Niclas Börlin

Komplexitet - lösningsförslag

1 Stora Ordo

I exemplen nedan har jag ibland ignorerat absolutttecknen. Det är okej bara om man är säker på att funktionen alltid är positiv, t.ex. för $T(n) = 10n + 7$ för $n > 0$. För enklare notation så skriver jag också $T(n)$ utan index (t.ex. ej $T_1(n)$) inom varje sektion då bara en T-funktion behandlas åt gången.

I exemplen så går jag igenom i detalj hur man visar t.ex. hur 2^n växer snabbare än n^3. Ni behöver inte alltid göra det. Om ej annat sägs så är det okej att anta att det är bevisat att

$$\log n \ll n \ll n \log n \ll n^2 \ll n^3 \ll \text{ polynom av högre gradtal i } n \ll 2^n \ll n! \ll n^n$$

för stora n.

1.1 $T_1(n) = 10n + 7$

Bestäm c och n_0 för $g(n) = n$ och

$$T_1(n) = 10n + 7.$$

för $g(n) = n$. Är $T_1(n)$ $O(n)$?

1.1.1 Vi börjar med c

$$\begin{aligned} c &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{T(n)}{g(n)} \right) + 1 \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{10n+7}{n} \right) + 1 \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(10 + \frac{7}{n} \right) + 1 = 11. \end{aligned}$$

1.1.2 Därefter n_0

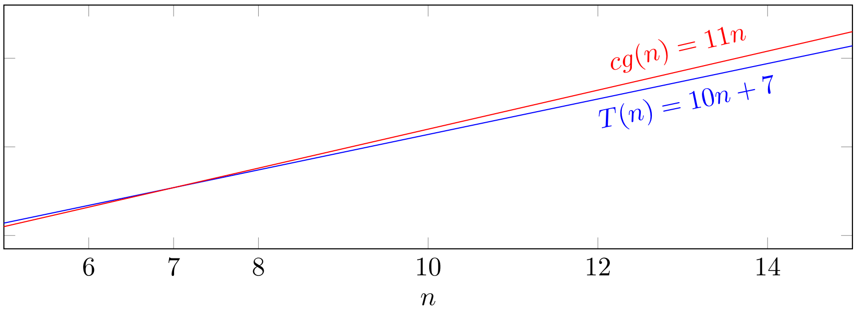
Vi vet att följande ska gälla:

$$T(n) \leq cg(n), \; \forall n \geq n_0.$$

Sök därför likhet och avrunda n_0 uppåt. Alltså:

$$\begin{aligned} T(n) &= cg(n), \\ 10n + 7 &= 11n, \\ 7 &= n. \text{ (Ingen avrundning behövdes.)} \end{aligned}$$

Alltså bör $T(n)$ vara uppåt begränsad av $11n$ för $n \geq 7$.



Figur 1: Funktionen $T(n) = 10n + 7$ är uppåt begränsad av $11n$ för $n \geq 7$.

1.1.3 Kontrollera

Funktionen

$$u(n) = cg(n) - T(n)$$

visar hur mycket $cg(n)$ *överskattar* den faktiska tiden $T(n)$. Om överskattningen är ≥ 0 för n_0 och *inte minskar* för $n > n_0$ så vet vi att $cg(n) \geq T(n)$ för $n \geq n_0$, vilket krävs för att uppfylla ordo-definitionen. Vi behöver alltså kontrollera att

$$u(n_0) \geq 0, \text{ (icke-negativ överskattning för } n = n_0), \tag{1a}$$
$$u'(n) \geq 0, \forall n \geq n_0. \text{ (överskattningen är konstant eller ökar för } n \geq n_0) \tag{1b}$$

För vårt fall:

$$u(n) = 11n - (10n + 7) = n - 7, \tag{2a}$$
$$u(n_0) = 7 - 7 = 0, \tag{2b}$$
$$u'(n) = 1. \tag{2c}$$

Resultat (2b) uppfyller (1a). Ekvation (2c) uppfyller (1b). **Alltså är $T(n) = 10n + 7$ av $O(n)$ med konstanterna $c = 11$, $n_0 = 7$.** Se också figur 1.

