F05 - Sortering och sökning

5DV149 Datastrukturer och algoritmer
Kapitel 15

Niclas Börlin
niclas.borlin@cs.umu.se

2024-04-12 Fre

Innehåll

- Sortering
  - Varför ska man sortera?
  - Sortering kontra sorterad datatyp
  - Stabilitet
  - Grundprinciper för sortering
  - Genomgång av några sorteringsalgoritmer
- Linjär och binär sökning
- Läsanvisningar:
  - s. 59, Kap 15.

Sortering

Varför sortering?

- För att snabba upp andra algoritmer!
  - Sökning går fortare
- Nödvändigt för stora datamängder

Sortering kontra Sorterad datatyp

- Sortering förändrar ordningen mellan objekten i en struktur efter en sorteringsordning (fallande, ökande)
  - Gränsytan är oförändrad
  - Exempel: Vi sorterar en Lista
- Sorterad datatyp:
  - De strukturförändrande operationerna i gränsytan (`Insert`, `Remove`) upprätthåller en sorteringsordning mellan de lagrade elementen
  - Exempel: Gränsytan för Sorterad lista behöver modifieras jämfört med Lista

Saker att beakta

- Absolut komplexitet:
  - Totala komplexiteten i alla implementationssteg
    - Tabell (konstruerad som) Lista (implementerad som) dubbellänkad lista
- Passar en viss typ av sortering för en viss typ av konstruktion?
  - Fält-baserad lista
  - Länkad lista
- Ska man
  1. sortera och sedan söka, eller
  2. behålla listan osorterad och göra linjär sökning?
- Sortering är ofta $O(n \log n)$
  - Sökning i sorterad mängd är ofta $O(\log n)$
- Linjärsökning är $O(n)$

Stabilitet

- Den inbördes relationen mellan två objekt med samma sorteringsnyckel bibehålls vid sortering:
  - Lista sorterad efter efternamn:
    (Alm, Lars), (Bok, Bo), (Ek, Eva), (Gran, Anna), (Löv, Eva)
  - Lista stabilt omsorterad efter andra elementvärdet:
    (Gran, Anna), (Bok, Bo), (Ek, Eva), (Löv, Eva), (Alm, Lars)
- Ett till exempel på stabil sortering (index för att förtydliga):

Före:	1	0_1	5	2	3_1	0_2	4	3_2	7
Efter:	0_1	0_2	1	2	3_1	3_2	4	5	7

- Alla sorteringsalgoritmer går inte att göra stabila
- Mer om detta senare

Grundprinciper

- Urvalssortering
  - Välj ut det in-element som är på tur att sättas in
  - Sätt in det först/sist
- Instickssortering
  - Välj ett godtyckligt in-element och sätt in det på rätt plats
- Utbytessortering
  - Byt plats på objekt som ligger fel inbördes
- Samsortering
  - Sammanslagning av redan sorterade strukturer
- Nyckelsortering:
  - Kräver mer information/kunskap om nyckelmängden
  - T.ex. sortera 200 tentor i kodordning där koden har max 3 siffror

Inplace

- En del sorteringsalgoritmer finns i två versioner
  - En version som bygger en "ny" sorterad kopia av indatat
    - Behöver typiskt $O(n)$ minne
    - Oftast enklare algoritm
  - En version som jobbar direkt i indatat, oftast ett fält
    - Kallas för in-place-versioner
    - Behöver endast $O(1)$ minne
    - Ibland komplexa algoritmer

Sorteringsalgoritmer

- Idag:
  - Urvalssortering (*Selection Sort*)
  - Instickssortering (*Insertion Sort*)
  - Bubbelsortering (*Bubble Sort*)
  - Mergesort
  - Quicksort
  - Facksortering (*Bucket sort*)
- Senare:
  - Heapsort

Blank

Blank

Selection sort — urvalssortering

Selection sort av lista

- Algoritmen i grova drag:
  - Välj ut det bästa elementet i in-listan
  - Stoppa in elementet sist i ut-listan

Selection sort — exempel

Input:	7	3	15	0	2	7	6	5	19	9

Output:

Selection sort — exempel

Input:	7	3	15	0	2	7	6	5	19	9

Output:

Selection sort — exempel

Input:	7	3	15	0	2	7	6	5	19	9

Output:

Selection sort — exempel

Input:	7	3	15	0	2	7	6	5	19	9

Output:

Selection sort — exempel

Input: | 7 | 3 | 15 | 0 | 2 | 7 | 6 | 5 | 19 | 9 |

Output:

Selection sort — exempel

Input:	7	3	15	0	2	7	6	5	19	9

Output:

Selection sort — exempel

Input: $\boxed{7}$ $\boxed{3}$ $\boxed{15}$ $\boxed{0}$ $\boxed{2}$ $\boxed{7}$ $\boxed{6}$ $\boxed{5}$ $\boxed{19}$ $\boxed{9}$

Output:

Selection sort — exempel

Input: $\boxed{7}$ $\boxed{3}$ $\boxed{15}$ $\boxed{0}$ $\boxed{2}$ $\boxed{7}$ $\boxed{6}$ $\boxed{5}$ $\boxed{19}$ $\boxed{9}$

Output:

Selection sort — exempel

Input: | 7 | 3 | 15 | 0 | 2 | 7 | 6 | 5 | 19 | 9 |

Output:

Selection sort — exempel

Input: | 7 | 3 | 15 | 0 | 2 | 7 | 6 | 5 | 19 | 9 |

Output:

Selection sort — exempel

Input: | 7 | 3 | 15 | 0 | 2 | 7 | 6 | 5 | 19 | 9 |

Output:

Selection sort — exempel

Input:	7	3	15	0	2	7	6	5	19	9

Output:

Selection sort — exempel

Input:	7	3	15	0	2	7	6	5	19	9

Output:

Selection sort — exempel

Input: 7 3 15 $\boxed{0}$ 2 7 6 5 19 9

Output:

Selection sort — exempel

Input:	7	3	15	$\boxed{0}$	2	7	6	5	19	9

Output:

Selection sort — exempel

Input:	7	3	15	0	2	7	6	5	19	9
Output:	0									

Selection sort — exempel

Input: 7 3 15 0 2 7 6 5 19 9

Output: 0

Selection sort — exempel

Input:	7	3	15	0	2	7	6	5	19	9
Output:	0									

Selection sort — exempel

Input: 7 3 15 0 2 7 6 5 19 9

Output: 0

Selection sort — exempel

Input:	7	3	15	0	2	7	6	5	19	9
Output:	0									

Selection sort — exempel

Input:	7	3	15	0	2	7	6	5	19	9
Output:	0									

Selection sort — exempel

Input: 7 3 15 0 2 7 6 5 19 9

Output: 0

Selection sort — exempel

Input: 7 3 15 0 2 7 6 5 19 9

Output: 0

Selection sort — exempel

Input:	7	3	15	0	2	7	6	5	19	9
Output:	0									

Selection sort — exempel

Input: | 7 | 3 | 15 | 0 | 2 | 7 | 6 | 5 | 19 | 9 |

Output: | 0 |

Selection sort — exempel

Input: | 7 | 3 | 15 | 0 | 2 | 7 | 6 | 5 | 19 | 9 |

Output: | 0 |

Selection sort — exempel

Input:	7	3	15	0	2	7	6	5	19	9
Output:	0									

Selection sort — exempel

Input:	7	3	15	0	2	7	6	5	19	9
Output:	0									

Selection sort — exempel

Input:	7	3	15	0	2	7	6	5	19	9
Output:	0									

Selection sort — exempel

Input:	7	3	15	0	2	7	6	5	19	9
Output:	0	2								

Selection sort — exempel

Input: 7 3 15 0 2 7 6 5 19 9

Output: 0 2

Selection sort — exempel

Input:	7	3	15	0	2	7	6	5	19	9
Output:	0	2								

Selection sort — exempel

Input: 7 3 15 0 2 7 6 5 19 9

Output: 0 2

Selection sort — exempel

Input: 7 3 15 0 2 7 6 5 19 9

Output: 0 2

Selection sort — exempel

Input: 7 3 15 0 2 7 6 5 19 9

Output: 0 2

Selection sort — exempel

Input:	7	3	15	0	2	7	6	5	19	9
Output:	0	2								

Selection sort — exempel

Input:	7	3	15	0	2	7	6	5	19	9
Output:	0	2								

Selection sort — exempel

Input: 7 3 15 0 2 7 6 5 19 9

Output: 0 2

Selection sort — exempel

Input:	7	3	15	0	2	7	6	5	19	9

Output:	0	2

Selection sort — exempel

Input:	7	3	15	0	2	7	6	5	19	9
Output:	0	2								

Selection sort — exempel

Input:	7	3	15	0	2	7	6	5	19	9
Output:	0	2								

Selection sort — exempel

Input: 7 3 15 0 2 7 6 5 19 9

Output: 0 2 3

Selection sort — exempel

Input: 7 3 15 0 2 7 6 5 19 9

Output: 0 2 3

Selection sort — exempel

Input: 7 3 15 0 2 7 6 5 19 9

Output: 0 2 3

Selection sort — exempel

Input: 7 3 15 0 2 7 6 5 19 9

Output: 0 2 3

Selection sort — exempel

Input:	7	3	15	0	2	7	6	5	19	9
Output:	0	2	3							

Selection sort — exempel

Input: 7 3 15 0 2 7 6 5 19 9

Output: 0 2 3

Selection sort — exempel

Input: 7 3 15 0 2 7 6 5 19 9

Output: 0 2 3

Selection sort — exempel

Input: 7 3 15 0 2 7 6 5 19 9

Output: 0 2 3

Selection sort — exempel

Input: | 7 | 3 | 15 | 0 | 2 | 7 | 6 | 5 | 19 | 9 |

Output: | 0 | 2 | 3 |

Selection sort — exempel

Input: 7 3 15 0 2 7 6 5 19 9

Output: 0 2 3

Selection sort — exempel

Input: 7 3 15 0 2 7 6 5 19 9

Output: 0 2 3

Selection sort — exempel

Input: 7 3 15 0 2 7 6 5 19 9

Output: 0 2 3

Selection sort — exempel

Input:	7	3	15	0	2	7	6	5	19	9
Output:	0	2	3	5						

Selection sort — exempel

Input:	7	3	15	0	2	7	6	5	19	9
Output:	0	2	3	5						

Selection sort — exempel

Input:	7	3	15	0	2	7	6	5	19	9
Output:	0	2	3	5						

Selection sort — exempel

Input: 7 3 15 0 2 7 6 5 19 9

Output: 0 2 3 5

Selection sort — exempel

Input:	7	3	15	0	2	7	6	5	19	9
Output:	0	2	3	5						

Selection sort — exempel

Input:	7	3	15	0	2	7	6	5	19	9
Output:	0	2	3	5						

Selection sort — exempel

Input:	7	3	15	0	2	7	6	5	19	9
Output:	0	2	3	5						

Selection sort — exempel

Input:	7	3	15	0	2	7	6	5	19	9
Output:	0	2	3	5						

Selection sort — exempel

Input:	7	3	15	0	2	7	6	5	19	9
Output:	0	2	3	5						

Selection sort — exempel

Input:	7	3	15	0	2	7	6	5	19	9
Output:	0	2	3	5						

Selection sort — exempel

Input:	7	3	15	0	2	7	6	5	19	9
Output:	0	2	3	5	6					

Selection sort — exempel

Input: 7 3 15 0 2 7 6 5 19 9

Output: 0 2 3 5 6

Selection sort — exempel

Input: 7 3 15 0 2 7 6 5 19 9

Output: 0 2 3 5 6

Selection sort — exempel

Input:	7	3	15	0	2	7	6	5	19	9
Output:	0	2	3	5	6					

Selection sort — exempel

Input:	7	3	15	0	2	7	6	5	19	9
Output:	0	2	3	5	6					

Selection sort — exempel

Input:	7	3	15	0	2	7	6	5	19	9
Output:	0	2	3	5	6					

Selection sort — exempel

Input: 7 3 15 0 2 7 6 5 19 9

Output: 0 2 3 5 6

Selection sort — exempel

Input:	$\boxed{7}$	3	15	0	2	7	6	5	19	9
Output:	0	2	3	5	6					

Selection sort — exempel

Input:	7	3	15	0	2	7	6	5	19	9
Output:	0	2	3	5	6	7				

Selection sort — exempel

Input:	7	3	15	0	2	7	6	5	19	9
Output:	0	2	3	5	6	7				

Selection sort — exempel

Input:	7	3	15	0	2	7	6	5	19	9
Output:	0	2	3	5	6	7				

Selection sort — exempel

Input: 7 3 15 0 2 7 6 5 19 9

Output: 0 2 3 5 6 7

Selection sort — exempel

Input:	7	3	15	0	2	7	6	5	19	9
Output:	0	2	3	5	6	7				

Selection sort — exempel

Input:	7	3	15	0	2	7	6	5	19	9
Output:	0	2	3	5	6	7				

Selection sort — exempel

Input:	7	3	15	0	2	7	6	5	19	9
Output:	0	2	3	5	6	7				

Selection sort — exempel

Input:	7	3	15	0	2	7	6	5	19	9
Output:	0	2	3	5	6	7				

Selection sort — exempel

Input:	7	3	15	0	2	7	6	5	19	9
Output:	0	2	3	5	6	7	7			

Selection sort — exempel

Input:	7	3	15	0	2	7	6	5	19	9
Output:	0	2	3	5	6	7	7			

Selection sort — exempel

Input:	7	3	$\boxed{15}$	0	2	7	6	5	19	9
Output:	0	2	3	5	6	7	7			

Selection sort — exempel

Input:	7	3	15	0	2	7	6	5	19	9
Output:	0	2	3	5	6	7	7			

Selection sort — exempel

Input:	7	3	15	0	2	7	6	5	19	9
Output:	0	2	3	5	6	7	7			

Selection sort — exempel

Input:	7	3	15	0	2	7	6	5	19	9
Output:	0	2	3	5	6	7	7			

Selection sort — exempel

Input:	7	3	15	0	2	7	6	5	19	9
Output:	0	2	3	5	6	7	7			

Selection sort — exempel

Input:	7	3	15	0	2	7	6	5	19	9
Output:	0	2	3	5	6	7	7	9		

Selection sort — exempel

Input:	7	3	15	0	2	7	6	5	19	9
Output:	0	2	3	5	6	7	7	9		

Selection sort — exempel

Input:	7	3	15	0	2	7	6	5	19	9
Output:	0	2	3	5	6	7	7	9		

Selection sort — exempel

Input:	7	3	15	0	2	7	6	5	19	9
Output:	0	2	3	5	6	7	7	9		

Selection sort — exempel

Input:	7	3	15	0	2	7	6	5	19	9
Output:	0	2	3	5	6	7	7	9		

Selection sort — exempel

Input:	7	3	15	0	2	7	6	5	19	9
Output:	0	2	3	5	6	7	7	9	15	

Selection sort — exempel

Input:	7	3	15	0	2	7	6	5	19	9
Output:	0	2	3	5	6	7	7	9	15	

Selection sort — exempel

Input:	7	3	15	0	2	7	6	5	19	9
Output:	0	2	3	5	6	7	7	9	15	

Selection sort — exempel

Input:	7	3	15	0	2	7	6	5	19	9
Output:	0	2	3	5	6	7	7	9	15	

Selection sort — exempel

Input:	7	3	15	0	2	7	6	5	19	9
Output:	0	2	3	5	6	7	7	9	15	19

Selection sort — exempel

Input:	7	3	15	0	2	7	6	5	19	9
Output:	0	2	3	5	6	7	7	9	15	19

- Komplexitet:

Selection sort — exempel

Input:	7	3	15	0	2	7	6	5	19	9
Output:	0	2	3	5	6	7	7	9	15	19

- Komplexitet:
  - $O(n^2)$

Inplace Selection sort av fält

- Jobba i fältet
- Betrakta fältet som två delar:
  - en sorterad del i början
  - en osorterad del i slutet
  - Den sorterade delen växer med ett element för varje varv av huvudalgoritmen
- Algoritmen i grova drag:
  - Initialt är alla element osorterade
  - Leta upp det bästa elementet bland de osorterade elementet
  - Byt plats på det bästa och det första osorterade elementet
  - Öka den sorterade delen av fältet med ett element

Inplace Selection sort — exempel

Indata										
	8	3	9	4	7	5	6	2	0	1

Inplace Selection sort — exempel

Indata	8	3	9	4	7	5	6	2	0	1
Iteration 1	8	3	9	4	7	5	6	2	0	1

Inplace Selection sort — exempel

Indata	8	3	9	4	7	5	6	2	0	1
Iteration 1	0	3	9	4	7	5	6	2	8	1

Inplace Selection sort — exempel

Indata	8	3	9	4	7	5	6	2	0	1
Iteration 1	0	3	9	4	7	5	6	2	8	1
Iteration 2	0	3	9	4	7	5	6	2	8	1

Inplace Selection sort — exempel

Indata	8	3	9	4	7	5	6	2	0	1
Iteration 1	0	3	9	4	7	5	6	2	8	1
Iteration 2	0	1	9	4	7	5	6	2	8	3

Inplace Selection sort — exempel

Indata	8	3	9	4	7	5	6	2	0	1
Iteration 1	0	3	9	4	7	5	6	2	8	1
Iteration 2	0	1	9	4	7	5	6	2	8	3
Iteration 3	0	1	9	4	7	5	6	2	8	3

Inplace Selection sort — exempel

Indata	8	3	9	4	7	5	6	2	0	1
Iteration 1	0	3	9	4	7	5	6	2	8	1
Iteration 2	0	1	9	4	7	5	6	2	8	3
Iteration 3	0	1	2	4	7	5	6	9	8	3

Inplace Selection sort — exempel

Indata	8	3	9	4	7	5	6	2	0	1
Iteration 1	0	3	9	4	7	5	6	2	8	1
Iteration 2	0	1	9	4	7	5	6	2	8	3
Iteration 3	0	1	2	4	7	5	6	9	8	3
Iteration 4	0	1	2	4	7	5	6	9	8	3

Inplace Selection sort — exempel

Indata	8	3	9	4	7	5	6	2	0	1
Iteration 1	0	3	9	4	7	5	6	2	8	1
Iteration 2	0	1	9	4	7	5	6	2	8	3
Iteration 3	0	1	2	4	7	5	6	9	8	3
Iteration 4	0	1	2	3	7	5	6	9	8	4

Inplace Selection sort — exempel

Indata	8	3	9	4	7	5	6	2	0	1
Iteration 1	0	3	9	4	7	5	6	2	8	1
Iteration 2	0	1	9	4	7	5	6	2	8	3
Iteration 3	0	1	2	4	7	5	6	9	8	3
Iteration 4	0	1	2	3	7	5	6	9	8	4
Iteration 5	0	1	2	3	7	5	6	9	8	4

Inplace Selection sort — exempel

Indata	8	3	9	4	7	5	6	2	0	1
Iteration 1	0	3	9	4	7	5	6	2	8	1
Iteration 2	0	1	9	4	7	5	6	2	8	3
Iteration 3	0	1	2	4	7	5	6	9	8	3
Iteration 4	0	1	2	3	7	5	6	9	8	4
Iteration 5	0	1	2	3	4	5	6	9	8	7

Inplace Selection sort — exempel

Indata	8	3	9	4	7	5	6	2	0	1
Iteration 1	0	3	9	4	7	5	6	2	8	1
Iteration 2	0	1	9	4	7	5	6	2	8	3
Iteration 3	0	1	2	4	7	5	6	9	8	3
Iteration 4	0	1	2	3	7	5	6	9	8	4
Iteration 5	0	1	2	3	4	5	6	9	8	7
Iteration 6	0	1	2	3	4	5	6	9	8	7

Inplace Selection sort — exempel

Indata	8	3	9	4	7	5	6	2	0	1
Iteration 1	0	3	9	4	7	5	6	2	8	1
Iteration 2	0	1	9	4	7	5	6	2	8	3
Iteration 3	0	1	2	4	7	5	6	9	8	3
Iteration 4	0	1	2	3	7	5	6	9	8	4
Iteration 5	0	1	2	3	4	5	6	9	8	7
Iteration 6	0	1	2	3	4	5	6	9	8	7

Inplace Selection sort — exempel

Indata	8	3	9	4	7	5	6	2	0	1
Iteration 1	0	3	9	4	7	5	6	2	8	1
Iteration 2	0	1	9	4	7	5	6	2	8	3
Iteration 3	0	1	2	4	7	5	6	9	8	3
Iteration 4	0	1	2	3	7	5	6	9	8	4
Iteration 5	0	1	2	3	4	5	6	9	8	7
Iteration 6	0	1	2	3	4	5	6	9	8	7
Iteration 7	0	1	2	3	4	5	6	9	8	7

Inplace Selection sort — exempel

Indata	8	3	9	4	7	5	6	2	0	1
Iteration 1	0	3	9	4	7	5	6	2	8	1
Iteration 2	0	1	9	4	7	5	6	2	8	3
Iteration 3	0	1	2	4	7	5	6	9	8	3
Iteration 4	0	1	2	3	7	5	6	9	8	4
Iteration 5	0	1	2	3	4	5	6	9	8	7
Iteration 6	0	1	2	3	4	5	6	9	8	7
Iteration 7	0	1	2	3	4	5	6	9	8	7

Inplace Selection sort — exempel

Indata	8	3	9	4	7	5	6	2	0	1
Iteration 1	0	3	9	4	7	5	6	2	8	1
Iteration 2	0	1	9	4	7	5	6	2	8	3
Iteration 3	0	1	2	4	7	5	6	9	8	3
Iteration 4	0	1	2	3	7	5	6	9	8	4
Iteration 5	0	1	2	3	4	5	6	9	8	7
Iteration 6	0	1	2	3	4	5	6	9	8	7
Iteration 7	0	1	2	3	4	5	6	9	8	7
Iteration 8	0	1	2	3	4	5	6	9	8	7

Inplace Selection sort — exempel

Indata	8	3	9	4	7	5	6	2	0	1
Iteration 1	0	3	9	4	7	5	6	2	8	1
Iteration 2	0	1	9	4	7	5	6	2	8	3
Iteration 3	0	1	2	4	7	5	6	9	8	3
Iteration 4	0	1	2	3	7	5	6	9	8	4
Iteration 5	0	1	2	3	4	5	6	9	8	7
Iteration 6	0	1	2	3	4	5	6	9	8	7
Iteration 7	0	1	2	3	4	5	6	9	8	7
Iteration 8	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Inplace Selection sort — exempel

Indata	8	3	9	4	7	5	6	2	0	1
Iteration 1	0	3	9	4	7	5	6	2	8	1
Iteration 2	0	1	9	4	7	5	6	2	8	3
Iteration 3	0	1	2	4	7	5	6	9	8	3
Iteration 4	0	1	2	3	7	5	6	9	8	4
Iteration 5	0	1	2	3	4	5	6	9	8	7
Iteration 6	0	1	2	3	4	5	6	9	8	7
Iteration 7	0	1	2	3	4	5	6	9	8	7
Iteration 8	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Iteration 9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Inplace Selection sort — exempel

Indata	8	3	9	4	7	5	6	2	0	1
Iteration 1	0	3	9	4	7	5	6	2	8	1
Iteration 2	0	1	9	4	7	5	6	2	8	3
Iteration 3	0	1	2	4	7	5	6	9	8	3
Iteration 4	0	1	2	3	7	5	6	9	8	4
Iteration 5	0	1	2	3	4	5	6	9	8	7
Iteration 6	0	1	2	3	4	5	6	9	8	7
Iteration 7	0	1	2	3	4	5	6	9	8	7
Iteration 8	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Iteration 9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Inplace Selection sort — exempel

Indata	8	3	9	4	7	5	6	2	0	1
Iteration 1	0	3	9	4	7	5	6	2	8	1
Iteration 2	0	1	9	4	7	5	6	2	8	3
Iteration 3	0	1	2	4	7	5	6	9	8	3
Iteration 4	0	1	2	3	7	5	6	9	8	4
Iteration 5	0	1	2	3	4	5	6	9	8	7
Iteration 6	0	1	2	3	4	5	6	9	8	7
Iteration 7	0	1	2	3	4	5	6	9	8	7
Iteration 8	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Iteration 9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Utdata	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Inplace Selection sort — exempel

Indata	8	3	9	4	7	5	6	2	0	1
Iteration 1	0	3	9	4	7	5	6	2	8	1
Iteration 2	0	1	9	4	7	5	6	2	8	3
Iteration 3	0	1	2	4	7	5	6	9	8	3
Iteration 4	0	1	2	3	7	5	6	9	8	4
Iteration 5	0	1	2	3	4	5	6	9	8	7
Iteration 6	0	1	2	3	4	5	6	9	8	7
Iteration 7	0	1	2	3	4	5	6	9	8	7
Iteration 8	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Iteration 9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Utdata	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

- Stabil?

Inplace Selection sort — exempel

Indata	8	3	9	4	7	5	6	2	0	1
Iteration 1	0	3	9	4	7	5	6	2	8	1
Iteration 2	0	1	9	4	7	5	6	2	8	3
Iteration 3	0	1	2	4	7	5	6	9	8	3
Iteration 4	0	1	2	3	7	5	6	9	8	4
Iteration 5	0	1	2	3	4	5	6	9	8	7
Iteration 6	0	1	2	3	4	5	6	9	8	7
Iteration 7	0	1	2	3	4	5	6	9	8	7
Iteration 8	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Iteration 9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Utdata	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

- Stabil?
  - Nej!

