

F04 — Riktad lista, Kö, algoritmer, pseudokod

5DV149 Datastrukturer och algoritmer

Kapitel 2.1-2.2, 3.4, 4.1-4.2, 8

Niclas Börnin

niclas.borlin@cs.umu.se

2024-01-22 Mån

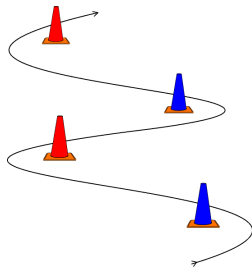
Innehåll

- ▶ Riktad lista
- ▶ Kö
- ▶ Algoritmer
- ▶ Pseudokod
- ▶ Läsanvisningar: Kap 2.1-2.2, 3.4, 4.1-4.2, 8

Riktad lista

Riktad lista

- ▶ Modell: Slalombana
- ▶ Specialisering av `Lista`
 - ▶ Förflyttning bara i en riktning — framåt
- ▶ I `Lista` finns `Previous`- och `End`-operationer så vi kan navigera åt båda hållen
- ▶ Riktad lista har en `Isend`-operation i stället.



Gränsyta till Riktad lista (*Directed List*)

```
abstract datatype DList(val)
auxiliary pos
  Empty() → DList(val)
  Isempty(l: DList(val)) → Bool
  First(l: DList(val)) → pos
  Next(p: pos, l: DList(val)) → pos
  Isend(p: pos, l: DList(val)) → Bool
  Inspect(p: pos, l: DList(val)) → val
  Insert(v: val, p: pos, l: DList(val))
    → (DList(val), pos)
  Remove(p: pos, l: DList(val)) → (DList(val), pos)
  Kill(l: DList(val)) → ()
```

Riktad lista vs. Lista

```
abstract datatype List(val)
```

```
auxiliary pos
```

```
Empty() → List(val)
Iseempty(l: List(val)) → Bool
First(l: List(val)) → pos
End(l: List(val)) → pos
Next(p: pos, l: List(val)) → pos
Previous(p: pos, l: List(val)) → pos
Pos-isequal(p1, p2: pos, l: List(val)) → Bool
Inspect(p: pos, l: List(val)) → val
Insert(v: val, p: pos, l: List(val))
    → (List(val), pos)
Remove(p: pos, l: List(val)) → (List(val), pos)
Kill(l: List(val)) → ()
```

```
abstract datatype DList(val)
```

```
auxiliary pos
```

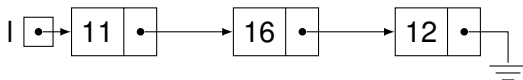
```
Empty() → DList(val)
Iseempty(l: DList(val)) → Bool
First(l: DList(val)) → pos
Isend(p: pos, l: DList(val)) → Bool
Next(p: pos, l: DList(val)) → pos
Inspect(p: pos, l: DList(val)) → val
Insert(v: val, p: pos, l: DList(val))
    → (DList(val), pos)
Remove(p: pos, l: DList(val)) → (DList(val), pos)
Kill(l: DList(val)) → ()
```

Riktad lista, förtydliganden

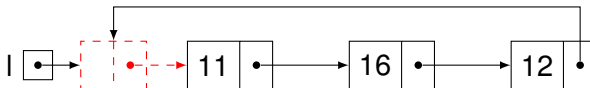
- ▶ `Insert` och `Remove` har samma logik som för `Lista`
 - ▶ `Insert(v, p, l)` sätter in värdet `v` i listan `l` på positionen **omedelbart före** `p` och returnerar den nya listan samt positionen för det **nyinsatta** elementet
 - ▶ `Remove(p, l)` tar bort elementet på positionen `p` i listan `l` och returnerar den nya listan samt positionen **omedelbart efter** det borttagna elementet

Riktad lista, konstruktionsalternativ

- ▶ Fält
- ▶ Dubbellänkad lista (ignorera bakåtlänkarna)
- ▶ Enkellänkad Lista av 1-Cell utan huvud:



- ▶ Använt i flera C-exempel på föreläsningarna.
- ▶ Enkellänkad Lista av 1-Cell med 1-Cell-huvud:

