F08 - Träd

5DV149 Datastrukturer och algoritmer
Kapitel 9–10

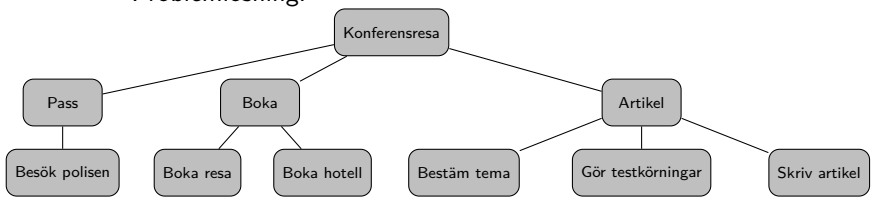
Niclas Börlin
niclas.borlin@cs.umu.se

2024-04-16 Tis

Innehåll

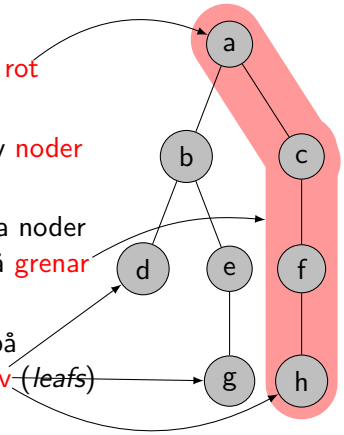
Modeller och tillämpningar

- Modell
  - Ordervägarna i ett regemente eller företag (ordnat träd)
  - Stamtavla/släktträd (binärt träd)
- Tillämpningsexempel inom datavärlden:
  - Filsystem
  - Klasshierarkier i Java/C++
  - Besluts-/sök-/spelträd inom AI
  - Prologs exekvering
  - Problemlösning:



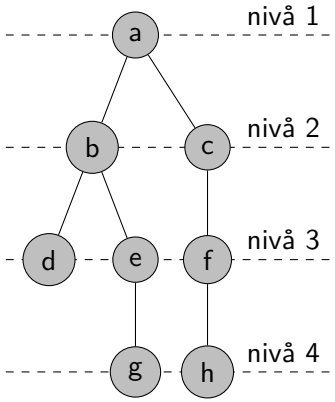
Träd, terminologi

- Varje träd har en rot (*root*)
- Ett träd består av noder (*nodes*)
- Om det finns flera noder så finns det också grenar (*branches*)
- Noder längst ut på grenarna kallas löv (~~*leafs*~~)



Träd, organisation

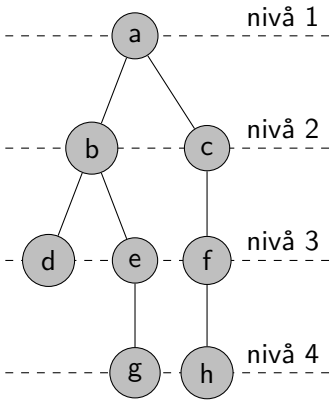
- Elementen i ett träd kallas för noder
- En nod har en position och ev. ett värde
- Värdet på en nod kallas etikett (*label*)
- Ett träds noder finns på olika nivåer (*levels*)
- Ett träd är organiserat som en föräldra-barn-hierarki:
  - Ett barn ligger på nivån under dess förälder
  - Alla noder på en nivå med samma förälder kallas syskon (*sibling*)
- Ett delträd = en nod och dess avkomma



Djupet för en nod

- Djupet $d(x)$ hos en nod x är antalet bågar från x upp till roten:
  - "Hur långt är det upp till roten?"

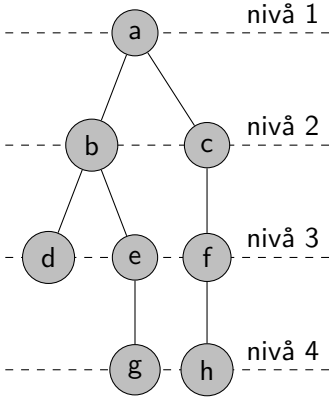
$$d(a) = 0,$$
$$d(b) = 1,$$
$$d(h) = 3,$$
$$\textit{nivå}(x) = d(x) + 1$$