Selection sort — algoritm

- Algoritm:

```
Algorithm selection_sort(a: Array, n: Int)
  // i indicates first unsorted element in a

  for i ← 0 to n - 2 do

    // find the smallest value among the unsorted
    ix ← i
    // start with the ith element as the smallest
    for j ← i + 1 to n - 1 do
      if a[j] < a[ix] then
        ix ← j

    // swap the ith element for the smallest
    t ← a[j]
    a[j] ← a[ix]
    a[ix] ← t


  return a
```

Blank

Blank

Insertion sort — instickssortering

Insertion sort av lista

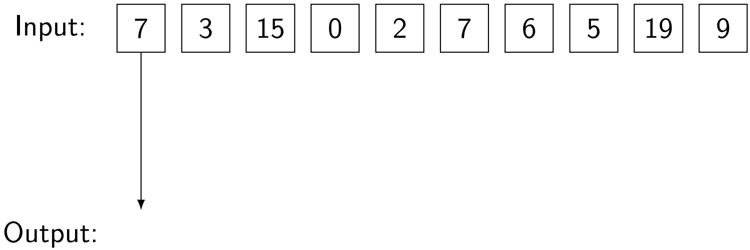
- Algoritmen i grova drag:
  - Plocka ut första elementet från in-listan
  - Leta upp platsen i ut-listan där elementet ska skjutas in

Insertion sort av lista — exempel

Input:	7	3	15	0	2	7	6	5	19	9

Output:

Insertion sort av lista — exempel

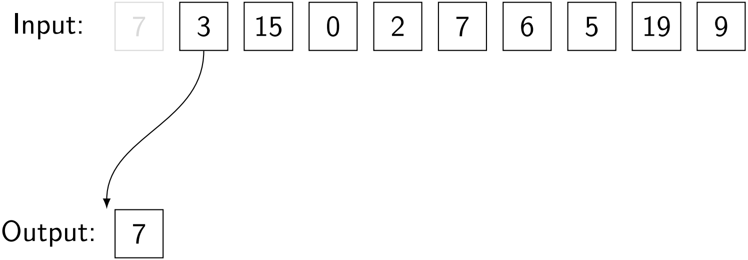


Insertion sort av lista — exempel

Input:	7	3	15	0	2	7	6	5	19	9

Output:	7

Insertion sort av lista — exempel

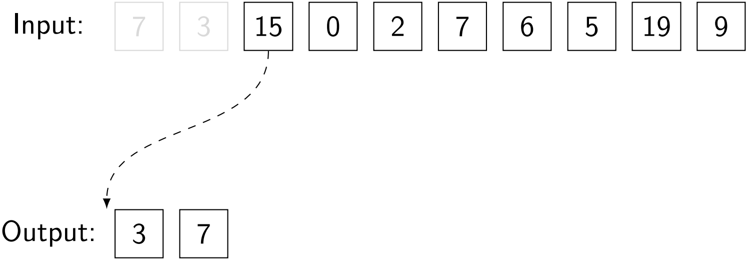


Insertion sort av lista — exempel

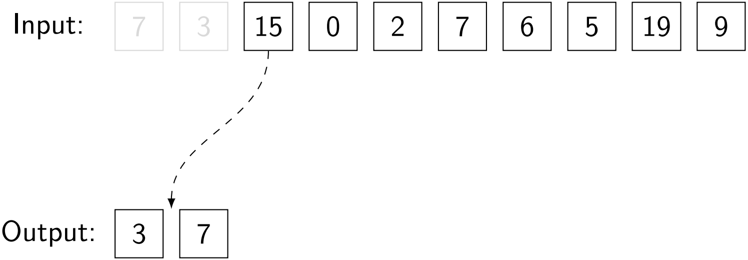
Input:	7	3	15	0	2	7	6	5	19	9

Output:	3	7

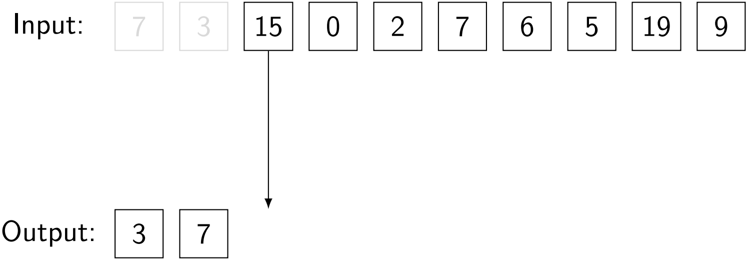
Insertion sort av lista — exempel



Insertion sort av lista — exempel



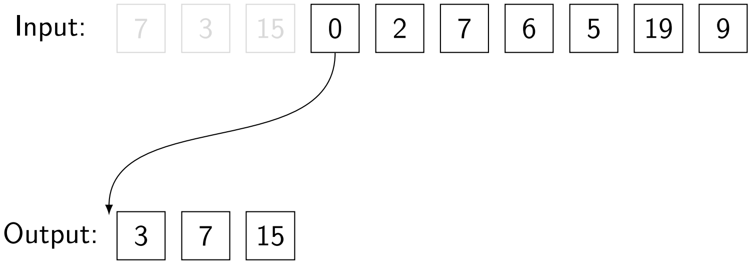
Insertion sort av lista — exempel



Insertion sort av lista — exempel

Input:	7	3	15	0	2	7	6	5	19	9
Output:	3	7	15							

Insertion sort av lista — exempel

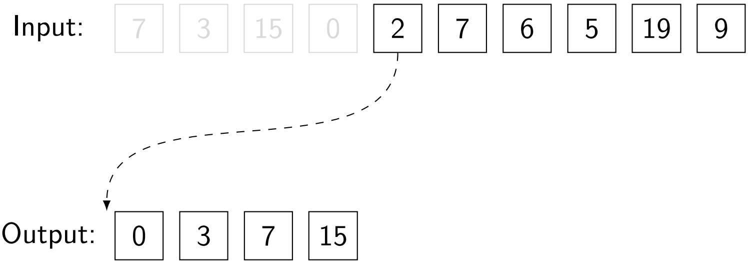


Insertion sort av lista — exempel

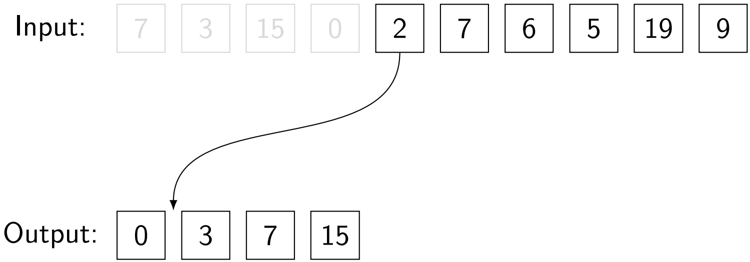
Input:	7	3	15	0	2	7	6	5	19	9

Output:	0	3	7	15

Insertion sort av lista — exempel



Insertion sort av lista — exempel

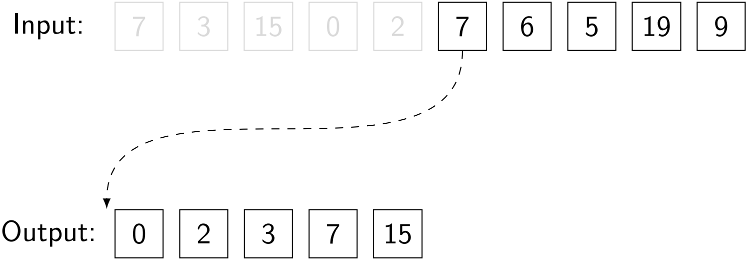


Insertion sort av lista — exempel

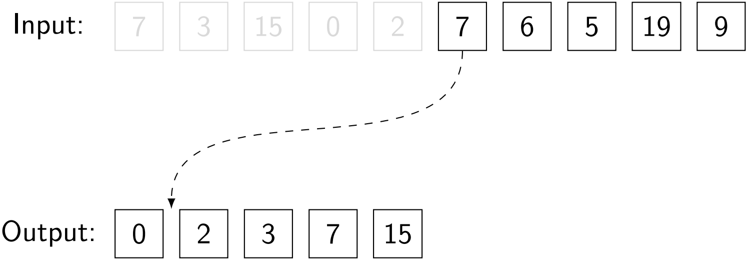
Input:	7	3	15	0	2	7	6	5	19	9

Output:	0	2	3	7	15

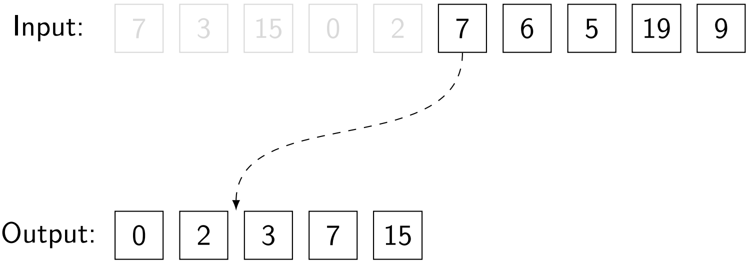
Insertion sort av lista — exempel



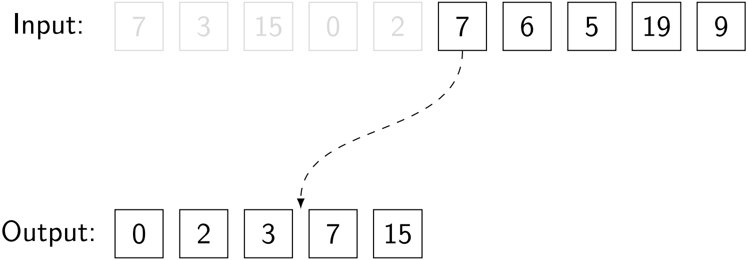
Insertion sort av lista — exempel



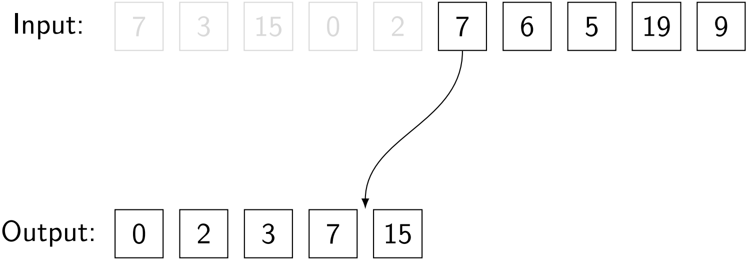
Insertion sort av lista — exempel



Insertion sort av lista — exempel



Insertion sort av lista — exempel

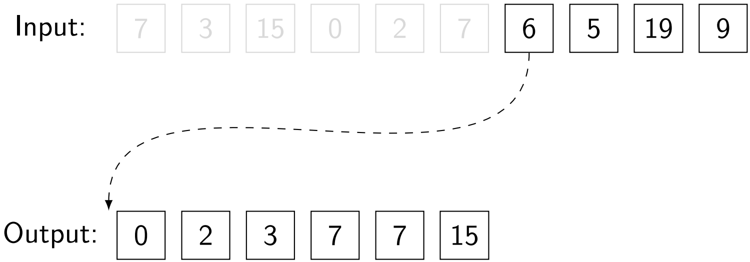


Insertion sort av lista — exempel

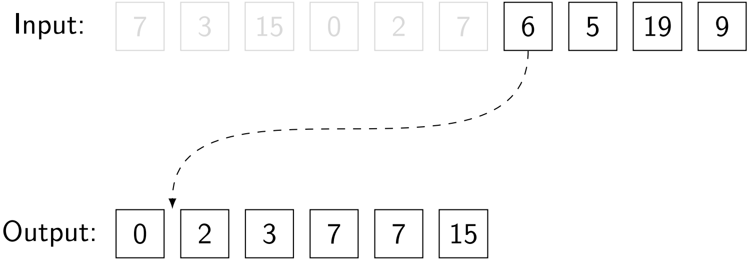
Input: 7 3 15 0 2 7 6 5 19 9

Output: 0 2 3 7 7 15

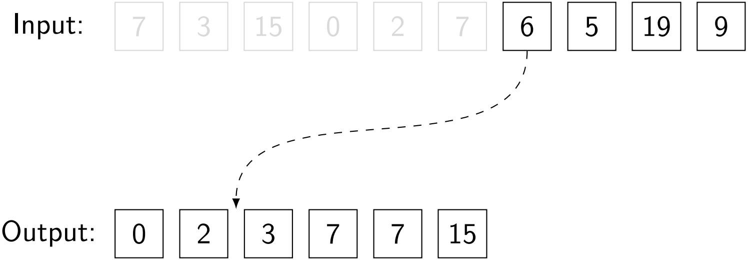
Insertion sort av lista — exempel



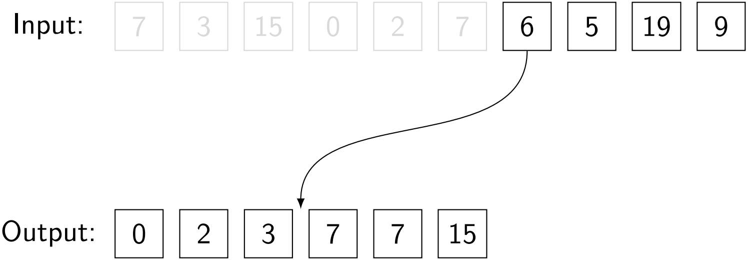
Insertion sort av lista — exempel



Insertion sort av lista — exempel



Insertion sort av lista — exempel

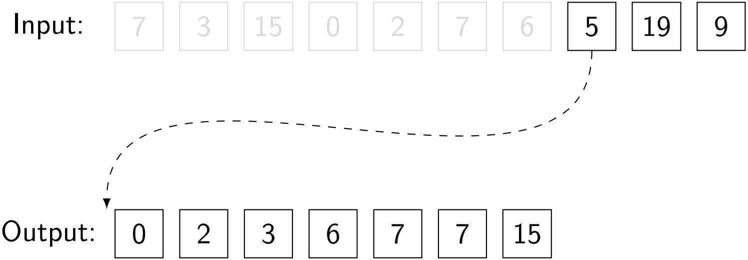


Insertion sort av lista — exempel

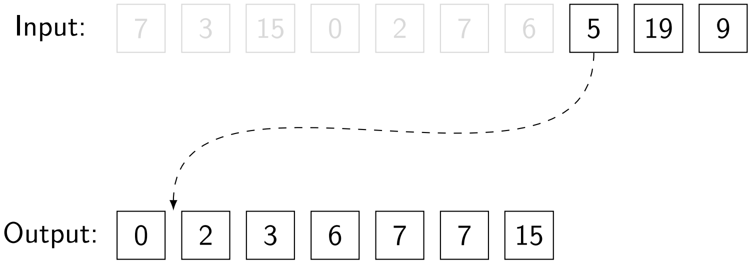
Input:	7	3	15	0	2	7	6	5	19	9

Output:	0	2	3	6	7	7	15

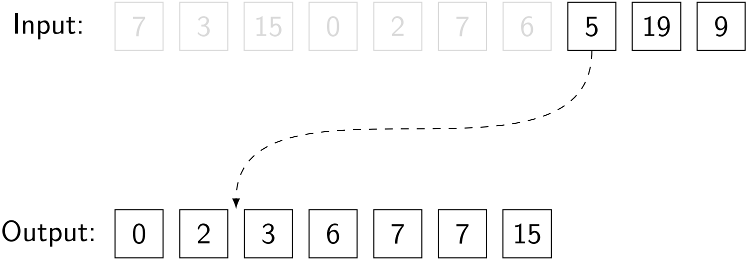
Insertion sort av lista — exempel



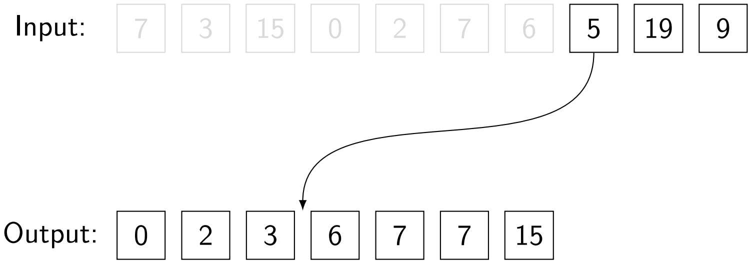
Insertion sort av lista — exempel



Insertion sort av lista — exempel



Insertion sort av lista — exempel

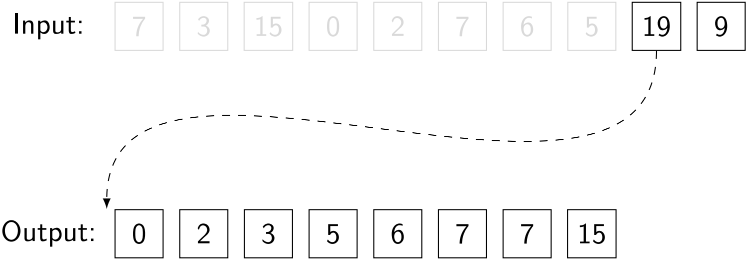


Insertion sort av lista — exempel

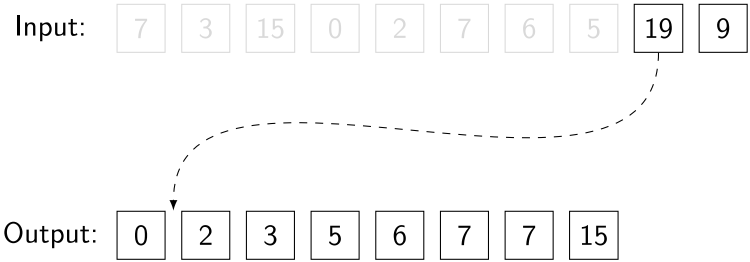
Input: 7 3 15 0 2 7 6 5 19 9

Output: 0 2 3 5 6 7 7 15

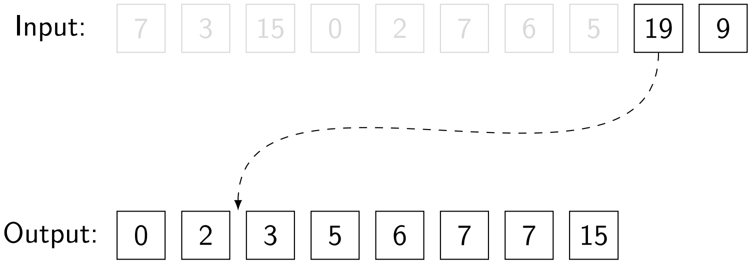
Insertion sort av lista — exempel



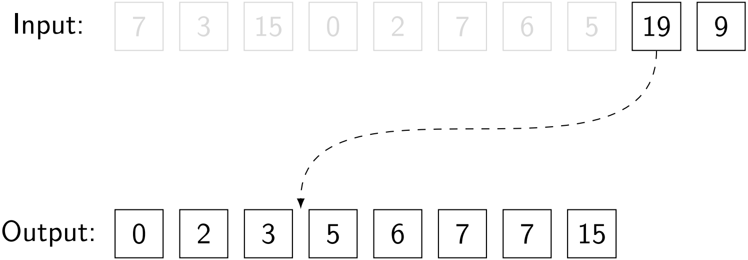
Insertion sort av lista — exempel



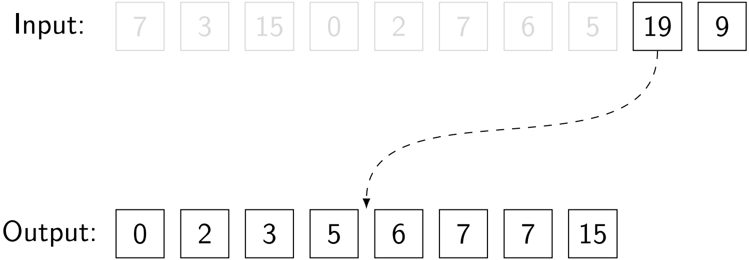
Insertion sort av lista — exempel



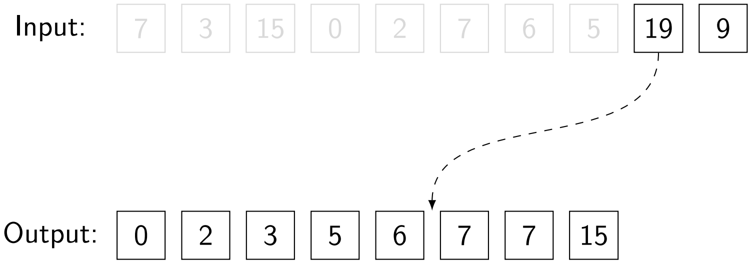
Insertion sort av lista — exempel



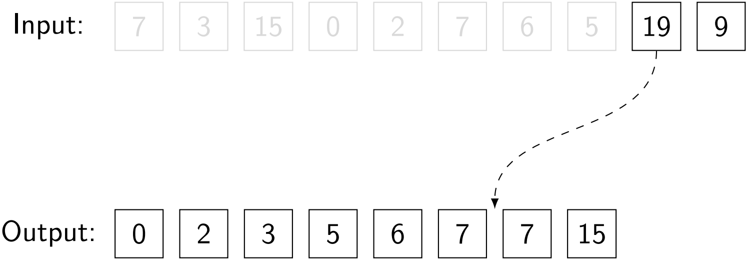
Insertion sort av lista — exempel



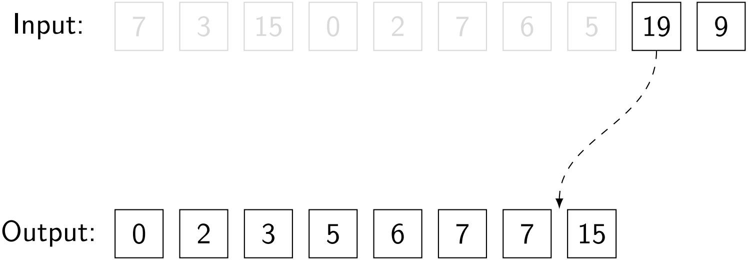
Insertion sort av lista — exempel



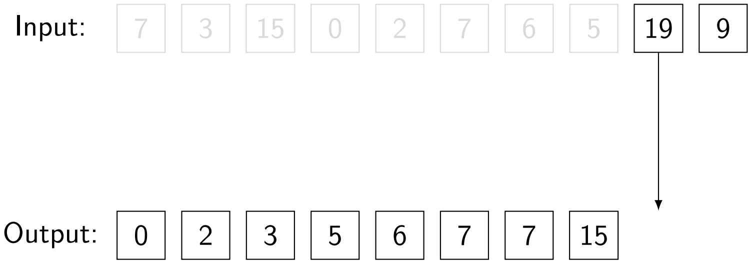
Insertion sort av lista — exempel



Insertion sort av lista — exempel



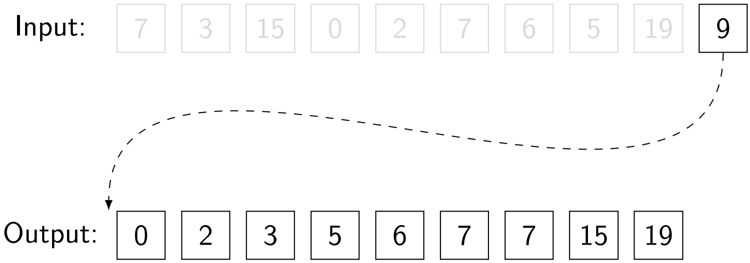
Insertion sort av lista — exempel



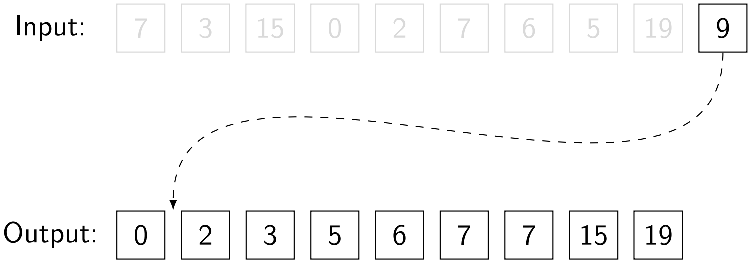
Insertion sort av lista — exempel

Input:	7	3	15	0	2	7	6	5	19	9
Output:	0	2	3	5	6	7	7	15	19	

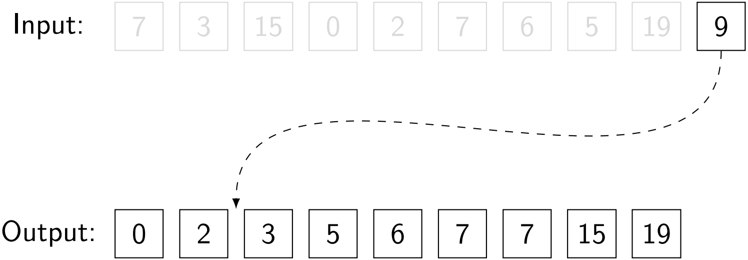
Insertion sort av lista — exempel



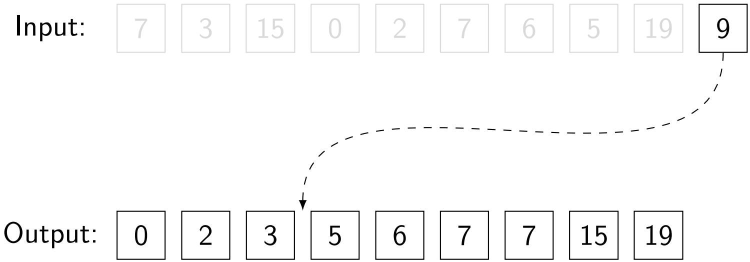
Insertion sort av lista — exempel



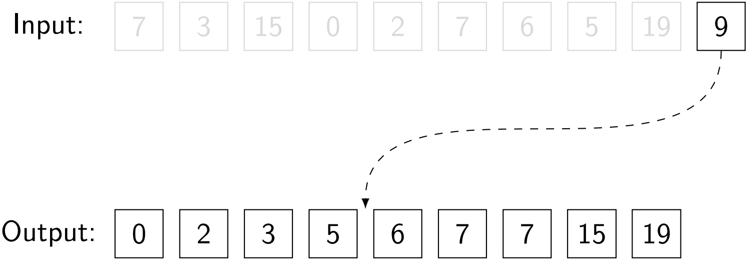
Insertion sort av lista — exempel



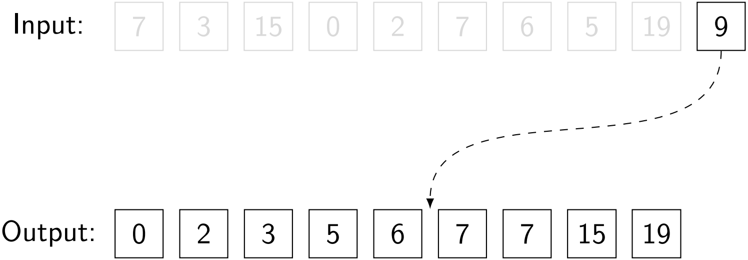
Insertion sort av lista — exempel



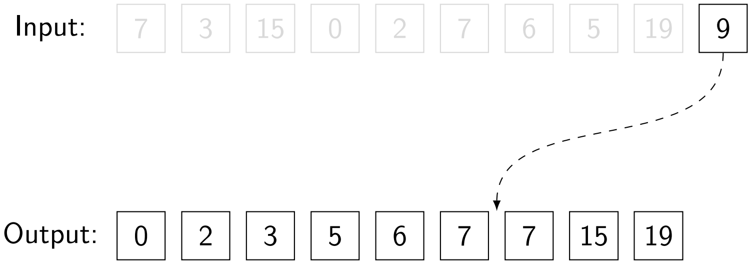
Insertion sort av lista — exempel



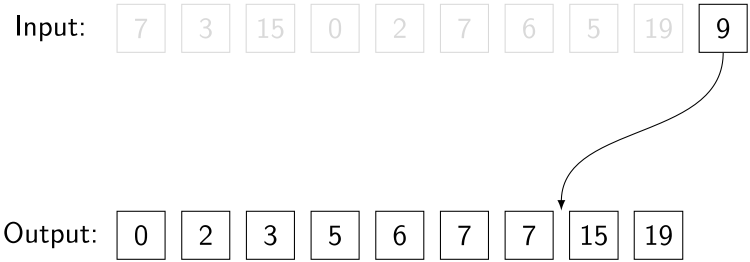
Insertion sort av lista — exempel



Insertion sort av lista — exempel



Insertion sort av lista — exempel



Insertion sort av lista — exempel

Input:	7	3	15	0	2	7	6	5	19	9
Output:	0	2	3	5	6	7	7	9	15	19

Insertion sort av lista — exempel

Input:	7	3	15	0	2	7	6	5	19	9
Output:	0	2	3	5	6	7	7	9	15	19

- Komplexitet:

Insertion sort av lista — exempel

Input:	7	3	15	0	2	7	6	5	19	9
Output:	0	2	3	5	6	7	7	9	15	19

- Komplexitet:
  - $O(n^2)$

Inplace Insertion sort av fält

- Jobba i fältet
- Betrakta fältet som två delar:
  - en sorterad del i början
  - en osorterad del i slutet
  - Den sorterade delen växer med ett element för varje varv av huvudalgoritmen
- Algoritmen i grova drag:
  - Börja med ett element (ett element är sorterat)
  - Ta det första osorterade elementet och sortera in på rätt plats bland de sorterade elementen

Insertion sort — exempel

Indata										
	8	3	9	4	7	5	6	2	0	1

Insertion sort — exempel

Indata	8	3	9	4	7	5	6	2	0	1
Iteration 0	8	3	9	4	7	5	6	2	0	1

Insertion sort — exempel

Indata	8	3	9	4	7	5	6	2	0	1
Iteration 0	8	3	9	4	7	5	6	2	0	1

Insertion sort — exempel

Indata	8	3	9	4	7	5	6	2	0	1
Iteration 0	8	3	9	4	7	5	6	2	0	1
Iteration 1	3	8	9	4	7	5	6	2	0	1

Insertion sort — exempel

Indata	8	3	9	4	7	5	6	2	0	1
Iteration 0	8	3	9	4	7	5	6	2	0	1
Iteration 1	3	8	9	4	7	5	6	2	0	1

Insertion sort — exempel

Indata	8	3	9	4	7	5	6	2	0	1
Iteration 0	8	3	9	4	7	5	6	2	0	1
Iteration 1	3	8	9	4	7	5	6	2	0	1
Iteration 2	3	8	9	4	7	5	6	2	0	1

Insertion sort — exempel

Indata	8	3	9	4	7	5	6	2	0	1
Iteration 0	8	3	9	4	7	5	6	2	0	1
Iteration 1	3	8	9	4	7	5	6	2	0	1
Iteration 2	3	8	9	4	7	5	6	2	0	1

Insertion sort — exempel

Indata	8	3	9	4	7	5	6	2	0	1
Iteration 0	8	3	9	4	7	5	6	2	0	1
Iteration 1	3	8	9	4	7	5	6	2	0	1
Iteration 2	3	8	9	4	7	5	6	2	0	1
Iteration 3	3	4	8	9	7	5	6	2	0	1

Insertion sort — exempel

Indata	8	3	9	4	7	5	6	2	0	1
Iteration 0	8	3	9	4	7	5	6	2	0	1
Iteration 1	3	8	9	4	7	5	6	2	0	1
Iteration 2	3	8	9	4	7	5	6	2	0	1
Iteration 3	3	4	8	9	7	5	6	2	0	1

Insertion sort — exempel

Indata	8	3	9	4	7	5	6	2	0	1
Iteration 0	8	3	9	4	7	5	6	2	0	1
Iteration 1	3	8	9	4	7	5	6	2	0	1
Iteration 2	3	8	9	4	7	5	6	2	0	1
Iteration 3	3	4	8	9	7	5	6	2	0	1
Iteration 4	3	4	7	8	9	5	6	2	0	1

Insertion sort — exempel

Indata	8	3	9	4	7	5	6	2	0	1
Iteration 0	8	3	9	4	7	5	6	2	0	1
Iteration 1	3	8	9	4	7	5	6	2	0	1
Iteration 2	3	8	9	4	7	5	6	2	0	1
Iteration 3	3	4	8	9	7	5	6	2	0	1
Iteration 4	3	4	7	8	9	5	6	2	0	1

Insertion sort — exempel

Indata	8	3	9	4	7	5	6	2	0	1
Iteration 0	8	3	9	4	7	5	6	2	0	1
Iteration 1	3	8	9	4	7	5	6	2	0	1
Iteration 2	3	8	9	4	7	5	6	2	0	1
Iteration 3	3	4	8	9	7	5	6	2	0	1
Iteration 4	3	4	7	8	9	5	6	2	0	1
Iteration 5	3	4	5	7	8	9	6	2	0	1

Insertion sort — exempel

Indata	8	3	9	4	7	5	6	2	0	1
Iteration 0	8	3	9	4	7	5	6	2	0	1
Iteration 1	3	8	9	4	7	5	6	2	0	1
Iteration 2	3	8	9	4	7	5	6	2	0	1
Iteration 3	3	4	8	9	7	5	6	2	0	1
Iteration 4	3	4	7	8	9	5	6	2	0	1
Iteration 5	3	4	5	7	8	9	6	2	0	1

Insertion sort — exempel

Indata	8	3	9	4	7	5	6	2	0	1
Iteration 0	8	3	9	4	7	5	6	2	0	1
Iteration 1	3	8	9	4	7	5	6	2	0	1
Iteration 2	3	8	9	4	7	5	6	2	0	1
Iteration 3	3	4	8	9	7	5	6	2	0	1
Iteration 4	3	4	7	8	9	5	6	2	0	1
Iteration 5	3	4	5	7	8	9	6	2	0	1
Iteration 6	3	4	5	6	7	8	9	2	0	1

Insertion sort — exempel

Indata	8	3	9	4	7	5	6	2	0	1
Iteration 0	8	3	9	4	7	5	6	2	0	1
Iteration 1	3	8	9	4	7	5	6	2	0	1
Iteration 2	3	8	9	4	7	5	6	2	0	1
Iteration 3	3	4	8	9	7	5	6	2	0	1
Iteration 4	3	4	7	8	9	5	6	2	0	1
Iteration 5	3	4	5	7	8	9	6	2	0	1
Iteration 6	3	4	5	6	7	8	9	2	0	1

Insertion sort — exempel

Indata	8	3	9	4	7	5	6	2	0	1
Iteration 0	8	3	9	4	7	5	6	2	0	1
Iteration 1	3	8	9	4	7	5	6	2	0	1
Iteration 2	3	8	9	4	7	5	6	2	0	1
Iteration 3	3	4	8	9	7	5	6	2	0	1
Iteration 4	3	4	7	8	9	5	6	2	0	1
Iteration 5	3	4	5	7	8	9	6	2	0	1
Iteration 6	3	4	5	6	7	8	9	2	0	1
Iteration 7	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1

Insertion sort — exempel

Indata	8	3	9	4	7	5	6	2	0	1
Iteration 0	8	3	9	4	7	5	6	2	0	1
Iteration 1	3	8	9	4	7	5	6	2	0	1
Iteration 2	3	8	9	4	7	5	6	2	0	1
Iteration 3	3	4	8	9	7	5	6	2	0	1
Iteration 4	3	4	7	8	9	5	6	2	0	1
Iteration 5	3	4	5	7	8	9	6	2	0	1
Iteration 6	3	4	5	6	7	8	9	2	0	1
Iteration 7	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1

Insertion sort — exempel

Indata	8	3	9	4	7	5	6	2	0	1
Iteration 0	8	3	9	4	7	5	6	2	0	1
Iteration 1	3	8	9	4	7	5	6	2	0	1
Iteration 2	3	8	9	4	7	5	6	2	0	1
Iteration 3	3	4	8	9	7	5	6	2	0	1
Iteration 4	3	4	7	8	9	5	6	2	0	1
Iteration 5	3	4	5	7	8	9	6	2	0	1
Iteration 6	3	4	5	6	7	8	9	2	0	1
Iteration 7	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1
Iteration 8	0	2	3	4	5	6	7	8	9	1

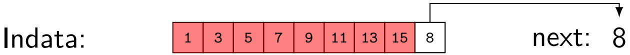
Insertion sort — exempel

Indata	8	3	9	4	7	5	6	2	0	1
Iteration 0	8	3	9	4	7	5	6	2	0	1
Iteration 1	3	8	9	4	7	5	6	2	0	1
Iteration 2	3	8	9	4	7	5	6	2	0	1
Iteration 3	3	4	8	9	7	5	6	2	0	1
Iteration 4	3	4	7	8	9	5	6	2	0	1
Iteration 5	3	4	5	7	8	9	6	2	0	1
Iteration 6	3	4	5	6	7	8	9	2	0	1
Iteration 7	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1
Iteration 8	0	2	3	4	5	6	7	8	9	1

Insertion sort — exempel

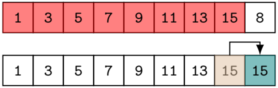
Indata	8	3	9	4	7	5	6	2	0	1
Iteration 0	8	3	9	4	7	5	6	2	0	1
Iteration 1	3	8	9	4	7	5	6	2	0	1
Iteration 2	3	8	9	4	7	5	6	2	0	1
Iteration 3	3	4	8	9	7	5	6	2	0	1
Iteration 4	3	4	7	8	9	5	6	2	0	1
Iteration 5	3	4	5	7	8	9	6	2	0	1
Iteration 6	3	4	5	6	7	8	9	2	0	1
Iteration 7	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1
Iteration 8	0	2	3	4	5	6	7	8	9	1
Utdata	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Insertion sort — Sidospår: insättning



Insertion sort — Sidospår: insättning

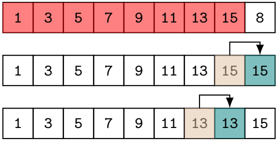
Indata:



next: 8

Insertion sort — Sidospår: insättning

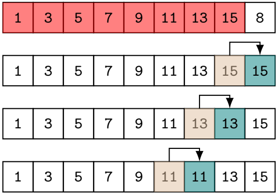
Indata:



next: 8

Insertion sort — Sidospår: insättning

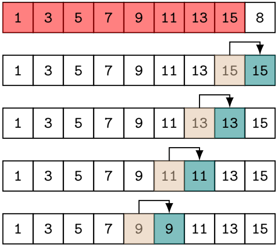
Indata:



next: 8

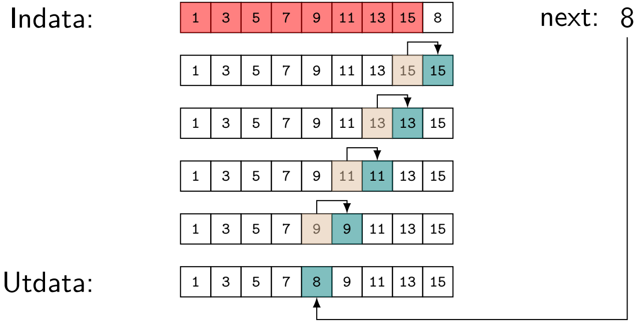
Insertion sort — Sidospår: insättning

Indata:



next: 8

Insertion sort — Sidospår: insättning



Insertion sort — algoritm

- Algoritm:

```
Algorithm insertion_sort(a: Array, n: Int)
  // i indicates first unsorted element in a

  for i ← 1 to n - 1 do

    // new value to insert in sorted part of a
    next ← a[i]

    // start with last sorted element
    j ← i - 1

    // as long as new element is smaller and
    // we're inside the array
    while j >= 0 and next < a[j] do

      // shift element right
      a[j + 1] ← a[j]

      // continue to the left
      j ← j - 1

    // insert new value in its sorted place
    a[j+1] ← next

  return a
```

Blank

Bubble sort — bubbelsortering

Bubble Sort

- Algoritmen i grova drag:
  - Upprepa följande tills ingen förändring sker:
    - Jämför alla elementen ett par i taget
      - Börja med element 0 och 1, därefter 1 och 2, osv
    - Om elementen är i fel ordning, byt plats på dem

Bubble Sort — algoritm

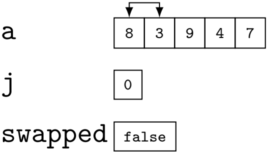
- Algoritm:

```
Algorithm bubble_sort(a: Array, n: Int)
  do
    // so far no swap has taken place
    swapped ← false

    // for each adjacent pair in a...
    for j ← 0 to n - 2 do

      // if the elements are in the wrong order...
      if a[j] > a[j + 1] then

        // ...swap the elements
        tmp ← a[j]
        a[j] ← a[j + 1]
        a[j + 1] ← tmp

        // remember that a swap has taken place
        swapped ← true

  while swapped = true

  return a
```

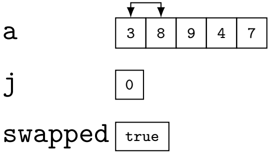
Bubble Sort exempel

a	8	3	9	4	7
j	x				
swapped	x				

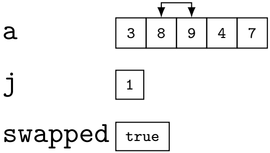
Bubble Sort exempel



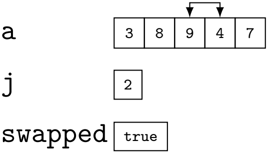
Bubble Sort exempel



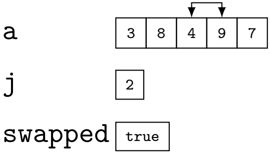
Bubble Sort exempel



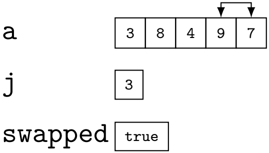
Bubble Sort exempel



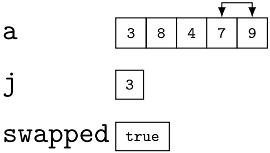
Bubble Sort exempel



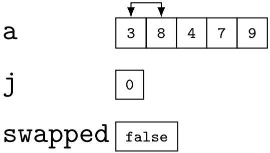
Bubble Sort exempel



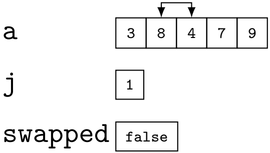
Bubble Sort exempel



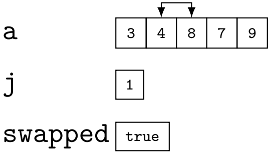
Bubble Sort exempel



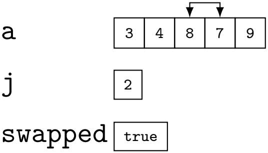
Bubble Sort exempel



Bubble Sort exempel



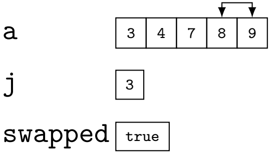
Bubble Sort exempel



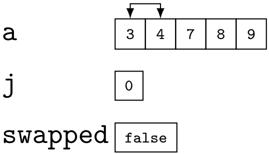
Bubble Sort exempel

a	3	4	7	8	9
j	2				
swapped	true				

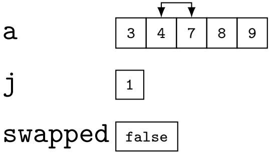
Bubble Sort exempel



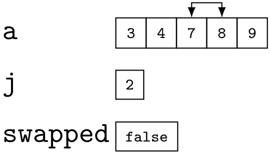
Bubble Sort exempel



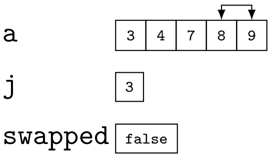
Bubble Sort exempel



Bubble Sort exempel



Bubble Sort exempel



Bubble Sort exempel

`a`	3	4	7	8	9
`j`	3				
`swapped`	false				

Bubble Sort — stabilitet, komplexitet

- Algoritm:

```
Algorithm bubble_sort(a: Array, n: Int)
  do
    // so far no swap has taken place
    swapped ← false

    // for each adjacent pair in a...
    for j ← 0 to n - 2 do

      // if the elements are in the wrong order...
      if a[j] > a[j + 1] then

        // ...swap the elements
        tmp ← a[j]
        a[j] ← a[j + 1]
        a[j + 1] ← tmp

        // remember that a swap has taken place
        swapped ← true

  while swapped = true

  return a
```

- Stabil sortering?
- Tidskomplexitet för sortering av fält?
  - Bästa-falls?
  - Värsta-falls?
- Går att få samma komplexitet för sortering av lista då vi alltid refererar till ett element och dess efterföljare

Bubble Sort — stabilitet, komplexitet

- Algoritm:

```
Algorithm bubble_sort(a: Array, n: Int)
  do
    // so far no swap has taken place
    swapped ← false

    // for each adjacent pair in a...
    for j ← 0 to n - 2 do

      // if the elements are in the wrong order...
      if a[j] > a[j + 1] then

        // ...swap the elements
        tmp ← a[j]
        a[j] ← a[j + 1]
        a[j + 1] ← tmp

        // remember that a swap has taken place
        swapped ← true

  while swapped = true

  return a
```

- Stabil sortering?
  - Ja!
- Tidskomplexitet för sortering av fält?
  - Bästa-falls?
  - Värsta-falls?
- Går att få samma komplexitet för sortering av lista då vi alltid refererar till ett element och dess efterföljare

Bubble Sort — stabilitet, komplexitet

- Algoritm:

```
Algorithm bubble_sort(a: Array, n: Int)
  do
    // so far no swap has taken place
    swapped ← false

    // for each adjacent pair in a...
    for j ← 0 to n - 2 do

      // if the elements are in the wrong order...
      if a[j] > a[j + 1] then

        // ...swap the elements
        tmp ← a[j]
        a[j] ← a[j + 1]
        a[j + 1] ← tmp

        // remember that a swap has taken place
        swapped ← true

  while swapped = true

  return a
```

- Stabil sortering?
  - Ja!
- Tidskomplexitet för sortering av fält?
  - Bästa-falls?
    - $O(n)$ (inga utbyten)
  - Värsta-falls?
- Går att få samma komplexitet för sortering av lista då vi alltid refererar till ett element och dess efterföljare

Bubble Sort — stabilitet, komplexitet

- Algoritm:

```
Algorithm bubble_sort(a: Array, n: Int)
  do
    // so far no swap has taken place
    swapped ← false

    // for each adjacent pair in a...
    for j ← 0 to n - 2 do

      // if the elements are in the wrong order...
      if a[j] > a[j + 1] then

        // ...swap the elements
        tmp ← a[j]
        a[j] ← a[j + 1]
        a[j + 1] ← tmp

        // remember that a swap has taken place
        swapped ← true

  while swapped = true

  return a
```

- Stabil sortering?
  - Ja!
- Tidskomplexitet för sortering av fält?
  - Bästa-falls?
    - $O(n)$ (inga utbyten)
  - Värsta-falls?
    - $O(n^2)$
- Går att få samma komplexitet för sortering av lista då vi alltid refererar till ett element och dess efterföljare

Divide-and-Conquer

- Rekursiv algoritmprincip:
    - Grundidén är att dela upp problemet i mindre och mindre problem
    - Lös problemen för basfallet
    - Slå ihop till en totallösning
- *Mergesort* och *Quicksort* är av denna typ
- Komplexitet: $O(n \log n)$

Blank

Blank

Merge sort — samsortering

Merge Sort

- Algoritmen i grova drag
  - Om sekvensen har ett element
    - Returnera sekvensen (den är redan sorterad)
  - annars
    - Dela sekvensen i två ungefär lika stora delsekvenser
    - Sortera delsekvenserna rekursivt
    - Slå samman delsekvenserna (*Merge*)
    - Returnera den sammanslagna sekvensen

Merge

- *Merge Sort* använder en delalgoritm — *Merge*
- Algoritm för att slå samman två redan sorterade sekvenser:
  - Så länge bägge sekvenserna har element:
    - Jämför första (=minsta) elementet i vardera sekvensen
    - Flytta det minsta av de två elementen till utsekvensen
  - Flytta över alla element som finns kvar i sekvenserna

