# F04 — Riktad lista, Kö, algoritmer, pseudokod

5DV149 Datastrukturer och algoritmer
Kapitel 2.1-2.2, 3.4, 4.1-4.2, 8

Niclas Börlin
niclas.borlin@cs.umu.se

2024-01-22 Mån



## Innehåll



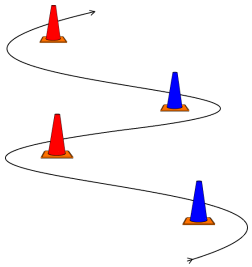


## Riktad lista



## Riktad lista

- Modell: Slalombana
- Specialisering av `Lista`
  - Förflyttning bara i en riktning — framåt
- I `Lista` finns `Previous`- och `End`-operationer så vi kan navigera åt båda hållen
- `Riktad lista` har en `Isend`-operation i stället.



# Gränsyta till Riktad lista (*Directed List)*

```
abstract datatype DList(val)
auxiliary pos
  Empty() → DList(val)
  Isempty(l: DList(val)) → Bool
  First(l: DList(val)) → pos
  Next(p: pos, l: DList(val)) → pos
  Isend(p: pos, l: DList(val)) → Bool
  Inspect(p: pos, l: DList(val)) → val
  Insert(v: val, p: pos, l: DList(val))
                                → (DList(val), pos)
  Remove(p: pos, l: DList(val)) → (DList(val), pos)
  Kill(l: DList(val)) → ()
```



# Riktad lista vs. Lista

```
abstract datatype List(val)
auxiliary pos
  Empty() → List(val)
  Isempty(l: List(val)) → Bool
  First(l: List(val)) → pos
  End(l: List(val)) → pos
  Next(p: pos, l: List(val)) → pos
  Previous(p: pos, l: List(val)) → pos
  Pos-isequal(p1, p2: pos, l: List(val)) → Bool
  Inspect(p: pos, l: List(val)) → val
  Insert(v: val, p: pos, l: List(val))
                          → (List(val), pos)
  Remove(p: pos, l: List(val)) → (List(val), pos)
  Kill(l: List(val)) → ()
```

```
abstract datatype DList(val)
auxiliary pos
  Empty() → DList(val)
  Isempty(l: DList(val)) → Bool
  First(l: DList(val)) → pos
  Isend(p: pos, l: DList(val)) → Bool
  Next(p: pos, l: DList(val)) → pos

  Inspect(p: pos, l: DList(val)) → val
  Insert(v: val, p: pos, l: DList(val))
                                → (DList(val), pos)
  Remove(p: pos, l: DList(val)) → (DList(val), pos)
  Kill(l: DList(val)) → ()
```



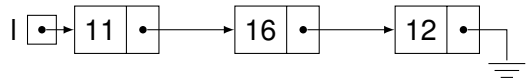
# Riktad lista, förtydliganden

- `Insert` och `Remove` har samma logik som för `Lista`
  - `Insert(v, p, l)` sätter in värdet `v` i listan `l` på positionen omedelbart före `p` och returnerar den nya listan samt positionen för det nyinsatta elementet
  - `Remove(p,l)` tar bort elementet på positionen `p` i listan `l` och returnerar den nya listan samt positionen omedelbart efter det borttagna elementet

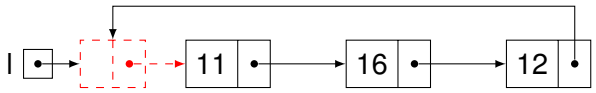


# Riktad lista, konstruktionsalternativ

- Fält
- Dubbellänkad lista (ignorera bakåtlänkarna)
- Enkellänkad Lista av 1-Cell utan huvud:



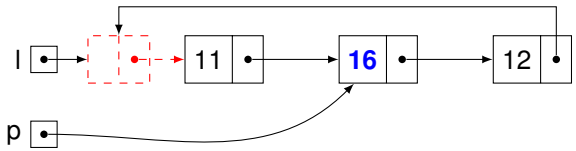

  - Använt i flera C-exempel på föreläsningarna.
- Enkellänkad Lista av 1-Cell med 1-Cell-huvud:



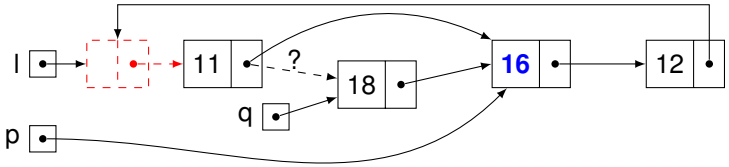

  - Används i kodbasen.
- Enkellänkad mer ekonomisk än dubbellänkad

# Problem vid insättning

- Om positionen representeras av en pekare till elementet
- Insättning av värdet 18 före elementet med positionen `p` (elementvärde 16, blå fetstil)
  - Före:




  - Efter allokering av nytt element, före inlänkning




  - Vi behöver komma åt länken i föregående cell!



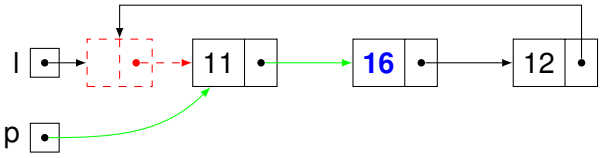
# Lösning på insättning: Alternativ 1 och 2

- Alternativ 1: Kopiering
  - Insättning före elementet på position `p`:
    1. Skapa en ny cell
    2. Länka in den efter `p`
    3. Kopiera `p`:s värde till den nya cellen
    4. Sätt `p`:s värde till `v`
  - Nackdel: Värdet måste kopieras
- Alternativ 2: Sök från början
  - Traversera från huvudet till elementet före
  - Nackdel: Insättning blir långsam: $O(n)$
- Alternativ 3: Byt definitionen av ”här”!

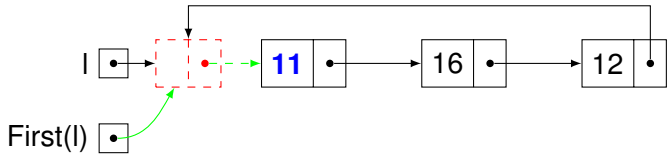


# Lösning på insättning: Alternativ 3 (1)

- Använd list-konstruktion med huvud
- Representera positionen med pekare till föregående element
  - `Inspect(p, l)` returnerar `p->next->val` i stället för `p->val`



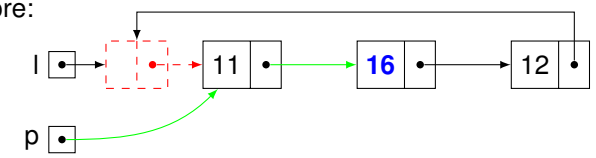

  - `First(l)` returnerar `l->head` i stället för `l->head->next`



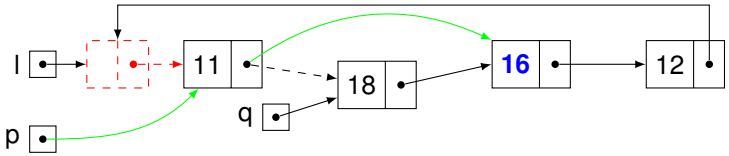



# Lösning på insättning: Alternativ 3 (2)

- Insättning:
  - Före:



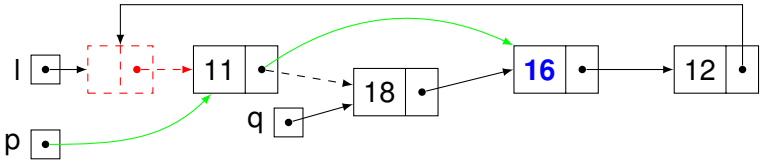

  - Efter allokering av nytt element, före inlänkning:



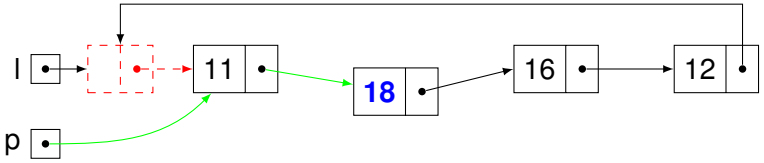

  - `p->next = q` löser problemet

# Lösning på insättning: Alternativ 3 (3)

- Före inlänkning:




- Efter inlänkning:




- `p` refererar nu till det nyligen insatta elementet, så `return p` är positionen som ska returneras
- Minimal nackdel: Vi behöver en cell extra.