Höjden för en nod

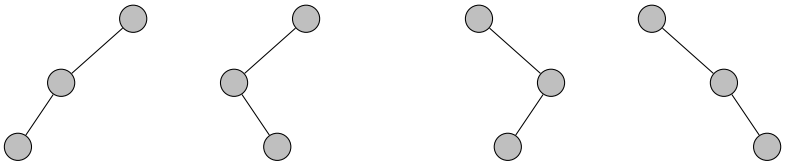
- Höjden $h(x)$ för nod x är antalet bågar på den längsta grenen i det träd där x är rot
  - "Hur långt är det ner till lövet?"

$$h(T) = h(\textit{roten})$$
$$h(g) = 0,$$
$$h(b) = 2,$$
$$h(a) = 3 = h(T)$$



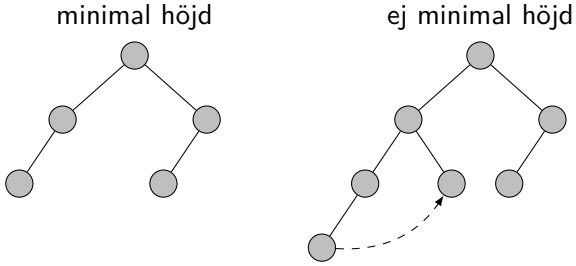
Maximal höjd för ett träd

- Ett träd med n noder har en maximal höjd på $n - 1$
- Varje nivå har en nod och strukturen liknar en lista
- Exempel: Några träd med 3 noder och maximal höjd:



Minimal höjd för ett träd

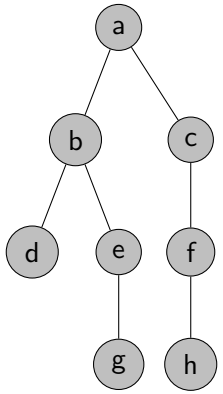
- Begreppet minimal höjd för ett träd definieras som att det går ej att flytta några noder och få ett träd med mindre höjd:



  - Minimal höjd för ett träd med n noder beror på det maximala antalet barn per nod

Träd, globala egenskaper

- Ett träd har ett ändligt antal noder
- Ett träd är en homogen datatyp
- Ett träd är en rekursiv datatyp; varje delträd är i sig ett träd
- Ett träd saknar cykler, dvs. vägen mellan två noder är alltid unik



Specifikation av träd

- Navigeringsorienterad
  - Om man arbetar med enstaka träd som förändras långsamt, löv för löv, så är navigeringsorienterad specifikation bättre.
    - Naturligt med operationer som `Insert-node`, `Delete-node`
- Delträdsorienterad
  - Håller man på med träd och delträd som man vill dela upp eller slå samman är delträdsorienterad bättre.
    - Naturligt med operationer som `Join-tree`, `Split-tree`
- Vi kommer att fokusera på den navigeringsorienterade specifikationen

Träd och ordning

- (O)-ordningen för ett träd bestäms av barnen:
  - Ordnat träd, t.ex. familjeträd:
    - Syskonen är linjärt ordnade
    - Syskonen kan representeras av en lista
  - Oordnat träd, t.ex. filsystemet på en dator:
    - Ordningen mellan syskonen är odefinierad
    - Syskonen kan representeras av en mängd

Träd och riktning

- Ett träd kan vara oriktat eller riktat:
  - Oriktade träd
    - Lika lätt navigera upp och ner i trädet
  - Riktade träd
    - Kan bara gå i en riktning i trädet
    - I ett nedåtriktat träd saknas `Parent`
      - Fungerar för algoritmer som startar i roten
    - I ett uppåtriktat träd saknas `Children`
      - Fungerar för algoritmer som startar i löven

Binära träd

- Binära träd, t.ex. stamtavla, aritmetiska uttryck
  - Varje nod har högst två barn

Urträd

- Urträd:
  - Mer abstrakt än de övriga träden
  - Har en egen datatyp som hanterar syskonen, t.ex. Tabell
  - Kommer att diskuteras när vi pratar om datatypen *Trie*

Standardträd

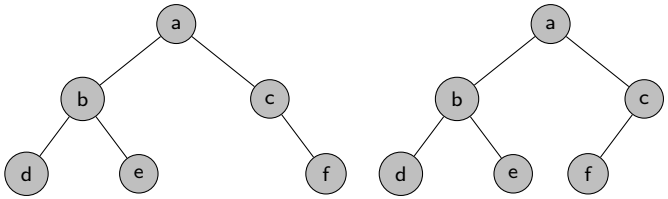
- Om termen Träd används någonstans så betyder det att trädet är:
  1. Ordnat: Barnen är ordnade
  2. Osorterat: Ordningen på noderna är inte relaterade enligt någon sorteringsordning
  3. Oriktat: Det går lika lätt att navigera uppåt som nedåt i trädet