Merge — exempel

A

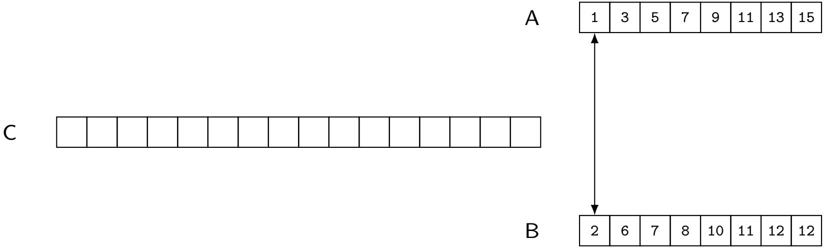
1	3	5	7	9	11	13	15

C

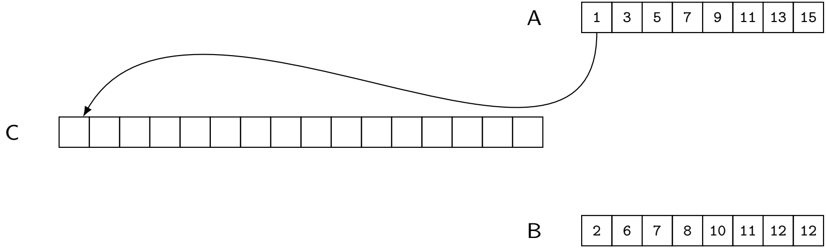
B

2	6	7	8	10	11	12	12

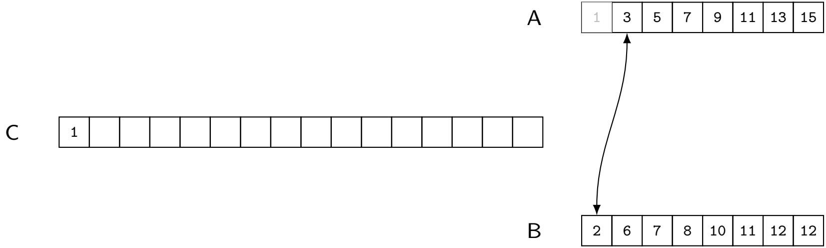
Merge — exempel



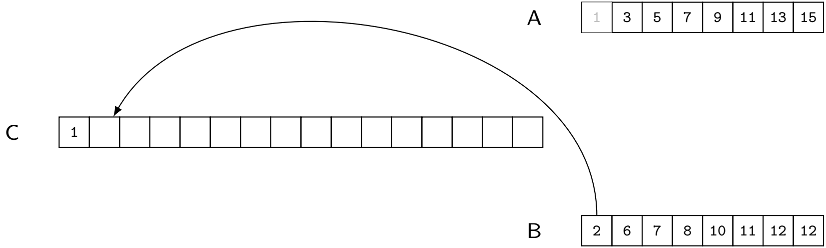
Merge — exempel



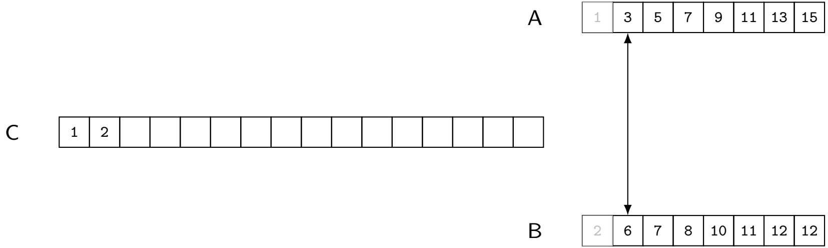
Merge — exempel



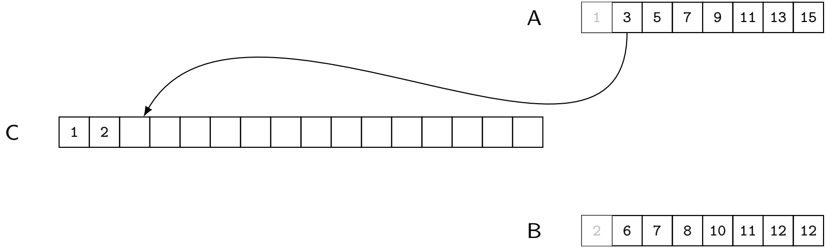
Merge — exempel



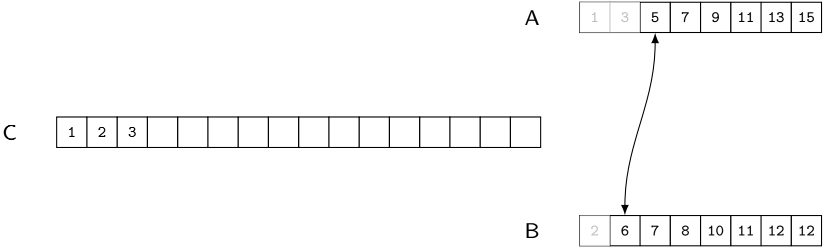
Merge — exempel



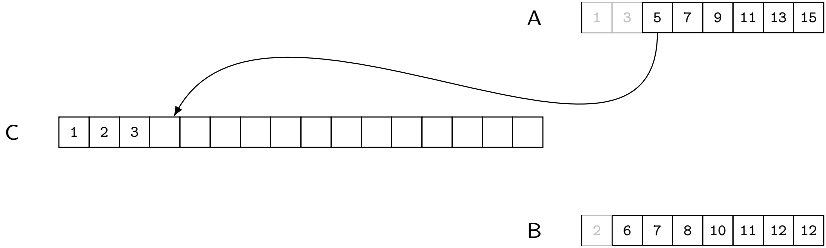
Merge — exempel



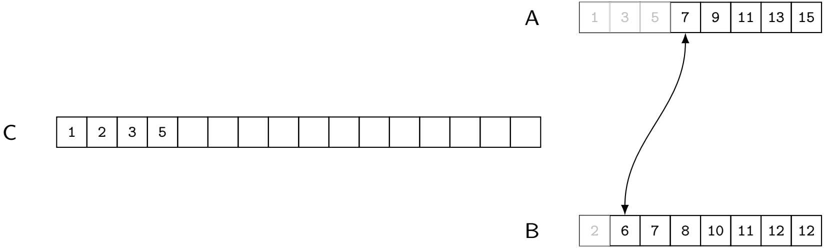
Merge — exempel



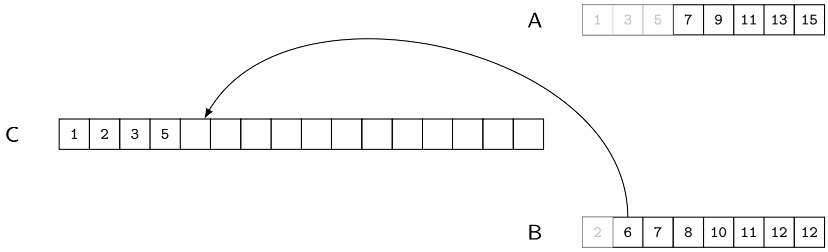
Merge — exempel



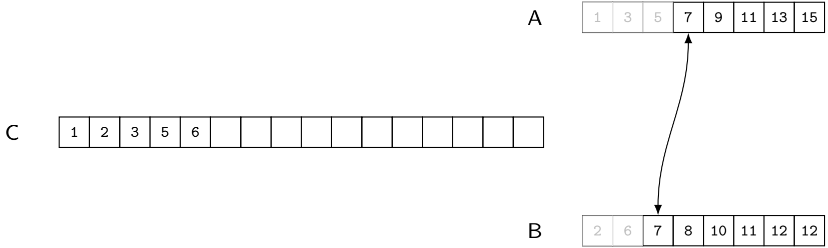
Merge — exempel



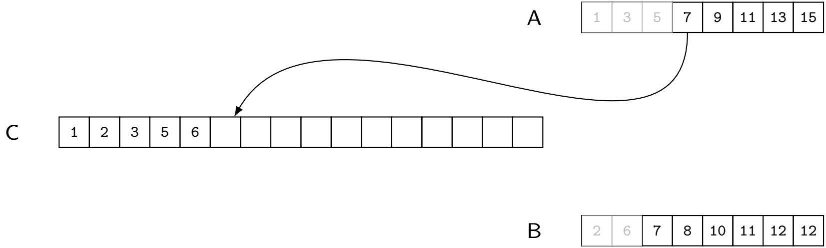
Merge — exempel



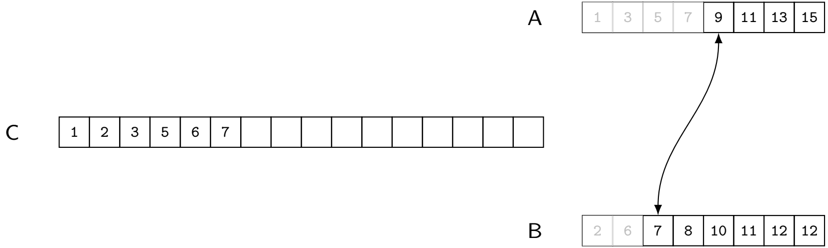
Merge — exempel



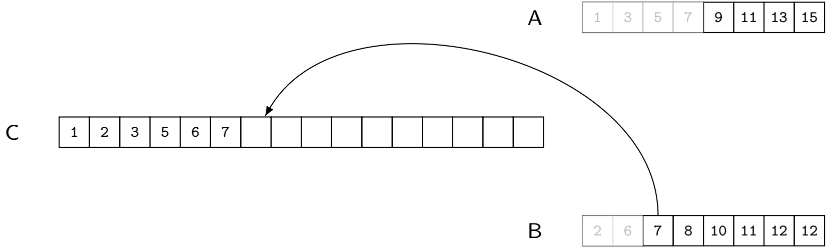
Merge — exempel



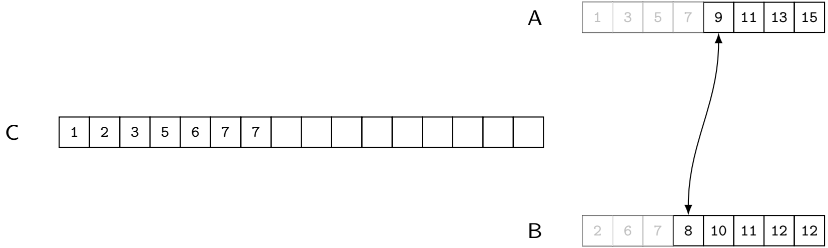
Merge — exempel



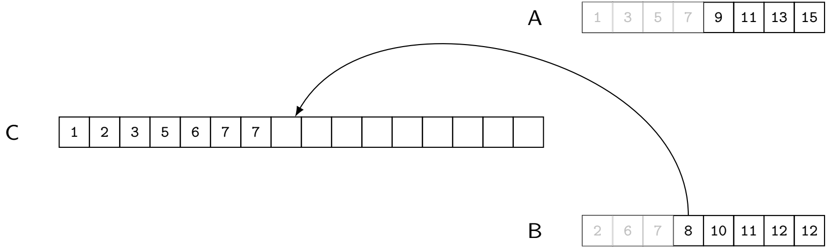
Merge — exempel



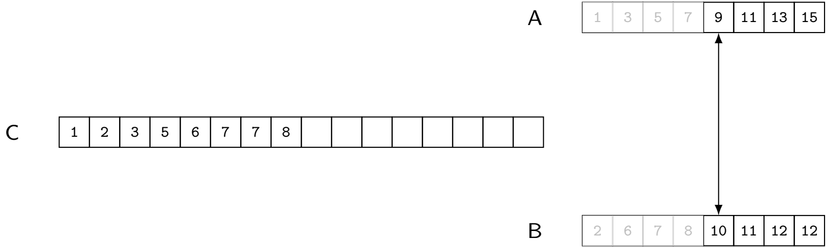
Merge — exempel



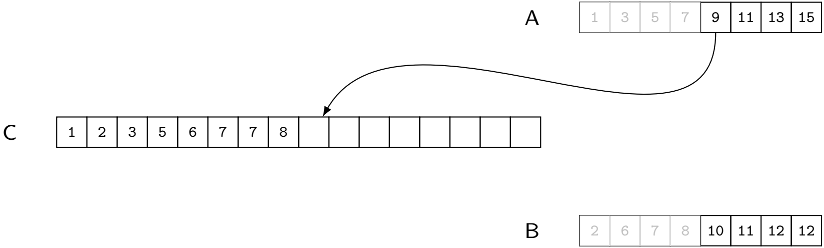
Merge — exempel



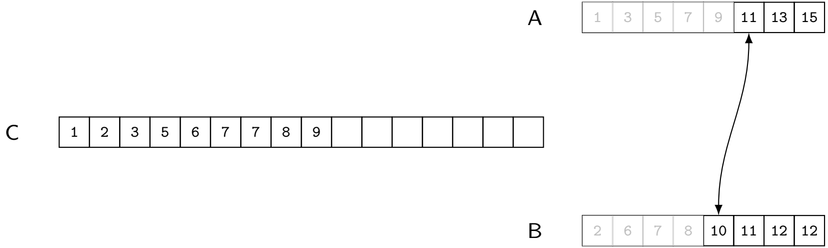
Merge — exempel



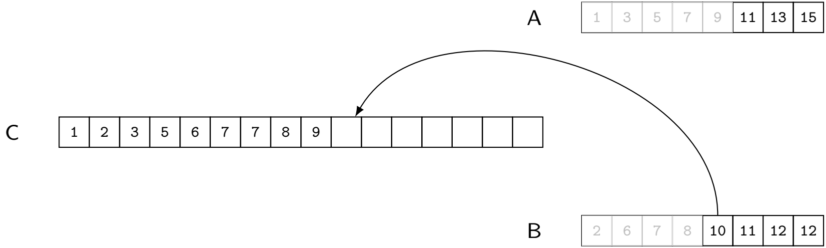
Merge — exempel



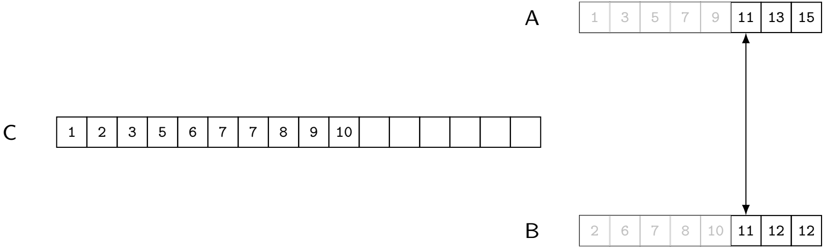
Merge — exempel



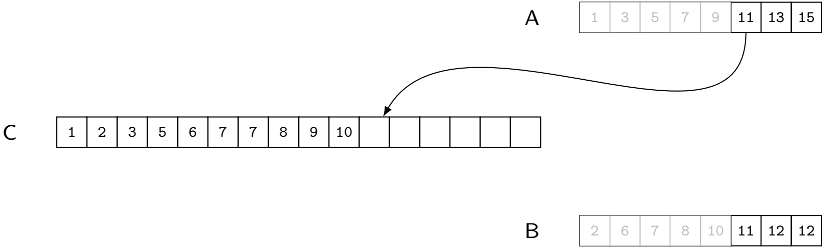
Merge — exempel



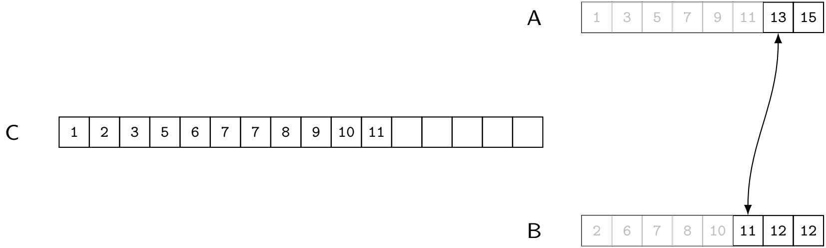
Merge — exempel



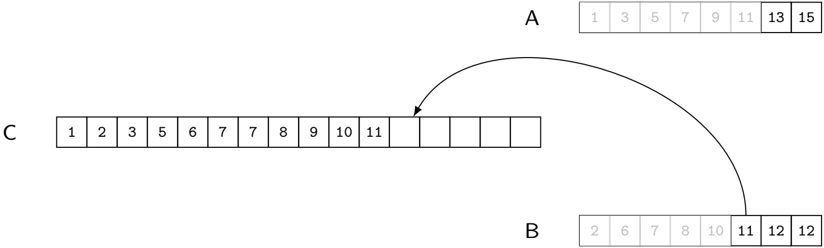
Merge — exempel



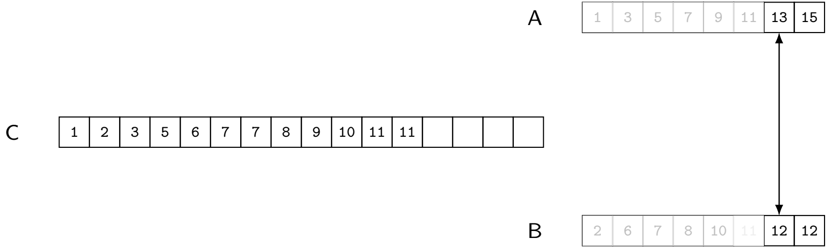
Merge — exempel



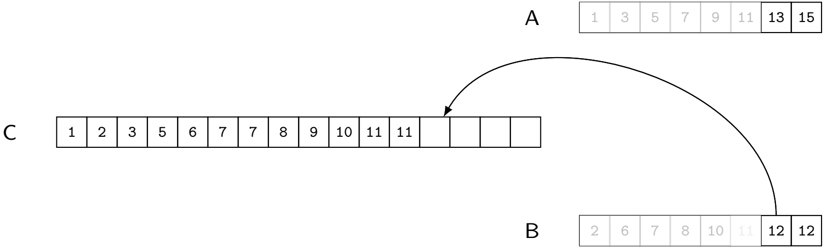
Merge — exempel



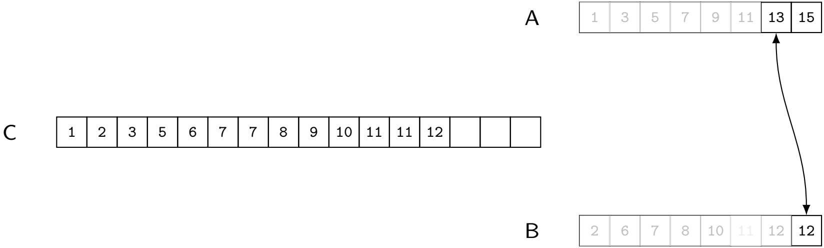
Merge — exempel



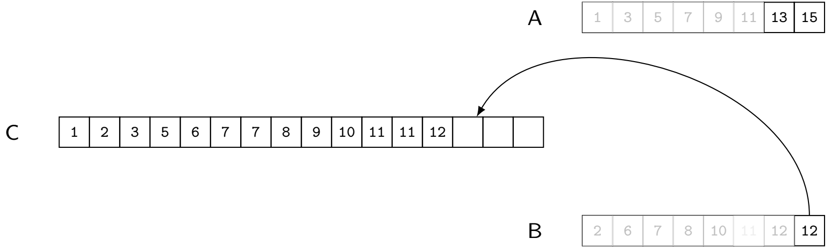
Merge — exempel



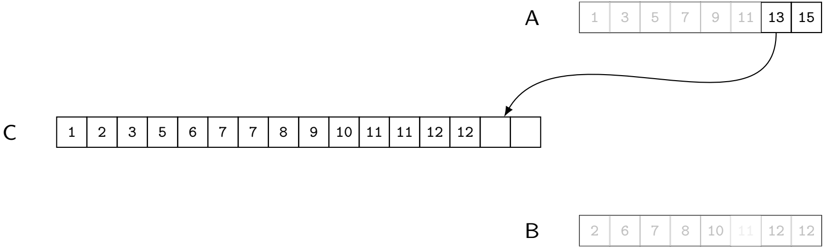
Merge — exempel



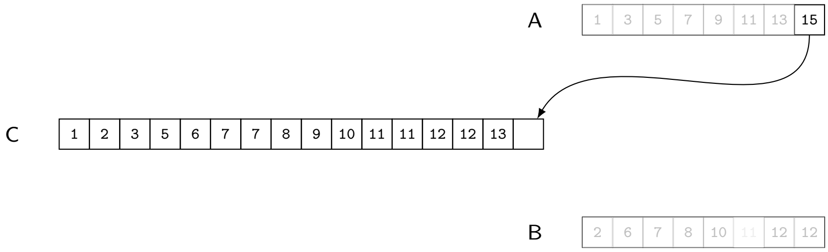
Merge — exempel



Merge — exempel



Merge — exempel



Merge — exempel

A

1	3	5	7	9	11	13	15

C

1	2	3	5	6	7	7	8	9	10	11	11	12	12	13	15

B

2	6	7	8	10	11	12	12

Merge

- Algoritm för *Merge*:

```
Algorithm merge(A, B: Array, na, nb: Int)
    C ← create_array(na + nb)

    ia ← 0 // Where to read from in A
    ib ← 0 // Where to read from in B
    ic ← 0 // Where to write to in C

    // While there are elements in both A and B...
    while ia < na and ib < nb do
        if A[ia] <= B[ib] then     // Smallest in A...
            C[ic] ← A[ia]          // ...copy from A
            ia ← ia + 1            // ...advance in A
        else                       // Smallest in B...
            C[ic] ← B[ib]          // ...copy from B
            ib ← ib + 1            // ...advance in B

        ic ← ic + 1                // Advance in C

    // While there are elements in A...
    while ia < na do
        C[ic] ← A[ia]              // ...copy from A
        ia ← ia + 1                // ...advance in A and C
        ic ← ic + 1

    // While there are elements in B...
    while ib < nb do
        C[ic] ← B[ib]              // ...copy from B
        ib ← ib + 1                // ...advance in B and C
        ic ← ic + 1

    return C
```

Merge Sort — algoritm

- Algoritm för *Merge Sort*:

```
Algorithm merge_sort(a: Array, n: Int)
  if n < 2 then
    // Already sorted
    return a

  // Split a in two parts
  (left, right) ← split(a, n/2)

  // Lengths of left and right parts, respectively
  nl ← floor(n/2)
  nr ← n - nl

  // Sort left half recursively
  left ← merge_sort(left, nl)

  // Sort right half recursively
  right ← merge_sort(right, nr)

  // Merge sorted arrays
  a ← merge(left, right, nl, nr)

  return a
```

Merge sort, anropsträd

```
ms([7 3 15 0 2 7 6 5 19 9])
```

Merge sort, anropsträd


```
ms([7 3 15 0 2 7 6 5 19 9])

ms([7 3 15 0 2])
```

Merge sort, anropsträd

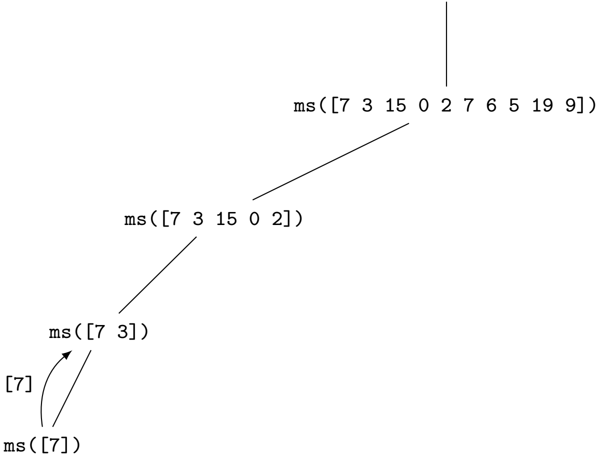
3

```
ms([7 3 15 0 2 7 6 5 19 9])
ms([7 3 15 0 2])
ms([7 3])
```

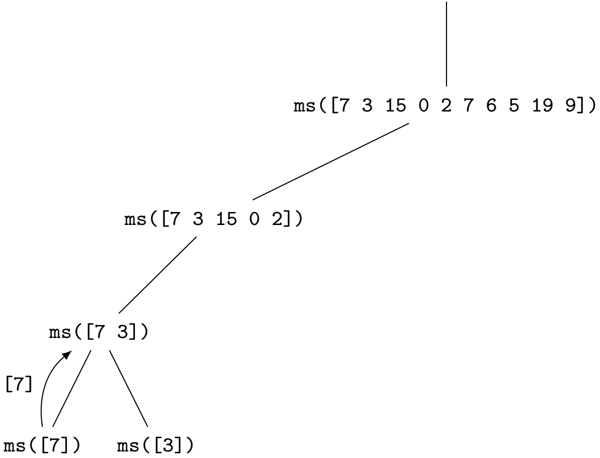
Merge sort, anropsträd

```
ms([7 3 15 0 2 7 6 5 19 9])
ms([7 3 15 0 2])
ms([7 3])
ms([7])
```

