F10 - Mängd, graf

5DV149 Datastrukturer och algoritmer
Kapitel 13.1–13.2, 17

Niclas Börlin
niclas.borlin@cs.umu.se

2024-02-12 Mån

Innehåll

- Mängd
- Graf
- OU 4

Mängd

Mängd

- Modell:
  - En påse (men man kan inte ha två likadana element)
- Organisation:
  - En oordnad samling av element som är av samma typ
  - Grundmängden behöver inte vara ändlig (ex. heltal) men dataobjekten är ändliga
  - Kan inte innehålla två element med likadana värden
  - En mängd kan inte innehålla mängder
  - Homogen datatyp
- En mängd som kan innehålla flera element med samma värde kallas multimängd (multiset) eller påse (bag)
  - Vid textsökning betraktas ofta ett dokument som en påse av ord (*bag of words*), där bara ordens frekvens räknas (jfr. google)

Specifikation (1)

```
abstract datatype Set(val)
  Empty() → Set(val)
  Single(v: val) → Set(val)
  Insert(v: val, s: Set(val)) → Set(val)
  Union(s: Set(val), t: Set(val)) → Set(val)
  Intersection(s: Set(val), t: Set(val)) → Set(val)
  Difference(s: Set(val), t: Set(val)) → Set(val)
  Isempty(s: Set(val)) → Bool
  Member-of(v: val, s: Set(val)) → Bool
  Choose(s: Set(val)) → val
  Remove(v: val, s: Set(val)) → Set(val)
  Equal(s: Set(val), t: Set(val)) → Bool
  Subset(s: Set(val), t: Set(val)) → Bool
  Kill(s: Set(val)) → ()
```

Specifikation (2)

- Boken har tagit med de vanliga matematiska mängdoperationerna
- Alla behövs inte
- Följande operationer räcker:

```
abstract datatype Set(val)
  Empty() → Set(val)
  Isempty(s: Set(val)) → Bool
  Insert(v: val, s: Set(val)) → Set(val)
  Member-of(v: val, s: Set(val)) → Bool
  Choose(s: Set(val)) → val
  Remove(v: val, s: Set(val)) → Set(val)
  Kill(s: Set(val)) → ()
```

Konstruktion av mängd, dubletter

- De flesta konstruktioner måste kunna hantera att det inte får finnas dubletter i en mängd
- Mängd som Lista har två alternativ:
  - Se till att listan inte har dubbletter (krav på `Insert` och `Union`)
  - Låt listan innehålla dubbletter (krav på `Equal`, `Remove`, `Intersection`, `Difference`)

Konstruktion av mängd som lista

- Komplexitet:
  - Metoder som kräver sökningar i listan: $O(n)$
  - Binära mängdoperationerna mellan två listor med m och n element har komplexitet $O(mn)$
- Listan kan konstrueras på olika sätt
  - Sorterad lista är effektivare för de binära mängdoperationerna

Konstruktion av mängd som bitvektor (1)

- En bitvektor är en vektor med elementvärden av typen `Bit` $= \{0,1\}$
- Ofta tolkas 0=falskt och 1=sant, dvs `Bit` identifieras som datatypen `Boolean`
- Grundmängden måste ha en diskret linjär ordning av elementen (elementen kan *numreras*)
  - Bit k i bitvektorn motsvarar det k:te elementet i grundmängden
  - Biten är 1 om elementet ingår i mängden

Konstruktion av mängd som bitvektor (2)

- Veckoschema måndag-fredag timvis, 08-17 i 64-bitars heltal:

	Mon	Tue	Wed	Thu	Fri
08-09	X			X	
09-10	X			X	
10-11					
11-12					
12-13					
13-14	X			X	
14-15	X			X	
15-16					
16-17					

- Om bitarna räknas från höger till vänster:

```
3210987654321098765432109876543210987654321098765432109876543210
~~~6~~~~~~~~~5~~~~~~~~~4~~~~~~~~~3~~~~~~~~~2~~~~~~~~~1~~~~~~~~~0

