F12 - Sökträd, Trie

5DV149 Datastrukturer och algoritmer
Kapitel 14.1–14.4

Niclas Börlin
niclas.borlin@cs.umu.se

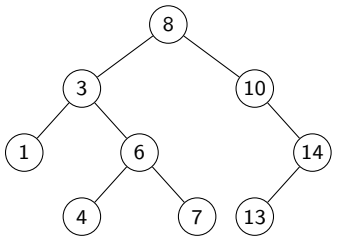
2024-04-26 Fre

Innehåll

Binära sökträd

Binärt sökträd

- Används för sökning i linjära samlingar av dataobjekt, specifikt för att konstruera tabeller och lexikon
- För ett binärt träd, sorterat enligt en sorteringsordning R av etikett-typen, så gäller att för varje nod n:
  1. n har en definierad etikett,
  2. alla noder i i vänster delträd kommer före n, dvs.
     - i.label R n.label är sant
  3. n kommer före alla noder j i höger delträd, dvs.
     - j.label R n.label är falskt
- Exempel: Ett binärt sökträd för heltal med R = "<":



Binärt sökträd, informell specifikation

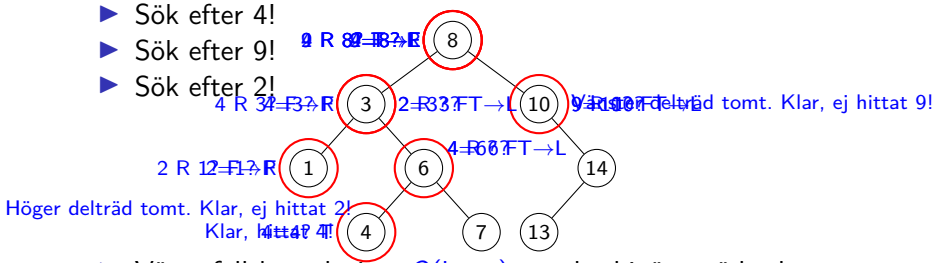
- Skiljer sig från ett vanligt binärt träd:
  - Alla noder måste ha etiketter
  - Är nedåtriktat (vanligtvis, är inget krav)
  - Trädet är sorterat
    - Insättningar får inte förstöra sorteringsordningen
    - Borttagning
      - Löv trivialt
      - Hur ta bort inre noder?

Varför sorterat träd?

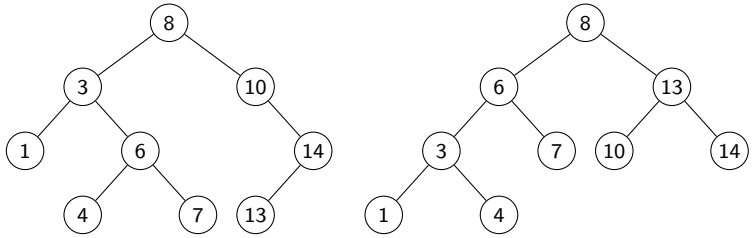
- Det går snabbt att söka i strukturen!
- Sökning efter värdet x i binärt sökträd:
  1. Jämför x med etiketten hos den aktuella noden n
     1.1 Om lika har vi hittat det vi söker, avsluta
  2. annars om $\boxed{x \text{ R } n.label}$ är sant
     2.1 Sök rekursivt nedåt i vänster delträd
     2.2 Om vänster delträd tomt så finns det vi söker inte, avsluta
  3. annars ($\boxed{x \text{ R } n.label}$ är falskt)
     3.1 Sök rekursivt nedåt i höger delträd
     3.2 Om höger delträd tomt så finns det vi söker inte, avsluta

Sökning

- Nedanstående träd har R = '<'
- Sök efter 4!
- Sök efter 9!
- Sök efter 2!