1.2 $T_2(n) = 4n^3 - 2n^2 + n + 12$

Bestäm c och n_0 för

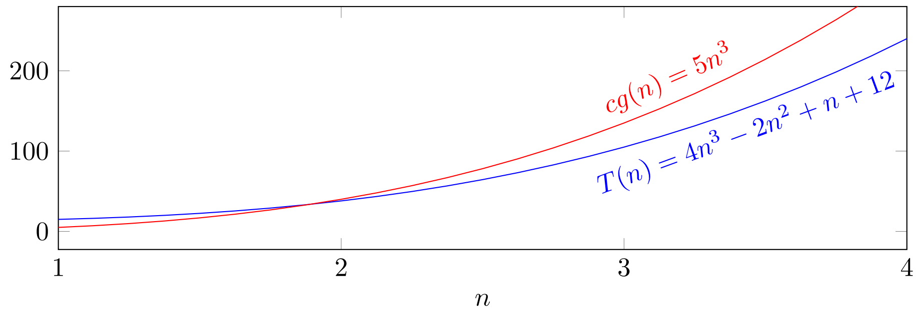
$$T_2(n) = 4n^3 - 2n^2 + n + 12.$$

och $g_1(n) = n^2$, $g_2(n) = n^3$, samt $g_3(n) = n^4$.

1.2.1 $g_1(n) = n^2$

$$\begin{aligned} c &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{T(n)}{g(n)}\right) + 1 \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4n^3 - 2n^2 + n + 12}{n^2}\right) + 1 \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(4n - 2 + \frac{1}{n} + \frac{12}{n^2}\right) + 1 \\ &= \lim_{n\to\infty} (4n - 1) = \infty. \end{aligned}$$

Då c är obegränsad så kan inte $T_2(n)$ vara $O(n^2)$.



Figur 2: Funktionen $T(n) = 4n^3 - 2n^2 + n + 12$ är uppåt begränsad av $5n^3$ för $n \geq 2$.

1.2.2 $g_2(n) = n^3$

$$
\begin{aligned}
c &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{T(n)}{g(n)}\right) + 1 \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4n^3 - 2n^2 + n + 12}{n^3}\right) + 1 \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(4 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{12}{n^3}\right) + 1 = 5.
\end{aligned}
$$

Vi provar med att söka likhet:

$$
\begin{aligned}
T(n) &= cg(n), \\
4n^3 - 2n^2 + n + 12 &= 5n^3, \\
-n^3 - 2n^2 + n + 12 &= 0.
\end{aligned}
$$

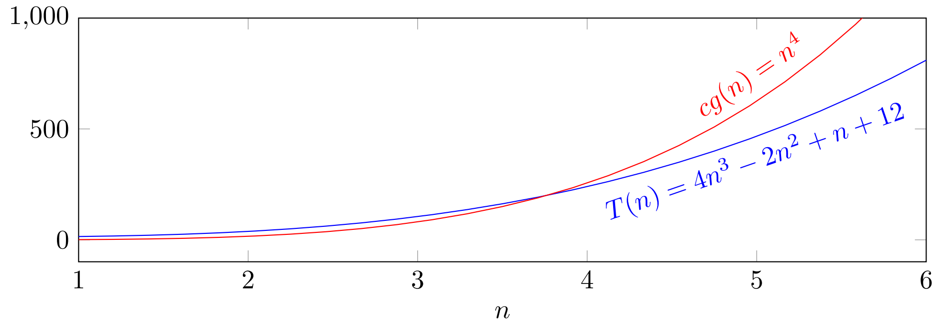
Hmm...lite komplicerat. Vi vill egentligen att $cg(n) \geq T(n)$. Vi provar oss fram:

n	$5n^3$	$T(n)$
1	5	15
2	40	38
3	135	105
4	320	240
5	625	467

Alltså bör $T(n)$ vara uppåt begränsad av $5n^3$ för $n \geq 2$. Vi kollar med överskattningen:

$$
\begin{aligned}
u(n) &= cg(n) - T(n), \\
&= 5n^3 - (4n^3 - 2n^2 + n + 12) = n^3 + 2n^2 - n - 12. \\
u(n_0) &= u(2) = 2. \\
u'(n) &= 3n^2 + 4n - 1. \\
u'(n_0) &= u'(2) = 19.
\end{aligned}
$$

$u'(n_0)$ är alltså positiv och då både $3n^2$ och $4n$ växer med n så kommer $u'(n)$ aldrig att bli negativ för $n \geq n_0$. **Alltså är $T_2(n) = 4n^3 - 2n^2 + n + 12$ av $O(n^3)$ med konstanterna $c = 5$, $n_0 = 2$.** Se också figur 2.



Figur 3: Funktionen $T(n) = 4n^3 - 2n^2 + n + 12$ är uppåt begränsad av n^4 för $n \geq 4$.