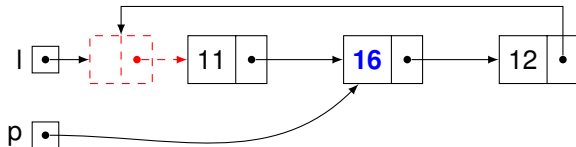


- ▶ Används i kodbasen.
- ▶ Enkellänkad mer ekonomisk än dubbellänkad

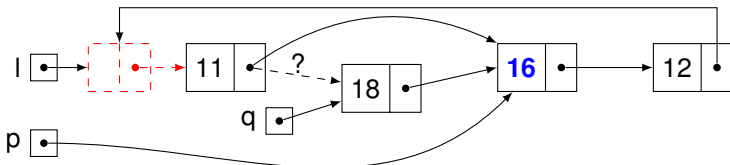
Problem vid insättning

- ▶ Om positionen representeras av en pekare till elementet
- ▶ Insättning av värdet 18 före elementet med positionen p (elementvärde 16, blå fetstil)

▶ Före:



▶ Efter allokering av nytt element, före inlänkning



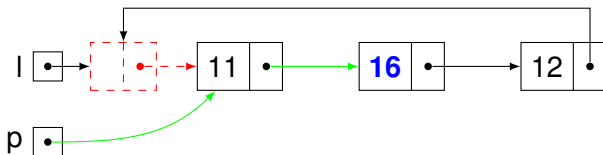
▶ Vi behöver komma åt länken i föregående cell!

Lösning på insättning: Alternativ 1 och 2

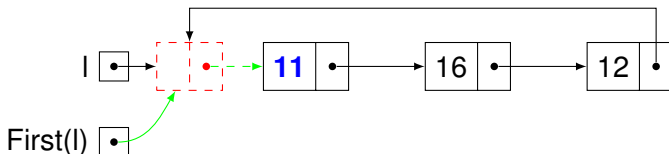
- ▶ Alternativ 1: Kopiering
 - ▶ Insättning före elementet på position p :
 1. Skapa en ny cell
 2. Länka in den efter p
 3. **Kopiera** p :s värde till den nya cellen
 4. Sätt p :s värde till v
 - ▶ Nackdel: Värdet måste kopieras
- ▶ Alternativ 2: Sök från början
 - ▶ Traversera från huvudet till elementet före
 - ▶ Nackdel: Insättning blir **långsam**: $O(n)$
- ▶ Alternativ 3: Byt definitionen av "här"!

Lösning på insättning: Alternativ 3 (1)

- ▶ Använd list-konstruktion med huvud
- ▶ Representera positionen med pekare till **föregående** element
- ▶ `Inspect(p, l)` returnerar `p->next->val` i stället för `p->val`



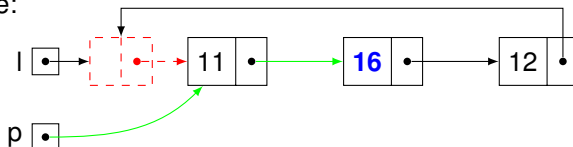
- ▶ `First(l)` returnerar `l->head` i stället för `l->head->next`



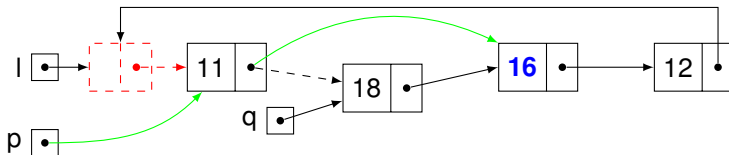
Lösning på insättning: Alternativ 3 (2)

► Insättning:

► Före:



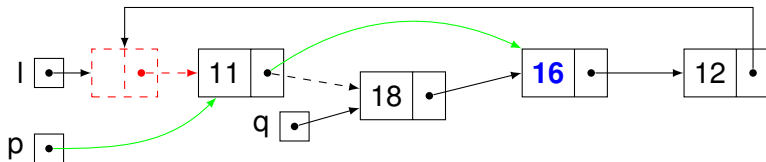
► Efter allokering av nytt element, före inlänkning:



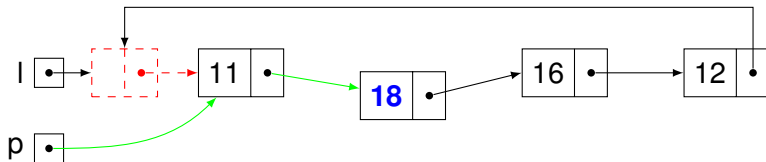
► $p \rightarrow \text{next} = q$ löser problemet

Lösning på insättning: Alternativ 3 (3)

► Före inlänkning:



► Efter inlänkning:



- `p` refererar nu till det nyligen insatta elementet, så `return p` är positionen som ska returneras
- Minimal nackdel: Vi behöver en cell extra.