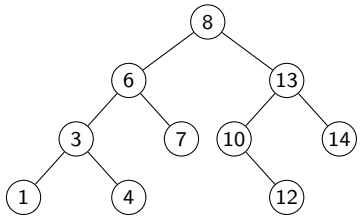


- Värstafallskomplexitet $O(\log n)$ om det binära trädet har minimal höjd

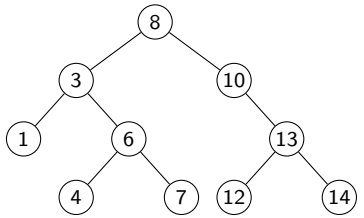


Höjdbalanserat binärt sökträd

- Ett höjdbalanserat binärt sökträd (också kallat AVL-träd)[1]
  - Skillnaden mellan höjden av vänster och höger delträd är ≤ 1
  - Nästan perfekt balans
  - Minimal höjd



höjdbalanserat

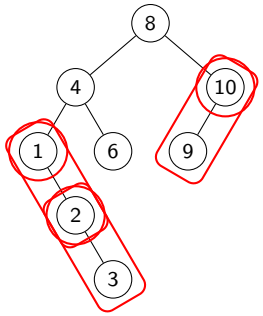


ej höjdbalanserat

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/AVL_tree

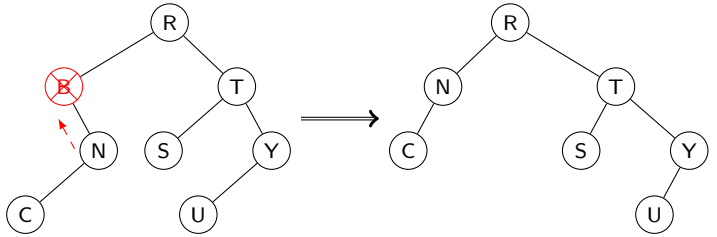
Insättning i binärt sökträd

- Som sökning, men sätt in på platsen där vi skulle fortsatt söka
- Trädet kan bli obalanserat
- Går att konstruera $O(\log n)$ algoritmer för insättning och borttagning som behåller höjdbalansen (ej denna kurs)
- Sätt in 2
- Sätt in 9
- Sätt in 3



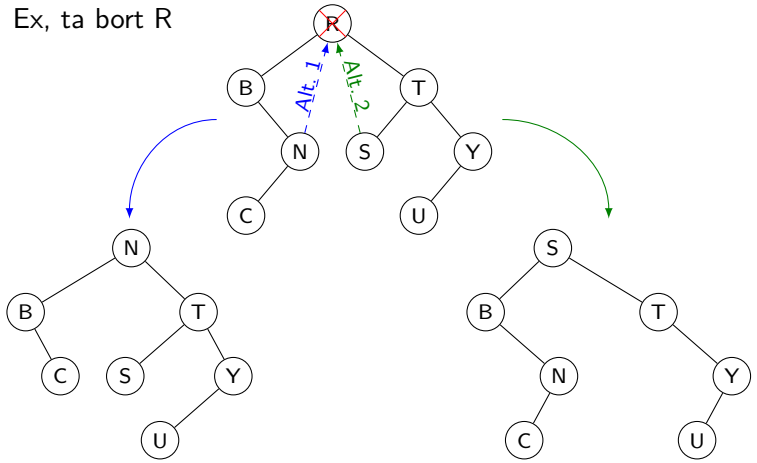
Borttagning av nod i binärt sökträd (1)

- Borttagning av löv är trivialt
- Borttagning av inre nod mer komplicerat
- Om den borttagna noden bara hade ett delträd:
  - Lyft upp det en nivå
- Ex, ta bort B



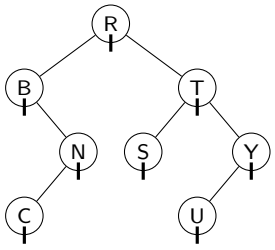
Borttagning av nod i binärt sökträd (2)