- - - - - - - - - -FFFFFFFFFTTTTTTTTTWWWWWWWWWTTTTTTTTTMMMMMMMMM

0000000000000000000000000000001100011000000000000000000001100011
```

  - `IsBusy(day, hour, word)`:
    - `BitGet(word, (day-Mon)*9+(hour-8))`
  - `Clash(word1, word2)`:
    - `And(word1, word2)`

Konstruktion av mängd som bitvektor (3)

- Sökoperationer och binära operationer har komplexitet $O(M)$, där M är antalet element i grundmängden
- Om bitvektorn finns implementerad som ett eller flera ord (*memory words*) kan man utnyttja maskinoperationer
  - Processorn gör operationen samtidigt på alla element i vektorn
  - Detta gör många metoder effektiva
  - Ex. för en ordlängd på 64 bitar=8 bytes så tar `AND` för 64 bitar samma tid som `AND` för 1 bit

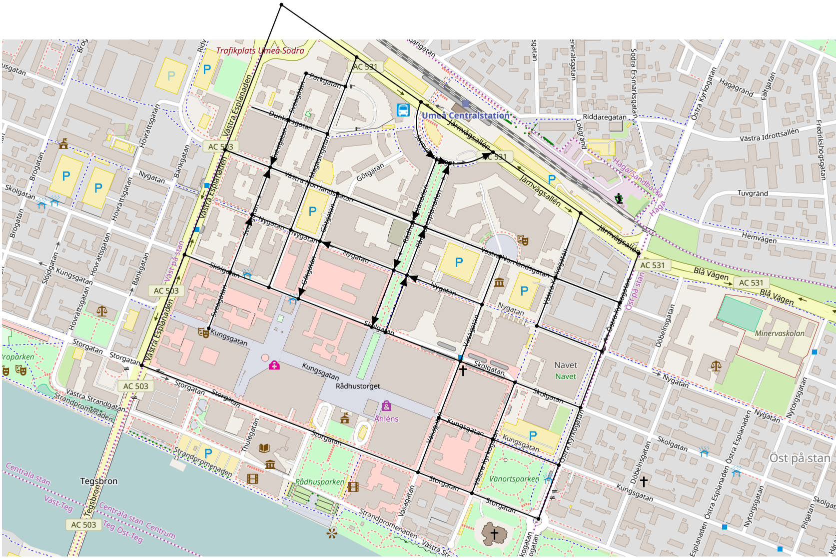
Konstruktion av mängd som bitvektor (4)

- Grundmängden måste vara ändlig och i praktiken liten
- Reserverat minne proportionellt mot grundmängdens storlek
  - Ett veckoschema måndag-fredag, uppdelat i timmar 08-17 kräver $M = 45$ bitar (9h per dag, 5 dagar) $=$ 6 bytes
  - Ett veckoschema 24/7 uppdelat i 5-minutersintervall kräver $M = 2016$ bitar ($7 \cdot 24 \cdot 12$)=252 bytes
  - En tabell över upptagna IP4-internetadresser kräver $M = 2^{32} = 4294967296$ bitar $\approx$ 0.5Gbyte
- Få element per mängd utnyttjar minnet ineffektivt

Graf

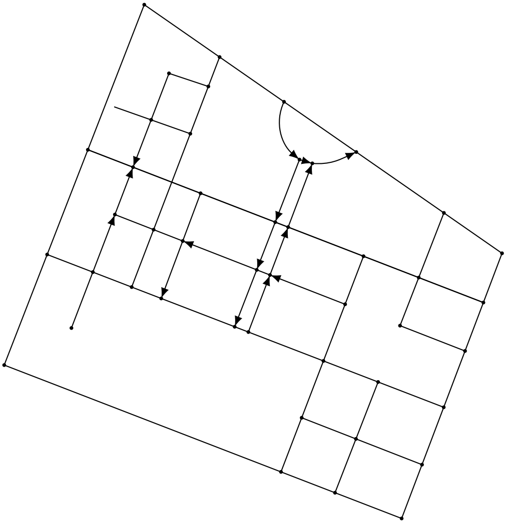
Graf

- Modell: Vägkarta med enkelriktade gator utritade.

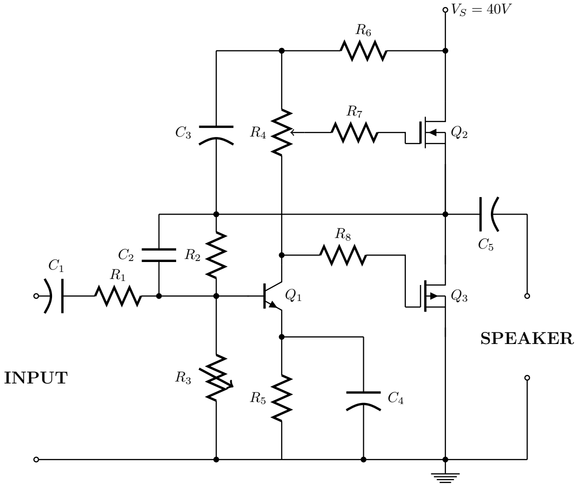


Graf

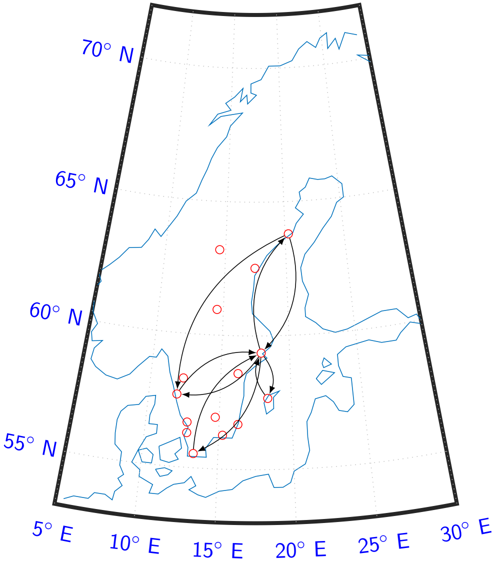
- Modell: Vägkarta med enkelriktade gator utritade.



Graf, tillämpningar — elektriska kretsar



Graf, tillämpningar — nätverk (gator, flygrutter, kommunikation)



Specifikation av Graf

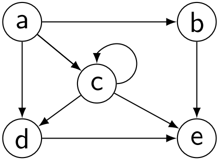
- En graf är
  - en sammansatt datatyp — innehåller noder
  - en homogen datatyp — alla noder är av samma typ
  - oordnad — det finns ingen första nod
- En graf kan vara riktad och oriktad
- Specifikationen för Graf kan vara
  - mängd-orienterad eller