Blank

Blank

Blank

Kö

- ▶ Modell: Kö.



- ▶ Specialisering av Lista
 - ▶ Begränsningar på operationerna
- ▶ Generisk datatyp (polytyp)
- ▶ Sammansatt — lagrar element
 - ▶ Homogen
- ▶ Linjärt ordnad struktur
- ▶ FIFO — *First In, First Out*
 - ▶ Insättning i **slutet** av kön
 - ▶ Borttagning i **början** av kön

Gränsyta till Kö

```
abstract datatype Queue(val)  
  Empty() → Queue(val)  
  Iseempty(q: Queue(val)) → Bool  
  Enqueue(v: val, q: Queue(val)) → Queue(val)  
  Front(q: Queue(val)) → val  
  Dequeue(q: Queue(val)) → Queue(val)  
  Kill(q: Queue(val)) → ()
```

Kö vs. Stack

```
abstract datatype Queue(val)
  Empty() → Queue(val)
  Isempty(q: Queue(val)) → Bool
  Enqueue(v: val, q: Queue(val)) → Queue(val)
  Front(q: Queue(val)) → val
  Dequeue(q: Queue(val)) → Queue(val)
  Kill(q: Queue(val)) → ()
```

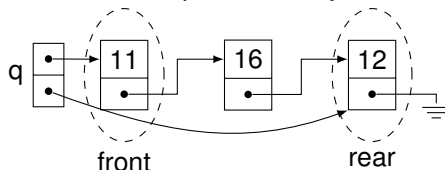
```
abstract datatype Stack(val)
  Empty() → Stack(val)
  Isempty(s: Stack(val)) → Bool
  Push(v: val, s: Stack(val)) → Stack(val)
  Top(s: Stack(val)) → val
  Pop(s: Stack(val)) → Stack(val)
  Kill(s: Stack(val)) → ()
```

Informell specifikation — Kö

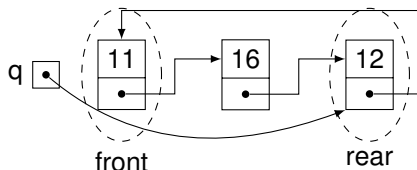
- ▶ `Empty()` — konstruerar en tom kö
- ▶ `Iempty(q)` — testar om kön är tom
- ▶ `Enqueue(v, q)` — sätter in ett element med värdet v sist i kön q
- ▶ `Front(q)` — returnerar värdet av det första elementet i kön (förutsatt att kön inte är tom)
- ▶ `Dequeue(q)` — returnerar kön med det första elementet borttaget (förutsatt att kön inte är tom)

Kö konstruera som Lista

- ▶ Fronten på kön = början på listan
- ▶ Riktad lista med 1-celler
 - ▶ Lista 1: Rak lista: Fronten på kön = början av listan



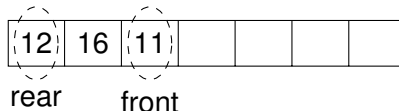
- ▶ Lista 2: Cirkulär lista: Länken i slutet av listan pekar på början av kön



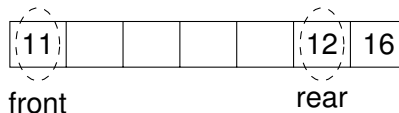
- ▶ Alla kö-operationer går att göra $O(1)$

Kö konstruerad som Fält

- Fält 1: Rak vektor:



- Fält 2: Cirkulär vektor:



- Fördelar:

- Fält 2: **Snabb** avläsning, borttagning, insättning

- Nackdelar:

- Maximal storlek
- Outnyttjat utrymme
- Fält 1: Enqueue är **dyrt** ($O(n)$) pga. omflyttningar
- Fält 2, detalj: Måste lämna en position tom för att kunna skilja mellan en **tom** och **full** kö

Kö, tillämpningar

- ▶ Buffert:
 - ▶ Routrar
 - ▶ Skrivarkö
 - ▶ Telefonkö
- ▶ Bredden-först-traversering

Algoritmer, psuedokod

Vad är en algoritm?