# Blank



# Blank



# Blank

# Kö



# Kö

- Modell: Kö.

- Specialisering av Lista
  - Begränsningar på operationerna
- Generisk datatyp (polytyp)
- Sammansatt — lagrar element
  - Homogen
- Linjärt ordnad struktur
- FIFO — *First In, First Out*
  - Insättning i slutet av kön
  - Borttagning i början av kön



# Gränsyta till Kö

```
abstract datatype Queue(val)
  Empty() → Queue(val)
  Isempty(q: Queue(val)) → Bool
  Enqueue(v: val, q: Queue(val)) → Queue(val)
  Front(q: Queue(val)) → val
  Dequeue(q: Queue(val)) → Queue(val)
  Kill(q: Queue(val)) → ()
```



# Kö vs. Stack

```
abstract datatype Queue(val)
  Empty() → Queue(val)
  Isempty(q: Queue(val)) → Bool
  Enqueue(v: val, q: Queue(val)) → Queue(val)
  Front(q: Queue(val)) → val
  Dequeue(q: Queue(val)) → Queue(val)
  Kill(q: Queue(val)) → ()
```

```
abstract datatype Stack(val)
  Empty() → Stack(val)
  Isempty(s: Stack(val)) → Bool
  Push(v: val, s: Stack(val)) → Stack(val)
  Top(s: Stack(val)) → val
  Pop(s: Stack(val)) → Stack(val)
  Kill(s: Stack(val)) → ()
```

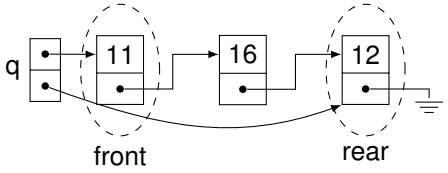
# Informell specifikation — Kö

- `Empty()` — konstruerar en tom kö
- `Isempty(q)` — testar om kön är tom
- `Enqueue(v, q)` — sätter in ett element med värdet `v` sist i kön `q`
- `Front(q)` — returnerar värdet av det första elementet i kön (förutsatt att kön inte är tom)
- `Dequeue(q)` — returnerar kön med det första elementet borttaget (förutsatt att kön inte är tom)

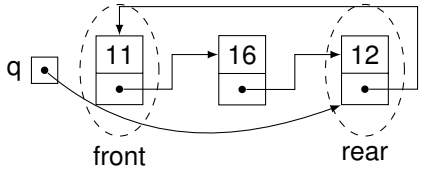


# Kö konstruera som Lista

- Fronten på kön = början på listan
- Riktad lista med 1-celler
  - Lista 1: Rak lista: Fronten på kön = början av listan




  - Lista 2: Cirkulär lista: Länken i slutet av listan pekar på början av kön

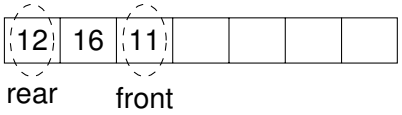



- Alla kö-operationer går att göra $O(1)$

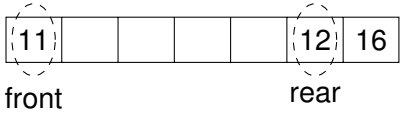


# Kö konstruerad som Fält

- Fält 1: Rak vektor:




- Fält 2: Cirkulär vektor:




- Fördelar:
  - Fält 2: Snabb avläsning, borttagning, insättning
- Nackdelar:
  - Maximal storlek
  - Outnyttjat utrymme
  - Fält 1: Enqueue är dyrt ($O(n)$) pga. omflyttningar
  - Fält 2, detalj: Måste lämna en position tom för att kunna skilja mellan en tom och full kö