Gränsyta för Ordnat träd

```
abstract datatype Otree(val)
auxiliary pos
  Create() → Otree(val)

  Root(t: Otree(val)) → pos
  First-child(p: pos, t: Otree(val)) → (Bool, pos)
  Next-sibling(p: pos, t: Otree(val)) → (Bool, pos)
  Parent(p: pos, t: Otree(val)) → (Bool, pos)

  Insert-first-child(p: pos, t: Otree(val)) → (pos, Otree(val))
  Insert-next-sibling(p: pos, t: Otree(val)) → (pos, Otree(val))
  Delete-node(p: pos, t: Otree(val)) → Otree(val)

  Has-label(p: pos, t: Otree(val)) → Bool
  Set-label(v: val, p: pos, t: Otree(val)) → Otree(val)
  Inspect-label(p: pos, t: Otree(val)) → val

  Kill(t: Otree(val)) → ()
```


Binära träd

- En nod i ett binärt träd kan ha högst två barn
  - Barnen kallas vänster- och höger-barn
  - Ordningen mellan barnen är odefinierad, även om träden oftast presenteras med vänsterbarnet "före" (till vänster) om högerbarnet
  - Två olika binära träd kan vara samma "ordnade träd med max två barn"

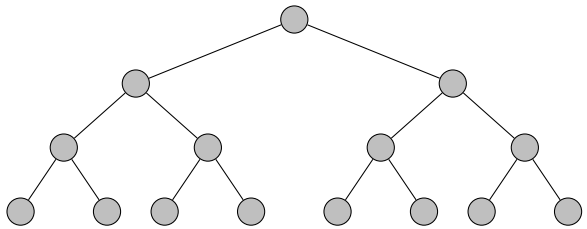


  - Ovanstående träd är identiska ordnade träd
    - I bägge träden har nod c ett barn
  - Ovanstående träd är olika binära träd
    - I vänstra trädet har nod c ett höger-barn
    - I högra trädet har nod c ett vänster-barn

Höjd för binära träd (1)

- För binära träd T med höjden h gäller att:
  - Det minsta antalet noder $n_{\min} = h + 1$
  - Det största antalet noder $n_{\max} = 2^{h+1} - 1$

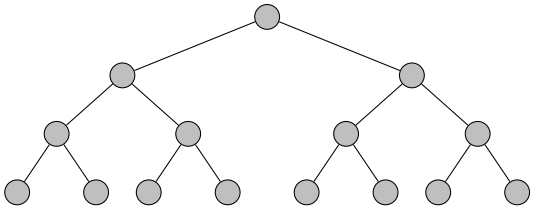
h	$n_{\min}$	$n_{\max}$		
0	1	1	=	1
1	2	3	=	$1 + 2$
2	3	7	=	$1 + 2 + 4$
3	4	15	=	$1 + 2 + 4 + 8$
4	5	31	=	$1 + 2 + 4 + 8 + 16$



Höjd för binära träd (2)

- Om vi vänder på det:
  - För ett träd med n noder:
    - Den största höjden $h_{\max} = n - 1$
    - Den minsta höjden är $h_{\min} = \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$

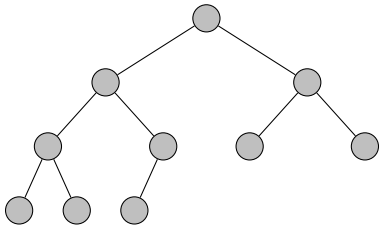
n	$\lfloor \log_2 n \rfloor$	h_{min}
1	0	1
2–3	1	2
4–7	2	3
8–15	3	4
16–31	4	5