- ▶ **Instruktion** som man följer för att lösa ett **givet** problem på ett **strukturerat** sätt (jfr recept eller IKEA-byggbeskrivning)
 - ▶ Indata
 - ▶ Verktyg
 - ▶ Procedur (algoritm)
 - ▶ Resultat (bullar)
- ▶ *En algoritm är en **stegvis** beskrivning av en **ändlig** process*

Egenskaper för en algoritm

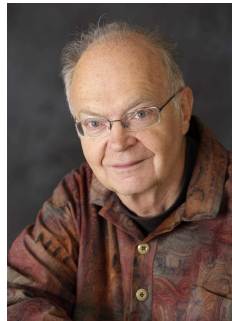
- ▶ **Texten** som beskriver algoritmen har en **fix** (ändlig) storlek
 - ▶ Instruktionen har samma storlek oavsett hur många bullar som bakas
- ▶ **Processen** kan **variera** i storlek
 - ▶ Antalet bullar som bakas kan variera
- ▶ En algoritm kan ha olika **kornighet**
 - ▶ Grovkornig:
 1. Bland mjöl och jäst i en bunke
 - ▶ Finkornig:
 1. Ta fram en bunke som rymmer 5 liter
 2. Ta fram ett decilitermått
 3. Mät upp 5 dl mjöl
 4. Häll mjölet i bunken

Exempel

- ▶ Antag att vi har en lista på alla anställda på ett företag: Namn, Pnr, lön, etc.
 - ▶ Vi vill räkna ut den totala lönekostnaden för företaget
1. Skriv ner talet 0
 2. För varje anställd i listan
 - 2.1 Addera personens lön till det skrivna talet och skriv ner det nya resultatet
 3. När man nått slutet på listan är det nedskrivna talet den totala lönekostnaden

Krav på algoritmer

- ▶ Ändlighet
 - ▶ Algoritmen måste sluta (terminera)
- ▶ Bestämddhet
 - ▶ Varje steg måste vara entydigt
- ▶ Indata
 - ▶ Måste ha noll eller flera indata
- ▶ Utdata
 - ▶ Måste ha ett eller flera utdata
- ▶ Effektivitet/genomförbarhet
 - ▶ Varje steg i algoritmen måste gå att utföra på ändlig tid



Donald Knuth (1938 –)
The Art of Computer Programming,
volumes 1 (1968), 2 (1969), 3 (1973),
4A (2011)

Beräkningsbarhet (mer om detta nästa vecka)

- ▶ Reglerna för algoritmer beskriver inte tillräckligt tydligt vad man kan och inte kan göra i form av algoritmer — vad som är **beräkningsbart**
- ▶ Definition av beräkningsbarhet (Alan Turing, 1936)
 - ▶ *Ett problem är beräkningsbart om och endast om det finns en a-machine (automatic machine)¹ som löser problemet*



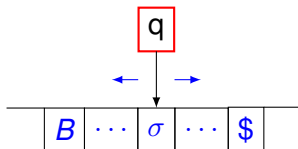
Alan Turing (1912 – 1954)

Turing, A.M. (1936), "On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem", *Proceedings of the London Mathematical Society*, 2 42: 230-65, 1937.

¹senare döpt till Turing-maskin

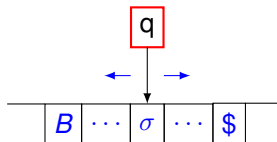
Turing-maskin (1)

- En Turing-maskin är en abstrakt, simpel modell av en beräkningsmaskin och består av:
 1. En **centralenhet** som kan befinna sig i ett **ändligt** antal olika **tillstånd** (*states*).
 2. Ett **oändligt** långt **band** indelat i **celler** som kan innehålla **symboler**. Symbolerna kommer från ett **ändligt** alfabet.
 3. Ett **läs/skriv-huvud**.
 4. En **drivanordning** för bandet.



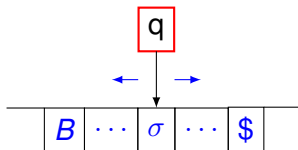
Turing-maskin (2)

- ▶ En Turing-maskin kan utföra 4 operationer:
 1. **Avläsa** symbolen i cellen som är mitt för läs-/ skriv-huvudet (den *aktuella* cellen).
 2. (Radera och) **skriva en ny symbol** i den aktuella cellen.
 3. **Flytta bandet** en cell-längd framåt eller bakåt.
 4. **Stanna maskinen**.
- ▶ Turing-maskinen jobbar i diskreta beräkningssteg.
 - ▶ I varje steg utförs en operation.
 - ▶ Vilken operation Turing-maskinen utför bestäms av en övergångsfunktion (*transition function* eller *action table*).



