Gammatone 滤波器的实现

Gammatone滤波器冲击响应：

$$g(t)=\frac{at^{n-1}\cos(2\pi f_ct+\phi)}{e^{2\pi bt}}$$

其中:

- f_c：中心频率
- b：带宽，$1.019*ERB(f_c)$

中心频率处的增益和相移

$g(t)$ 可分解为两部分的乘积，即

$$g(t)=a\times r(t)\times s(t)$$

其中

$$\begin{align} r(t)&=t^{n-1}e^{-2\pi bt} \tag{1}\\ s(t)&=cos(2\pi f_ct+\phi) \tag{2}\end{align}$$

时域相乘==频域卷积，即：

$$G(f)=a\times R(f)*S(f)$$

可以分别计算 $R(f)$ 和 $S(f)$，即：

$$\begin{equation}\begin{aligned} R(f)=FT(t^{n-1}e^{-2\pi bt})&=\frac{1}{(j2\pi)^{n-1}}\frac{\partial^{n-1}FT(e^{-2\pi bt})}{\partial f^{n-1}}\\ &=\frac{1}{(j2\pi)^{n-1}}\frac{\partial^{n-1}\frac{1}{2\pi b+j2\pi f}}{\partial f^{n-1}}\\ &=\frac{1}{(j2\pi)^{n-1}}\frac{(j)^{n-1}(n-1)!}{2\pi}\frac{1}{(b+jf)^n}\\ &=\frac{(n-1)!}{(2\pi b)^n}\frac{1}{(1+jf/b)^n}\end{aligned}\tag{3}\end{equation}$$

$$S(f)=FT\left(cos(2\pi f_ct+\phi)\right)=e^{j\phi}\delta(f-f_c)+e^{-j\phi}\delta(f+f_c) \tag{4}$$

所以有

$$\begin{equation}\begin{aligned} G(f)&=a\times R(f)*S(f)\\ &=a\times e^{j\phi}\frac{(n-1)!}{(2\pi b)^n}\frac{1}{(1+j(f-f_c)/b)^n}+ae^{-j\phi}\frac{(n-1)!}{(2\pi b)^n}\frac{1}{(1+j(f+f_c)/b)^n}\\ &=a\frac{(n-1)!}{(2\pi b)^n}\left[e^{j\phi}\left(\frac{1}{(1+j(f-f_c)/b)}\right)^n+e^{-j\phi}\left(\frac{1}{(1+j(f+f_c)/b)}\right)^n\right]\end{aligned}\tag{5}\end{equation}$$

对于中心频率处，有

$$\begin{equation}\begin{aligned} G(f)|_{f=f_c}&=a\frac{(n-1)!}{(2\pi b)^n}\left[e^{j\phi}\left(\frac{1}{(1+j(f-f_c)/b)}\right)^n+e^{-j\phi}\left(\frac{1}{(1+j(f+f_c)/b)}\right)^n\right]\Bigg|_{f=f_c}\\ &=a\frac{(n-1)!}{(2\pi b)^n}\left[e^{j\phi}+e^{-j\phi}\frac{1}{(1+2jf_c/b)^n}\right]\\ &=a\frac{(n-1)!}{(2\pi b)^n}\left[e^{j\phi}+e^{-j\phi}\frac{1}{(1+2jQ)^n}\right]\end{aligned}\tag{6}\end{equation}$$

通常 $cos(2\pi f_ct+\phi)$ 中的起始相位 ϕ 为0，即：

$$
\begin{aligned}
Gain(f=f_c) &= \frac{(n-1)!}{(2\pi b)^n}\left[1+\frac{1}{(1+j2Q)^n}\right] \\
&= \frac{6}{(2\pi b)^4}\left[1+\frac{1}{(1+j2f/b)^4}\right] \\
&= \frac{6}{(2\pi b)^4}\left[1+\frac{1}{(1-4Q^2+4jQ)^2}\right] \\
&= \frac{6}{(2\pi b)^4}\left[1+\frac{1}{1-8Q^2+16Q^4-16Q^2+2(1-4Q^2)4jQ}\right] \\
&= \frac{6}{(2\pi b)^4}\left[1+\frac{1}{16Q^4-24Q^2+1+8jQ(1-4Q^2)}\right] \\
&= \frac{6}{(2\pi b)^4}\left[\frac{16Q^4-24Q^2+2+8jQ(1-4Q^2)}{16Q^4-24Q^2+1+8jQ(1-4Q^2)}\right] \\
&= \frac{3}{(2\pi b)^4}\frac{r_1 e^{\phi_1}}{r_2 e^{\phi_2}}
\end{aligned} \tag{7}
$$