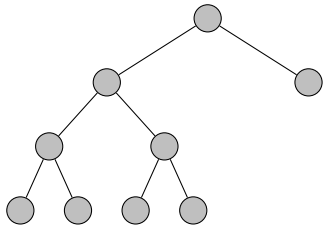
Balanserade binära träd

- Man vill ofta ha så låga träd som möjligt:
  - Om vänster och höger delträd har ungefär lika många noder har trädet balans
  - I ett balanserat träd är vägen till en godtyckligt vald nod $O(\log_2 n)$
- Komplett binärt träd (rätt bra balans)
  - Fyller på trädet en nivå i taget, från vänster till höger
- Fullt binärt träd (ofta dålig balans)
  - Varje nod har antingen noll eller två barn

komplett



fullt



Trädalgoritmer

- Basalgoritmer
  - Konstruera ett träd
  - Beräkna djup
  - Beräkna höjd
  - Slå ihop två träd
  - Dela upp ett träd
  - Traversera (förflytta sig i) trädet
  - Beräkna/evaluera etikett(-er) i trädet

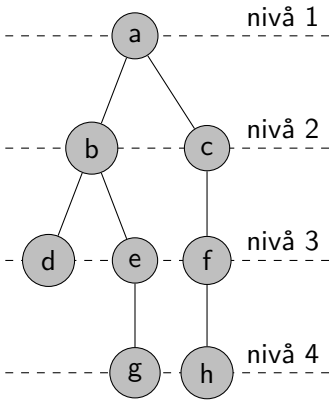
Traversering av träd

Traversering av träd

- Tillämpningar av träd involverar ofta att man
  - söker efter ett element med vissa egenskaper,
  - filtrerar ut element med vissa egenskaper, eller
  - transformerar strukturen till en annan struktur
    - Exempelvis sortering och balansering
- Alla dessa bygger på att man traverserar strukturen
- Det finns två grundläggande traverseringsmetoder:
  - bredden-först (*breadth-first*)
  - djupet-först (*depth-first*)

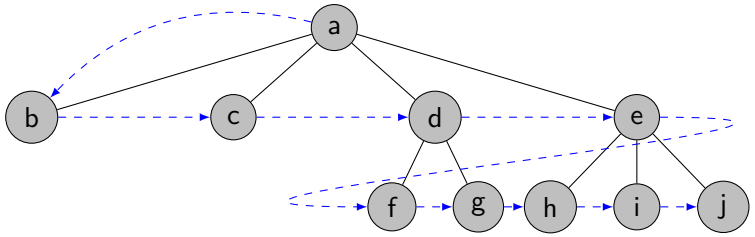
Traversering av träd, bredden-först

- Trädet undersöks en nivå i taget
- Först roten, sedan rotens barn, dess barnbarn, etc.
- En kö är ofta hjälp i implementationen
- Varje nod i trädet besöks endast en gång, dvs. $O(n)$
- Algoritmen normalt ej rekursiv



Traversering av träd, bredden-först, exempel

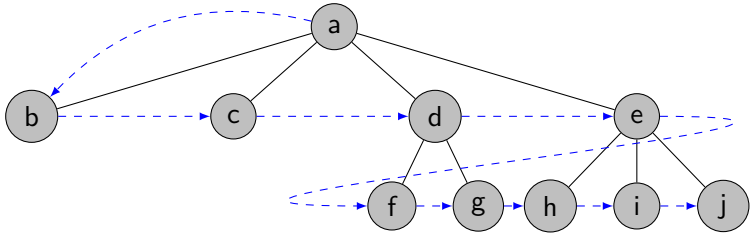
```
Algorithm Traverse-bf-order(T: Tree)
// Input: A tree T to be traversed
for each level L of T do
  for each node n of L do
    Process(n)
```



Ordning: a, b, c, d, e, f, g, h, i, j.

Traversering av träd, bredden-först, detaljerat exempel

```
Algorithm Traverse-bf-order(T: Tree)
// A tree T to be traversed
q ← Enqueue(Queue-empty(), Root(T))
while not Isempty(q) do
  n ← Front(q)
  Process(n)
  (b, ch) ← First-child(n, T)
  while b do
    q ← Enqueue(q, ch)
    (b, ch) ← Next-sibling(ch, T)
  q ← Dequeue(q)
```

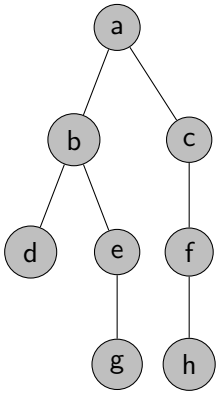


Ordning: a, b, c, d, e, f, g, h, i, j.