# Kö, tillämpningar

- Buffert:
  - Routrar
  - Skrivarkö
  - Telefonkö
- Bredden-först-traversering

# Algoritmer, psuedokod



# Vad är en algoritm?

- Instruktion som man följer för att lösa ett givet problem på ett strukturerat sätt (jfr recept eller IKEA-byggbeskrivning)
  - Indata
  - Verktyg
  - Procedur (algoritm)
  - Resultat (bullar)
- *En algoritm är en stegvis beskrivning av en ändlig process*



# Egenskaper för en algoritm

- Texten som beskriver algoritmen har en fix (ändlig) storlek
  - Instruktionen har samma storlek oavsett hur många bullar som bakas
- Processen kan variera i storlek
  - Antalet bullar som bakas kan variera
- En algoritm kan ha olika kornighet
  - Grovkornig:
    1. Bland mjöl och jäst i en bunke
  - Finkornig:
    1. Ta fram en bunke som rymmer 5 liter
    2. Ta fram ett decilitermått
    3. Mät upp 5 dl mjöl
    4. Häll mjölet i bunken

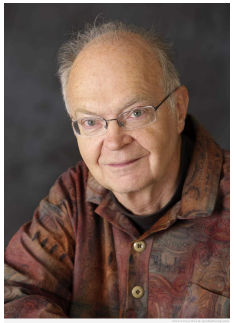


# Exempel

- Antag att vi har en lista på alla anställda på ett företag: Namn, Pnr, lön, etc.
- Vi vill räkna ut den totala lönekostnaden för företaget

1. Skriv ner talet 0
2. För varje anställd i listan
   2.1 Addera personens lön till det skrivna talet och skriv ner det nya resultatet
3. När man nått slutet på listan är det nedskrivna talet den totala lönekostnaden

# Krav på algoritmer



Donald Knuth (1938 – )
*The Art of Computer Programming, volumes 1 (1968), 2 (1969), 3 (1973), 4A (2011)*

- Ändlighet
  - Algoritmen måste sluta (terminera)
- Bestämdhet
  - Varje steg måste vara entydigt
- Indata
  - Måste ha noll eller flera indata
- Utdata
  - Måste ha ett eller flera utdata
- Effektivitet/genomförbarhet
  - Varje steg i algoritmen måste gå att utföra på ändlig tid



# Beräkningsbarhet (mer om detta nästa vecka)

- Reglerna för algoritmer beskriver inte tillräckligt tydligt vad man kan och inte kan göra i form av algoritmer — vad som är beräkningsbart
- Definition av beräkningsbarhet (Alan Turing, 1936)
  - *Ett problem är beräkningsbart om och endast om det finns en a-machine (automatic machine)*[1] *som löser problemet*

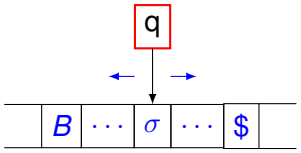

Alan Turing (1912 – 1954)
*Turing, A.M. (1936), "On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem", Proceedings of the London Mathematical Society, 2 42: 230-65, 1937.*

[1] senare döpt till Turing-maskin



# Turing-maskin (1)

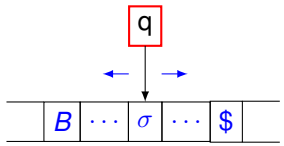
- En Turing-maskin är en abstrakt, simpel modell av en beräkningsmaskin och består av:
  1. En centralenhet som kan befinna sig i ett ändligt antal olika tillstånd (*states*).
  2. Ett oändligt långt band indelat i celler som kan innehålla symboler. Symbolerna kommer från ett ändligt alfabet.
  3. Ett läs/skriv-huvud.
  4. En drivanordning för bandet.