- Om den borttagna noden hade två delträd:
  - Välj noden med minsta värdet i höger delträd som ersättning (alt. största värdet i vänster delträd)
- Ex, ta bort R



Tillämpningar av Binärt sökträd

- Framför allt till konstruktioner av Lexikon och Tabell
- Inorder-traversering av binärt sökträd ger en sorterad sekvens av de ingående elementen
- Sorteringsalgoritm:
  1. Stoppa in elementen ett och ett i ett tomt Binärt sökträd
  2. Inorder-traversera trädet



B	C	N	R	S	T	U	Y

Generaliseringar

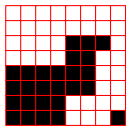
- Ett binärt sökträd underlättar sökning i en en-dimensionell datamängd
- Lätt att generalisera till sökning i en 2-dimensionell datamängd (*quadtree*), 3-dimensionell (*octree*) eller högre

Quadtree (Fyrträd)

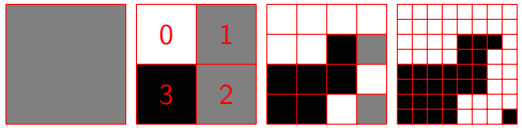
- Organiserat som ett "binärt" träd med förgreningsfaktor 4
- Tolkning (vanligast):
  - Rotnoden delar in den givna ytan (oftast kvadrat) i fyra lika stora kvadrater
  - Vart och ett av de fyra barnen delar i sin tur sin kvadrat i fyra osv.
  - Inga koordinater behöver lagras i inre noder
- Man kan använda det för att representera kurvor och ytor
  - Svarta kvadranter: fylls helt av objektet
  - Grå kvadranter: fylls delvis av objektet
  - Vita kvadranter: innehåller inte objektet

Quadtree, exempel

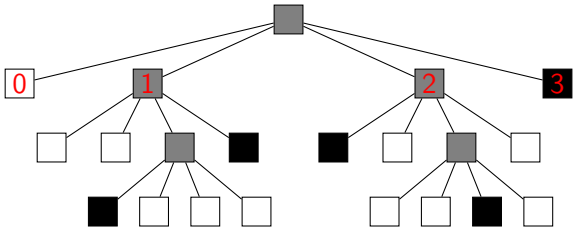
- Vi vill kunna söka om ett objekt täcker koordinat (i, j) i denna bild:



- Bygg upp ett quad-tree av bilden:

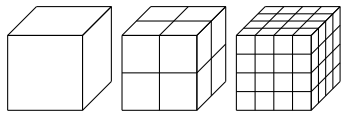


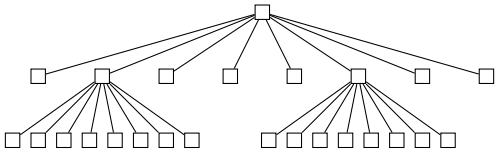
- Sök i trädet



Octree

- Samma, fast med en förgreningsfaktor på 8





Quadtree++, tillämpningar

- 2D: Geografiska informationssystem (GIS)
- 3D: Kollisionsdetektion vid 3D-simuleringar

Blank

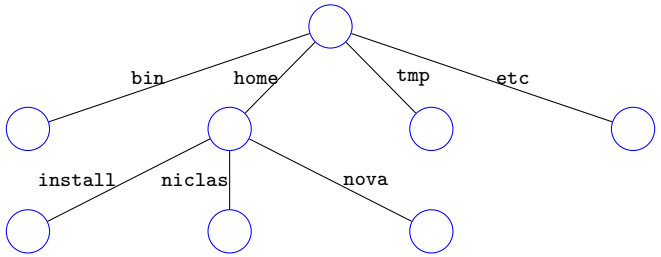
Trie

Trie

- Från re*trie*ve, uttalas Traj
- Namngavs av Fredkin (1960)
- Ytterligare en variant av träd
- Vi har tidigare sett:
  - Oordnat träd: Barnen till en nod bildar en mängd
  - Ordnat träd: Barnen till en nod bildar en lista
- I ett Trie är barnen till en nod organiserade som tabellvärden i en tabell som hör till noden
- Trie kallas också för diskrimineringsträd, code-link tree, radix-search tree