Traversering av träd, djupet-först

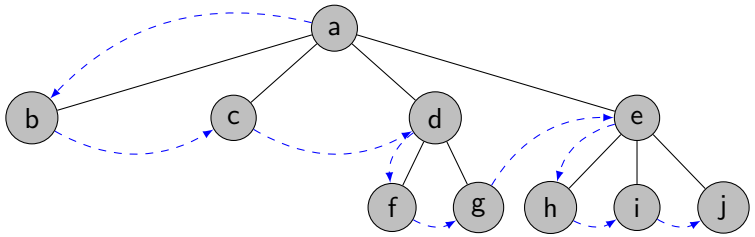
- Man följer varje gren i trädet från roten till lövet
  - En stack är ofta till hjälp vid implementationen
  - Varje nod i trädet besöks endast en gång, dvs. $O(n)$
- Tre varianter på traversering:

  Preorder label, child 1, child 2, . . . , child n_i
  Inorder child 1, label, child 2, . . . , child n_i
  Postorder child 1, child 2, . . . , child n_i, label
- Alla varianterna är rekursiva



Traversering av träd, djupet-först, preorder

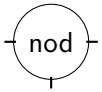
```
Algorithm Traverse-df-pre-order(T: Tree)
// Input: A tree T to be traversed

// Do something with the root node first
Process(Root(T))
// Now deal with the children
for each child c of Root(T) do
  Traverse-df-pre-order(c)
```



Ordning: a, b, c, d, f, g, e, h, i, j

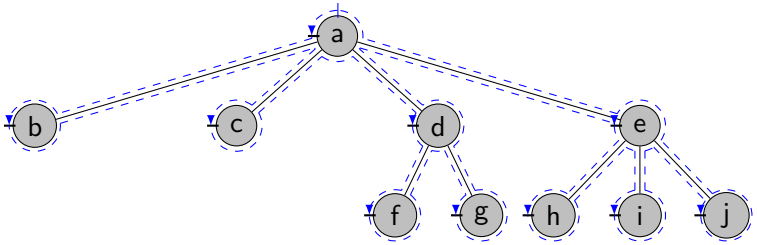
Traverserings-trick (för utskrivna träd)

- Preorder:
  - Sätt ett litet streck till vänster ("klockan 9") på alla noder
  - Gå "runt trädet", dvs runt alla länkar och noder på "utsidan",
    - När du passerar strecket på en nod, då är det dags att behandla nodens etikett
- Inorder:
  - Likadant, men sätt strecket under noden (mellan första och andra barn-länken)
- Postorder:
  - Likadant, men sätt strecket till höger ("klockan 3") på noderna



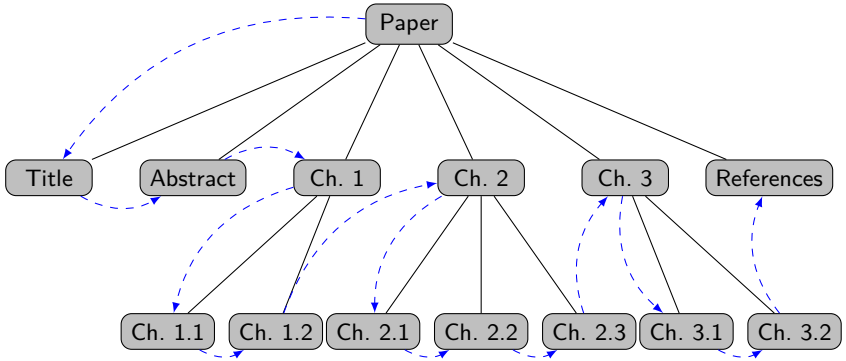
Traversering av träd, djupet-först, preorder

```
Algorithm Traverse-df-pre-order(T: Tree)
// Input: A tree T to be traversed

// Do something with the root node first
Process(Root(T))
// Now deal with the children
for each child c of Root(T) do
  Traverse-df-pre-order(c)
```



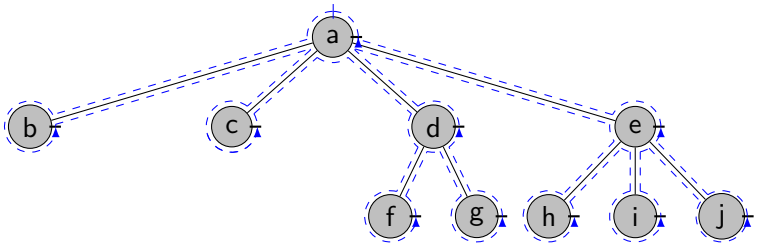
Ordning: a, b, c, d, f, g, e, h, i, j.