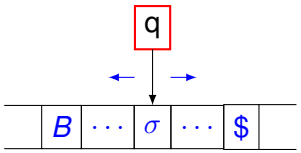

# Turing-maskin (2)

- En Turing-masking kan utföra 4 operationer:
  1. Avläsa symbolen i cellen som är mitt för läs-/ skriv-huvudet (den *aktuella* cellen).
  2. (Radera och) skriva en ny symbol i den aktuella cellen.
  3. Flytta bandet en cell-längd framåt eller bakåt.
  4. Stanna maskinen.
- Turing-maskinen jobbar i diskreta beräkningssteg.
  - I varje steg utförs en operation.
  - Vilken operation Turing-maskinen utför bestäms av en övergångsfunktion (*transition function* eller *action table*).



# Turing-maskin (3)

- Maskinen startar med ett starttillstånd och en given position på remsan.
- Maskinen avslutar beräkningen när ett sluttillstånd uppnås
  - Beräkningen kan misslyckas genom att maskinen aldrig uppnår sluttillståndet.
- Trots sin enkelhet så kan varje dator-algoritm översättas till en Turing-maskin.






# Turing-maskin, exempel (1)

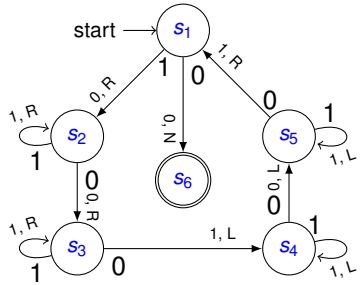
- https://sv.wikipedia.org/wiki/Turingmaskin
- Tillstånd: s1, s2, s3, s4, s5, s6.
- Alfabet: 0, 1.
- Tomma symbolen: 0 (får finnas oändligt många gånger på remsan).
- Indatasymboler: 1.
- Starttillstånd: s1.
- Sluttillstånd: s6.
- Maskinen startar med läshuvudet vid den första ettan (den längst till vänster).

| S | R | W | N | M | Kommentar |
|---|---|---|---|---|---|
| s1 | 0 | 0 | s6 | N | Ingen (mer) etta att kopiera. Klar! |
| s1 | 1 | 0 | s2 | R | Kopiera denna etta till näst-nästa nolla högerut, lämna en nolla som marke |
| s2 | 1 | 1 | s2 | R | Leta vidare högerut efter första nollan. |
| s2 | 0 | 0 | s3 | R | Första nollan hittad. Gå vidare till s3, som hittar andra. |
| s3 | 1 | 1 | s3 | R | Leta vidare högerut efter andra nollan. |
| s3 | 0 | 1 | s4 | L | Andra nollan hittad, skriv en etta och gå tillbaka två nollor. |
| s4 | 1 | 1 | s4 | L | Leta vidare vänsterut efter första nollan på tillbakavägen. |
| s4 | 0 | 0 | s5 | L | Första nollan hittad. Gå vidare till s5 som hittar andra. |
| s5 | 1 | 1 | s5 | L | Leta vidare vänsterut efter andra nollan (den som s1 lämnade som markeri |
| s5 | 0 | 1 | s1 | R | Nollan hittad. Skriv tillbaka den etta som s1 skrev över, och börja sedan om |



# Turing-maskin, exempel (2)

| S | R | W | N | M | Kommentar |
|---|---|---|---|---|---|
| s1 | 0 | 0 | s6 | N | Ingen (mer) etta att kopiera. Klar! |
| s1 | 1 | 0 | s2 | R | Kopiera denna etta till näst-nästa nolla högerut, lämna en nolla som markering för til |
| s2 | 1 | 1 | s2 | R | Leta vidare högerut efter första nollan. |
| s2 | 0 | 0 | s3 | R | Första nollan hittad. Gå vidare till s3, som hittar andra. |
| s3 | 1 | 1 | s3 | R | Leta vidare högerut efter andra nollan. |
| s3 | 0 | 1 | s4 | L | Andra nollan hittad, skriv en etta och gå tillbaka två nollor. |
| s4 | 1 | 1 | s4 | L | Leta vidare vänsterut efter första nollan på tillbakavägen. |
| s4 | 0 | 0 | s5 | L | Första nollan hittad. Gå vidare till s5 som hittar andra. |
| s5 | 1 | 1 | s5 | L | Leta vidare vänsterut efter andra nollan (den som s1 lämnade som markering). |
| s5 | 0 | 1 | s1 | R | Nollan hittad. Skriv tillbaka den etta som s1 skrev över, och börja sedan om från bör |






