

### Exercice 1

Montrer que dans un graphe non orienté la somme des degrés des sommets est un nombre pair. En déduire que tout graphe a un nombre pair de sommets de degré impair.

### Exercice 2

Un graphe simple non orienté  $G$  a 15 arêtes, 3 sommets de degré 4, les autres étant de degré 3. Quel est le nombre de sommets du graphe  $G$  ?

### Exercice 3

Montrer que tout graphe simple ayant  $n \geq 2$  sommets possède au moins deux sommets de même degré.

### Exercice 4

1. Montrer que si  $G$  est un graphe connexe ayant  $n$  sommets et  $m = n - 1 > 0$  arêtes, alors  $G$  possède au moins un sommet de degré 1.
2. Soit  $G$  un graphe non orienté connexe et sans cycle ayant au moins deux sommets. Montrer que  $G$  possède au moins deux sommets de degré 1.
3. On définit un *arbre* comme étant un graphe non orienté connexe sans cycle. Soit  $G$  un graphe ayant  $n$  sommets avec  $n \geq 2$ . Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
  - (a)  $G$  est un arbre.
  - (b)  $G$  est sans cycle et admet  $m$  arêtes avec  $m = n - 1$ .
  - (c)  $G$  est connexe et admet  $m$  arêtes avec  $m = n - 1$ .
  - (d)  $G$  est sans cycle, et en ajoutant une arête on obtient un graphe ayant un cycle (et un seul).
  - (e)  $G$  est connexe, et si on supprime une arête quelconque le graphe obtenu n'est plus connexe.
  - (f) Tout couple de sommets est relié par une chaîne élémentaire et une seule.

### Exercice 5

Dans un graphe connexe un isthme est une arête dont la suppression augmente le nombre de composantes connexes. Montrer qu'un graphe dont tous les sommets sont de degré pair ne possède pas d'isthme.

### Exercice 6

Montrer que si  $G$  est connexe et  $m = n$  alors  $G$  possède un unique cycle.

**Exercice 7**

Montrer que si dans un graphe complet ayant au moins six sommets les arêtes sont coloriées en deux couleurs (bleu et rouge) alors il existe forcément un triangle monochromatique.

Pour travailler un peu entre deux séances de TD ...

**Exercice 8**

Est-il possible qu'un groupe de 9 personnes soit tel que chacun soit l'ami de 5 personnes exactement du groupe ?

**Exercice 9**

Dessiner le graphe défini par la matrice d'adjacence :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

# Solutions (sketch) pour le chargé de TD

**Exercice 1** Ne pas utiliser la formule du cours : somme des degrés = 2 fois le nombre d’arêtes, sinon l’exercice n’a pas d’intérêt. Il faut faire (et leur faire faire) une récurrence sur le nombre  $m$  d’arêtes.

Si  $m = 0$ , tous les degrés sont nuls, donc la somme est bien paire. Supposons que cela est vrai pour tout graphe ayant au plus  $m$  arêtes. On va montrer que la propriété est vraie pour  $m + 1$  arête. Soit  $G$  un graphe avec  $m + 1 \geq 1$  arête. Soit  $G' = G \setminus e$  le graphe obtenu en enlevant  $e$  de  $G$ . Soit  $x, y$  les extrémités de  $e$ . Les sommets de  $G$  ont le même degré que dans  $G'$  sauf  $x$  et  $y$  qui ont chacun un degré de plus. Donc,

$$\sum_{v \in X(G)} \deg(v) = \sum_{v \in X(G')} \deg(v) + 2$$

ce qui est pair d’après l’hypothèse de récurrence,  $G'$  a seulement  $m$  arêtes.

**Exercice 2** Soit  $x$  le nombre de sommets de degré 3 dans  $G$ . D’après la formule du cours on a :

$$\sum_{v \in X(G)} \deg(v) = 2 \times 15 = 30 = 3 \times 4 + x \times 3 .$$

Donc,  $x = 6$  et  $G$  possède 9 sommets.

**Exercice 3** Par l’absurde. Supposons que tous les sommets de  $G$  ont des degrés différents. Soit  $x$  le sommet de degré maximum de  $G$ . On a  $\deg(x) = n - 1 > 0$ , sinon il y aurait des arêtes multiples ou bien une contradiction sur l’hypothèse des degrés différents. Soit  $y$  le sommet de degré minimum. On a  $\deg(y) = 0$  sinon les degrés des sommets ne seraient pas tous différents. Si  $x$  et  $y$  sont voisins, alors il y a une contradiction avec le fait que  $\deg(y) = 0$ . Si  $x$  et  $y$  ne sont pas voisins, alors il y a une contradiction avec  $\deg(x) = n - 1$  : pour être de degré  $n - 1$ ,  $x$  doit être connecté à tous les  $n - 1$  autres sommets. Dans tous les cas il y a contradiction.