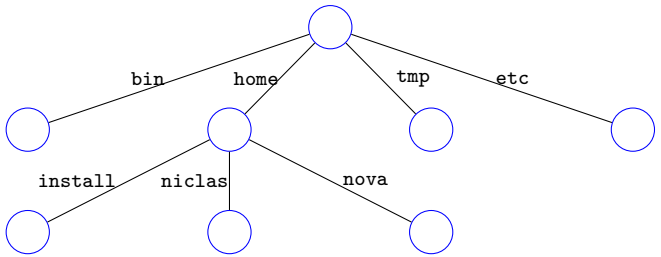
Organisation av Trie (1)

- Man når barnen (delträden) genom "namn", dvs argument/nycklar i nodens barntabell
  - Ex. `Get-child(t: Tree, p: pos, name: key)`
- När man ritar Trie brukar nycklarna skrivas direkt intill motsvarande båge



Organisation av Trie (2)

- I en Trie har alla tabellerna samma nyckeltyp, till exempel tecken eller strängar
- I många tillämpningar av Trie saknar de inre noderna etiketter
  - Träden är lövträd
- Trie är normalt nedåtriktade



Informell specifikation, två sätt

1. Utgå från Urträdets specifikation och låt typparametern `sibling` ha värdet Tabell
   - Insättning, borttagning och uppslagning hanteras av Tabellen
   - Navigering sker utanför Triet, t.ex.
     - `children` ← `Trie-get-child-table(t, pos)`
     - `child` ← `Table-lookup(children, name)`
   - I övrigt används de vanliga operationerna för att hantera etiketter, etc.
2. Sätt in lämpliga tabelloperationer direkt i specifikationen av Trie
   - Tabellen göms inuti Triet
   - `Insert-child` använder `Table-insert`
   - `Delete-child` använder `Table-remove`
   - `Get-child` använder `Table-lookup`

Konstruktion av Trie

- De flesta Träd-konstruktioner går bra att utgå från
- Man måste byta ut de delar som hanterar barnen till att hantera dessa som tabellvärden i en Tabell
- Implementerar man tabellen som en vektor eller som en hashtabell får man effektiva Trie-implementationer (sökning blir $O(1)$)

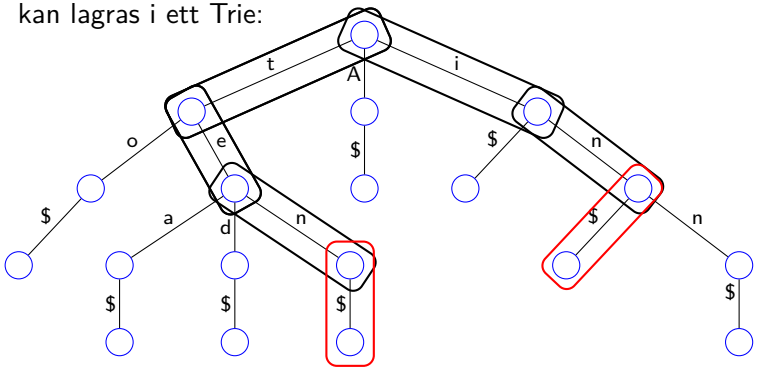
Tillämpningar av Trie (1)

- Används för att konstruera Lexikon eller Tabeller där nycklarna är sekvenser
- Ett viktigt exempel är Lexikon/Tabell av textsträng
- För sekvenser med element av typ A väljer vi en Trie med tabellnycklar av typ A
  - Ska vi lagra textsträngar (sekvenser av tecken) så blir tabellnycklarna i Triet av typen tecken
  - En sekvens motsvaras av en väg i trädet från roten till ett löv
  - Om sekvenserna kan vara av variabel längd:
    - Lägg till en slutmarkör i slutet av varje godkänd sekvens
    - Ofta används dollar-tecknet ($) som slutmarkör

