Université Bordeaux
Licence, module Compilation, 2017/2018

Initiation aux grammaires (1)

Langages algébriques

Exercice 1.1

Pour chaque langage L_i, sur l'alphabet terminal $\{a, b, c, d\}$, construire une grammaire algébrique qui engendre le langage L_i :

$$\begin{aligned}
L_1 &:= \{(ab)^n \mid n \geq 0\} \\
L_2 &:= \{(ab)^n c^n \mid n \geq 0\} \\
L_3 &:= \{(ab)^n c^m \mid n \geq m \geq 0\} \\
L_4 &:= \{(ab)^p c^q d^r \mid q \geq 0, r \geq 0, p = q + r\} \\
L_5 &:= \{(ab)^p c^q d^r \mid q \geq 0, r \geq 0, p \geq q + r\}
\end{aligned}$$

Exercice 1.2

1- Donner une grammaire algébrique qui engendre le langage

$$L_1 := \{a^p b^q \mid p > q \geq 0\}$$

2- Donner une grammaire algébrique *non-ambiguë* qui engendre L_1.
3- Donner une grammaire algébrique *non-ambiguë* qui engendre

$$L_2 := \{a^p b^q \mid 0 \leq p < q\}$$

4- Donner une grammaire algébrique qui engendre le langage

$$L_3 := \{a^p b^q \mid p \geq 0, q \geq 0, p \neq q\}$$

5- Donner une grammaire algébrique *non-ambiguë* qui engendre L_3.

Exercice 1.3

Donner une grammaire algébrique *non-ambiguë* qui engendre le langage

$$\{(ab)^p c^q d^r \mid q \geq 0, r \geq 0, p \geq q + r\}$$

Exercice 1.4

On considère la grammaire algébrique $G := (A, N, R)$ où $A = \{a, b\}$, $N = \{S, T_1, T_2\}$ et R consiste en les règles suivantes :
r1 : $S \to T_1$
r2 : $S \to T_2$
r3 : $T_1 \to aT_1$
r4 : $T_1 \to aT_1b$
r5 : $T_1 \to a$
r6 : $T_2 \to T_2b$
r7 : $T_2 \to aT_2b$

r8 : $T_2 \to b$
L axiome de G est le symbole S.
1- Lequel des ensembles suivants est exactement égal à $\mathrm{L}(G, T_1)$?

$$\{a^p b^q \mid p \geq q \geq 1\}, \quad \{a^p b^q \mid p > q \geq 1\}, \quad \{a^p b^q \mid p \geq q \geq 0\}, \quad \{a^p b^q \mid p > q \geq 0\},$$

2- Décrire le langage $\mathrm{L}(G, T_2)$ par une expression analogue aux expressions données à la question 1.
3- Décrire le langage $\mathrm{L}(G, S)$ par une expression analogue aux expressions données à la question 1.
4- La grammaire G est-elle ambiguë ?
Indication : considérer le mot *aaab*.
5- Quel est l'ensemble des mots qui ont exactement un arbre de dérivation de racine S dans la grammaire G ?
6- Construire une grammaire non-ambiguë G', d'axiome S', telle que $\mathrm{L}(G, S) = \mathrm{L}(G', S')$.

Exercice 1.5

On considère la grammaire algébrique $G := (A, N, R)$ où $A = \{a, b, c\}$, $N = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5\}$ et R consiste en les 12 règles suivantes :

$$\begin{array}{rcc} S_1 \to aS_1S_1 & S_1 \to bS_3S_1 & S_1 \to S_2c \\ S_2 \to S_2S_1 & S_2 \to aS_3 & S_2 \to S_1S_2S_1 \\ S_3 \to a & S_3 \to S_1S_3 & S_4 \to cS_4 \\ S_4 \to aS_4S_5 & S_5 \to aS_5 & S_5 \to aS_4a \end{array}$$

L' axiome de G est S_1.
1- Quels sont les non-terminaux *productifs* de G ?
2- Quels sont les non-terminaux *productifs et accessibles* de G ?
3- Transformer la grammaire G en une grammaire équivalente G' dont tout non-terminal est productif et accessible.
4- Le langage $\mathrm{L}(G, S_1)$ est-il vide ?
5- Le langage $\mathrm{L}(G, S_1)$ est-il infini ?

Exercice 1.6 [/4] On considère les deux grammaire algébriques suivantes $G_1 := (A, N_1, R_1), G_2 := (A, N_2, R_2)$ où $A = \{a, b, c\}$, $N_1 = \{S, T\}, N_2 = \{U\}$ et R_1 est l' ensemble des règles :
r1 : $S \to aSbT$
r2 : $S \to cT$
r3 : $T \to aTTb$
r4 : $T \to c$
R_2 est l' ensemble des règles :
r4 : $U \to UUb$
r5 : $U \to a$
1- Construire une grammaire algébrique qui engendre le langage $\mathrm{L}(G_1, S) \cdot \mathrm{L}(G_2, U)$.
2- Construire une grammaire algébrique qui engendre le langage $\mathrm{L}(G_1, S) \cup \mathrm{L}(G_2, U)$.
3- Construire une grammaire algébrique qui engendre le langage $\mathrm{L}(G_1, S)^*$.
4- Soit $\varphi : \{a, b, c\}^* \to \{x, y\}^*$ l' homomorphisme défini par :

$$\varphi(a) = xy, \;\; \varphi(b) = yx, \;\; \varphi(c) = y$$

Cela signifie que, pour tout mot $w = a_1 \cdots a_i \cdots a_n$, dont les lettres $a_1, \dots a_i \dots, a_n$ appartiennentà $\{a, b, c\}^*$:

$$\varphi(w) = \varphi(a_1) \cdots \varphi(a_i) \cdots \varphi(a_n)$$

et $\varphi(\varepsilon) = \varepsilon$. Par exemple :

$$\varphi(ab) = xyyx, \;\; \varphi(baa) = yxxyxy, \;\; \varphi(cba) = yyxxy.$$

Construire une grammaire algébrique H_1 qui engendre $\varphi(\mathrm{L}(G_1, S))$ et une grammaire algébrique H_2 qui engendre $\varphi(\mathrm{L}(G_2, U))$.