  - navigerings-orienterad

Blank

Mängdorienterad specifikation, riktad graf

- Vanlig inom matematiken
- En graf $G = (V, E)$ består av:
  - en mängd V noder (*vertices*) och
  - en mängd E bågar (*edges*) som binder samman noderna i V
    - En båge $e = (u, v)$ är ett ordnat par av noder
      - Bågen har riktning, den går från u till v
      - Bågen gör noden v till granne till u, men inte tvärtom
- Exempel:

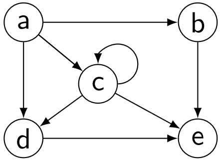
$$V = \{a, b, c, d, e\},$$
$$E = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, e), (c, c), (c, d), (c, e), (d, e)\}$$



Navigeringsorienterad specifikation, riktad graf

- En graf är en mängd med noder
  - Till varje nod associeras en grannskapsmängd av noder som kallas grannar
- Bågarna utgör ordnade par av noder bestående av varje nod u och varje nod v i u:s grannskapsmängd
  - Bågarna är riktade:
    - om noden v ligger i u:s grannskapsmängd så går det en båge från u till v, men inte tvärtom
    - bågen gör noden v till granne till u, men inte tvärtom
- Exempel:

$$\begin{aligned} G = \{\ & (a, \{b, c, d\}) \\ & (b, \{e\}) \\ & (c, \{c, e, d\}) \\ & (d, \{e\}) \\ & (e, \{\})\ \} \end{aligned}$$



Gränsyta graf

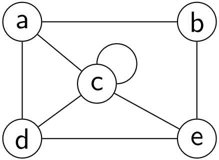
```
abstract datatype Graph(node, edge)
  Empty() → Graph(node, edge)
  Insert-node(n: node, g: Graph(node, edge))
                                              → Graph(node, edge)
  Insert-edge(e: edge, g: Graph(node, edge))
                                              → Graph(node, edge)
  Isempty(g: Graph(node, edge)) → Bool
  Has-no-edges(g: Graph(node, edge)) → Bool
  Choose-node(g: Graph(node, edge)) → node
  Neighbours(n: node, g: Graph(node, edge)) → Set(node)
  Delete-node(n: node, g: Graph(node, edge))
                                              → Graph(node, edge)
  Delete-edge(e: edge, g: Graph(node, edge))
                                              → Graph(node, edge)
  Kill(g: Graph(node, edge)) → ()
```

Tänkbar informell specifikation