其中

$$
\begin{cases}
r_1=\sqrt{(16Q^4-24Q^2+2)^2+(8Q-32Q^3)^2} \\
\phi_1=\arctan\frac{8Q-32Q^3}{16Q^4-24Q^2+2} \\
r_2=\sqrt{(16Q^4-24Q^2+1)^2+(8Q-32Q^3)^2} \\
\phi_2=\arctan\frac{8Q-32Q^3}{16Q^4-24Q^2+1}
\end{cases} \tag{8}
$$

$$
\begin{gathered}
Gain_{f_c}=\frac{3}{(2\pi b)^4}\frac{\sqrt{(16Q^4-24Q^2+2)^2+(8Q-32Q^3)^2}}{\sqrt{(16Q^4-24Q^2+1)^2+(8Q-32Q^3)^2}} \\
\phi_{f_c}=\arctan\frac{8Q-32Q^3}{16Q^4-24Q^2+2}-\arctan\frac{8Q-32Q^3}{16Q^4-24Q^2+1}
\end{gathered} \tag{9}
$$

根据Glassberg and Moore给出的ERB的公式

$$
Q=\frac{f_c}{b}=\frac{f_c}{24.7*4.37/1000*f_c+24.7}=\frac{1}{0.108+24.7/f_c} \tag{10}
$$

随着中心频率的增大，Q越来越大，此时增益中 $\frac{1}{(1+2jQ)^n}$ 可以近似忽略，此时中心频率处：

$$
\begin{cases}
G(f_c)=\frac{a(n-1)!}{(2\pi b)^n} \\
\phi(f_c)=0
\end{cases} \tag{11}
$$

IIR 滤波器实现

$g(t)$ 可分解为两部分的乘积，即

$$
g(t)=a\times r(t)\times s(t)
$$

其中

$$
r(t)=t^{n-1}e^{-2\pi bt} \tag{12}
$$
$$
s(t)=cos(2\pi f_c t+\phi) \tag{13}
$$

时域相乘==频域卷积，即：

$$
G(f)=a\times R(f)*S(f)
$$

可以分别计算 $R(f)$ 和 $S(f)$，即：

$$
\begin{aligned}
R(f) = FT(t^{n-1}e^{-2\pi bt}) &= \frac{1}{(j2\pi)^{n-1}}\frac{\partial^{n-1}FT(e^{-2\pi bt})}{\partial f^{n-1}} \\
&= \frac{1}{(j2\pi)^{n-1}}\frac{\partial^{n-1}\frac{1}{2\pi b+j2\pi f}}{\partial f^{n-1}} \\
&= \frac{1}{(j2\pi)^{n-1}}\frac{(j)^{n-1}(n-1)!}{2\pi}\frac{1}{(b+jf)^n} \\
&= \frac{(n-1)!}{(2\pi b)^n}\frac{1}{(1+jf/b)^n}
\end{aligned} \tag{14}
$$

$$
S(f) = FT\left(cos(2\pi f_c t+\phi)\right) = e^{j\phi}\delta(f-f_c)+e^{-j\phi}\delta(f+f_c) \tag{15}
$$

$R(f)$ 是低通滤波器，由n个一阶低通滤波器及联得到；$S(f)$ 的功能则是频率搬移，将低通滤波器转换为带通滤波器。 在设计滤波器的时候，可以反过来，首先对输入信号降频 f_c ，然后在应用低通滤波器 $R(f)$ ，问题就变的简单了。

1. 降频

$$
\begin{aligned}
x'(t) = IFT(X(f-f_c)) &= IFT\left(\int x(t)e^{-j2\pi(f-f_c)t}dt\right) \\
&= IFT\left(FT(e^{j2\pi f_c t}x(t))\right) \\
&= e^{j2\pi f_c t}x(t)
\end{aligned} \tag{16}
$$

这里其实只考虑了单边谱，因此计算增益的时候应该 $\times 2$

2. 低通滤波器的设计

使用冲击响应不变法，对 $r(t)$ 进行采样，采样间隔为T，即：

$$
r_d(i) = r(iT) = (iT)^{n-1}e^{-2\pi bTi} = T^{n-1}i^{n-1}e^{-2\pi bTi} \tag{17}
$$

令 $k = e^{-2\pi bT}$ ，上式就可以简化为

$$
r_d(i) = T^{n-1}i^{n-1}k^i \tag{18}
$$

因为

$$
Z(if(i)) = \sum if(i)z^{-i} = -z\frac{\partial\sum f(i)z^{-i}}{\partial z} = z^{-1}\frac{\partial\sum f(i)(z^{-1})^i}{\partial z^{-1}} \tag{19}
$$