Tillämpningar av Trie: Lexikon

- Exempel: Ett Lexikon som innehåller följande strängar:
  - A, i, in, inn, tea, ted, ten, to

kan lagras i ett Trie:



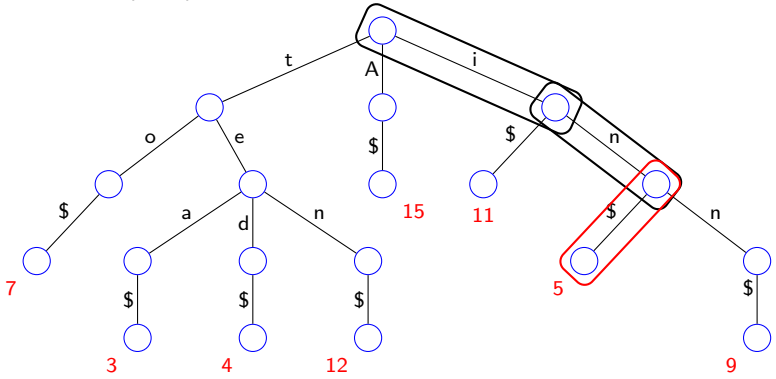
- Varje godkänd sekvens i Lexikonet motsvaras av att sekvensen ingår i Triet och slutar i ett löv
- Exempelvis så ingår sekvenserna ten och in
- Sekvensen te ingår inte

Tillämpningar av Trie: Tabell (1)

- Säg att vi vill koppla värden till sekvenserna, dvs. skapa följande Tabell

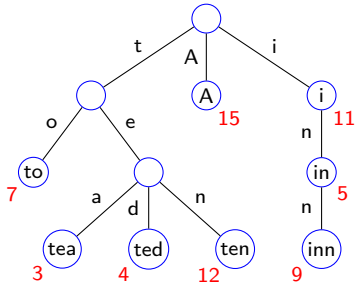
Nyckel	A	i	in	inn	tea	ted	ten	to
Värde	15	11	5	9	3	4	12	7

- Då associerar vi tabellvärdena med lövnoderna
- Lookup("in") skulle returnera värdet 5



Tillämpningar av Trie: Tabell (2)

- En annan variant är att ha definierade etiketter för alla godkända noder (löv och inre noder)



Komplexitet

- Antag vi vill skapa ett Lexikon av ord ("sekvenser av tecken")
- Om vi konstruerar Lexikonet som en Tabell (utan tabellvärden) som är konstruerad med en Lista:
  - Vad är tidskomplexiteten för en sökning?
    - $O(n)$
  - Hur ökar tidsåtgången med antalet ord n i lexikonet?
    - $O(n)$
- Om vi konstruerar lexikonet som ett Trie:
  - Vad är tidskomplexiteten för en sökning?
    - $O(s)$, där s är längden på sekvensen
  - Hur ökar tidsåtgången med antalet ord n i lexikonet?
    - Det gör den inte!

Fördelar med Trie

- Om vi vill lagra sekvenser som startar med samma följd av elementvärden i ett Lexikon/Tabell så finns det flera fördelar med att använda ett Trie:
  - Kompakt sätt att lagra Lexikonet/Tabellen på
  - Sökningens tidskomplexitet proportionell mot sekvenslängden (en jämförelse per elementtecken)
  - Den relativa komplexiteten är oberoende av Lexikonet/Tabellens storlek
    - Inte "dyrare" att söka i ett stort Lexikon jämfört med ett litet!

