 0$

Donc $\boxed{\exists x_0 \in E,\ x_0 \notin \mathrm{Ker}(f)}$

c) $f \in E^*$ est non nul donc d'après 2.c), $\mathrm{Ker}(f)$ est un hyperplan de E or $\mathrm{Vect}(x_0)$ est une droite vectorielle donc $\dim(\mathrm{Vect}(x_0)) = 1$ ainsi :

$$\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Vect}(x_0))$$

Soit $x \in \mathrm{Vect}(x_0) \cap \mathrm{Ker}(f)$, $x \in \mathrm{Vect}(x_0)$ donc $\exists \lambda \in \mathbb{R},\ x = \lambda x_0$

or $x_0 \notin \mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ est un espace vectoriel donc

$\lambda x_0 \in \mathrm{Ker}(f) \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow x = 0_E$ donc $\mathrm{Vect}(x_0) \cap \mathrm{Ker}(f) \subset \{0_E\}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Or $\text{Vect}(x_0)$ et $\text{Ker}(f)$ sont des espaces vectoriels donc :

$\text{Vect}(x_0) \cap \text{Ker}(f) = \{0_E\}$ donc $\text{Vect}(x_0) + \text{Ker}(f) = \text{Vect}(x_0) \oplus \text{Ker}(f)$

Et $x_0 \in E$ donc $\text{Vect}(x_0) \subset E$ et $\text{Ker}(f) \subset E$ ainsi :

$\boxed{E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Vect}(x_0)}$

d) Soit $x \in E$. D'après 5.c), $\exists! (x_1, x_2) \in \text{Ker}(f) \times \text{Vect}(x_0)$,

$x = x_1 + x_2$ donc

$h(x) = g(x_0) f(x_1 + x_2) - f(x_0) g(x_1 + x_2)$

or f et g sont linéaires donc :

$h(x) = g(x_0) f(x_1) + g(x_0) f(x_2) - f(x_0) g(x_1) - f(x_0) g(x_2)$

Or $x_1 \in \text{Ker}(f) = \text{Ker}(g)$ (d'après 5.a)) et $x_2 \in \text{Vect}(x_0)$ donc

$\exists \lambda \in \mathbb{R}, x_2 = \lambda x_0$ et ainsi, comme f et g sont linéaires :

$h(x) = \lambda g(x_0) f(x_0) - \lambda f(x_0) g(x_0)$ d'où :

$h(x) = 0$. Ceci étant valable pour tout $x \in E$:

$\boxed{h = 0_{E^*}}$

e) On peut en conclure la relation $g = \frac{g(x_0)}{f(x_0)} f$ (car $f(x_0) \neq 0$),

autrement dit $\boxed{\exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad g = \lambda f}$

Partie II :

6. a) $\dim(H) = \dim(E) - 1$ et $H \subset E$ (car H est un hyperplan de E)

donc d'après le théorème de la base incomplète, on peut

compléter une base $(e_1, \dots, e_{n-1})$ de H (qui est une famille libre,

composée de vecteurs de E car $H \subset E$) en une base $(e_1, \dots, e_n)$

de E, ainsi :

Il existe un vecteur e_n dans E tel que $\beta = (e_1, \dots, e_n)$ soit une base de E

b) φ est défini sur la base β de E donc φ est défini sur E car c'est une application linéaire donc φ est bien définie sur E et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$\varphi \in E^*$ et $\varphi \neq 0_{E^*}$ (car $\varphi(e_n) = 1$) donc d'après 2.c),

$\mathrm{Ker}(\varphi)$ est un hyperplan de E donc $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = \dim(H)$.

Soit $x \in H$, $(e_1, \dots, e_{n-1})$ est une base de H donc :

$\exists (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $x = \sum_{i=1}^{n-1} x_i e_i$ donc $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n-1} x_i \varphi(e_i)$

(car φ est linéaire) or $\forall i \in [\![1, n-1]\!]$, $\varphi(e_i) = 0$ donc $\varphi(x) = 0$

Donc $x \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ ainsi $H \subset \mathrm{Ker}(\varphi)$ donc :