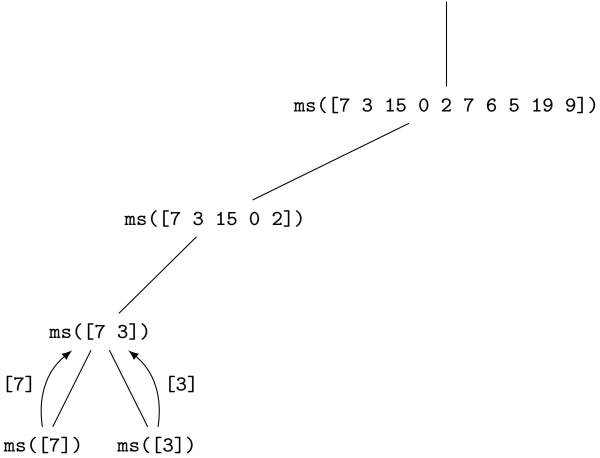
Merge sort, anropsträd



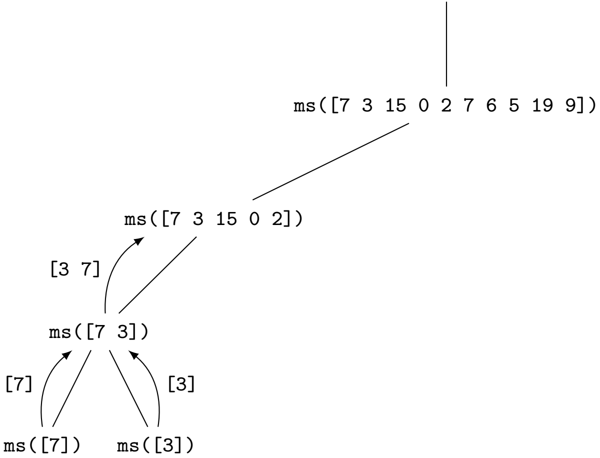
Merge sort, anropsträd



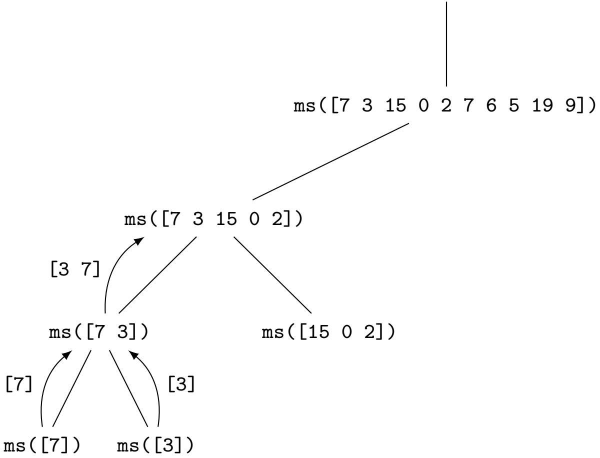
Merge sort, anropsträd



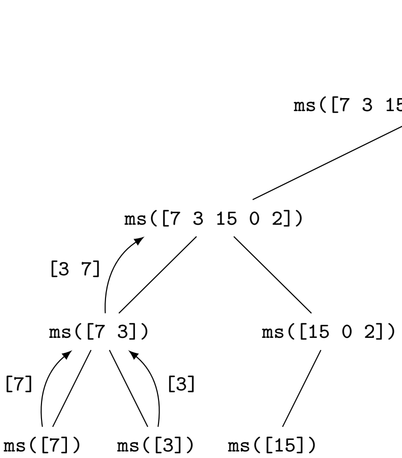
Merge sort, anropsträd



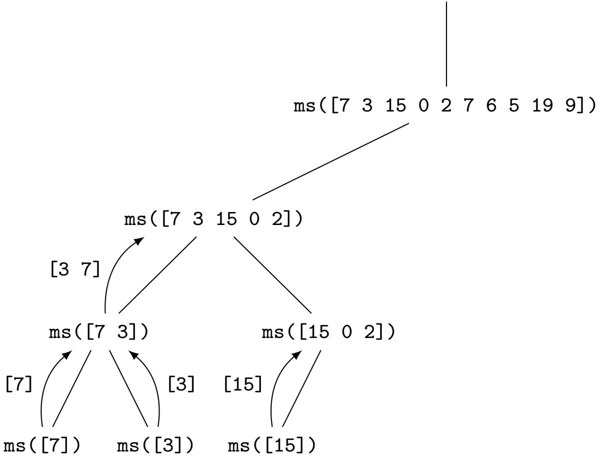
Merge sort, anropsträd



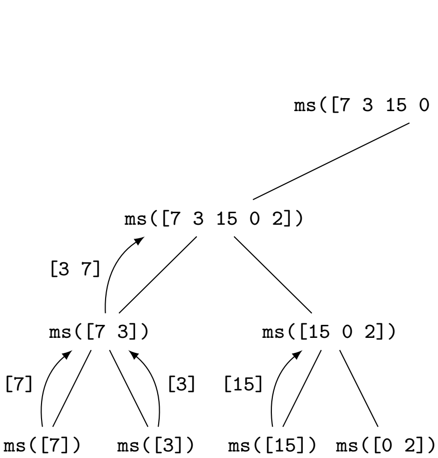
Merge sort, anropsträd



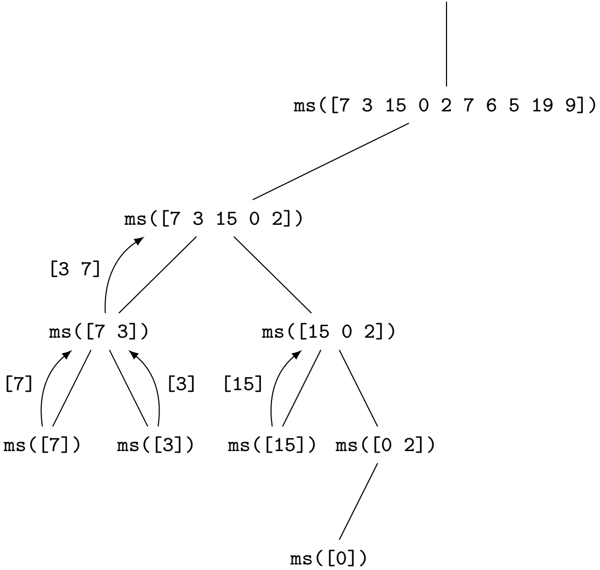
Merge sort, anropsträd



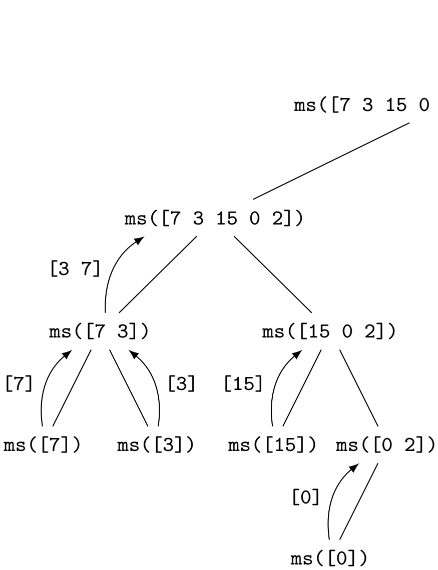
Merge sort, anropsträd



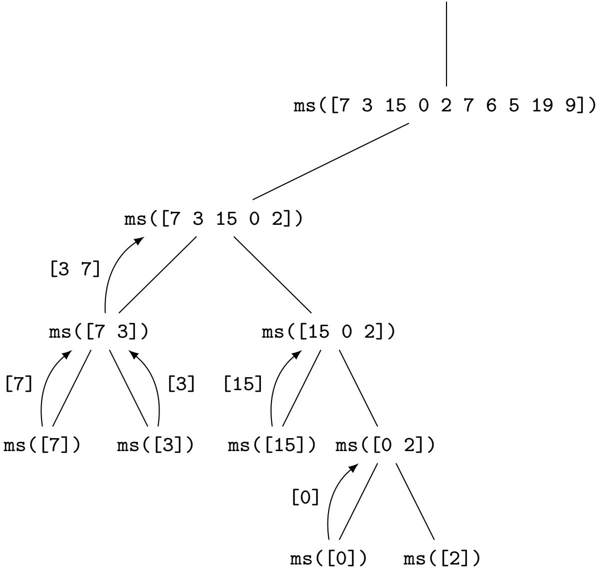
Merge sort, anropsträd



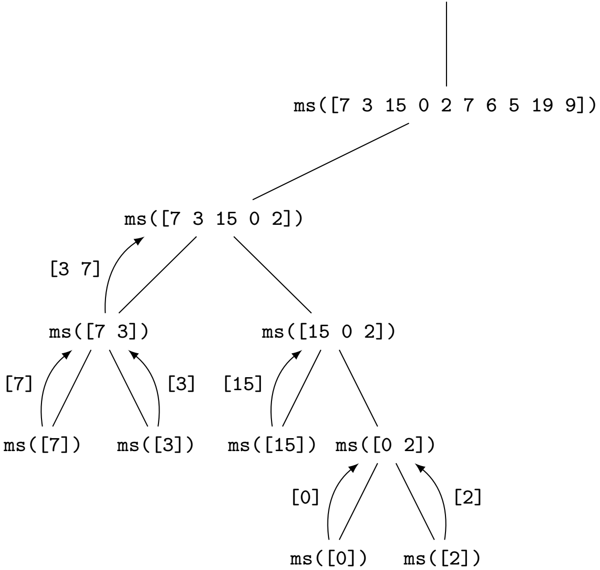
Merge sort, anropsträd



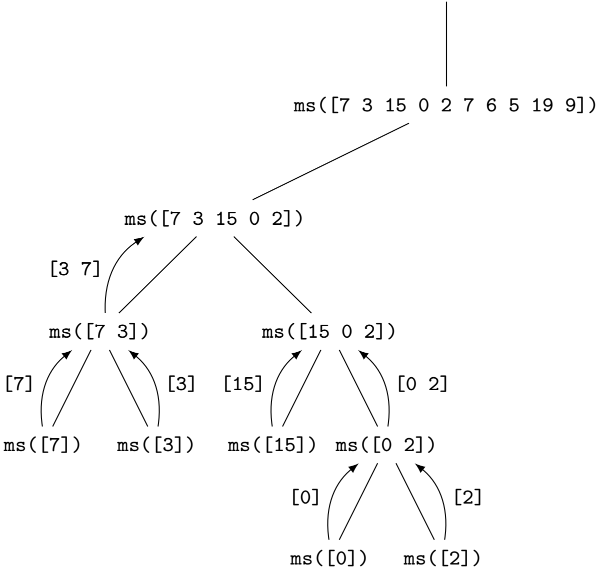
Merge sort, anropsträd



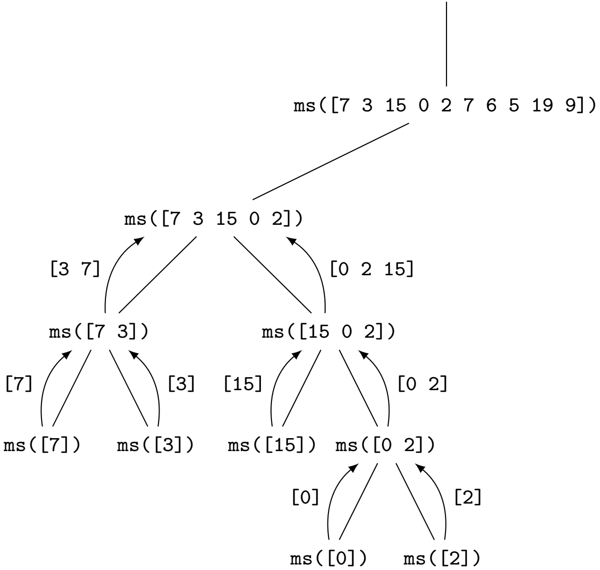
Merge sort, anropsträd



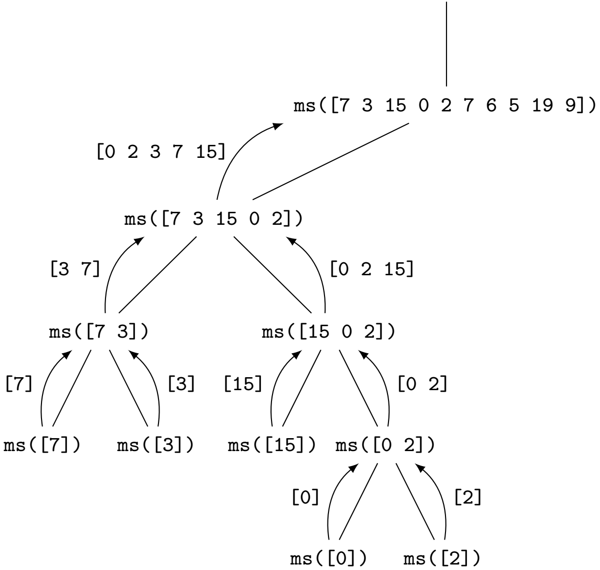
Merge sort, anropsträd



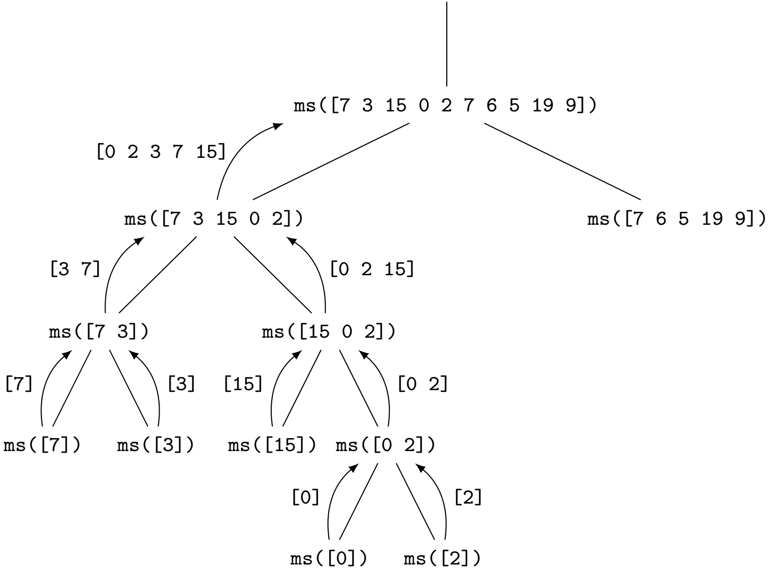
Merge sort, anropsträd



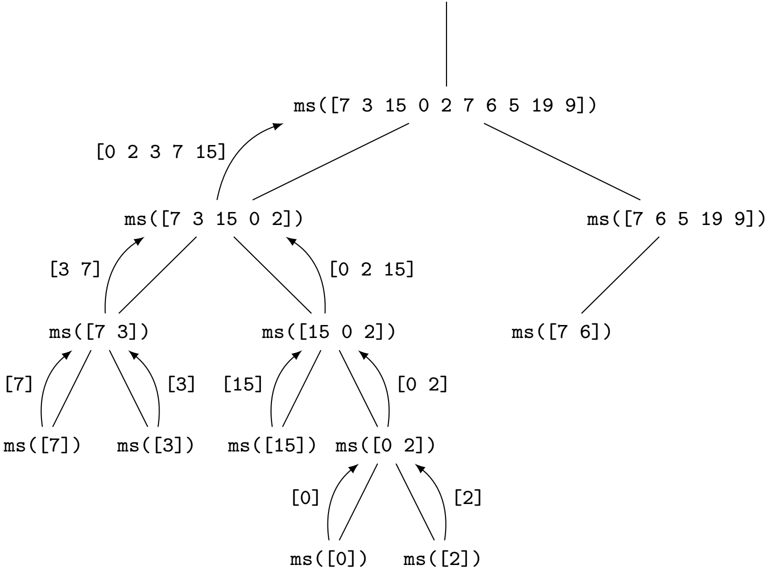
Merge sort, anropsträd



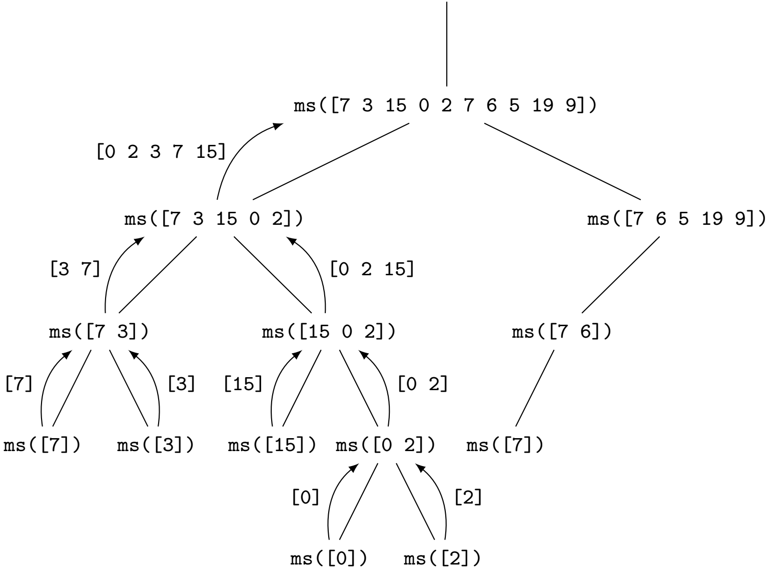
Merge sort, anropsträd



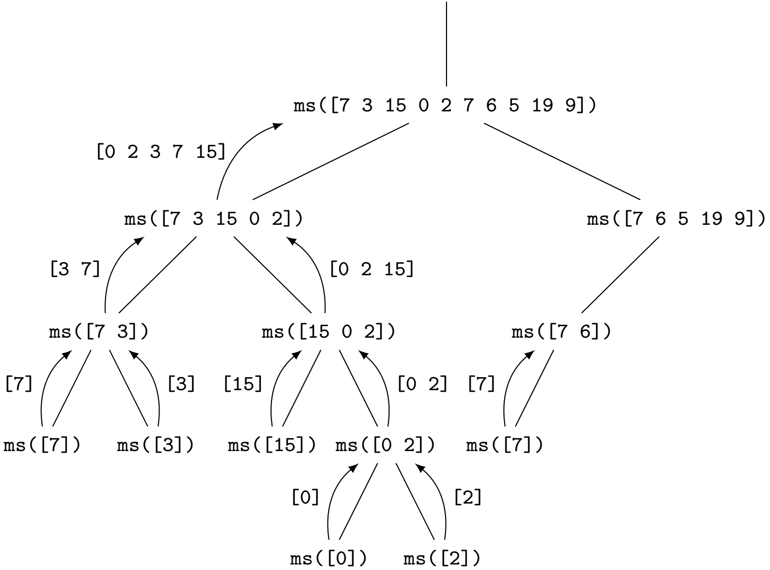
Merge sort, anropsträd



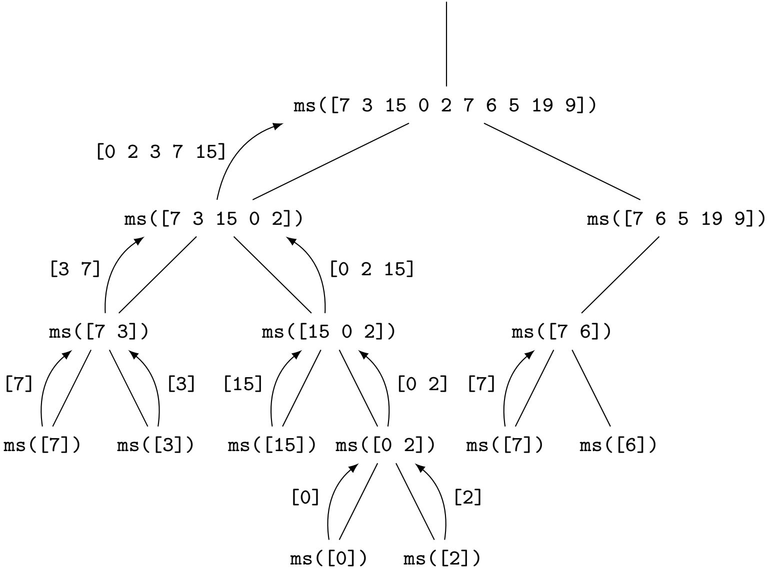
Merge sort, anropsträd



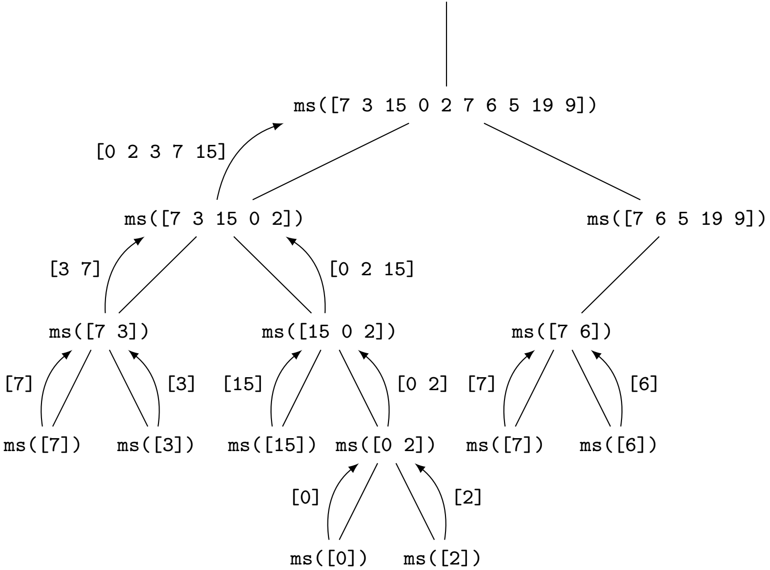
Merge sort, anropsträd



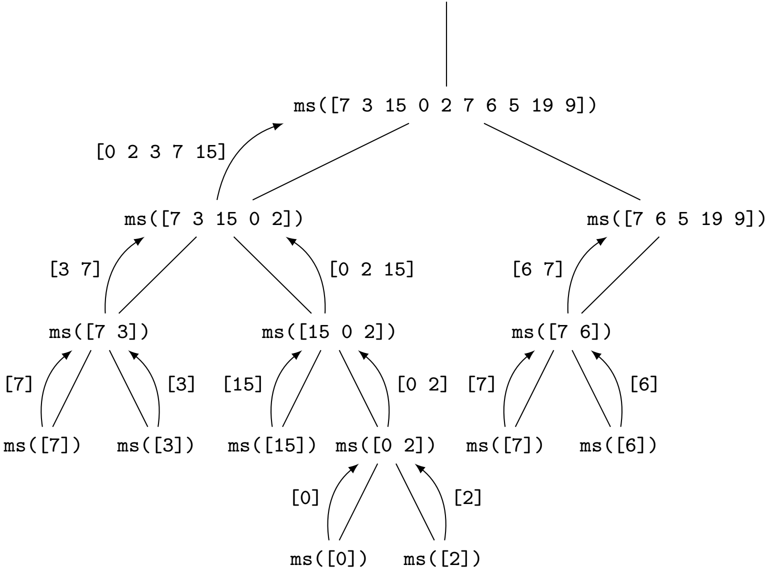
Merge sort, anropsträd



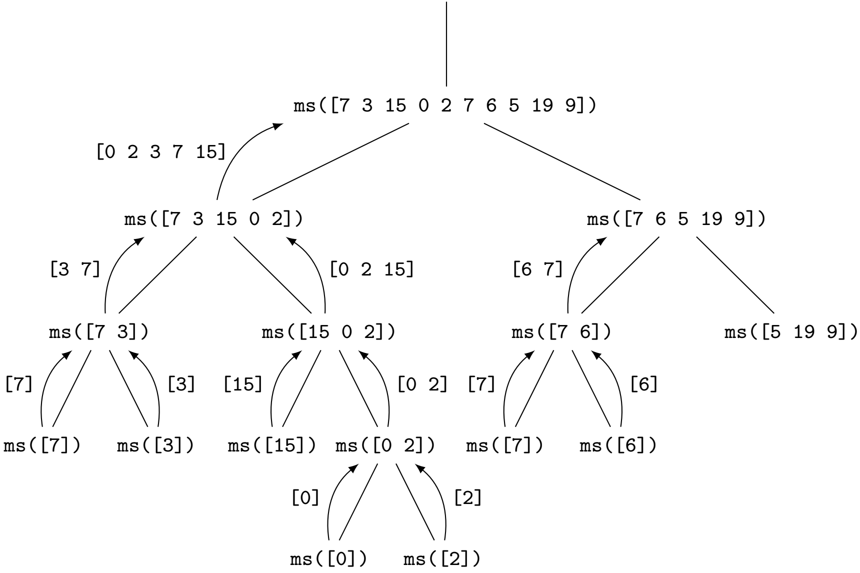
Merge sort, anropsträd



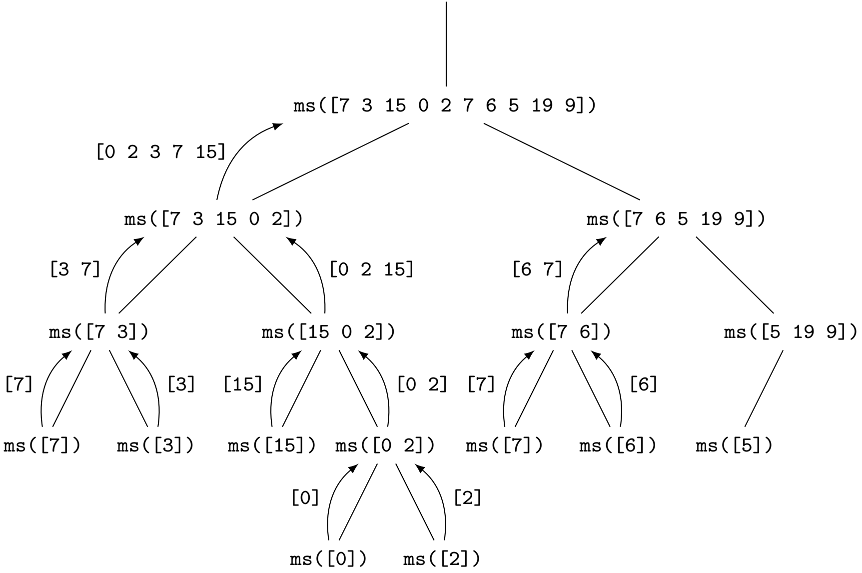
Merge sort, anropsträd



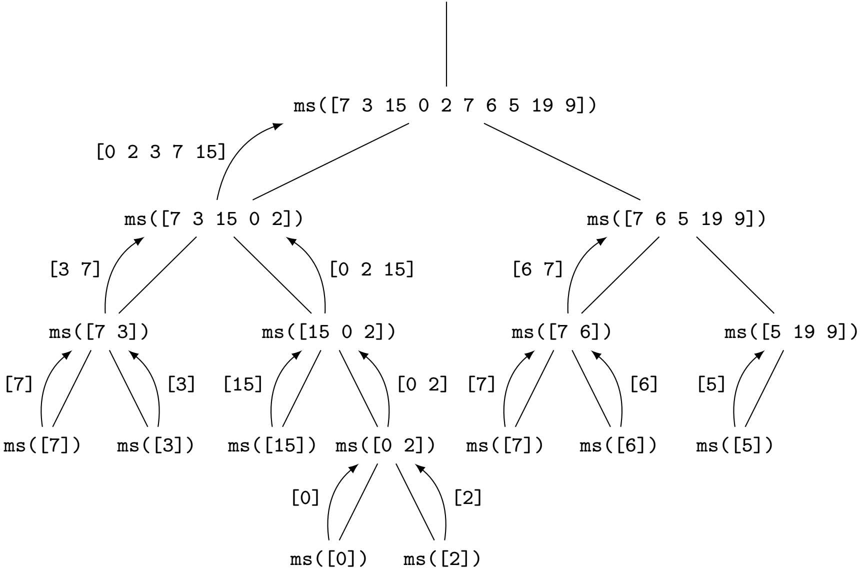
Merge sort, anropsträd



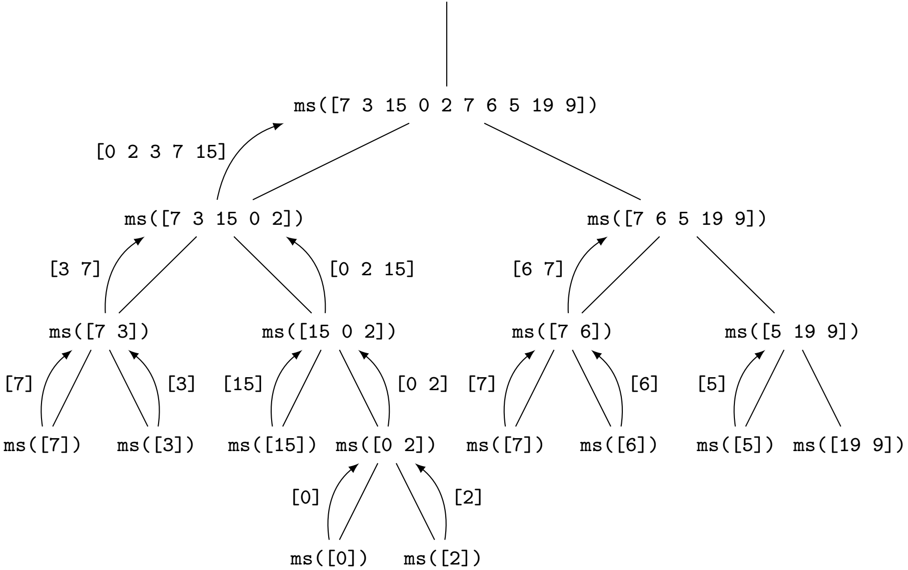
Merge sort, anropsträd



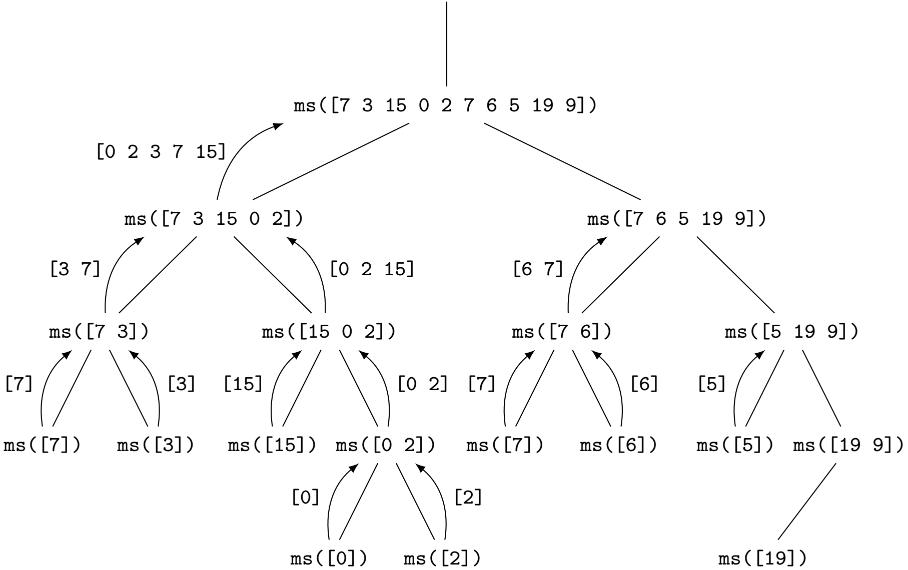
Merge sort, anropsträd



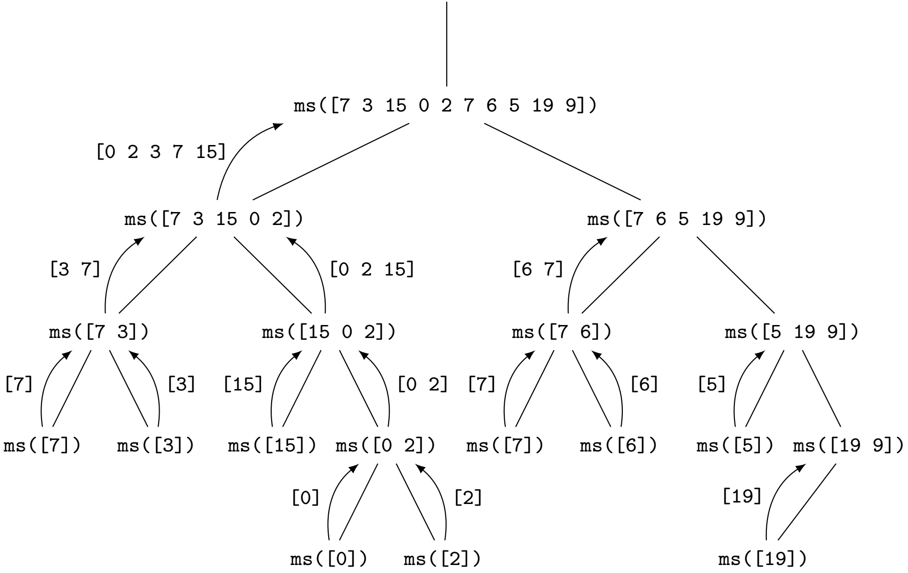
Merge sort, anropsträd



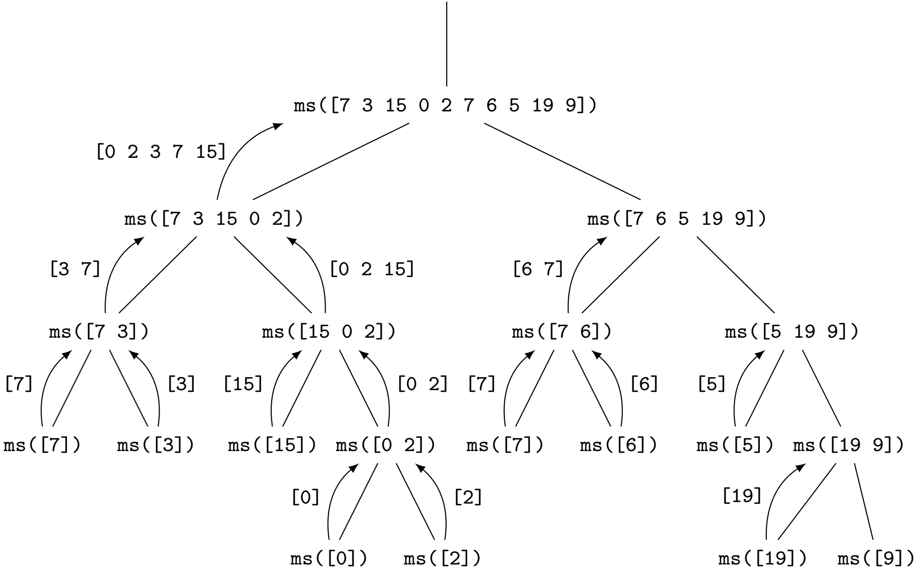
Merge sort, anropsträd



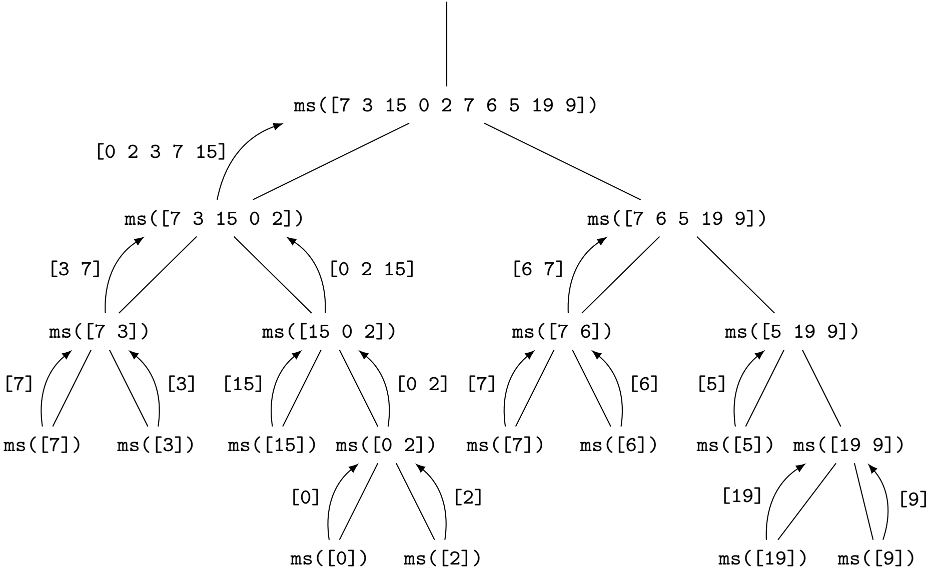
Merge sort, anropsträd



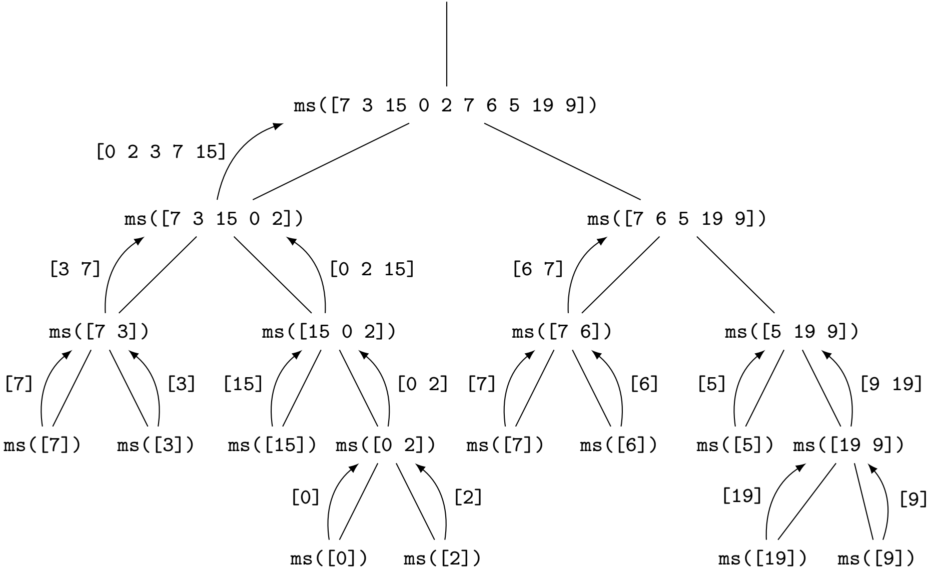
Merge sort, anropsträd



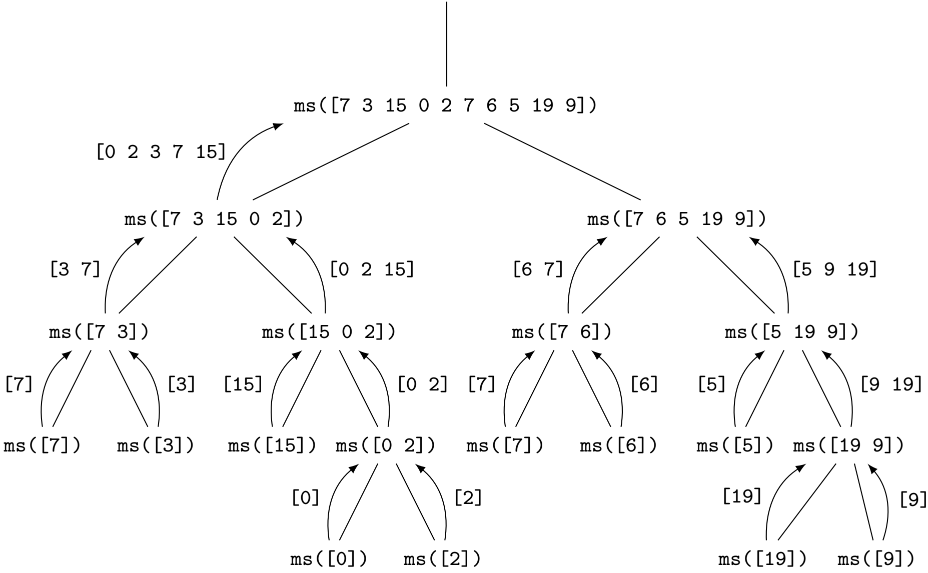
Merge sort, anropsträd



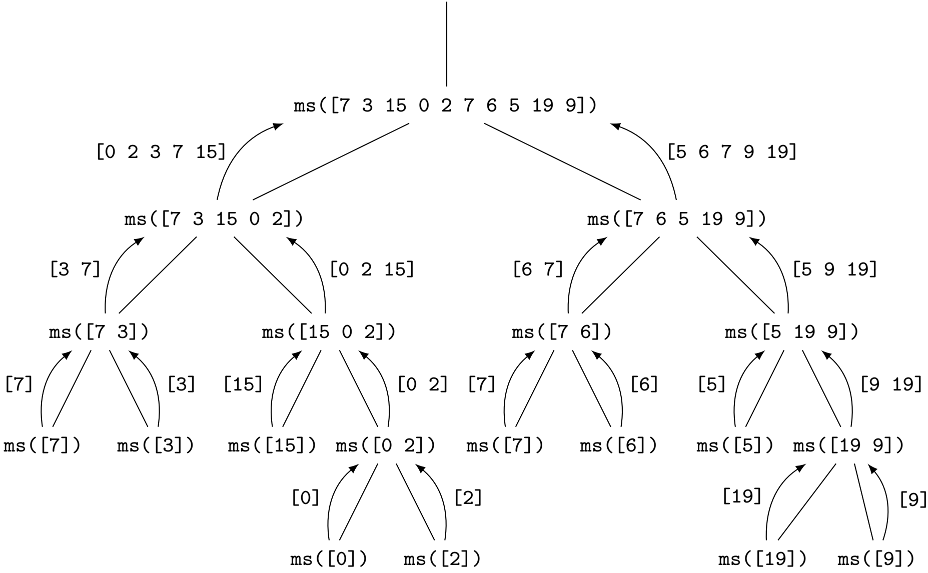
Merge sort, anropsträd



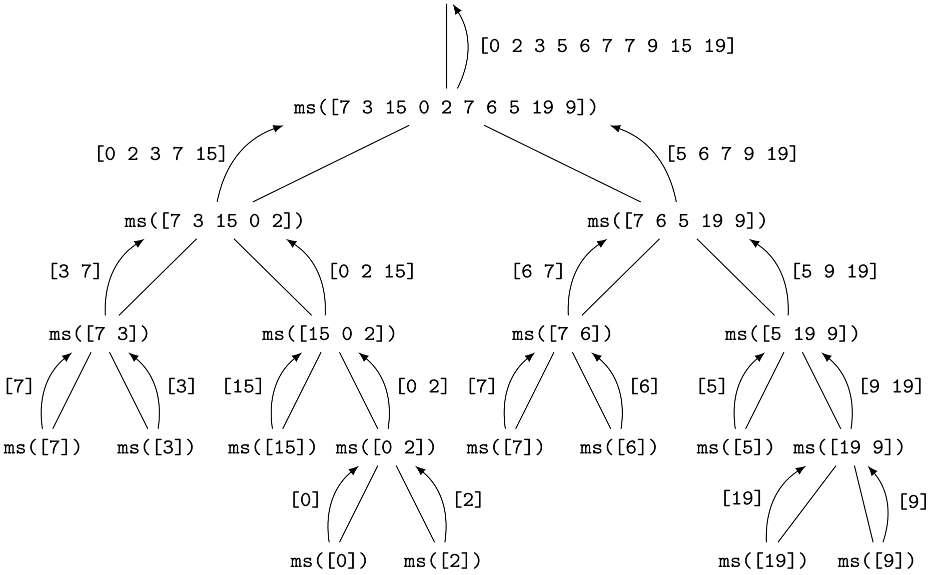
Merge sort, anropsträd



Merge sort, anropsträd



Merge sort, anropsträd



Merge sort, stabil?

- Är *Merge sort* stabil?

Merge sort, stabil?

- Är *Merge sort* stabil?
  - Ja, om *Merge sort* lägger den första halvan i `left`
    - Lika element i `A` sorteras före `B` av *Merge*

Quicksort

Quicksort