Tries för strängar, implementation

- Insättning
  - Starta i roten och gå nedåt i trädet så länge det finns en matchande väg
  - När man hittar en skiljelinje, stanna och stoppa in resten av strängen som ett delträd
- Borttagning
  - I princip samma algoritm som insättning fast "tvärtom"
  - Sök upp strängen som ska tas bort och radera nerifrån i trädet upp till första förgreningen

Tillämpningar av Trie

- Stavningskontroll:
  - Skapa ett Trie med alla ord som finns i språket
- Autocomplete
  - Expandera till nästa förgrening eller löv
- Översättningstabell:
  - Löven innehåller motsvarande ord i ett annat språk
- Internet routing
- Datakomprimering:
  - Huffman-kodning (Huffman, 1952) [2]
  - LZ78-algoritmen (Lempel, Zip, 1978) [3]

[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Huffman_coding
[3] https://en.wikipedia.org/wiki/LZ77_and_LZ78

Kompressionsalgoritmer

Fixlängdskodning

Filkomprimering, fixlängdskodning

- En vanlig textfil i ASCII-format lagrar en sekvens av tecken där varje bokstav representeras av en 8-bitars ASCII-kod
  - `A = 65 = 01000001`
  - `B = 66 = 01000010`
  - `C = 67 = 01000011`
  - `D = 68 = 01000100`
  - `R = 82 = 01010010`
- Varje symbol har en fix längd — fixlängdskodning

Filkomprimering, variabel kodlängd

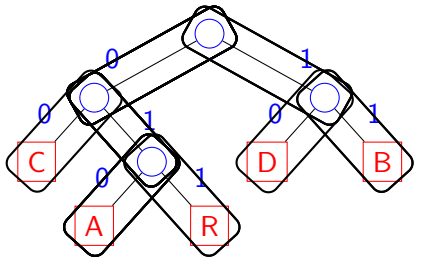
- I en typisk textfil förekommer vissa bokstäver oftare än andra
- Om man lagrar vanligt förekommande bokstäver med färre bitar än ovanliga så skulle man kunna spara utrymme
  - Morse-alfabetet ett tidigt exempel:
    - `A = .-`
    - `E = .`
    - `I = ..`
    - `O = ---`
    - `Q = --.-`
    - `S = ...`
    - `T = -`

Filkomprimering, prefixregeln

- Kodningen måste ske så att man enkelt kan avkoda strängen entydigt
- Motexempel:
  - Antag att tecknen a, b och c kodas som 0, 1 respektive 01
  - Om en mottagare får strängen 001, betyder det aab eller ac?
- Prefix-regeln:
  - *Ingen symbol får kodas med en sträng som utgör ett prefix till en annan symbols kodsträng*
- Vi vill alltså:
  1. Använda sekvenser av variabel längd
  2. Ingen sekvens som motsvarar en symbol får vara prefix till någon annan sekvens

Prefixkodning

- Vi kan använda ett Trie!
  - Den vänstra kanten betyder 0
  - Den högra kanten betyder 1
  - Bokstäverna lagras i löven

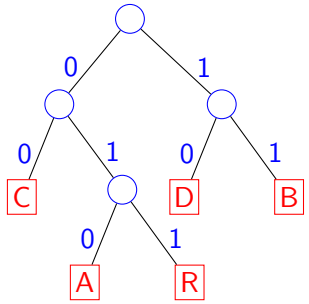


- A = 010
- B = 11
- C = 00
- D = 10
- R = 011

- Vad betyder 01011011010000101001011011010?
- A B R A C A D A B R A

Optimal kompression

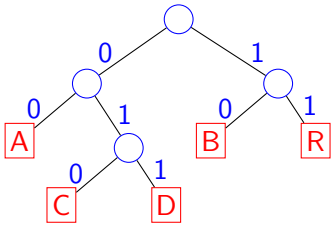
- Vilken tabell/träd vi har bestämmer kompressionens effektivitet
- Med tabellen/trädet nedan får vi 01011011010000101001011011010 = 29 bitar