$\boxed{H = \mathrm{Ker}(\varphi)}$

7. Soit $x \in E$.

$x \in \mathrm{Ker}(f) \iff f(x) = 0_{\mathbb{R}^p}$

$\iff (f_1(x), \dots, f_p(x)) = (0, \dots, 0)$

$\iff \forall i \in [\![1, p]\!], \ f_i(x) = 0$

$\iff x \in \bigcap_{i=1}^{p} \mathrm{Ker}(f_i)$

Donc : $\boxed{\mathrm{Ker}(f) = \bigcap_{i=1}^{p} \mathrm{Ker}(f_i)}$

8. a) f est surjective donc : $\forall x \in \mathbb{R}^p, \exists y \in E, \ f(y) = x$

En particulier, pour $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}^p$, $\exists x \in E$, $f(x) = \varepsilon_1$

$\boxed{\text{Donc } \varepsilon_1 \text{ admet un antécédent } x \text{ par } f}$

b) Soit $(a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^p$, $\sum_{k=1}^{p} a_k f_k = 0_{E^*}$.

Soit $i \in [\![1, p]\!]$. f est surjective donc d'après 8.a), ε_i admet un antécédent par f, autrement dit : $\exists x \in E$, $f(x) = \varepsilon_i$ or ε_i est le vecteur de $\mathbb{R}^p$ dont tous les coefficients sont nuls sauf le $i^{\text{ème}}$ qui vaut 1 ainsi : $\sum_{k=1}^{p} a_k f_k(x) = a_i$ donc $a_i = 0$.

Ceci étant valable pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, on a $a_1 = \dots = a_p = 0$ donc :

$\boxed{\text{La famille } (f_1, \dots, f_p) \text{ est libre dans } E^*}$

Copie anonyme - n°anonymat : 244625

Code épreuve : 295 | Nombre de pages : 22 | Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques EMLyon

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

9. a) $Im(f) \subset \mathbb{R}^p$ or f n'est pas surjective donc $Im(f) \neq \mathbb{R}^p$.

Ainsi, $\dim(Im(f)) < \dim(\mathbb{R}^p)$ soit : $\boxed{m < p}$

b) $Im(f) \subset \mathbb{R}^p$ donc la base $(e_1, \dots, e_m)$ de $Im(f)$ est une famille libre de vecteurs de $\mathbb{R}^p$ qui peut être complétée en une base $(e_1, \dots, e_m, \dots, e_p)$ de $\mathbb{R}^p$.

Soit $H = Vect(e_1, \dots, e_{p-1})$, H est un hyperplan de $\mathbb{R}^p$ (car $\dim(H) = p-1 = \dim(\mathbb{R}^p) - 1$ et $H \subset \mathbb{R}^p$), et

$Im(f) = Vect(e_1, \dots, e_m)$

$\subset Vect(e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots e_{p-1})$ donc $\boxed{Im(f) \subset H.}$

c)

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

10. a) D'après 9. c) :

f n'est pas surjective $\Rightarrow$ $(f_1, \dots, f_p)$ est liée dans E^*

Donc par contraposée :

$\boxed{(f_1, \dots, f_p) \text{ est libre dans } E^* \Rightarrow f \text{ est surjective}}$

b)

Partie III :

11. a) $\langle .,. \rangle : E^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ en tant que produit scalaire donc :

$f_a : E \longrightarrow \mathbb{R}$

Soit $(x,y) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$f_a(\lambda x + y) = \langle a, \lambda x + y \rangle$

$= \lambda \langle a, x \rangle + \langle a, y \rangle$ (par bilinéarité de $\langle .,. \rangle$)

$= \lambda f_a(x) + f_a(y)$ donc f_a est linéaire.

$\boxed{\text{Donc } f_a \in E^*}$

b) Soit $x \in E$,

$x \in \mathrm{Ker}(f_a) \iff \langle a, x \rangle = 0$

$\iff x \in (\mathrm{Vect}(a))^\perp$

Donc $\boxed{\mathrm{Ker}(f_a) = (\mathrm{Vect}(a))^\perp}$

c) Si f_a est l'application nulle alors pour tout $x \in E$, $f_a(x) = 0$ en particulier pour $a \in E$, $f_a(a) = 0$

Soit $\|a\|^2 = 0$ donc $\|a\| = 0$

donc $\boxed{a = 0_E}$

12. a) Soit $(a,b)\in E^2$ et $\lambda\in\mathbb{R}$.