1.2.3 $g_3(n) = n^4$

$$\begin{aligned} c &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{T(n)}{g(n)} \right) + 1 \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4n^3 - 2n^2 + n + 12}{n^4} \right) + 1 \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4}{n} - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \frac{12}{n^4} \right) + 1 = 1. \end{aligned}$$

Vi provar med att söka likhet:

$$\begin{aligned} T(n) &= cg(n), \\ 4n^3 - 2n^2 + n + 12 &= n^4, \\ -n^4 - 4n^3 - 2n^2 + n + 12 &= 0. \end{aligned}$$

Nja, vi provar oss fram i stället:

n	n^4	$T(n)$
1	1	15
2	16	38
3	81	105
4	256	240
5	625	467

Alltså bör $T(n)$ vara uppåt begränsad av n^4 för $n \geq 4$. Vi kollar med överskattningen:

$$\begin{aligned} u(n) &= cg(n) - T(n), \\ &= n^4 - (4n^3 - 2n^2 + n + 12) = n^4 - 4n^3 + 2n^2 - n - 12. \\ u(n_0) &= u(4) = 16. \\ u'(n) &= 4n^3 - 12n^2 + 4n - 1, \\ u'(n_0) &= u'(4) = 79. \end{aligned}$$

$u'(n_0)$ är alltså positiv och då $4n^3$ växer fortare än $12n^2$ så kommer $u'(n)$ aldrig att bli negativ för $n \geq n_0$. **Alltså är $T_2(n) = 4n^3 - 2n^2 + n + 12$ av $O(n^4)$ med konstanterna $c = 1$, $n_0 = 4$.** Se också figur 3.

1.3 $T_3(n) = 4n \log n + 3n^3$

Om

$$T(n) = 4n \log n + 3n^3,$$

är $T(n)$ $O(n^3)$? Är $T(n)$ $O(n \log n)$?

1.3.1 $g_1 = n^3$

$$\begin{aligned}
c &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{T(n)}{g(n)}\right)+1 \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n\log n+3n^3}{n^3}\right)+1 \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n\log n}{n^3}+3\right)+1 \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4\log n}{n^2}\right)+4.
\end{aligned}$$

Frågan här är vilken av täljaren $a(n) = 4\log n$ och nämnaren $b(n) = n^2$ som dominerar för stora n. För täljaren gäller att ($\log n$ är den naturliga logaritmen $\ln n$ om ingen bas anges)

$$a'(n) = \frac{4}{n}.$$

Alltså kommer ökningstakten för täljaren att *avstanna* för stora n. För nämnaren gäller att

$$b'(n) = 2n.$$

Ökningstakten för nämnaren kommer alltså att *öka* för stora n. Alltså växer nämnaren fortare än täljaren, bråket går mot noll och

$$c = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4\log n}{n^2}\right)+4 = 4.$$

Vi testar för att hitta n_0:

n	$4n^3$	$T(n)$
1	4	3
2	32	30
3	108	94

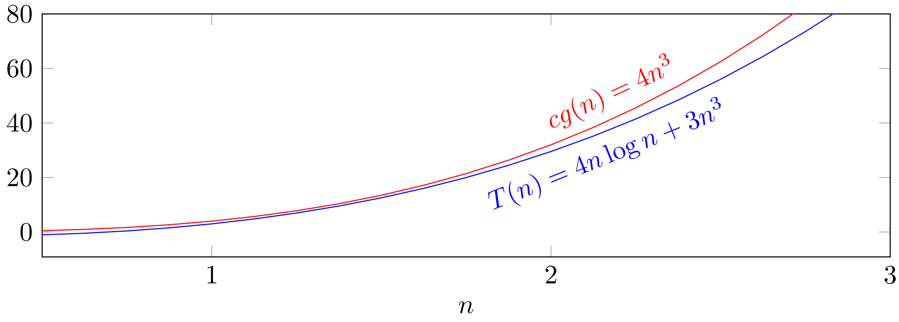
Alltså bör $T(n)$ vara uppåt begränsad av $4n^3$ redan för $n \geq 1$. Vi kollar med överskattningen:

$$\begin{aligned}
u(n) &= cg(n) - T(n), \\
&= 4n^3 - (4n\log n + 3n^3) = n^3 - 4n\log n. \\
u(n_0) &= u(1) = 1. \\
u'(n) &= 3n^2 - 4(1\cdot\log n + n\cdot\frac{1}{n}) = 3n^2 - 4\log n - 4. \\
u'(n_0) &= u'(1) = -1.
\end{aligned}$$

(Derivatan av $n\log n$ fås från produktregeln: $(fg)' = f'g + fg'$ med $f = n$, $g = \log n$.) För $n = 1$ så minskar alltså överskottet. Vi skulle kunna söka var överskottet är som minst (sätta $u'(n) = 0$), men då vi redan vet att $u(2)$ är positiv provar vi med $n_0 = 2$ i stället.

$$u'(n_0) = u'(2) = 5.23.$$

$u'(n_0)$ är alltså positiv och då vi redan visat att n^2 växer fortare än $\log n$ så vet vi att ökningstakten kommer aldrig att bli negativ för $n \geq 2$. **Alltså är $T_3(n) = 4n\log n + 3n^3$ av $O(n^3)$ med konstanterna $c = 4$, $n_0 = 2$.** (Noggrannare kontroll skulle också visat att $n_0 = 1$ duger.) Se också figur 4.