Preorder — läsa ett dokument



Traversering av träd, djupet-först, postorder

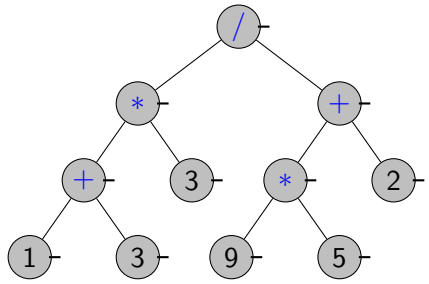
```
Algorithm Traverse-df-post-order(T: Tree)
// Input: A tree T to be traversed

// First deal with all children...
for each child c of Root(T) do
  Traverse-df-post-order(c)
// ...and finally the root
Process(Root(T))
```



Ordning: b, c, f, g, d, h, i, j, e, a.

Postorder — Beräkna aritmetiska uttryck utan paranteser

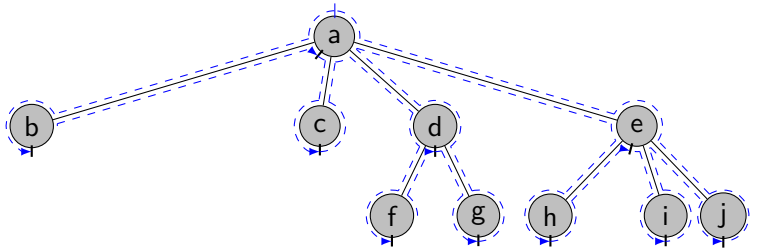
```
Algorithm Evaluate-expression(T: BinTree)
if Isleaf(T) then
  return Get-value(Root(T))
else
  x ← Evaluate-expression(Left-child(T))
  y ← Evaluate-expression(Right-child(T))
  op ← Get-value(T)
  return x op y
```



Order: 1, 3, +, 3, *, 9, 5, *, 2, +, /

Traversering av träd, djupet-först, inorder

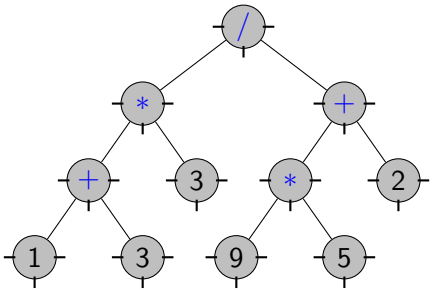
```
Algorithm Traverse-df-in-order(T: Tree)
// Input: A tree T to be traversed

// Deal with first child first...
Traverse-df-in-order(First-child(T))
// ..then me...
Process(Root(T))
// ..then each of the rest...
for each child c (- first) of Root(T) do
  Traverse-df-in-order(c)
```



Ordning: b, a, c, f, d, g, h, e, i, j.

Inorder — Skriva ut aritmetiska uttryck

```
Algorithm Print-expression(T: Tree)
Print("(")
if Has-left-child(T) then
  Print-expression(Left-child(T))
Print(Get-value(T))
if Has-right-child(T) then
  Print-expression(Right-child(T))
Print(")")
```



Utskrift: ((((1)+(3))*(3))/(((9)*(5))+(2)))

Traverseringsordningar binära träd

- Pre-order

```
Algorithm Traverse-df-pre-order(T: BinTree)
Process(Root(T))
if Has-left-child(T) then
  Traverse-df-pre-order(Left-child(T))
if Has-right-child(T) then
  Traverse-df-pre-order(Right-child(T))
```

- Post-order

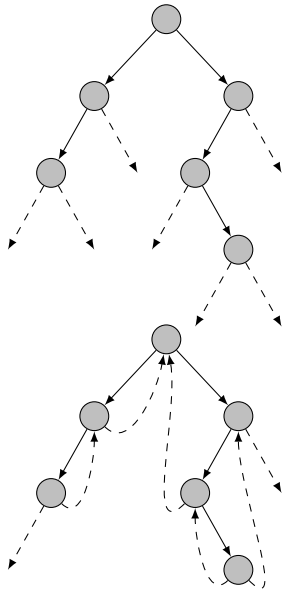
```
Algorithm Traverse-df-post-order(T: BinTree)
if Has-left-child(T) then
  Traverse-df-post-order(Left-child(T))
if Has-right-child(T) then
  Traverse-df-post-order(Right-child(T))
Process(Root(T))
```