$$
Z(k^i) = \frac{1}{1-kz^{-1}} \tag{20}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
Z(ik^i) &= z^{-1}\frac{\partial Z(k^i)}{\partial z^{-1}} = z^{-1}\frac{\partial \frac{1}{1-kz^{-1}}}{\partial z^{-1}} = \frac{kz^{-1}}{(1-kz^{-1})^2} \\
Z(i^2k^i) &= z^{-1}\frac{\partial Z(iz^i)}{\partial z^{-1}} = z^{-1}\frac{\frac{kz^{-1}}{(1-kz^{-1})^2}}{\partial z^{-1}} = z^{-1}\left[\frac{k}{(1-kz^{-1})^2} + \frac{2k^2z^{-1}}{(1-kz^{-1})^3}\right] \\
Z(i^3k^i) &= z^{-1}\frac{\partial Z(i^2k^i)}{\partial z^{-1}} = z^{-1}\frac{z^{-1}\left[\frac{k}{(1-kz^{-1})^2} + \frac{2k^2z^{-1}}{(1-kz^{-1})^3}\right]}{\partial z^{-1}} \\
&= z^{-1}\left[\frac{k}{(1-kz^{-1})^2} + \frac{2k^2z^{-1}}{(1-kz^{-1})^3}\right] + z^{-2}\left[\frac{2k^2}{(1-kz^{-1})^3} + \frac{2k^2}{(1-kz)^3} + \frac{6k^3z^{-1}}{(1-kz^{-1})^4}\right] \\
&= \frac{z^{-1}k(1-kz^{-1})^2 + 2k^2z^{-2}(1-kz^{-1}) + 4k^2z^{-2}(1-kz^{-1}) + 6k^3z^3}{(1-kz^{-1})^4} \\
&= \frac{kz^{-1} + k^3z^{-3} - 2k^2z^{-2} + 2k^2z^{-2} - 2k^3z^{-3} + 4k^2z^{-2} - 4k^3z^{-3} + 6k^3z^{-3}}{(1-kz^{-1})^4} \\
&= \frac{k^3z^{-3} + 4k^2z^{-2} + kz^{-1}}{(1-kz^{-1})^4} \\
&= \frac{kz^{-1}(1+4kz^{-1}+k^2z^{-2})}{(1-2kz^{-1}+k^2z^{-2})^2} \\
&= \frac{kz^{-1}(1+4kz^{-1}+k^2z^{-2})}{1-4kz^{-1}+2k^2z^{-2}+4k^2z^{-2}-4k^3z^{-3}+k^4z^{-4}} \\
&= \frac{kz^{-1}(1+4kz^{-1}+k^2z^{-2})}{1-4kz^{-1}+6k^2z^{-2}-4k^3z^{-3}+k^4z^{-4}}
\end{aligned}
\tag{21}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
Z(r_d(i)) &= Z\left(\frac{(n-1)!}{(2\pi b)^n}T^3 * i^3k^i\right) = \frac{6T^3}{(2\pi b)^4}Z(i^3k^i) \\
&= \frac{6T^3k}{(2\pi b)^4}\frac{z^{-1}(1+4kz^{-1}+k^2z^{-2})}{1-4kz^{-1}+6k^2z^{-2}-4k^3z^{-3}+k^4z^{-4}}
\end{aligned}
\tag{22}
$$

令 $c = \frac{6T^3k}{(2\pi b)^4}$,则上式子可重写为

$$
Z(r_d(i)) = c\frac{z^{-1}(1+4kz^{-1}+k^2z^{-2})}{1-4kz^{-1}+6k^2z^{-2}-4k^3z^{-3}+k^4z^{-4}}
\tag{23}
$$

最终得到Gammatone滤波器的公式

$$
y(n) = c\left[\underbrace{x(n-1)+4kx(n-2)+k^2x(n-3)}_{\text{x part}} + \underbrace{4ky(n-1)-6k^2y(n-2)+4k^3y(n-3)-k^4y(n-4)}_{\text{y part}}\right]
\tag{24}
$$

3. 滤波结果升频

$$
\begin{aligned}
y'(t) = Real\left(IFT(Y(f+f_c))\right) &= Real\left(IFT\left(\int y(t)e^{-j2\pi(f+f_c)t}dt\right)\right) \\
&= Real\left(IFT\left(FT(e^{-j2\pi f_c t}y(t))\right)\right) \\
&= Real\left(e^{-j2\pi f_c t}y(t)\right)
\end{aligned}
\tag{25}
$$

升频后信号的实部即为最终结果。

滤波器中心频率增益归一

因为实现过程中将带通滤波器转换为低通滤波器，因此只需要对低通滤波器0频处的增益归一为1/2即可。 因此，归一化系数应该是

$$
\begin{aligned}
scale &= \frac{1}{Z(r_d(i)|_{z=1})/2} = \frac{1}{c\frac{z^{-1}(1+4kz^{-1}+k^2z^{-2})}{1-4kz^{-1}+6k^2z^{-2}-4k^3z^{-3}+k^4z^{-4}}|_{z=1}/2} \\
&= \frac{(1-k)^4}{c*(1+4k+k^2)}
\end{aligned}
\tag{26}
$$

误差

低通滤波器经移频之后，左右两部分可能存在overlap，从而使得带通滤波器中心频率处的增益略大于低通滤波器0频处的增益。误差系数为

$$\frac{\sqrt{(16Q^4-24Q^2+2)^2+(8Q-32Q^3)^2}}{\sqrt{(16Q^4-24Q^2+1)^2+(8Q-32Q^3)^2}}\approx 1 \tag{27}$$