- `Empty()` — konstruerar en tom graf utan noder och bågar
- `Insert-node(n, g)` — sätter in noden n i grafen g
- `Insert-edge(e, g)` — sätter in bågen e i grafen g
  - Det förutsätts att noderna i e finns i grafen
- `Isempty(g)` — testar om grafen g är tom, dvs. utan noder och bågar
- `Has-no-edges(g)` — testar om grafen g saknar bågar
- `Choose-node(g)` — väljer ut en godtycklig nod ur grafen g
- `Neighbours(n, g)` — returnerar mängden av alla grannar till noden n i grafen g
- `Delete-node(n, g)` — tar bort noden n ur grafen g
  - Det förutsätts att n inte ingår i nån båge
- `Delete-edge(e, g)` — tar bort bågen e ur grafen g
- `Kill(g)` — returnerar alla resurser som upptas av g

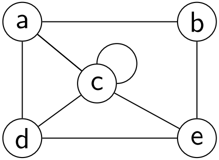
Oriktade grafer (1)

- I en oriktad graf utgör bågarna en mängd av två noder
  - Noderna är grannar till varandra
  - Inga riktade bågar kan förekomma
- I den mängdorienterade specifikationen definierar vi om bågarna till att vara mängder $\{u, v\}$ av nodpar



- Exempel:

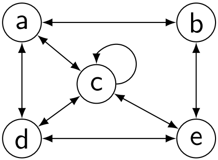
$$V = \{a, b, c, d, e\},$$
$$E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, e\}, \{c, c\}, \{c, d\}, \{c, e\}, \{d, e\}\}$$



Oriktade grafer (2)

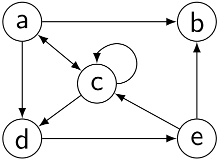
- I bägge representationerna kan vi implementera en oriktad graf som en riktad genom att modifiera `Insert-edge` och `Remove-edge`
  - Ett anrop till `Insert-edge(g, a, b)` skulle då sätta in både bågen från a till b och från b till a

$$
\begin{aligned}
V &= \{a, b, c, d, e\},\\
E &= \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, e),\\
&\quad (b, a), (c, a), (d, a), (e, b),\\
&\quad (c, c), (c, d), (c, e), (d, e),\\
&\quad (d, c), (e, c), (e, d), \}\\
G &= \{\ (a, \{b, c, d\})\\
&\quad (b, \{e, a\})\\
&\quad (c, \{c, e, a, d\})\\
&\quad (d, \{e, a, c\})\\
&\quad (e, \{d, c, b\})\ \}
\end{aligned}
$$

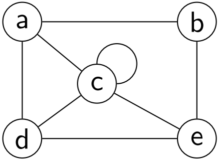


Gradtal

- Noder i riktade grafer har två gradtal:
  - Ingradtalet: antalet bågar som går till noden.