**Exercice 4** 1. Par l’absurde. Supposons que tous les sommets de  $G$  sont de degré  $\neq 1$ .  $G$  n’a pas de sommets de degré 0, puisque  $G$  est connexe et possède au moins une arête. Donc, pour tout sommet  $v$ ,  $\deg(v) \geq 2$ . La somme des degrés fait  $2m \geq 2n$ , donc  $m \geq n$  : contradiction,  $m = n - 1 < n$ .

2. Par l’absurde. On considère une chaîne de longueur maximale et d’extrémités  $s$  et  $t$ . Il existe un sommet  $x$  de la chaîne tel que l’arête  $(s, x)$  existe. Il n’existe pas d’arête  $(s, y)$  pour un autre sommet de la chaîne car sinon on aurait un cycle. Il n’existe pas non plus d’arête  $(s, z)$  pour un sommet  $z$  hors de la chaîne car sinon la longueur de la chaîne ne serait pas maximale.

Autre preuve. (La preuve revient à construire une chaîne maximale sans le dire). Supposons que qu’il y a au plus un sommet de degré 1 dans  $G$ . On considère alors le processus suivant :

1. Soit  $C := \{x\}$ , où  $x$  est le sommet de degré minimum de  $G$
2. Tantque  $x$  possède un voisin  $y \notin C$  faire :
  - 2.1.  $C := C \cup \{y\}$
  - 2.2.  $x := y$

On remarque que le processus suivant s’arrête après au plus  $n$  étapes. Montrons que l’ensemble de sommets  $C$  induit un cycle dans  $G$ . Soit  $x$  le sommet sur lequel le test “tantque” échoue. On a alors que  $x$  ne possède pas de voisin  $y \notin C$ . Notons que  $x$  ne peut être le sommet d’origine, disons  $x_0$ , qui est de degré minimum. En effet  $\deg(x_0) \neq 0$  car  $G$  est connexe et possède au

moins deux sommets. De plus,  $\deg(x) = 1$  est impossible car s'il avait un sommet de degré 1 (et on a supposé qu'il y en avait un seul au plus) on l'aurait choisi pour  $x_0$ . Donc  $\deg(x) \geq 2$ . Donc  $x$  possède un voisin qui est donc dans  $C$ . Ceci forme un cycle : contradiction.