- In-order

```
Algorithm Traverse-df-in-order(T: BinTree)
if Has-left-child(T) then
  Traverse-df-in-order(Left-child(T))
Process(Root(T))
if Has-right-child(T) then
  Traverse-df-in-order(Right-child(T))
```

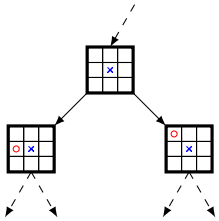

Trädda binära träd

- Nedåtriktade binära träd har "lediga" länkar
- Utnyttja dessa för att "trä" genvägar i trädet
- Det är vanligt att skapa inorder-trädda träd
- Detta gör att man kan traversera med hjälp av iteration istället för rekursion
  - Enklare algoritmer
  - Sparar minne



Träd, tillämpningar

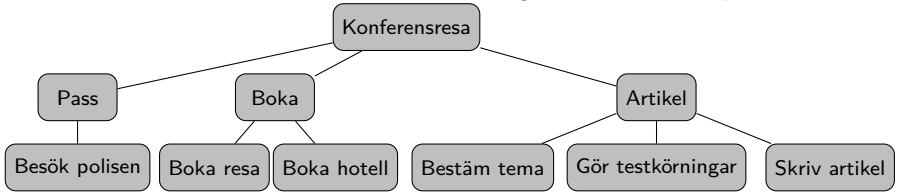
- Konstruktioner av andra typer (speciellt binära träd)
- Sökträd/beslutsträd/spelträd:
  - Varje nod symboliserar ett givet tillstånd
  - Barnen symboliserar de olika tillstånd man kan hamna i utifrån förälderns tillstånd



  - Det gäller att hitta målnoden, dvs ett tillstånd som löser problemet
  - Inte rimligt att bygga upp alla noder (=alla möjliga tillstånd)
  - Ofta används heuristik

Tillämpningar

- Planträd och OCH/ELLER-träd
  - Noderna symboliserar hur man bryter ned ett stort problem i mindre delar och ev. i vilken ordning man bör lösa delproblem

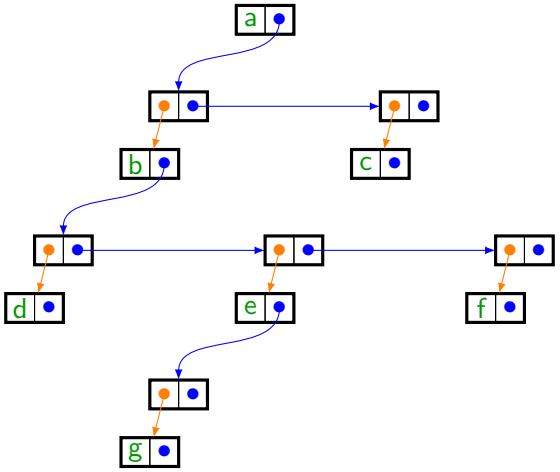


  - Ofta använder man OCH/ELLER-träd där man kan ha OCH-kanter eller ELLER-kanter mellan förälder och barn:

    OCH alla barn behövs för lösningen
    ELLER något barn behövs för lösningen

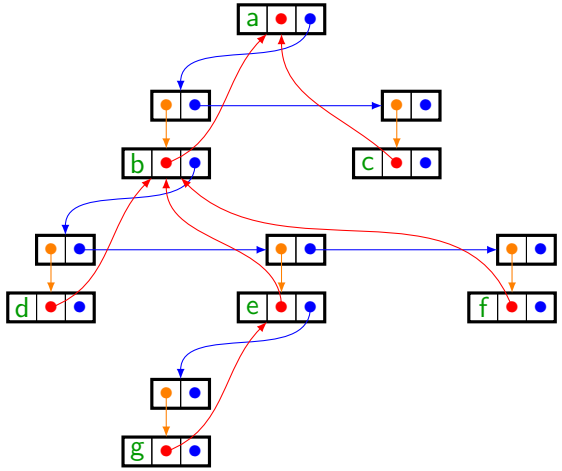
Konstruktioner av träd (1)

- Nedåtriktat ordnat träd som 1-länkad struktur med lista av barn:
  - Noden får en etikett och länk till lista av barn
    - Antalet noder i trädet dynamiskt
    - Antalet barn dynamiskt