$\forall x\in E$, $[\phi(\lambda a+b)](x) = f_{\lambda a+b}(x)$

$= \langle \lambda a+b, x\rangle$

$= \lambda\langle a, x\rangle + \langle b, x\rangle$ (par bilinéarité de $\langle .,.\rangle$)

$= \lambda f_a(x) + f_b(x)$

$= \lambda[\phi(a)](x) + [\phi(b)](x)$ donc :

$\phi(\lambda a+b) = \lambda\phi(a)+\phi(b)$ donc $\boxed{\phi \text{ est linéaire}}$

b) Soit $x\in \mathrm{Ker}(\phi)$, alors $\phi(x)=0_{E^*}$ donc $f_x = 0_{E^*}$ donc $x=0_E$ (d'après 11.c)) donc $\mathrm{Ker}(\phi)\subset\{0_E\}$ et $\mathrm{Ker}(\phi)$ est un espace vectoriel.

Donc $\mathrm{Ker}(\phi)=\{0_E\}$ donc ϕ est injective or $\phi\in\mathcal{L}(E,E^*)$ mais E et E^* sont de même dimension finie n d'après 1., donc ϕ est bijective.

$\boxed{\text{Donc } \phi \text{ est un isomorphisme de } E \text{ sur } E^*}$

c) ϕ est bijective (d'après 12.b)) donc par définition :

$\forall \varphi\in E^*$, $\exists!\, a\in E$, $\phi(a)=\varphi$, autrement dit :

$$\boxed{\forall \varphi\in E^*,\ \exists!\, a\in E,\ \forall x\in E,\ \varphi(x) = \langle a, x\rangle}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 244625

Emplacement QR Code	Code épreuve : 295	Nombre de pages : 22	Session : 2023
	Épreuve de : Mathématiques EMLyon		

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

13. a) • $\langle .,. \rangle : (\mathcal{M}_p(\mathbb{R}))^2 \to \mathbb{R}$ (car la trace est un réel)

Soit $(A,B,C) \in (\mathcal{M}_p(\mathbb{R}))^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, notons $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq p}$

• $\langle A, B \rangle = tr({}^tAB)$

$= tr({}^t({}^tAB))$ (une matrice et sa transposée ont même coefficients diagonaux donc même trace)

$= tr({}^tBA)$

$= \langle B, A \rangle$ donc $\langle .,. \rangle$ est symétrique.

• $\langle A, \lambda B + C \rangle = tr({}^tA(\lambda B + C))$

$= \lambda\, tr({}^tAB) + tr({}^tAC)$ (par linéarité de la trace)

$= \lambda \langle A, B \rangle + \langle A, C \rangle$ or $\langle .,. \rangle$ est symétrique, donc $\langle .,. \rangle$ est bilinéaire

• $\langle A, A \rangle = tr({}^tAA)$ or ${}^tAA = \left(\sum_{k=1}^{p} a_{k,i}\, a_{k,j}\right)_{1 \leq i,j \leq p}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Donc $tr({}^tAA) = \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{p} a_{k,i}^2 \right)$

or $\forall (k,i) \in [\![1,p]\!]^2$, $a_{k,i}^2 \geq 0$ (~~réel~~ au carré)

Donc en sommant deux fois, il vient $tr({}^tAA) \geq 0$

Soit $\langle A, A \rangle \geq 0$

- $\langle A, A \rangle = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{p} a_{k,i}^2 = 0$ or $\forall (k,i) \in [\![1,p]\!]^2$, $a_{k,i}^2 \geq 0$ donc $\forall (k,i) \in [\![1,p]\!]^2$, $a_{k,i} = 0$ donc

$A = 0_{\mathcal{M}_p(\mathbb{R})}$

$\boxed{\text{Par tous ces points, } \langle .,. \rangle \text{ est un produit scalaire sur } \mathcal{M}_p(\mathbb{R})}$

b) D'après 12.c), $\forall \varphi \in E^*, \exists a \in E, \forall x \in E, \varphi(x) = \langle a, x \rangle$

En choisissant $E = \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, alors on a :

Si $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_p(\mathbb{R}), \mathbb{R})$, $\exists A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, $\forall M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, $\varphi(M) = \langle A, {}^tM \rangle$

(car ${}^tM \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$) et comme une matrice et sa transposée ont même trace :

$\boxed{\text{Si } \varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_p(\mathbb{R}), \mathbb{R}), \exists A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}), \forall M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}), \varphi(M) = tr(AM)}$