  - Utgradtalet: antalet bågar som startar i noden och går till en annan nod.



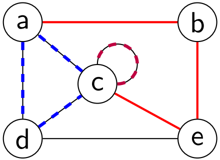
- Noder i oriktade grafer har ett gradtal:
  - Gradtalet = Antalet bågar till grannar (inklusive sig själv)



Blank

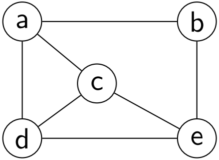
Terminologi, vägar

- Väg / stig (*path*): En sekvens av noder $v_1, v_2, \ldots, v_n$ så att v_i och v_{i+1} är grannar
  - Sekvenserna $a - b - e - c$ och $a - c - d - a$ är vägar
- Enkel väg (*simple path*): Inga noder förekommer två gånger i vägen
  - Vägen $a - b - e - c$ är en enkel väg
- Cykel (*cycle*): En väg där den sista noden i sekvensen är densamma som den första
  - Vägen $a - c - d - a$ är en cykel
  - Vägen $c - c$ är en cykel

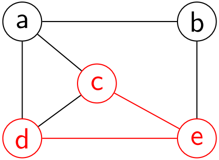


Terminologi, sammanhängande

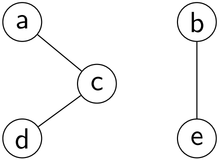
- Sammanhängande (*connected*) graf:
  - Varje nod har en väg till varje annan nod



- Delgraf (subgraf):
  - En delmängd av noderna och kanterna som formar en graf

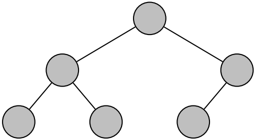


- Icke sammanhängande med sammanhängande komponenter
  - Till höger finns en graf med två sammanhängande komponenter



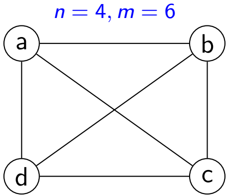
Träd som specialfall av graf

- Ett träd är en sammanhängande, oriktad graf utan cykler



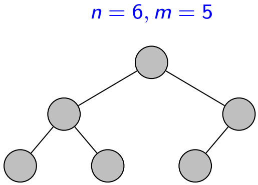
Terminologi, nåbarhet (*Connectivity*) (1)

- Låt n = antalet noder och m = antalet bågar
- En komplett graf (*complete graph*) får man när alla noder är grannar till alla andra
  - I en komplett, riktad graf är $m = n(n-1)$
  - I en komplett, oriktad graf är $m = n(n-1)/2$

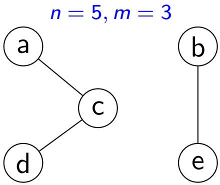


Terminologi, nåbarhet (*Connectivity*) (2)

- För ett träd gäller $m = n - 1$



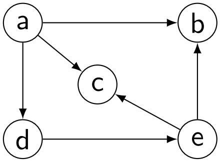
- Om $m < n - 1$ så kan grafen inte vara sammanhängande



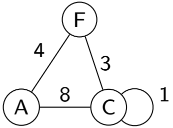
- För en sammanhängande graf varierar m från att vara $O(n)$ (träd) till att vara $O(n^2)$ (komplett graf)

Andra grafer