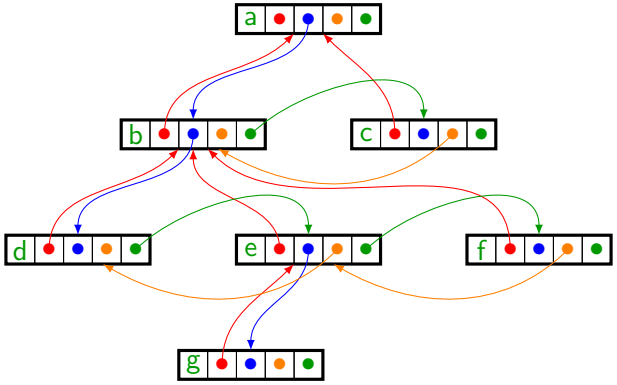
Konstruktioner av träd (2)

- Utöka till 2-celler så blir trädet oriktat:
  - Noden får en etikett, länk till föräldern, samt länk till lista av barn



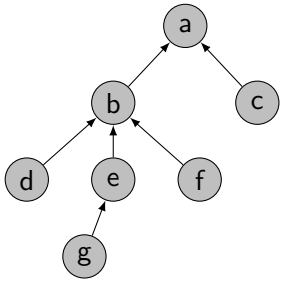
Konstruktioner av träd (3)

- Oriktat träd med hjälp av 4-cell (etikett, förälder, första barn, föregående syskon, efterföljande syskon)



Konstruktioner av träd (4)

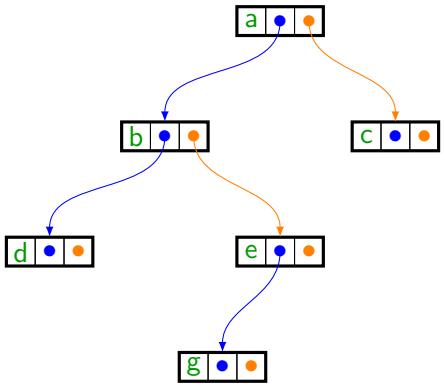
- Oordnat uppåtriktat träd som fält:
  - Varje element i en vektor består av ett par: nodens etikett och en referens till föräldern
    - Tar liten plats
    - Inget bra stöd för traversering (t.ex. svårt avgöra vilka noder som är löv)
    - Maximala storleken på trädet måste bestämmas i förväg



	Etikett	Förälder
1	c	4
2	e	8
3		-1
4	a	0
5	g	2
6		-1
7	d	8
8	b	4
9	f	8

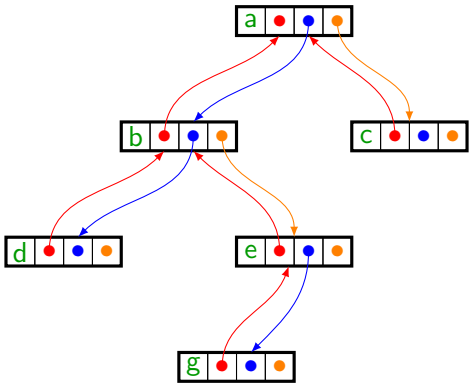
Konstruktioner av binära träd (1)

- Nedåtriktat binärt träd med hjälp av 2-cell (etikett, vänsterbarn, högerbarn)

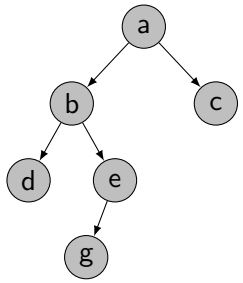


Konstruktioner av binära träd (2)

- Oriktat binärt träd med hjälp av 3-cell (etikett, förälder, vänsterbarn, högerbarn)



Konstruktioner av binära träd (3)



- Binärt träd som fält
  - Roten har index 1
  - Noden med index i har
    - sitt vänsterbarn i noden med index $2i$,
    - sitt högerbarn i noden med index $2i + 1$,
    - sin förälder i noden med index $\lfloor \frac{i}{2} \rfloor$
- Tar inget utrymme för strukturinformation
- Trädet har ett maxdjup (statiskt fält)
- Krävs "markörer" för null och tom nod
- Ev. slöseri med utrymme

	Etikett
1	a
2	b
3	c
4	d
5	e
6	-
7	-
8	-
9	-
10	g
11	-
12	-
13	-
14	-
15	-