3. Solution des équivalences :

- (a)  $\rightarrow$  (b) :  $G$  étant un arbre, il est sans cycle. On montre ensuite par récurrence sur  $n$  que si  $G$  est un arbre ayant  $n$  sommets alors  $G$  a  $n - 1$  arêtes :
  - vrai pour  $n = 2$ .
  - hyp. réc. : supposons la propriété vraie pour les arbres ayant  $k$  sommets,  $1 \leq k < N$  et considérons un arbre à  $N$  sommets : en 4.2 nous avons montré qu'il a deux sommets de degré 1. Soit  $s$  l'un de ces deux sommets : si on enlève  $s$  le graphe partiel restant est encore un arbre ayant  $N - 1$  sommets : il satisfait donc l'hyp. réc. et possède donc  $N - 2$  arêtes. En rajoutant  $s$  et l'unique arête incidente à  $s$  on a bien  $N$  sommets et  $N - 1$  arêtes.
- (b)  $\rightarrow$  (c) :  $G$  est sans cycle et supposons que  $G$  possède  $k$  composantes connexes  $C_1, C_2, \dots, C_i, \dots, C_k$ . Chaque composante connexe est donc sans cycle et connexe, ce qui correspond à la définition d'un arbre. Chaque composante connexe est un arbre et vérifie  $m_i = n_i - 1$  (on l'a déjà prouvé (a)  $\rightarrow$  (b)), d'où  $m = n - k$ ; alors si  $m = n - 1$  nécessairement  $k = 1$  et  $G$  est connexe.
- (c)  $\rightarrow$  (d) : Pour  $m = n - 1 > 0$ , on a prouvé en 4.1 que  $G$  possède au moins un sommet de degré 1. On montre par récurrence sur  $n$  que  $G$  est sans cycle et qu'en ajoutant une arête on crée un unique cycle.
  - vrai pour  $n = 2$  : il y a une seule arête et en la doublant on crée un unique cycle. Sinon on crée une boucle.
  - hyp. réc. : supposons la propriété vraie pour les graphes connexes ayant  $k$  sommets (et donc  $k - 1$  arêtes),  $1 \leq k < N$  et considérons un arbre à  $N$  sommets : soit  $x$  un sommet de degré 1, si on supprime  $x$  le graphe partiel restant est encore connexe et a  $N - 1$  sommets : il satisfait donc l'hyp. réc. et est sans cycle et tel que en ajoutant une arête on crée un unique cycle. En rajoutant  $x$  et l'unique arête incidente à  $x$  on ne crée pas de cycles. Si maintenant on ajoute une nouvelle arête incidente à  $x$  et  $y$  est son autre extrémité, puisque il existait déjà une chaîne de  $y$  à  $x$ , on a créé un cycle qui est unique puisque le graphe obtenu en supprimant  $x$  était sans cycles. Et si l'arête ajoutée n'est pas incidente à  $x$ , la conclusion est vraie dans le graphe de  $N$  sommets parce qu'elle l'était dans le graphe de  $N - 1$  sommets.
- (d)  $\rightarrow$  (e) : si  $G$  n'était pas connexe on pourrait rajouter une arête sans créer de cycles. Si en lui retirant une arête on obtient encore un graphe connexe les deux sommets extrémités de cette arête seraient reliés par deux chaînes et donc il y aurait un cycle.
- (e)  $\rightarrow$  (f) :  $G$  est connexe, donc tout couple de sommets est relié par une chaîne. Si en supprimant une arête quelconque le graphe obtenu n'est plus connexe, il y a une unique chaîne entre tout couple de sommets.
- (f)  $\rightarrow$  (a) : Tout couple de sommets est relié par une chaîne, donc  $G$  connexe. Cette chaîne est unique alors si l'on suppose que  $G$  admet un cycle on arrive à une contradiction parce que tout couple de sommets du cycle serait relié par deux chaînes.

**Exercice 5** Supposons qu'il existe un graphe dont tous les sommets sont de degré pair et possédant un isthme. En supprimant l'isthme on obtient deux composantes connexes. Maintenant dans chacune des deux la somme des degrés est impaire : absurde.

**Exercice 6** Supposons que toutes les arêtes de  $G$  soient des isthmes (une arête est un isthme si sa suppression augmente le nombre de composantes connexes du graphe) :  $G$  satisferait les hypothèses de 4.3(e) et donc serait un arbre : impossible si  $m = n$ . Il existe donc dans  $G$  une

arête qui n'est pas un isthme : si on la supprime le graphe partiel obtenu satisfait 4.3(c) ( $G$  est connexe et admet  $n - 1$  arêtes) : si on rajoute l'arête supprimée on obtient un graphe ayant un cycle et un seul puisque (c)  $\rightarrow$  (d).

**Exercice 7** D'abord on peut vérifier que pour  $K_i$  avec  $i < 6$  on n'a pas de triangle monochromatique (pour  $K_5$  : si on décompose les arêtes en deux cycles de longueur 5, l'un R et l'autre B : il n'y a pas de triangle monochromatique). Considérons  $K_6$  et soit  $s$  l'un de ses sommets. Il y a 5 arêtes incidentes à  $s$  : il y aura au moins 3 arêtes colorées de la même couleur, disons R. Soient  $t$ ,  $u$  et  $v$  les trois extrémités de ces 3 arêtes de couleur R. Le graphe étant complet, il existe l'arête  $(t, u)$ , l'arête  $(t, v)$  et l'arête  $(u, v)$ . Si on colorie  $(t, u)$  ou  $(t, v)$  en R, on a un triangle de couleur R. Si on colorie  $(t, u)$  et  $(t, v)$  en B : si l'arête  $(u, v)$  est de couleur R, on aura un triangle R de sommets  $s$ ,  $u$  et  $v$  ; si l'arête  $(u, v)$  est de couleur B, on aura un triangle B de sommets  $t$ ,  $u$  et  $v$ .

**Exercice 8** Impossible, car on aurait à faire à un graphe non orienté (l'amitié étant une relation symétrique) ayant 9 sommets chacun de degré 5 : la somme des degrés serait donc un nombre impair.