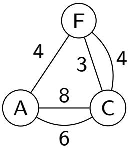
- DAG = *Directed Acyclic Graph*:
  - En riktad graf utan cykler



- Viktad graf:
  - En graf där bågarna har vikter



- Multigraf:
  - Tillåtet med flera bågar mellan två noder
  - Bågarna har olika egenskaper som måste lagras

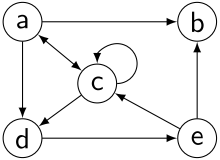


Konstruktion av grafer

- Det finns många sätt att konstruera en graf
- Vi kommer att fokusera på två:
  - Graf med förbindelsematris (*adjacency matrix*)
  - Graf som Fält av Lista

Graf med förbindelsematris (*adjacency matrix*)

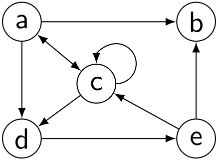
- Bågarna representeras av ettor i en matris
  - Rad i visar vilka bågar man kan nå från nod i
  - Kolumn j visar från vilka noder det kommer bågar till nod j
- Enkel att implementera
  - Passar också med vikter på bågar
- Matrisen kan bli stor
  - Minne: $O(n^2)$

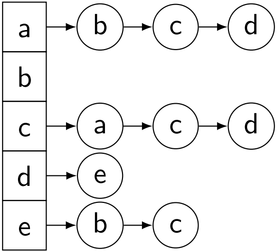


	a	b	c	d	e
a	0	1	1	1	0
b	0	0	0	0	0
c	1	0	1	1	0
d	0	0	0	0	1
e	0	1	1	0	0

Graf som Fält av Lista

- Fältelementen innehåller en nod och en lista — grannskapslistan
- Antalet noder fixt (Fält), antalet grannar per nod variabelt (Lista)
- Inte lika utrymmeskrävande som en matris
  - Utrymmet $O(m+n)$





Introduktion till OU4

OU4 — Grafer och grafalgoritmer

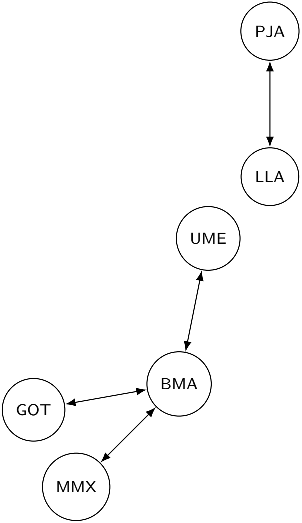
- Skriv ett program som:
  1. Läser in en beskrivning av en riktad graf (textfil)
  2. Besvarar frågor om det finns någon väg mellan noderna
     - För att svara på frågan så ska en bredden-först-traversering göras i grafen (nästa föreläsning)
- Programmet ska ta namnet på en fil med grafbeskrivningen som kommandoradsparameter
- Frågorna ska ställas interaktivt till användaren

Kartfil

- Exempel på kartfil

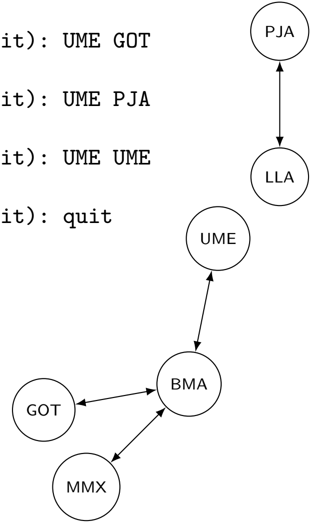
```
# Some airline network
8
UME BMA # Umea-Bromma
BMA UME # Bromma-Umea
BMA MMX # Bromma-Malmo
MMX BMA # Malmo-Bromma
BMA GOT # Bromma-Goteborg
GOT BMA # Goteborg-Bromma
LLA PJA # Lulea-Pajala
PJA LLA # Pajala-Lulea
```

- Motsvarande graf



Exempelkörning