- Algoritm:
  - Välj ut ett pivåelement
  - Dela upp listan i tre delar: Less, Equal, Greater
  - Sortera Less och Greater rekursivt
  - Slå ihop Less+Equal+Greater

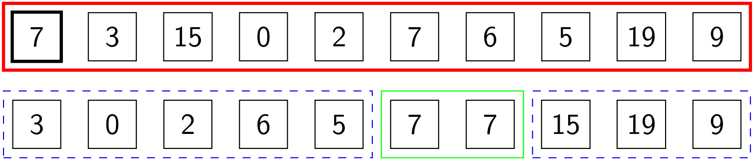
Quicksort — Exempel

7	3	15	0	2	7	6	5	19	9

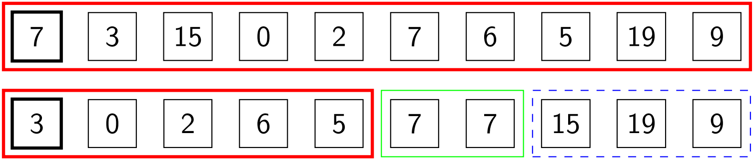
Quicksort — Exempel

7	3	15	0	2	7	6	5	19	9

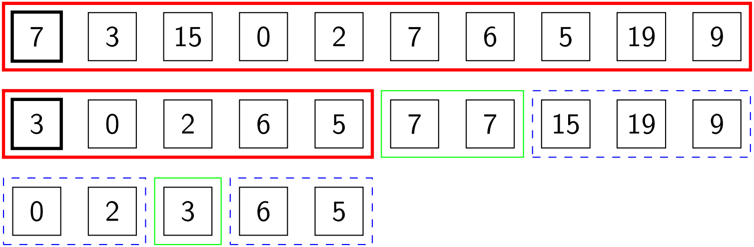
Quicksort — Exempel



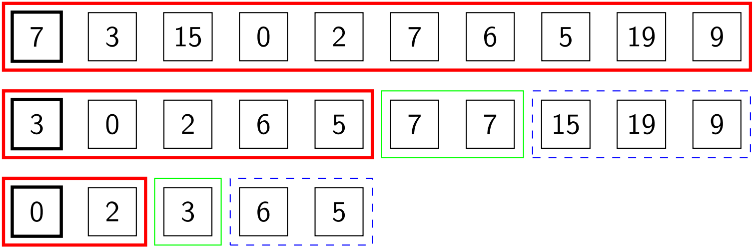
Quicksort — Exempel



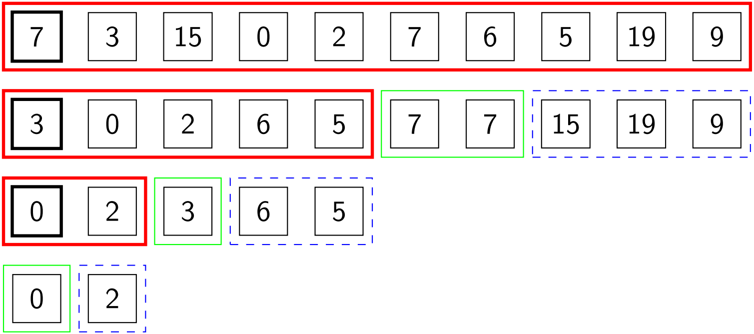
Quicksort — Exempel



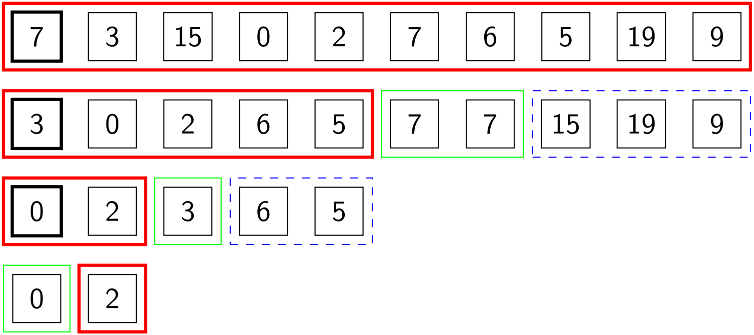
Quicksort — Exempel



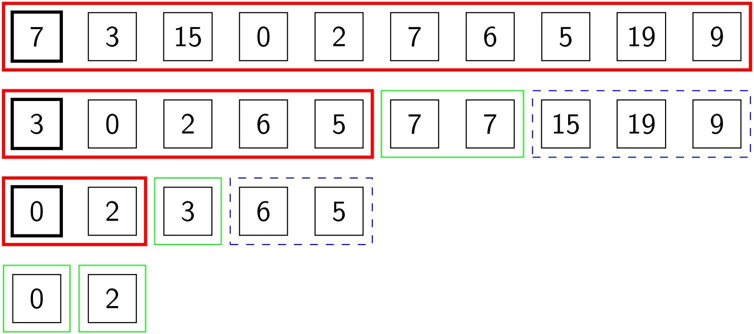
Quicksort — Exempel



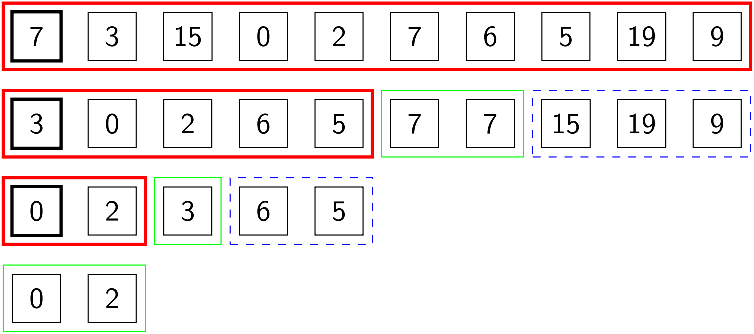
Quicksort — Exempel



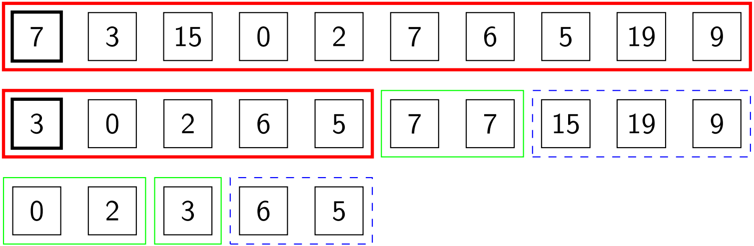
Quicksort — Exempel



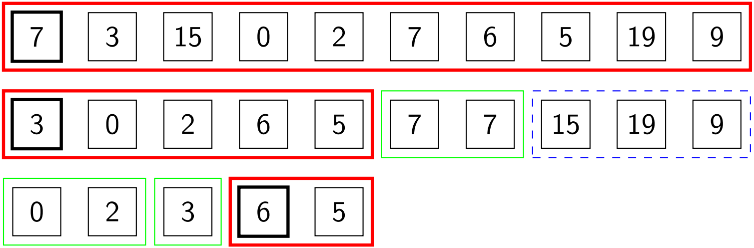
Quicksort — Exempel



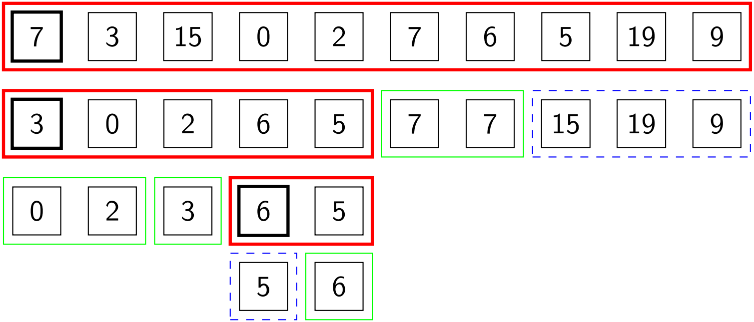
Quicksort — Exempel



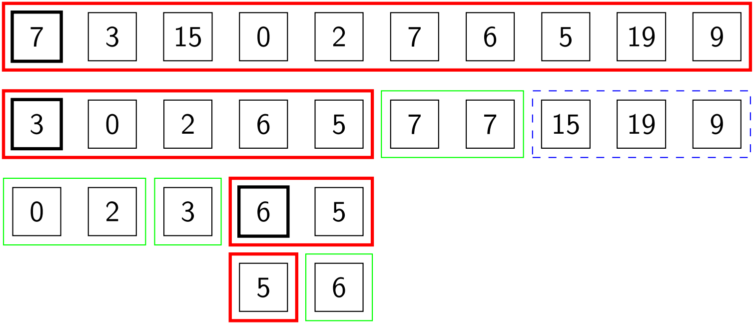
Quicksort — Exempel



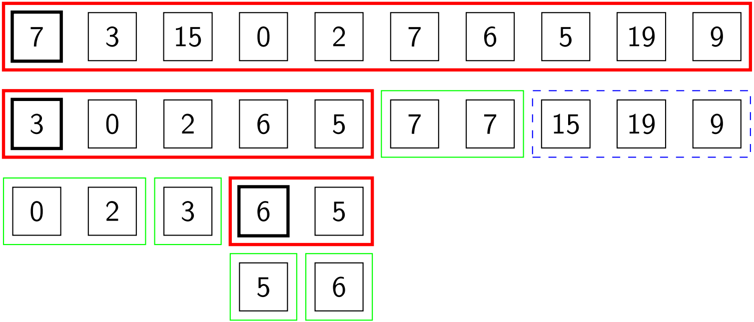
Quicksort — Exempel



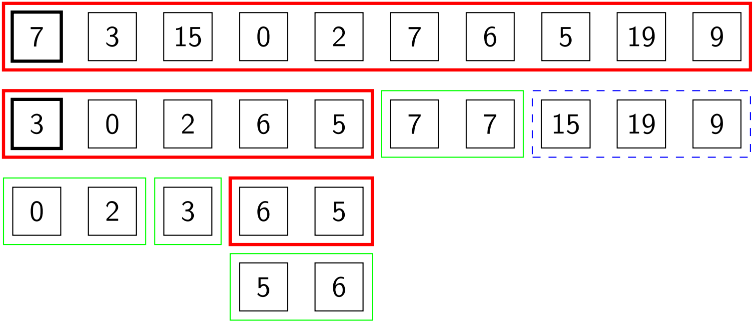
Quicksort — Exempel



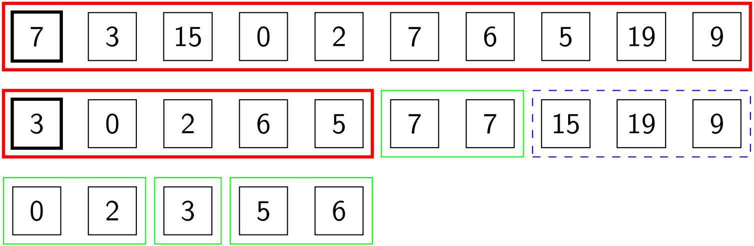
Quicksort — Exempel



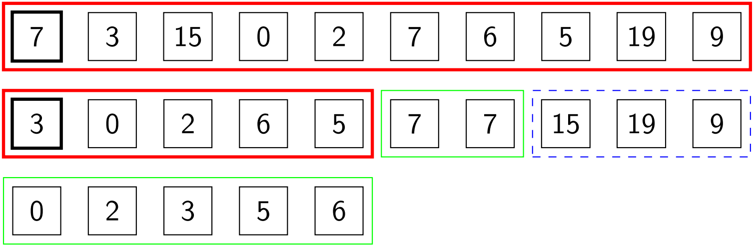
Quicksort — Exempel



Quicksort — Exempel



Quicksort — Exempel

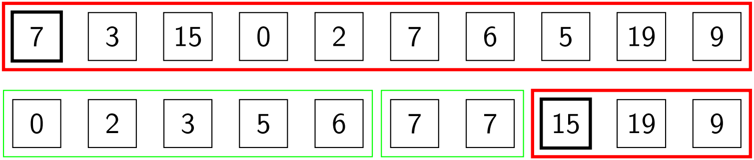


Quicksort — Exempel

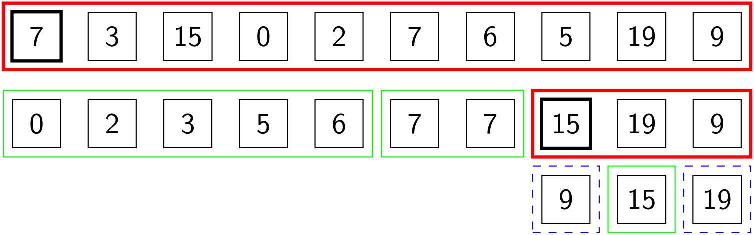
7	3	15	0	2	7	6	5	19	9

0	2	3	5	6	7	7	15	19	9

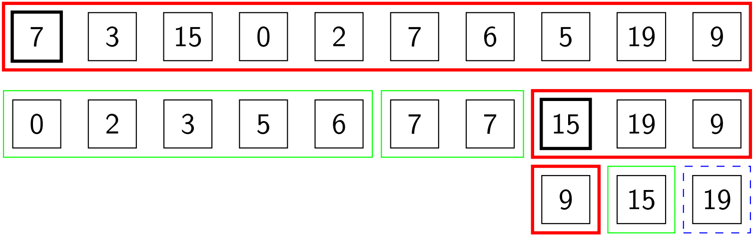
Quicksort — Exempel



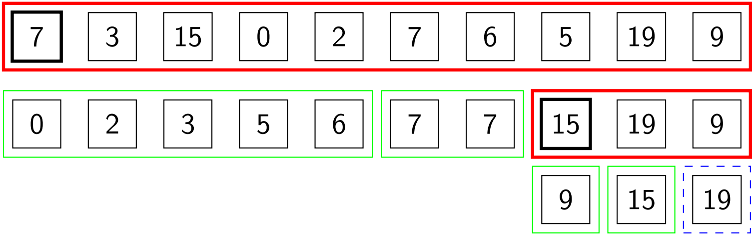
Quicksort — Exempel



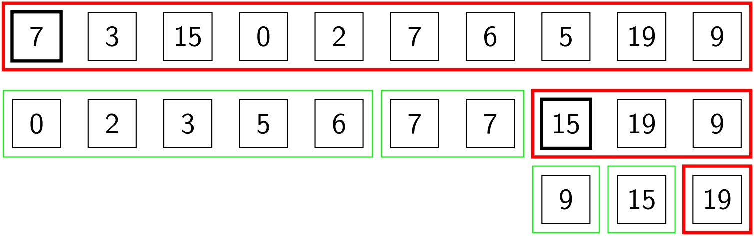
Quicksort — Exempel



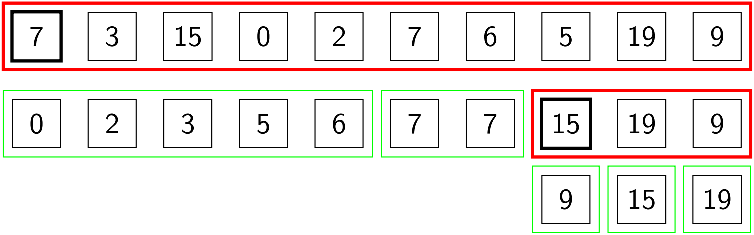
Quicksort — Exempel



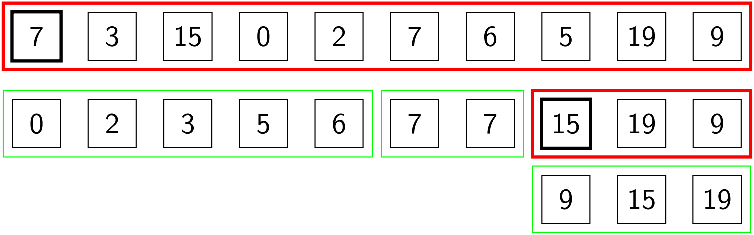
Quicksort — Exempel



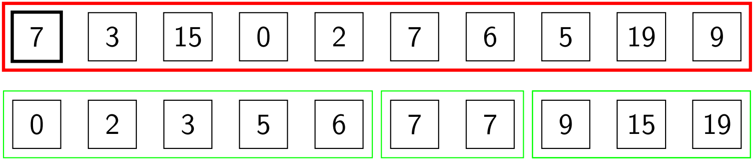
Quicksort — Exempel



Quicksort — Exempel



Quicksort — Exempel



Quicksort — Exempel

7	3	15	0	2	7	6	5	19	9

0	2	3	5	6	7	7	9	15	19

Quicksort — Exempel

0	2	3	5	6	7	7	9	15	19

Inplace Quicksort

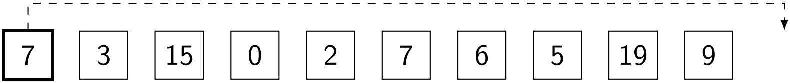
- Algoritm:
  - Välj ett pivåelement (PE)
  - Traversera parallellt från båda hållen i S:
    - Gå framåt från början av S tills man hittar ett element som är $\geq$ PE
    - Gå bakåt från slutet av S tills man hittar ett element som är $<$ PE
    - Byt plats på dessa två element.

    Upprepa till traverseringarna möts.
  - Stoppa in PE på rätt plats.
  - Rekursivt anrop för Less och Greater.