- A = 010
- B = 11
- C = 00
- D = 10
- R = 011

- A = 00
- B = 10
- C = 010
- D = 011
- R = 11

- Med tabellen/trädet till höger får vi 001011000100001100101100 = 24 bitar
- Varför?
- ABRACADABRA = AAAAA BB RR C D

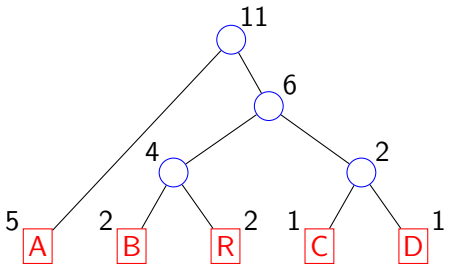


Huffman-kodning

Huffman-kodning

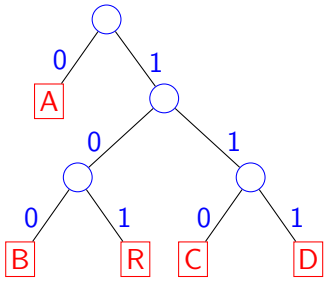
- Bygger upp optimalt träd från en frekvenstabell
- Algoritm:
  - Börja med en mängd träd, där varje träd består av ett enda löv
  - Till varje löv associeras en symbol och en vikt
    - Vikten är symbolens frekvens i texten som ska kodas
  - Upprepa tills vi har ett enda stort träd:
    - Välj de två träd som har minst vikt i roten
    - Bygg ihop dem till ett träd där de blir barn till en ny rotnod
    - Den nya rotens vikt = summan av barnens vikter

Huffman-kodning, exempel



Huffman-kodning, optimalt exempel

- Optimal tabell:
  - 01001010110011101001010 = 23 bitar
  - `AB R AC AD AB R A`



- A = 0
- B = 100
- C = 110
- D = 111
- R = 101

Huffman-kompression

- Kompression (kodning) med Huffman-algoritmen tar en sträng som indata
  - Algoritmen beräknar en frekvenstabell och därefter ett optimalt Trie/tabell
  - Utdata är kodtabellen följt av en kodsträng bestående av en sekvens av nollor och ettor
- Dekompression (dekodning) med Huffman-algoritmen tar kodtabellen och kodsträngen som indata
  - Dekompressionsalgoritmen bygger upp ett Trie från kodtabellen och använder Trie:t till att avkoda kodsträngen
  - Utdata är den ursprungliga strängen

LZ-kodning (Lempel-Ziv-kodning)

zip, gzip, png, ...

LZ78 eller Lempel-Ziv-kodning, kodning

- Algoritmen för LZ-78-kodning tar en sträng som indata och levererar en sekvens av par som utdata
  - Varje par består av ett index och ett tecken