Figur 4: Funktionen $T(n) = 4n \log n + 3n^3$ är uppåt begränsad av $4n^3$ för $n \geq 1$.

1.3.2 $g_2 = n \log n$

$$
\begin{aligned}
c &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{T(n)}{g(n)}\right) + 1 \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4n\log n + 3n^3}{n \log n}\right) + 1 \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(4 + \frac{3n^3}{n\log n}\right) + 1 \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n^2}{\log n}\right) + 5.
\end{aligned}
$$

Som vi tidigare visat så växer n^2 fortare än $\log n$. Alltså blir

$$
c = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n^2}{\log n}\right) + 5 = \infty.
$$

$T(n) = 4n \log n + 3n^3$ **är alltså inte av** $O(n \log n)$**.**

1.4 $T(n) = 4 \cdot 2^n + 3n^3$

Om

$$
T(n) = 4 \cdot 2^n + 3n^3,
$$

är $T(n)$ $O(n^3)$? Är $T(n)$ $O(2^n)$?

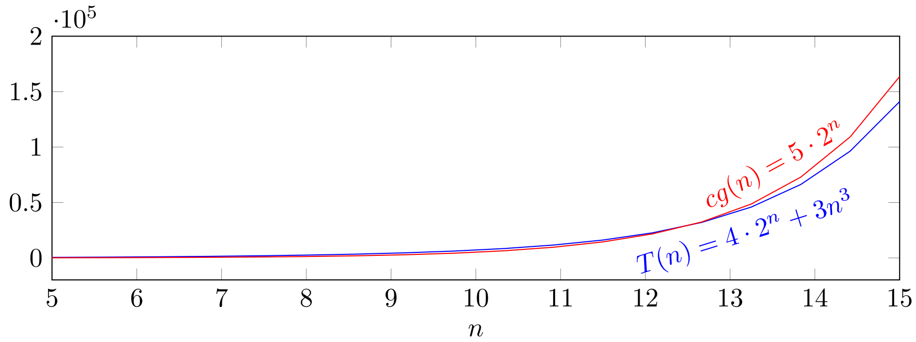
Frågan här är om $a(n) = 2^n$ växer fortare än $b(n) = n^3$. Då $2^n = e^{\log 2 \cdot n}$ blir

$$
\begin{aligned}
a(n) &= 2^n = (e^{\log 2})^n = e^{n \log 2}, \\
a'(n) &= \log 2 \cdot e^{n \log 2}. \\
b(n) &= n^3, \\
b'(n) &= 3n^2.
\end{aligned}
$$

Det är svårt att säga något baserat på förstaderivatorna, men för de högre derivatorna får vi

$$
\begin{aligned}
b'(n) &= 3n^2, \\
b''(n) &= 6n, \\
b'''(n) &= 6. \\
a'(n) &= \log 2 \cdot e^{n \log 2}, \\
a''(n) &= (\log 2)^2 \cdot e^{n \log 2}, \\
a'''(n) &= (\log 2)^3 \cdot e^{n \log 2}.
\end{aligned}
$$

Vi ser alltså att alla derivator av e^n kommer att vara ökande medan tredjederivatan av n^3 är konstant. Alltså kommer 2^n att dominera över n^3 för stora n.



Figur 5: Funktionen $T(n) = 4n \log n + 3n^3$ är uppåt begränsad av $4n^3$ för $n \geq 1$.

1.4.1 $g_1(n) = n^3$

$$
\begin{aligned}
c &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{T(n)}{g(n)} \right) + 1 \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4 \cdot 2^n + 3n^3}{n^3} \right) + 1 \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4 \cdot 2^n}{n^3} + 3 \right) + 1 \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4 \cdot 2^n}{n^3} \right) + 4 = \infty,
\end{aligned}
$$

då vi visat att 2^n växer snabbare än n^3. $T(n) = 4 \cdot 2^n + 3n^3$ **är alltså inte $O(n^3)$.**

1.4.2 $g_2(n) = 2^n$

$$
\begin{aligned}
c &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{T(n)}{g(n)} \right) + 1 \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4 \cdot 2^n + 3n^3}{2^n} \right) + 1 \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4 \cdot 2^n}{2^n} + \frac{3n^3}{2^n} \right) + 1 \\
&= \lim_{n\to\infty} (4 + 0) + 1 = 5.
\end{aligned}
$$

Vi testar för att hitta n_0:

n	$5 \cdot 2^n$	$T(n)$
1	10	11
5	160	503
10	5120	7096
15	163840	141197

Alltså bör $T(n)$ vara uppåt begränsad av $5 \cdot 2^n$ för $n \geq 15$. Enligt figur 5 gäller det redan för $n_0 = 13$.