Examen

durée 1h30

Une feuille A4 recto-verso est autorisée comme unique document.
Les réponses aux exercices doivent être **justifiées**.

Exercice 1

Soit l'automate (A, Q, I, F, δ) où $A = \{a, b\}$, $Q = \{1, 2, 3\}$, $I = F = \{1\}$ et
$\delta = \{(1, a, 1), (1, a, 3), (1, b, 3), (3, b, 1), (3, a, 2), (3, b, 2), (2, a, 2), (2, b, 2), (1, a, 2), (2, a, 1), (2, b, 1)\}$.

1. Représenter cet automate sous la forme d'un graphe orienté étiqueté.
2. L'automate est-il déterministe ? Si il ne l'est pas, déterminisez-le.
3. Minimiser l'automate.
4. Calculer une expression rationnelle représentant le langage reconnu par cet automate.

Exercice 2

Donner une grammaire algébrique pour chacun des langages suivants:

1. $L_1 = \{a^n b^m \mid \ n \geq m \geq 0\}$
2. $L_2 = \{a^n b^m c^k \mid \ n \geq m \geq 0 \ \text{ et } \ k > 1\}$
3. $L_3 = \{a^{n_1} b^{m_1} a^{n_2} b^{m_2} \dots a^{n_k} b^{m_k} c^k \mid \ k > 1 \ \text{ et } \ \forall i \in \{1, \dots, k\} : n_i \geq m_i \geq 0\}$

Montrer que le langage L_1 ci-dessus n'est pas régulier.

Exercice 3

On considère deux alphabets $A = \{a, b\}$ et $C = \{c, d\}$. On considère la fonction $h : A \to C$ suivante:

$$\begin{array}{rccl} h: & A & \to & C \\ & a & \mapsto & cd \\ & b & \mapsto & ddc \end{array}$$

La fonction h s'étend à une fonction $h : A^* \to C^*$ en mettant $h(a_1 \cdots a_n) = h(a_1) \cdots h(a_n)$ (par exemple $h(abba) = h(a)h(b)h(b)h(a) = cdddcddccd$).

1. On considère un langage régulier $L \subseteq A^*$ et son image $h(L) \subseteq C^*$:

   $$h(L) = \{h(w) \mid w \in \cancel{A^*}\}$$
   L

   Montrer que $h(L)$ est régulier.

2. On considère maintenant un langage régulier $K \subseteq C^*$ et son image inverse $h^{-1}(K) \subseteq A^*$:

$$h^{-1}(K) = \{w \in A^* \mid h(w) \in K\}.$$

Montrer que $h^{-1}(K)$ est régulier.
Indication : construisez un automate pour $h^{-1}(K)$ à partir d'un automate pour K.

Exercice 4

On fixe un nombre entier quelconque $n \geq 1$ et on utilise un alphabet de n lettres $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Pour tout mot $w \in A^*$, on notera **alph**(w) l'ensemble des lettres contenues dans w (par exemple $\mathbf{alph}(a_2a_2a_4a_2a_5) = \{a_2, a_4, a_5\}$). On considère le langage suivant:

$$L = \{w \in A^* \mid \mathbf{alph}(w) = A\}$$

Autrement dit L est le langage des mots qui contiennent toutes les lettres de l'alphabet A. Le *but de l'exercice* est de montrer qu'un automate (déterministe ou non) qui reconnaît L a au moins 2^n états alors qu'il suffit de n états pour reconnaître le complément de L. On commence par le complément de L.

1. Soit $1 \leq i \leq n$ fixe. Construisez un automate (déterministe) pour le langage

$$L_i = \{w \in A^* \mid \mathrm{alph}(w) \subseteq A \setminus \{a_i\}\}$$

2. Construisez un automate non-déterministe à n états qui reconnaît le langage $\cup_{i=1}^{n} L_i$ (le complément de L).

   On veut maintenant montrer qu'un automate (non-déterministe) qui reconnaît L a au moins 2^n états. On prend donc un automate $\mathcal{A} = (Q, I, F, \delta)$ qui reconnaît L (Q est l'ensemble des états, I les états initiaux, F les états finaux et $\delta \subseteq Q \times A \times Q$ les transitions). Notre objectif est de prouver que Q contient plus de 2^n états ($|Q| \geq 2^n$).

   (a) On considère un mot quelconque $w \in A^*$. Montrer qu'il existe un état $q_w \in Q$ qui satisfait les propriétés suivantes:

      i. Il existe un calcul dans $\mathcal{A}$ pour le mot w qui arrive dans l'état q_w.

      ii. Pour tout mot $v \in A^*$ pour lequel il existe un calcul dans $\mathcal{A}$ qui arrive dans l'état q_w, on a $\mathbf{alph}(v) = \mathbf{alph}(w)$ (v a le même ensemble de lettres que w).

Indication : C'est ici qu'il faut utiliser le fait que l'automate $\mathcal{A}$ reconnaît L. On pourra réfléchir à ce qu'il faut ajouter à w pour obtenir un mot de L.

4. Montrer que pour tous mots $w, w' \in A^*$, si $\mathbf{alph}(w) \neq \mathbf{alph}(w')$ alors $q_w \neq q_{w'}$.

5. En déduire que $|Q| \geq 2^n$.