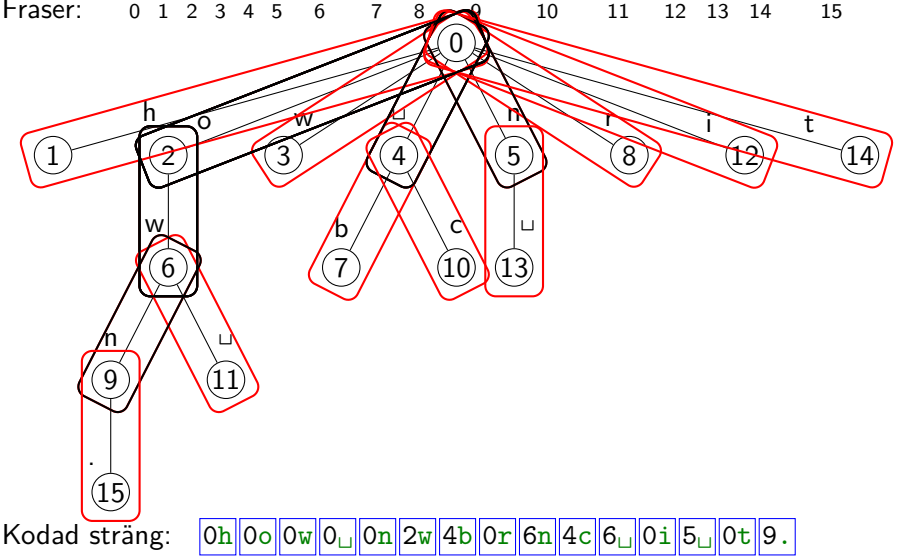
LZ78 eller Lempel-Ziv-kodning, kodning

- Låt frasen 0 vara den tomma strängen
- Starta med ett Trie med en rotnod med nummer 0
- Skanna igenom texten ett tecken i taget
  1. Om du stöter på en ny, okänd, bokstav *c*:
     - Lägg till *c* på toppnivån på Triet
     - Lägg paret `(0, c)` sist i den kodade strängen
  2. Om du stöter på en gammal, känd, bokstav:
     - Gå nedåt i Triet så länge du kan matcha nästa tecken
     - Till slut har du nått en nod *n* med ett tecken *c* som inte går att matcha
     - Lägg till en ny nod till Triet som representerar den nya strängen
     - Lägg paret `(n, c)` sist i den kodade strängen
- Den kodade strängen är oftast mycket kortare än originalet
- Vi talar om att vi komprimerat strängen (eller filen)
- Exempelsträng: "`how now brown cow in town.`"

LZ78 kodningsexempel

Startsträng: h o w ␣ n o w ␣ b r o w n ␣ c o w ␣ i n ␣ t o w n .

Fraser: 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15



Kodad sträng: `0h` `0o` `0w` `0␣` `0n` `2w` `4b` `0r` `6n` `4c` `6␣` `0i` `5␣` `0t` `9.`

LZ78 avkodning

- Algoritmen för LZ-78-avkodning tar en sekvens av (index, tecken)-par som indata och levererar en sträng som utdata
  - Exemplet skriver ut strängen

LZ78 avkodning:

```
Algorithm LZ78-decode(s: Codestring)

t ← Table-empty()
n ← 0
while not Isempty(s) do
  (ix, ch, s) ← Get-and-remove-first-index-and-char(s)

  if ix = 0 then // Sequence has empty prefix
    prefix ← ""
  else           // Lookup prefix in the decoding table
    prefix ← Table-lookup(ix, t)

  // The new sequence is the prefix followed by the new char
  seq ← concat(prefix, ch)

  // Output the new sequence
  print(seq)

  // Insert new sequence into the table
  t ← Table-insert(n + 1, seq, t)
  n ← n + 1
```


LZ78 avkodning, exempel

Input: 0h 0o 0w 0␣ 0n 2w 4b 0r 6n 4c 6␣ 0i 5␣ 0t 9.

Output: h o w ␣ n o w ␣ b r o w n ␣ c o w ␣ i n ␣ t o w n .

t(1) = h	t(9) = own
t(2) = o	t(10) = ␣c
t(3) = w	t(11) = ow␣
t(4) = ␣	t(12) = i
t(5) = n	t(13) = n␣
t(6) = ow	t(14) = t
t(7) = ␣b	t(15) = own.
t(8) = r	

LZW (Lempel-Ziv-Welch)

- LZW-algoritmen (Welch, 1984) är en populär förbättring av LZ78-algoritmen
  - Initierar tabellen till att innehålla alla möjliga sekvenser av längd ett

Popularitet

- Mediaformat
  - GIF (LZW)
  - PNG (LZ78 + Huffman)
  - JPEG (Huffman)
  - MP3 (Huffman)
- Filkompressionsalgoritmer
  - DEFLATE-algoritmen (LZ78 + Huffman) i ZIP