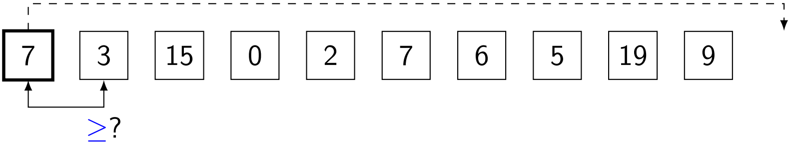
Inplace Quicksort — exempel

7	3	15	0	2	7	6	5	19	9

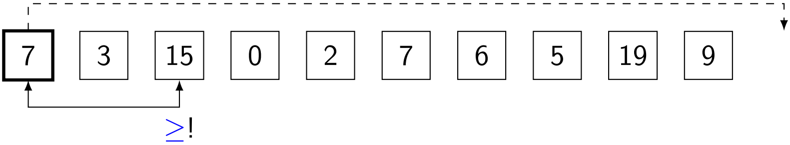
Inplace Quicksort — exempel



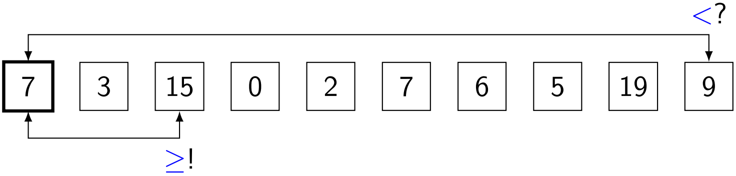
Inplace Quicksort — exempel



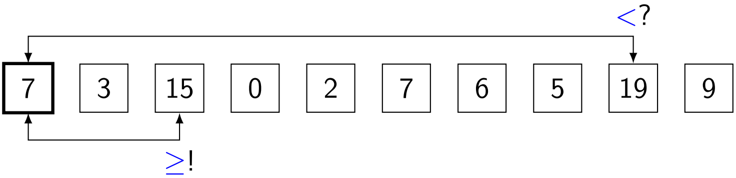
Inplace Quicksort — exempel



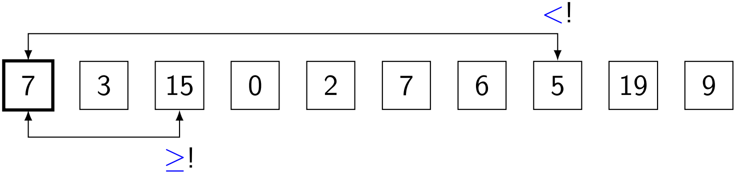
Inplace Quicksort — exempel



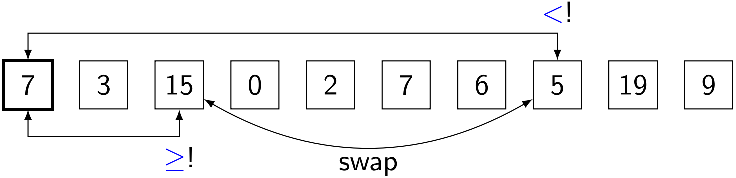
Inplace Quicksort — exempel



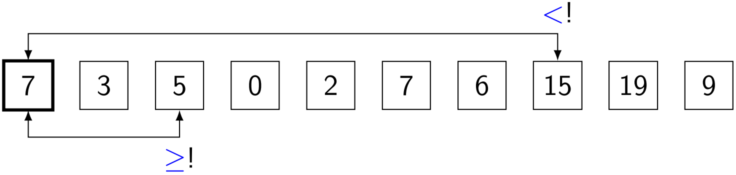
Inplace Quicksort — exempel



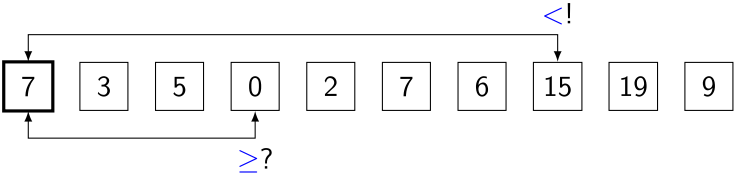
Inplace Quicksort — exempel



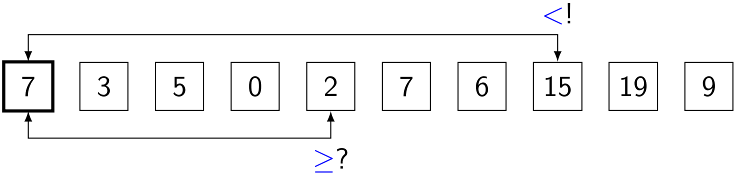
Inplace Quicksort — exempel



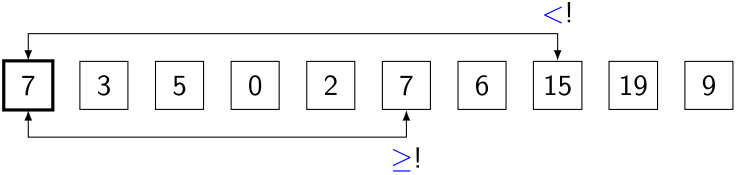
Inplace Quicksort — exempel



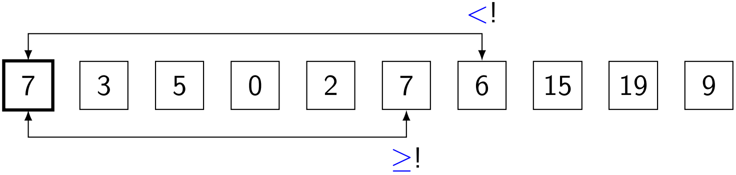
Inplace Quicksort — exempel



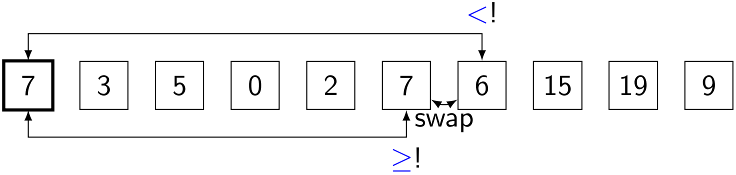
Inplace Quicksort — exempel



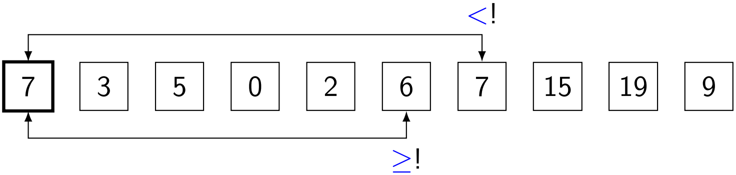
Inplace Quicksort — exempel



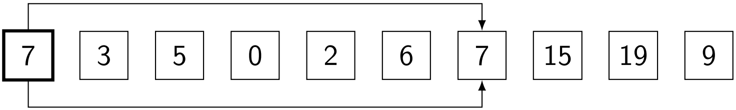
Inplace Quicksort — exempel



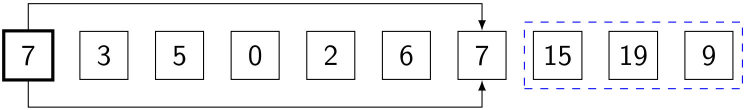
Inplace Quicksort — exempel



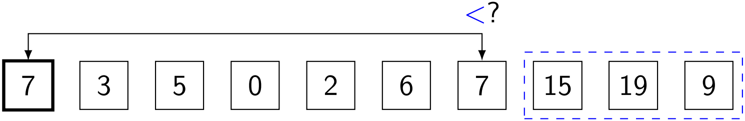
Inplace Quicksort — exempel



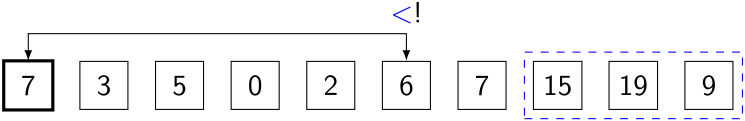
Inplace Quicksort — exempel



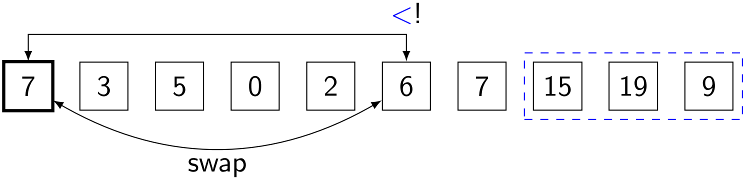
Inplace Quicksort — exempel



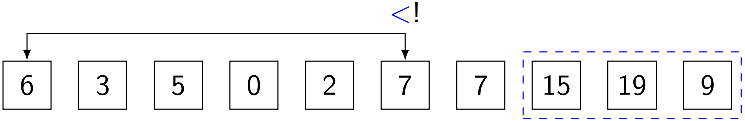
Inplace Quicksort — exempel



Inplace Quicksort — exempel



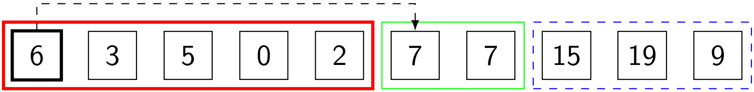
Inplace Quicksort — exempel



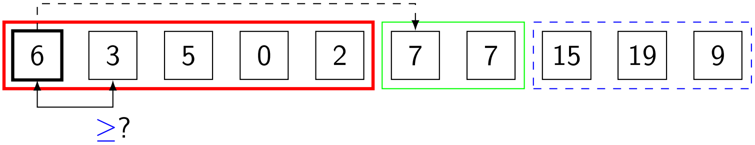
Inplace Quicksort — exempel

6	3	5	0	2	7	7	15	19	9

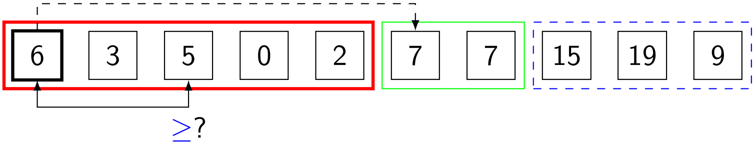
Inplace Quicksort — exempel



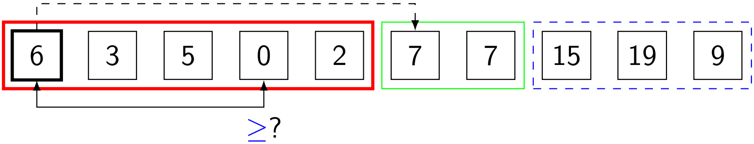
Inplace Quicksort — exempel



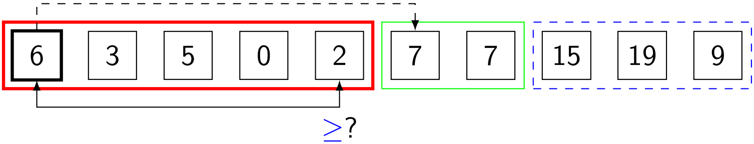
Inplace Quicksort — exempel



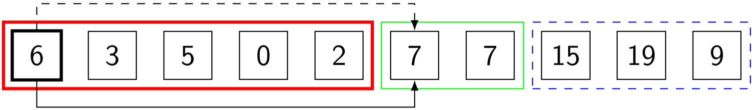
Inplace Quicksort — exempel



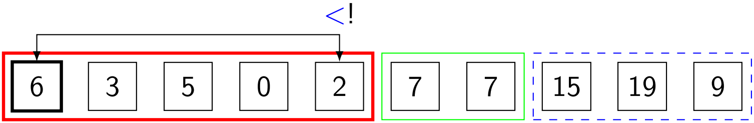
Inplace Quicksort — exempel



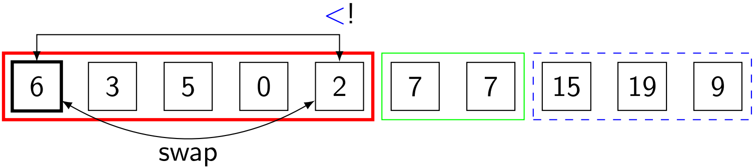
Inplace Quicksort — exempel



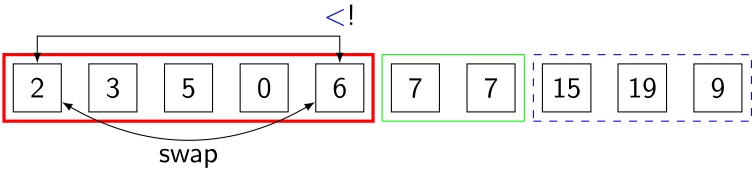
Inplace Quicksort — exempel



Inplace Quicksort — exempel



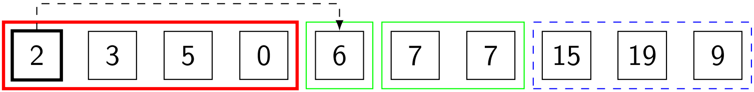
Inplace Quicksort — exempel



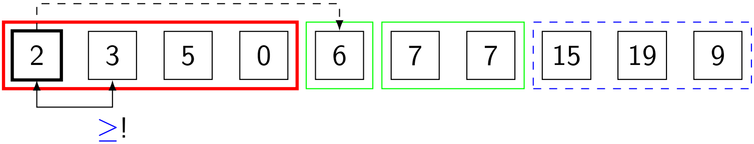
Inplace Quicksort — exempel

2	3	5	0	6	7	7	15	19	9

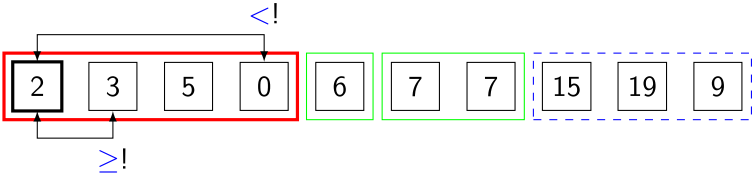
Inplace Quicksort — exempel



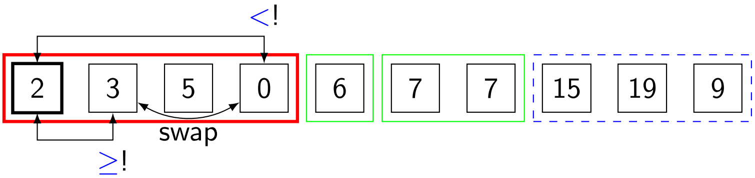
Inplace Quicksort — exempel



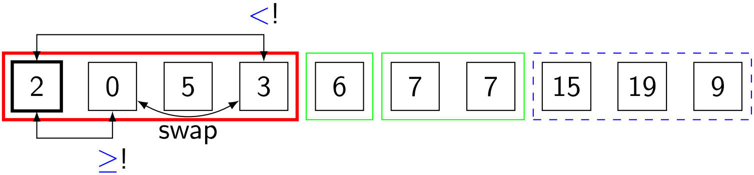
Inplace Quicksort — exempel



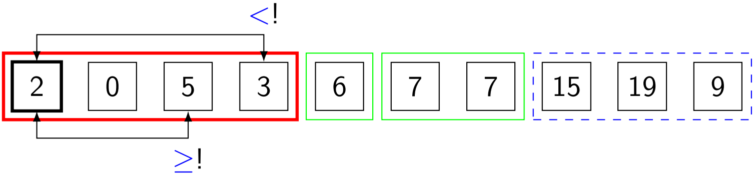
Inplace Quicksort — exempel



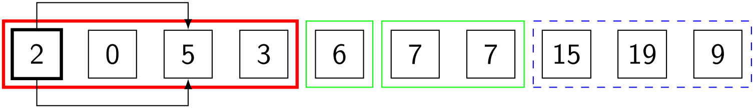
Inplace Quicksort — exempel



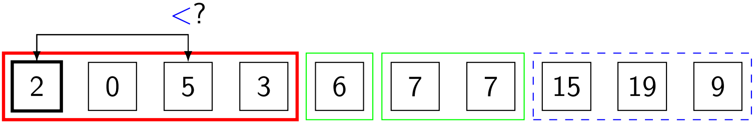
Inplace Quicksort — exempel



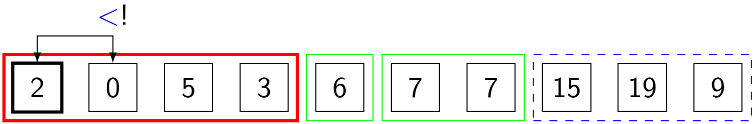
Inplace Quicksort — exempel



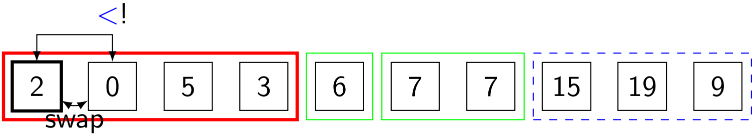
Inplace Quicksort — exempel



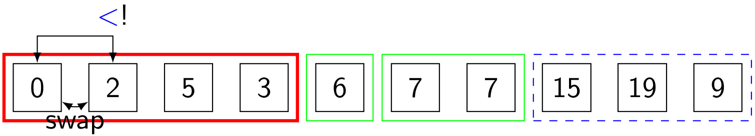
Inplace Quicksort — exempel



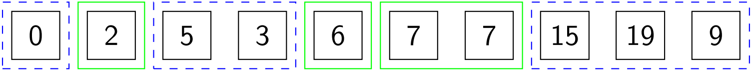
Inplace Quicksort — exempel



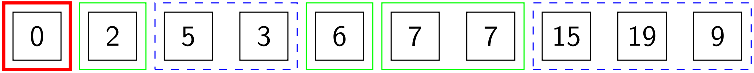
Inplace Quicksort — exempel



Inplace Quicksort — exempel



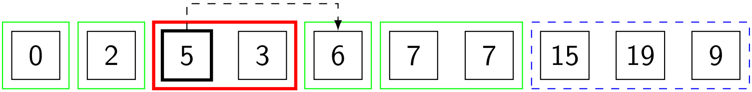
Inplace Quicksort — exempel



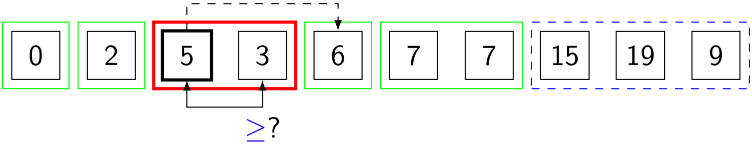
Inplace Quicksort — exempel

0	2	5	3	6	7	7	15	19	9

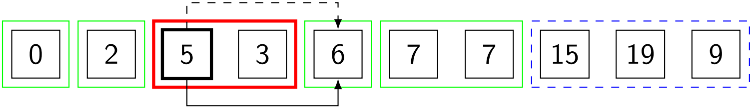
Inplace Quicksort — exempel



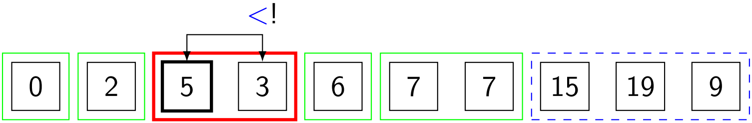
Inplace Quicksort — exempel



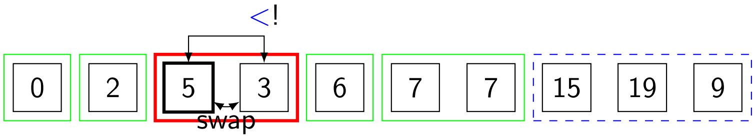
Inplace Quicksort — exempel



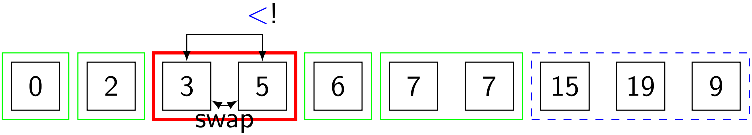
Inplace Quicksort — exempel



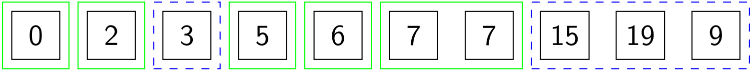
Inplace Quicksort — exempel



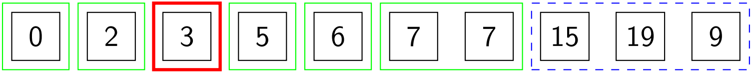
Inplace Quicksort — exempel



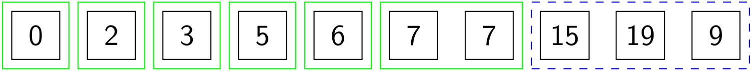
Inplace Quicksort — exempel



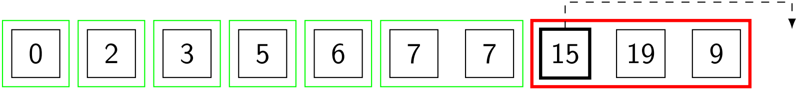
Inplace Quicksort — exempel



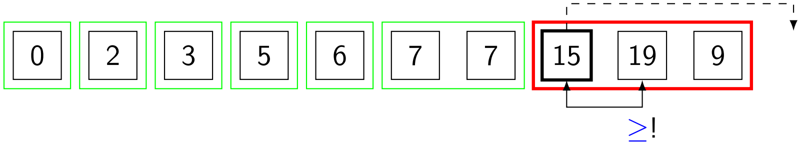
Inplace Quicksort — exempel



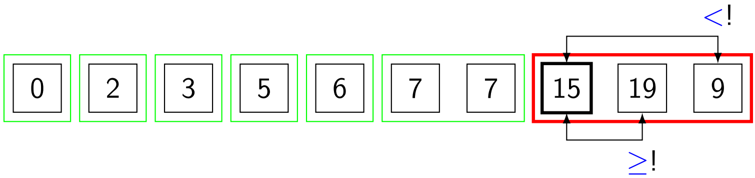
Inplace Quicksort — exempel



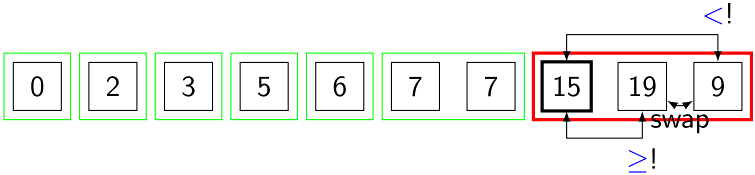
Inplace Quicksort — exempel



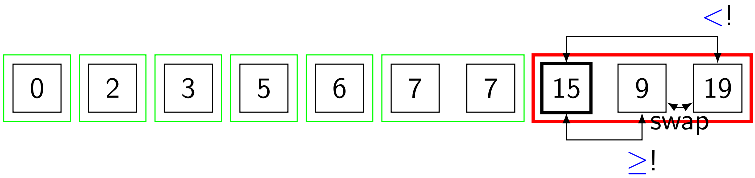
Inplace Quicksort — exempel



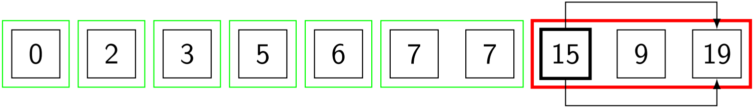
Inplace Quicksort — exempel



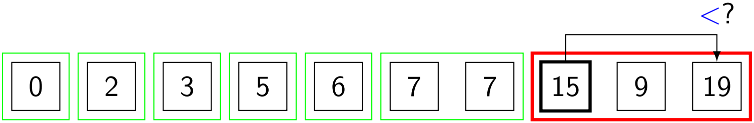
Inplace Quicksort — exempel



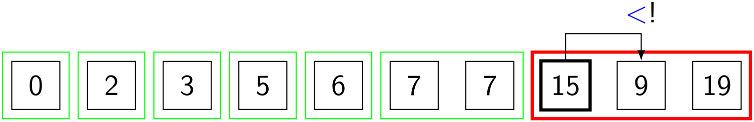
Inplace Quicksort — exempel



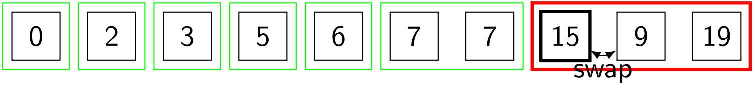
Inplace Quicksort — exempel



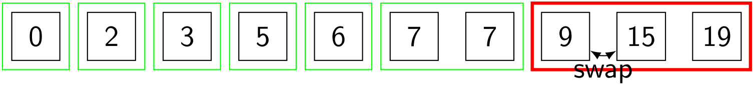
Inplace Quicksort — exempel



Inplace Quicksort — exempel



Inplace Quicksort — exempel



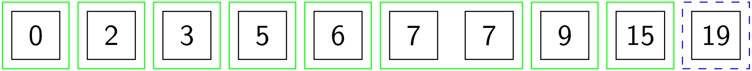
Inplace Quicksort — exempel

0	2	3	5	6	7	7	9	15	19

Inplace Quicksort — exempel

0	2	3	5	6	7	7	9	15	19

Inplace Quicksort — exempel



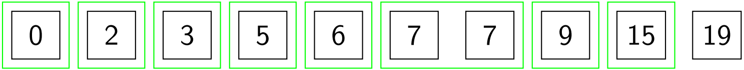
Inplace Quicksort — exempel

0	2	3	5	6	7	7	9	15	19

Inplace Quicksort — exempel

0	2	3	5	6	7	7	9	15	19

Inplace Quicksort — exempel



- Stabil?

Inplace Quicksort — exempel

0	2	3	5	6	7	7	9	15	19

- Stabil?
  - Nej!

Quicksort — val av pivåelement

- Komplexiteten är $O(n \log n)$ i bästa fallet
- Valet av pivåelement är kritiskt:
  - Vill ha ett pivåelement som har ett mitten-värde
  - Vid sned fördelning får man i praktiken insticks-/urvalssortering med $O(n^2)$
- Alternativ för att få en enkel tilldelning:
  - Välj första/sista, slumpmässigt
  - Medel/median mellan några stycken
    - Median mellan första/mitten/sista
  - Det största av de två första som skiljer sig åt

Hur snabbt kan man sortera?

- Det snabbaste vi kan sortera med jämförelsebaserad algoritmer är $O(n \log n)$
- Den enda information vi använder är resultatet av en jämförelse av två nyckelvärden
  - $a < b$?
- Nyckelsortering använder mer information om nyckeltypen
  - Kan göras snabbare än $O(n \log n)$

Hur sortera snabbare än $O(n \log n)$?