Turing-maskin (3)

- ▶ Maskinen startar med ett **starttillstånd** och en **given position** på remsan.
- ▶ Maskinen avslutar beräkningen när ett **sluttillstånd** uppnås
 - ▶ Beräkningen kan misslyckas genom att maskinen aldrig uppnår sluttillståndet.
- ▶ Trots sin enkelhet så kan **varje dator-algoritm översättas till en Turing-maskin**.



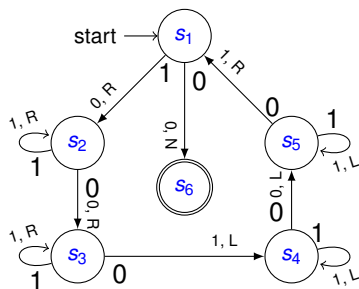
Turing-maskin, exempel (1)

- ▶ <https://sv.wikipedia.org/wiki/Turingmaskin>
- ▶ Tillstånd: s1, s2, s3, s4, s5, s6.
- ▶ Alfabet: 0, 1.
- ▶ Tomma symbolen: 0 (får finnas oändligt många gånger på remsan).
- ▶ Indatasymboler: 1.
- ▶ Starttillstånd: s1.
- ▶ Sluttillstånd: s6.
- ▶ Maskinen startar med läshuvudet vid den första ettan (den längst till vänster).

S	R	W	N	M	Kommentar
s1	0	0	s6	N	Ingen (mer) etta att kopiera. Klar!
s1	1	0	s2	R	Kopiera denna etta till näst-nästa nolla högerut, lämna en nolla so
s2	1	1	s2	R	Leta vidare högerut efter första nollan.
s2	0	0	s3	R	Första nollan hittad. Gå vidare till s3, som hittar andra.
s3	1	1	s3	R	Leta vidare högerut efter andra nollan.
s3	0	1	s4	L	Andra nollan hittad, skriv en etta och gå tillbaka två nollor.
s4	1	1	s4	L	Leta vidare vänsterut efter första nollan på tillbakavägen.
s4	0	0	s5	L	Första nollan hittad. Gå vidare till s5 som hittar andra.
s5	1	1	s5	L	Leta vidare vänsterut efter andra nollan (den som s1 lämnade som
s5	0	1	s1	R	Nollan hittad. Skriv tillbaka den etta som s1 skrev över, och börja s

Turing-maskin, exempel (2)

S	R	W	N	M	Kommentar
s1	0	0	s6	N	Ingen (mer) etta att kopiera. Klar!
s1	1	0	s2	R	Kopiera denna etta till näst-nästa nolla högerut, lämna en nolla so
s2	1	1	s2	R	Leta vidare högerut efter första nollan.
s2	0	0	s3	R	Första nollan hittad. Gå vidare till s3, som hittar andra.
s3	1	1	s3	R	Leta vidare högerut efter andra nollan.
s3	0	1	s4	L	Andra nollan hittad, skriv en etta och gå tillbaka två nollor.
s4	1	1	s4	L	Leta vidare vänsterut efter första nollan på tillbakavägen.
s4	0	0	s5	L	Första nollan hittad. Gå vidare till s5 som hittar andra.
s5	1	1	s5	L	Leta vidare vänsterut efter andra nollan (den som s1 lämnade som
s5	0	1	s1	R	Nollan hittad. Skriv tillbaka den etta som s1 skrev över, och börja s



Turing-maskin, exempel (3)

Steg	Tillstånd	Remsa
1	s1	1 1000
2	s2	0 1 000
3	s2	01 0 00
4	s3	010 0 0
5	s4	01 0 10
6	s5	0 1 010
7	s5	0 1010
8	s1	1 1 010
9	s2	10 0 10
10	s3	100 1 0
11	s3	1001 0
12	s4	100 1 1
13	s4	10 0 11
14	s5	1 0 011
15	s1	11 0 11
16	s6	-stopp-

Pseudokod

Hur beskriver vi algoritmer?