```
> ./isConnected airmap1.map
Enter origin and destination (quit to exit): UME GOT
There is a path from UME to GOT.
Enter origin and destination (quit to exit): UME PJA
There is no path from UME to PJA.
Enter origin and destination (quit to exit): UME UME
There is a path from UME to UME.
Enter origin and destination (quit to exit): quit
Normal exit.
```



Design av grafen

- Ni ska designa och implementera grafen själva
- Ni får gränsytan specificerad i en fil `graph.h`
- Ni måste följa gränsytan
- Ni ska implementera två versioner av grafen (i filerna `graph1.c` och `graph2.c`)
  - Den ena designen är fri
  - Den andra måste använda en grannskapsmatris
- Ni ska också skriva ett huvudprogram i `is_connected.c`
  - Funktionerna i `is_connected.c` använder någon av graf-versionerna
    1. inläsning av filen,
    2. uppbyggnad av grafen,
    3. interaktionen med användaren och
    4. sökalgoritmen
- Implementerat korrekt kommer `is_connected.c` att gå att kompilera utan förändringar tillsammans med `graph1.c` eller `graph2.c` och fungera korrekt

Obligatorisk uppgift 4

- Börja i tid med uppgiften!
- Redan nu kan ni t.ex. börja fundera på inläsning från fil och hur ni vill konstruera grafen
  - Sikta på att ha klarat av detta före tentan
- Algoritmerna för traversering kommer att gås igenom på nästa föreläsning
- Ni får jobba i enskilt, eller i grupper på upp till tre personer
  - Bästa pedagogiska effekt får ni om ni jobbar i grupper om tre
    - En person fokuserar på `graph1.c`
    - En person fokuserar på `graph2.c`
    - En person fokuserar på `is_connected.c`
    - Alla ska förstå allas lösningar

Feedback från LP3 (1)

- Student 1
  - ”This assignment has been a challenging one, starting with it early helped me tremendously. As per usual working with C, the memory handling has been frustrating, but in this assignment I felt that a lot of what I learned from the previous ou3 assignment translated over to working with ou4. Especially when it came to solving double frees and segmentation faults. To my surprise the part of the assignment I got stuck on the longest was doing the breadth-first traversal. The reason for that boiled down to the fact that I had not understood my code fully. I was completely perplexed to as why I was receiving segmentation fault. What I thought was a very logical solution ended up being completely illogical to how I had implemented my graph. I did not find the flaw until I used a debugging program and carefully observing what happened to the memory addresses.”

Feedback från LP3 (2)

- Student 2+3
  - "Den största utmaningen med denna övning var att komma igång, det kändes motigt att gå igenom och labb-specifikationen som är väldigt omfattande. När det väl var gjort och vi kände att vi hade greppat vad som behövde göras gick det lättare. Det var dock även en stor utmaning att implementera algoritmerna för programmet och få alla pusselbitar att falla på plats. I efterhand inser vi att vi hade sparat oss en del lidande om vi hade bitit i det sura äpplet och tagit oss igenom labb-specifikationen lite tidigare i arbetsförloppet."

Feedback från LP3 (3)

- Student 4 (jobbade i par)
  - Jag tycker den här uppgiften var spännande och lärorik. Den var krävande på ett annat sätt än de tidigare uppgifterna, eftersom vi fick bestämma själva hur grafen skulle implementeras, vilket var kul. Planeringsfasen var den viktigaste delen. Vi upptäckte tidigt brister i våra initiala ideér, och kunde snabbt avfärda dem, utan en rad kod. Det gjorde att när vi väl kom till utvecklingsfasen så gick det snabbt framåt. Båda visste exakt hur programmet skulle fungera, så det fanns inga tvetydligheter. Användandet av git underlättade också avsevärt. Vi kunde lugnt delegera vad som skulle göras, och låta git sköta sammanfogningen av vår kod. Anton är väldigt rolig att jobba med, eftersom vi har samma mål med programmet, och båda tycker det är väldigt kul med programmering, vilket förstås underlättar mycket.
- Student 5+6
  - ... Denna uppgift har man verkligen behövt läsa igenom noga för att inte slösa massvis med tid på ofunktionella implementationer.