- Vi måste veta mer om nycklarna vi vill sortera efter:
  - Det måste gå att avbilda nycklarna på heltal V
  - Vi behöver känna till ett minsta och största värde
    - $V_{\min} .. V_{\max}$ för V
- Komplexiteten blir $O(n + m)$ där n är antalet element och m är $V_{\max} - V_{\min}$

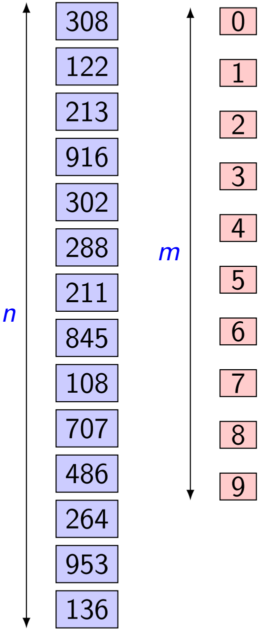
Facksortering (*Bucket sort*)

- Notera! På Wikipedia kallas denna algoritm *Pidgeonhole sort*

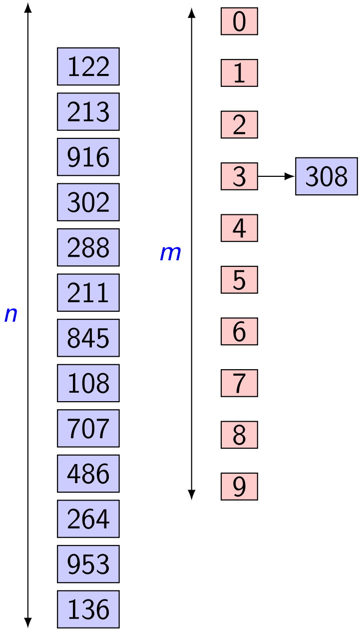
1. Skapa ett fack för varje nyckelvärde i intervallet V_{min} .. V_{max}
2. Gå igenom sekvensen S
   - Lägg elementen i det fack dess nyckelvärde motsvarar
   - Komplexitet $O(n)$
3. Länka samman facken till en sekvens i ordning V_{min} .. V_{max}
   - Komplexitet $O(m)$

- Kan göras stabil

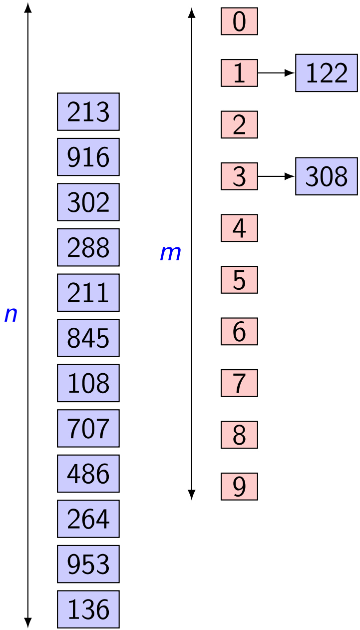
Facksortering, nyckelvärdet är $v/100$



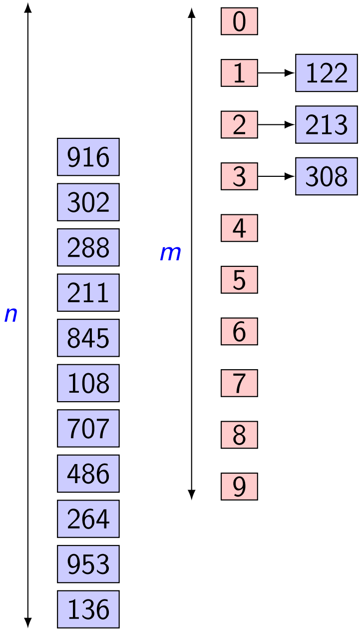
Facksortering, nyckelvärdet är $v/100$



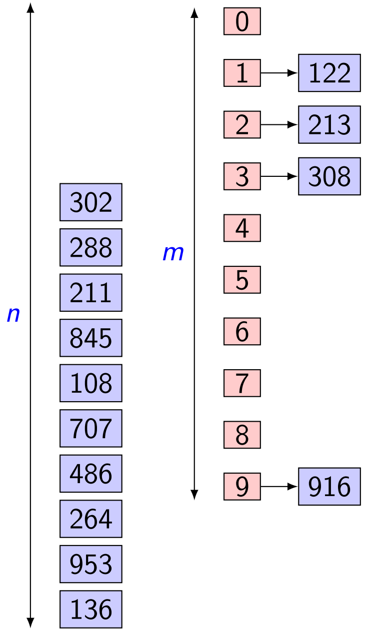
Facksortering, nyckelvärdet är $v/100$



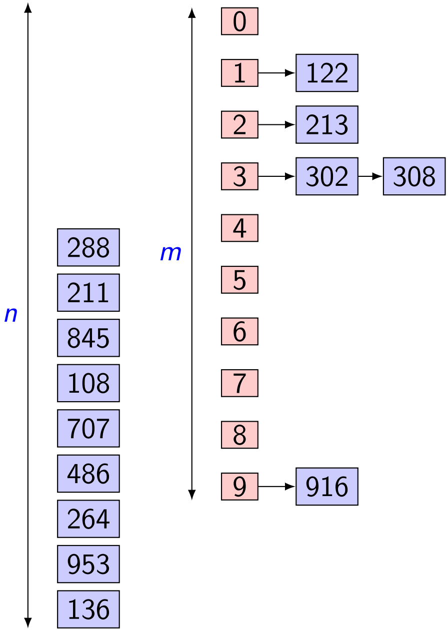
Facksortering, nyckelvärdet är $v/100$



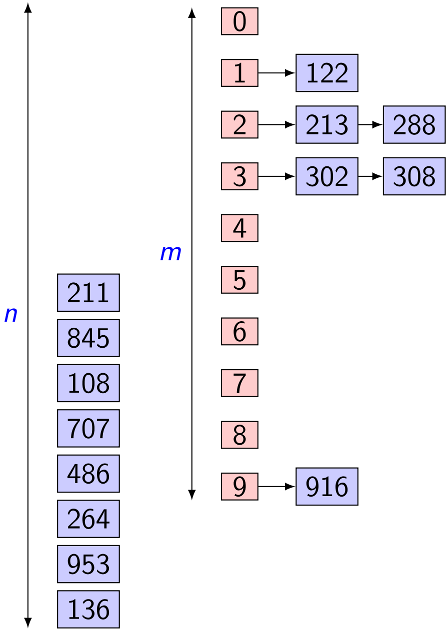
Facksortering, nyckelvärdet är $v/100$



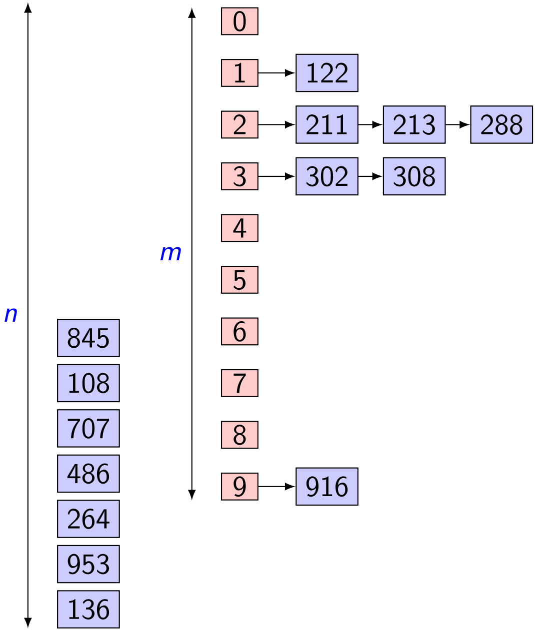
Facksortering, nyckelvärdet är $v/100$



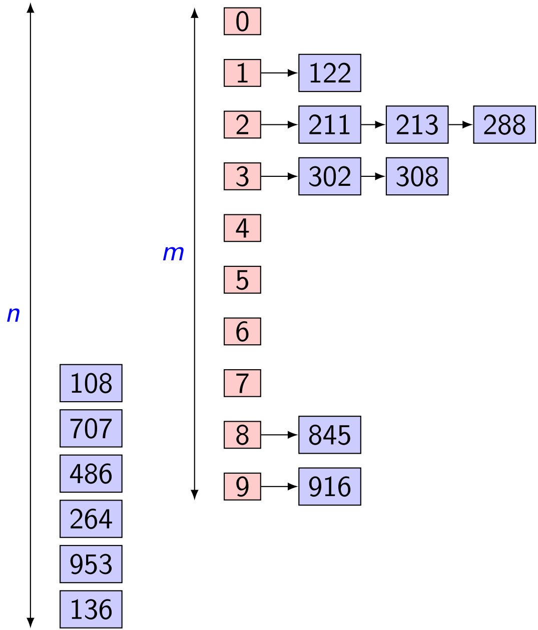
Facksortering, nyckelvärdet är $v/100$



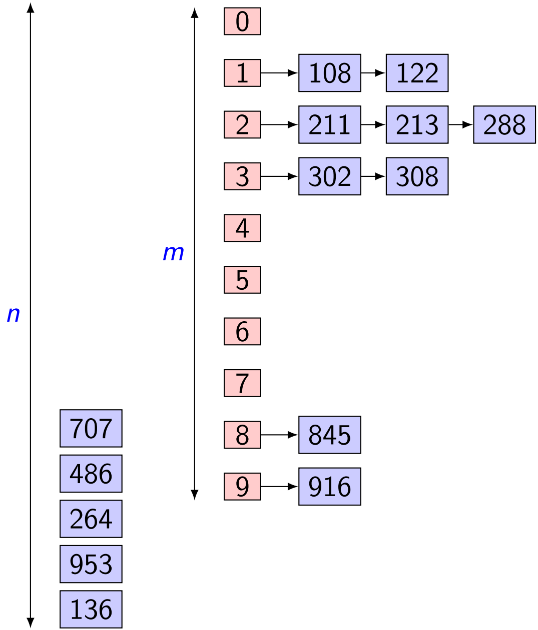
Facksortering, nyckelvärdet är $v/100$



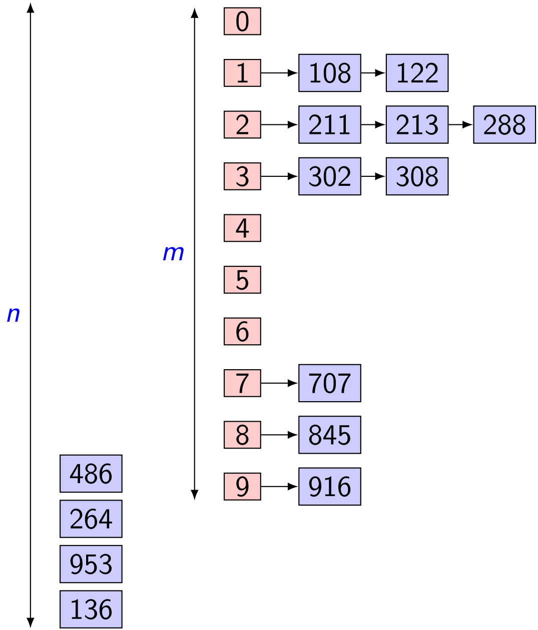
Facksortering, nyckelvärdet är $v/100$



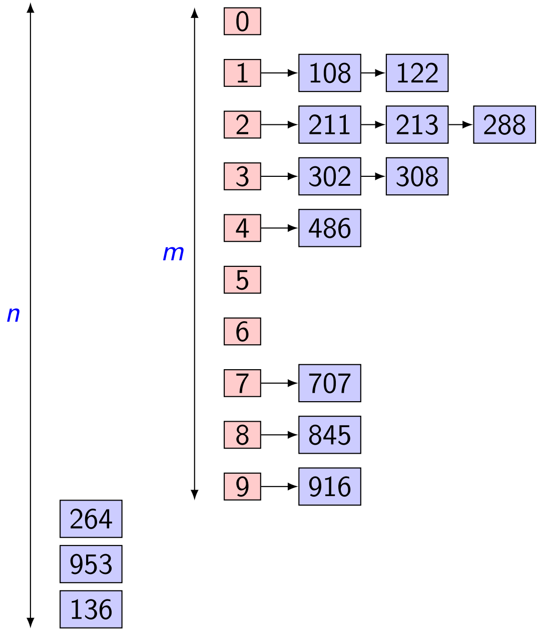
Facksortering, nyckelvärdet är $v/100$



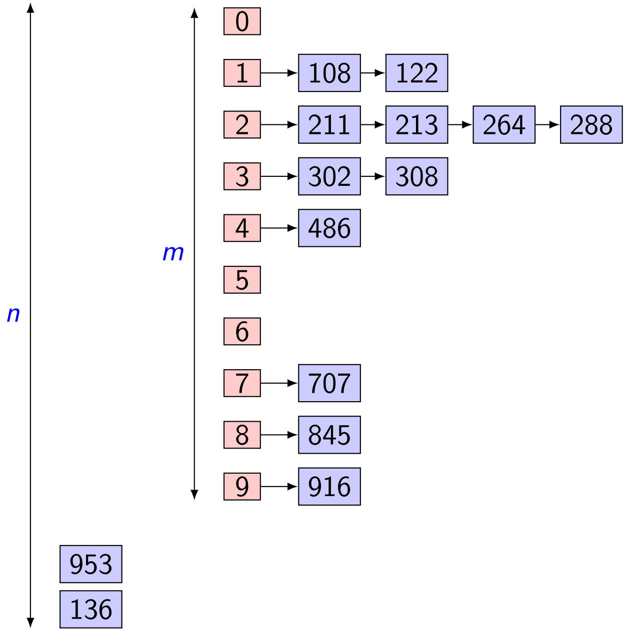
Facksortering, nyckelvärdet är $v/100$



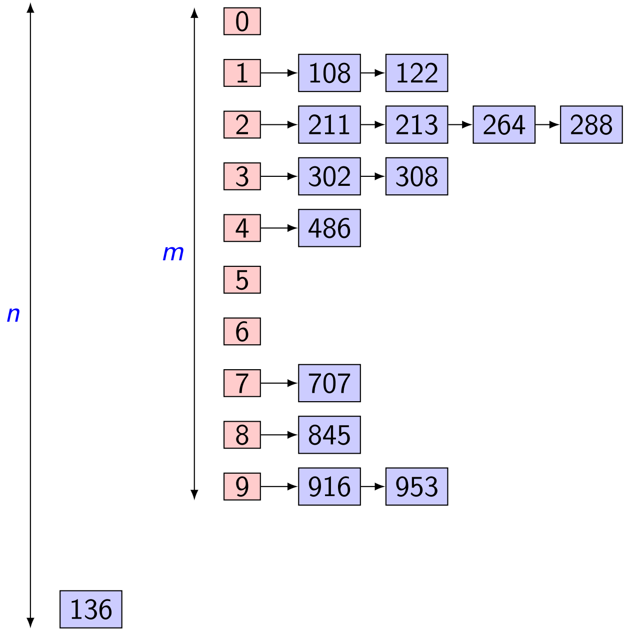
Facksortering, nyckelvärdet är $v/100$



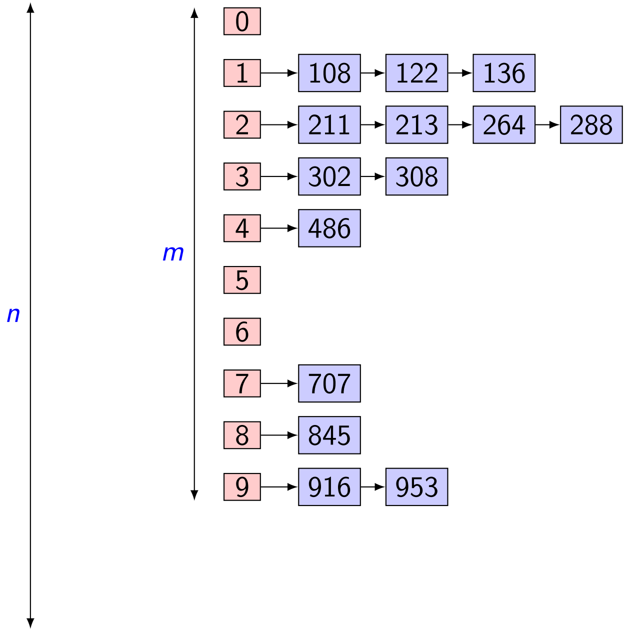
Facksortering, nyckelvärdet är $v/100$



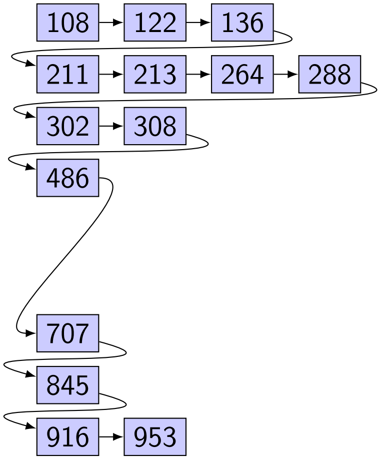
Facksortering, nyckelvärdet är $v/100$



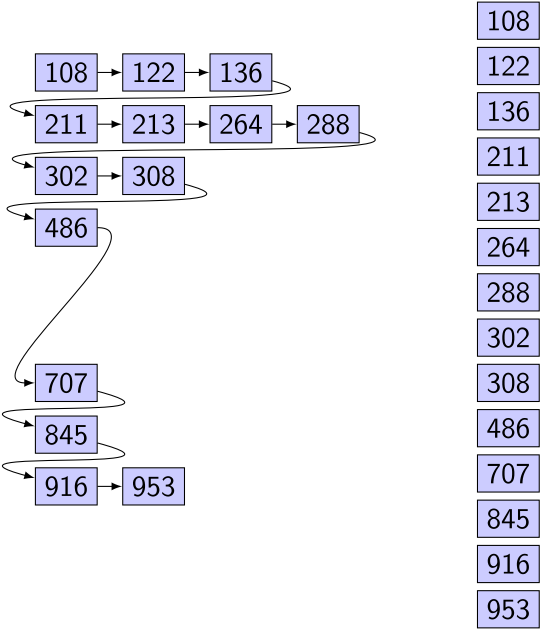
Facksortering, nyckelvärdet är $v/100$



Facksortering, nyckelvärdet är $v/100$



Facksortering, nyckelvärdet är $v/100$



Sammanfattning

Algoritm	Tidskomplexitet bästa	värsta	Stabil?	Minnesbehov
Insertion Sort	$O(n^2)$	$O(n^2)$	Ja	$O(1)$
Selection Sort	$O(n)$	$O(n^2)$	Nej[1]	$O(1)$
Bubble Sort	$O(n)$	$O(n^2)$	Ja	$O(1)$
Merge Sort	$O(n \log n)$	$O(n \log n)$	Ja	$O(n)$
Quicksort	$O(n \log n)$	$O(n^2)$	Nej	$O(\log n)$[2]
Heapsort	$O(n \log n)$	$O(n \log n)$	Nej	$O(1)$
Bucket sort	$O(n + m)$	$O(n + m)$	Ja	$O(m)$

- Fundera på:
  - Hur hanterar algoritmen en redan sorterad lista?
  - Hur hanterar algoritmen en motsatt sorterad lista?

[1] Ja om $O(n)$ extra minne.
[2] $O(n)$ i värsta-fallet

Länkar

- Wikipedia — Sorting algorithms
  - https://en.wikipedia.org/wiki/Sorting_algorithm
- Animering av sorteringsalgorithmer
  - http://www.sorting-algorithms.com
- Dansat *merge sort*
  - https://www.youtube.com/watch?v=XaqR3G_NVoo

Sökning

Vad betyder "lika med"?

- Vid sökning och sortering definierar man ofta en extern likhetsfunktion (*match function*) som avgör om två elementvärden *a* och *b* är lika
- Det går att låta funktionen ta två argument och returnera `True` of argumenten anses lika, annars `False`
- Om man i stället definierar en jämförelsefunktion (*compare function*) och begär att den ska returnera ett heltal

<0	om *a* kommer före *b* i sorteringsordningen
0	om *a* och *b* är lika enligt sorteringsordningen
>0	om *a* kommer efter *b* i sorteringsordningen

  så blir algoritmerna ännu flexiblare på sorterade data
- En jämförelsefunktion gör det möjligt att använda samma söknings- och sorteringsalgoritmer på olika data

Jämförelsefunktioner, exempel

```
Algorithm Compare-int(a, b: Int)
// Input: Two integers a and b.
// Output: An integer
//          < 0 if and only if a < b
//          = 0 if and only if a = b, and
//          > 0 if and only if a > b
return a - b
```

```
Algorithm Compare-strings(a, b: String)
// Input: Two strings a and b.
// Output: An integer
//          < 0 if and only if a comes before b
//          = 0 if and only if a is equal to b
//          > 0 if and only if a comes after b
if Isless-than(a,b) then
  return -1
else if Isequal(a,b) then
  return 0
else
  return +1
```

Jämförelsefunktioner, exempel

```
Algorithm Compare-record(a, b: Record)
// Input: Two records a and b with fields lastname, firstname,
//        and age
// Output: An integer <0, =0, or >0 to indicate whether a is
//         considered to be before, equal to, or after b,
//         respectively. The ordering is decided by last name,
//         then first name.  In case of a tie, a younger age is
//         given precedence.
cmp ← Compare-strings(a.lastname, b.lastname)
if cmp = 0 then
  cmp ← Compare-strings(a.firstname, b.firstname)
if cmp = 0 then
  cmp ← Compare-int(a.age, b.age)
return cmp
```

Linjär sökning

- Starta från början och sök tills elementet hittats eller sekvensen är slut
- Komplexitet:
  - Om elementet finns: I medel, gå igenom halva listan $O(n)$
  - Om elementet saknas: Gå igenom hela listan $O(n)$
- Om listan är sorterad:
  - Om elementet finns: I medel, gå igenom halva listan $O(n)$
  - Om elementet saknas: I medel, gå igenom halva lista $O(n)$

Algoritm linjär sökning, osorterad lista (jämför seek)

```
Algorithm Linsearch(l: List, v: Value, Value-isequal: Function)
// Input: An unsorted list, a search value, and a equality
//        function. The Value-isequal function should accept
//        two element values and return True if the values
//        are considered equal.
// Output: (True, pos), where pos is the position for the first
//         match, or (False, None) if no match is found.
p ← First(l)
while not Isend(p, l)) do
  if Value-isequal(v, Inspect(p, l)) then
    return (True, p)
  p ← Next(p, l)
return (False, None)
```

Algoritm linjär sökning, sorterad lista

```
Algorithm Linsearch-sorted(l: List, v: Value, Compare: Function)
// Input: A sorted list, a search value, and a compare function.
// Output: (True, pos), where pos is the position for the first
//         match, or (False, None) if no match is found.
p ← First(l)
while not Isend(l) do
  // Compare
  c ← Compare(v, Inspect(p, l))
  if c = 0 then
    // Found it
    return (True, p)
  else if c > 0 then
    // Past where it could be, give up
    return (False, None)
  else
    // Still before where it could be, continue
    p ← Next(p, l)
return (False, None)
```

Binär sökning

- Om sekvensen har index (t.ex. i ett fält) kan man söka binärt
- Successiv halvering av sökintervallet
- Sök efter elementet med värde v:
  - Jämför med elementet $x[m]$ närmast mitten av intervallet
    - Om likhet — klart!
    - Om v kommer före $x[m]$ i sorteringsordningen, fortsätt sökningen rekursivt i delintervallet till vänster om m
    - Om v kommer efter $x[m]$ i sorteringsordningen, fortsätt sökningen rekursivt i delintervallet till höger om m
- Vi får värsta-falls och medelkomplexitet $O(\log n)$

Algoritm iterativ binär sökning

```
Algorithm Binsearch-iter(a: Array, v: Value, Compare: Function)
left ← Low(a)
right ← High(a)
while left <= right do
  // Check in the middle
  mid ← (left + right)/2
  // Compare
  c ← Compare(v, Inspect-value(a, mid))
  if c = 0 then
    // Found it
    return (True, mid)
  else if c < 0 then
    // Look left
    right ← mid - 1
  else
    // Look right
    left ← mid + 1
return (False, None)
```

Algoritm rekursiv binär sökning

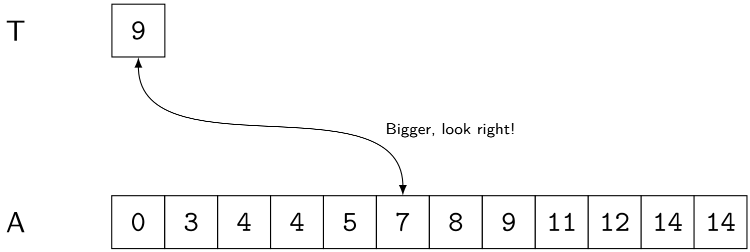
```
Algorithm Binsearch-rec(a: Array, v: Value, Compare: Function,
                        left, right: Index)
if right < left then
  return (False, None)
// Check in the middle
mid ← (left + right)/2
// Compare
c ← Compare(v, Inspect-value(a, mid))
if c = 0 then
  // Found it
  return (True, mid)
else if c < 0 then
  // Look left
  return Binsearch-rec(a, v, Compare, left, mid-1)
else
  // Look right
  return Binsearch-rec(a, v, Compare, mid+1, right)

Algorithm binsearch-main(a: Array, v: Value, Compare: Function)
// Call the recursive function to do the work.
return Binsearch-rec(a, v, Compare, Low(a), High(a))
```

Binär sökning, exempel

T	9

A	0	3	4	4	5	7	8	9	11	12	14	14

Binär sökning, exempel

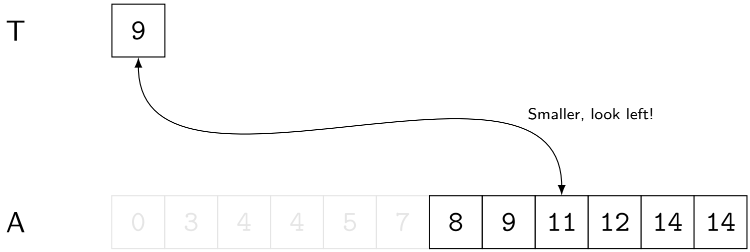


Binär sökning, exempel

T	9

A	0	3	4	4	5	7	8	9	11	12	14	14

Binär sökning, exempel

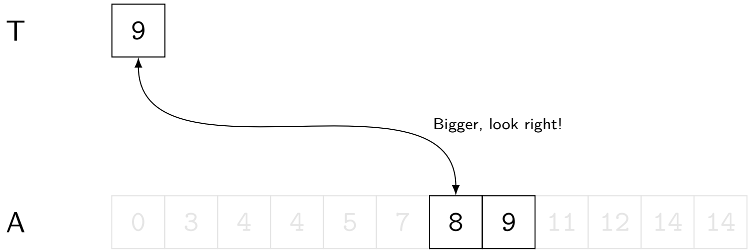


Binär sökning, exempel

T	
	9

A											
0	3	4	4	5	7	8	9	11	12	14	14

Binär sökning, exempel



Binär sökning, exempel

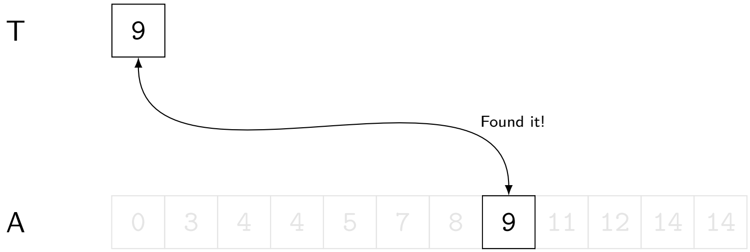
T

9

A

0	3	4	4	5	7	8	9	11	12	14	14

Binär sökning, exempel



Exempel, sorterat fält

- Sök efter elementvärdet 13:
  - Linjär sökning: 8 jämförelser innan träff.

1	2	4	4	6	7	9	13	14	19
?	?	?	?	?	?	?	!		

  - Binär sökning: 2 jämförelser innan träff.

1	2	4	4	6	7	9	13	14	19
[				?					]
					[		!		]

- Sök efter elementvärdet 10:
  - Linjär sökning: 8 jämförelser innan man ger upp.

1	2	4	4	6	7	9	13	14	19
?	?	?	?	?	?	?	?		

  - Binär sökning: 4 jämförelser innan man ger upp.

1	2	4	4	6	7		9	13	14	19
[				?						]
					[			?		]
					[?		]			
						[?]				