- ▶ Vi använder oss av pseudokod för att beskriva algoritmer
 - ▶ Vi behöver ett språk som:
 - ▶ Kan förstås av en människa.
 - ▶ Är strukturerat och formellt
 - ▶ Mindre formellt än programmeringsspråk
 - ▶ Mix av naturligt språk och programmeringsspråk
 - ▶ Influenser från matematisk notation
 - ▶ Det finns inget universellt språk utan många dialekter
- ▶ Pseudokod döljer mycket av programspråkens designval, dvs. pseudokoden är **oberoende** av programspråk
- ▶ Man ska kunna fokusera på hur man **löser problemet** och inte hur lösningen ska **implementeras**

Pseudokod

- ▶ \leftarrow används för tilldelning.
- ▶ $=$ används för likhetsrelation.
- ▶ Funktionsdeklarationer:
 - ▶ **Algorithm** name(*param1*, *param2*)
- ▶ Beslutsstrukturer:
 - ▶ if ... then ... [else ...]
- ▶ Anrop:
 - ▶ algorithmName (*args*)
- ▶ Villkorsloopar:
 - ▶ while ... do ...
 - ▶ repeat ... until ...
- ▶ Räkneloopar:
 - ▶ for ... do ...
- ▶ Fältindexering:
 - ▶ A[i]
- ▶ Returnera värden:
 - ▶ return *value*

Pseudokod, Exempel

```
Algorithm Array-mean(v: Array, n: Int)  
// Input: An Array v storing n integers  
// Output: The average of the n elements in v  
sum  $\leftarrow$  v[0]  
for i  $\leftarrow$  1 to n-1 do  
    sum  $\leftarrow$  sum + v[i]  
return sum/n
```


Implementationer av pseudokoden

```
Algorithm Array-mean(v: Array, n: Int)  
// Input: An Array v storing n integers  
// Output: The average of the n elements in v  
sum  $\leftarrow$  v[0]  
for i  $\leftarrow$  1 to n-1 do  
    sum  $\leftarrow$  sum + v[i]  
return sum/n
```

C

```
float arrayMean(float *v, int n)  
{  
    float sum = v[0];  
    for (int i=1; i < n; i++)  
        sum += v[i];  
    return sum/n;  
}
```

Python

```
def arrayMean(v,n):  
    sum = v[0]  
    for i in range(1,n):  
        sum = sum + v[i]  
    return sum/n
```

Exempel

- ▶ Skriv en pseudokod för att räkna ut längden på en lista
 - ▶ Använd operationerna för Lista:s ADT

```
Algorithm List-length(l: List)  
// Input: A list  
// Output: The number of elements in the list  
len  $\leftarrow$  0  
p  $\leftarrow$  First(l)  
while not Pos-isequal(p, End(l), l) do  
    len  $\leftarrow$  len + 1  
    p  $\leftarrow$  Next(p, l)  
return len
```

Kopiering av sammansatt datatyp

- ▶ OBS! Kopiering av en **sammansatt** datatyp, t.ex. Lista, Fält, Kö, etc., är **inte** definierat!
 - ▶ Undantaget är om kopieringsoperationen är **explicit** definierad i datatypens gränssnitt
 - ▶ För en kö q_2 , om tilldelningen $q_1 \leftarrow q_2$ är definierad så brukar det betyda att q_1 och q_2 refererar till **samma** kö!
- ▶ Vill man kopiera en sammansatt datatyp måste man själv skriva koden med hjälp av datatypens gränssnitt
- ▶ För exempel, se övningarna i gruppövning 1

Algoritmmonster för lista

- ▶ Traversering
 - ▶ Besök systematiskt alla element i objektet
- ▶ Sökning
 - ▶ Sök efter det första elementet som uppfyller ett bestämt villkor
- ▶ Filtrering
 - ▶ Filtrera ut (behåll) alla element som uppfyller ett bestämt villkor
- ▶ Reduktion
 - ▶ Beräkna en funktion av objektets elementvärden
 - ▶ Ex. summera alla tal i en lista
- ▶ Avbildning (mappning)
 - ▶ Transformera varje elementvärde i en datastruktur
 - ▶ Ex. multiplicera alla talen i en lista med 4

Traversering

► Besök systematiskt alla element i objektet

```
Algorithm List-traverse(l: Directed list,  
                        Do-stuff: Function)  
// Input: A directed list and a function to apply  
//   to each element in the list. The function  
//   should accept element values. The input list  
//   might be modified.  
// Output: None.  
  
// Start at the beginning of the list  
p ← First(l)  
while not Isend(p, l) do  
    // Apply function to each element  
    Do-stuff(Inspect(p, l))  
    // Advance to next element  
    p ← Next(p, l)
```

- Sök efter ett element som uppfyller ett bestämt villkor

```
Algorithm List-seek(l: Directed list,  
                    Match: Function)  
// Input: A list and a match function. The function  
//   should return True if the element value  
//   matches what the caller wants.  
// Output: True/False + pos for the first matching  
//   element, if any.  
  
// Start at the beginning of the list  
p ← First(l)  
while not Isend(p, l) do  
    // Does the element value match what we want?  
    if Match(Inspect(p, l)) then  
        // Yes, return True and the position  
        return (True, p)  
    else  
        // No, advance in the list  
        p ← Next(p, l)  
// No match found, return False  
return (False, None)
```

Filtrering

- Filtrera ut alla element som uppfyller ett bestämt villkor

```
Algorithm List-filter(l: Directed list, Match: Function)  
// Input: A list and a match function. The function  
//   should return True if the element value  
//   matches what the caller wants.  
// Output: A list with all matching elements.  
// NOTE: The output list is in the reverse order.  
  
// Start with an empty output list  
matched ← Empty()  
p ← First(l)  
while not Isend(p, l) do  
  // Does the element value match?  
  val ← Inspect(p, l)  
  if Match(val) then  
    // Yes, insert it first in the output list  
    matched ← Insert(val, First(matched), matched)  
  // Advance in the input list  
  p ← Next(p, l)  
// Return the list of matched element values  
return matched
```

Avbildning (mappning)

► Transformera varje elementvärde i en datastruktur

```
Algorithm List-map(l: Directed list, Map: Function)
// Input: A list and a mapping function. The function
//        should accept an element value and return a
//        transformed value.
// Output: A list with transformed elements in
//        the same order as in the input list.

// Start with an empty output list
// Keep track of last position in m, i.e. position
// where to insert elements
m ← Empty()
q ← First(m)

p ← First(l)
while not Isend(p, l) do
    v ← Map(Inspect(p, l))
    (m, q) ← Insert(v, q, m)
    q ← Next(q, m)
    p ← Next(p, l)
return m
```


Reduktion

► Beräkna en funktion av objektets elementvärden

```
Algorithm List-reduce(l: Directed list,  
                    Combine: Function)  
// Input: A list and a function. The function  
//   should accept two element values and return  
//   a combination of the values  
// Output: The result of the function applied to  
//   all elements in the list  
// NOTE: The function should be commutative  
  
p ← First(l)  
res ← Inspect(p, l)  
while not Isend(p, l) do  
    res ← Combine(res, Inspect(p, l))  
    p ← Next(p, l)  
return res
```

Exempel

- ▶ Skriv en algoritm som delar upp en lista så att udda tal hamnar i en ny lista och jämna tal i en annan

Algorithm 1

```
Algorithm List-split1(l: Directed list)
// Input: A list holding integers
// Output: Two lists holding the odd and even numbers
//         of the input list, respectively, in unchanged
//         order
odd ← List-empty()
ipo ← First(odd) // Insert position in odd list
even ← List-empty()
ipe ← First(even) // Insert position in even list
p ← First(l) // Position in input list
while not Isend(p, l) do
    v ← Inspect(p, l)
    if Is-odd(v) then
        // Insert and advance in odd list
        (odd, ipo) ← Insert(v, ipo, odd)
        ipo ← Next(ipo, odd)
    else
        // Insert and advance in even list
        (even, ipe) ← Insert(v, ipe, even)
        ipe ← Next(ipe, even)
    // Advance in input list
    p ← Next(p, l)
return (odd, even)
```

Algorithm 2

```
Algorithm List-split2(l: Directed list)
// Input: A list holding integers
// Output: One lists holding the odd numbers and
//         the original list, modified to hold
//         the even numbers only
odd ← List-empty()
ipo ← First(odd) // Insert position in odd list
p ← First(l) // Position in input list
while not Isend(p, l) do
    v ← Inspect(p, l)
    if Is-odd(v) then
        // Insert and advance in odd list
        (odd, ipo) ← Insert(v, ipo, odd)
        ipo ← Next(ipo, odd)
        // Remove from input list
        // Returned p will refer to next unprocessed element
        (l, p) ← Remove(p, l)
    else
        // Advance to next unprocessed element in input list
        p ← Next(p, l)
return (odd, l)
```