# Turing-maskin, exempel (3)

| Steg | Tillstånd | Remsa |
|---|---|---|
| 1 | s1 | **1**1000 |
| 2 | s2 | 0**1**000 |
| 3 | s2 | 01**0**00 |
| 4 | s3 | 010**0**0 |
| 5 | s4 | 01**0**10 |
| 6 | s5 | 0**1**010 |
| 7 | s5 | **0**1010 |
| 8 | s1 | 1**1**010 |
| 9 | s2 | 10**0**10 |
| 10 | s3 | 100**1**0 |
| 11 | s3 | 1001**0** |
| 12 | s4 | 100**1**1 |
| 13 | s4 | 10**0**11 |
| 14 | s5 | 1**0**011 |
| 15 | s1 | 11**0**11 |
| 16 | s6 | -stopp- |

# Pseudokod



# Hur beskriver vi algoritmer?

- Vi använder oss av pseudokod för att beskriva algoritmer
  - Vi behöver ett språk som:
    - Kan förstås av en människa.
    - Är strukturerat och formellt
    - Mindre formellt än programmeringsspråk
  - Mix av naturligt språk och programmeringsspråk
  - Influenser från matematisk notation
  - Det finns inget universellt språk utan många dialekter
- Pseudokod döljer mycket av programspråkens designval, dvs. pseudokoden är oberoende av programspråk
- Man ska kunna fokusera på hur man löser problemet och inte hur lösningen ska implementeras



# Pseudokod

- ← används för tilldelning.
- = används för likhetsrelation.
- Funktionsdeklarationer:
  - Algorithm name(*param1*, *param2*)
- Beslutsstrukturer:
  - `if ... then ... [else ...]`
- Anrop:
  - `algoritmName(` *args* `)`
- Villkorsloopar:
  - `while ... do ...`
  - `repeat ... until ...`
- Räkneloopar:
  - `for ... do ...`
- Fältindexering:
  - `A[i]`
- Returnera värden:
  - `return` *value*



# Pseudokod, Exempel

```
Algorithm Array-mean(v: Array, n: Int)
// Input: An Array v storing n integers
// Output: The average of the n elements in v
sum ← v[0]
for i ← 1 to n-1 do
  sum ← sum + v[i]
return sum/n
```

# Implementationer av pseudokoden

```
Algorithm Array-mean(v: Array, n: Int)
// Input: An Array v storing n integers
// Output: The average of the n elements in v
sum ← v[0]
for i ← 1 to n-1 do
  sum ← sum + v[i]
return sum/n
```

C

```c
float arrayMean(float *v, int n)
{
    float sum = v[0];
    for (int i=1; i < n; i++)
        sum += v[i];
    return sum/n;
}
```

Python

```python
def arrayMean(v,n):
    sum = v[0]
    for i in range(1,n):
        sum = sum + v[i]
    return sum/n
```



# Exempel

- Skriv en pseudokod för att räkna ut längden på en lista
  - Använd operationerna för Lista:s ADT

```
Algorithm List-length(l: List)
// Input: A list
// Output: The number of elements in the list
len ← 0
p ← First(l)
while not Pos-isequal(p, End(l), l) do
  len ← len + 1
  p ← Next(p, l)
return len
```



# Kopiering av sammansatt datatyp

- OBS! Kopiering av en sammansatt datatyp, t.ex. Lista, Fält, Kö, etc., är inte definierat!
  - Undantaget är om kopieringsoperationen är explicit definierad i datatypens gränssnitt
  - För en kö `q2`, om tilldelningen `q1 ← q2` är definierad så brukar det betyda att `q1` och `q2` refererar till samma kö!
- Vill man kopiera en sammansatt datatyp måste man själv skriva koden med hjälp av datatypens gränssnitt
- För exempel, se övningarna i gruppövning 1



# Algoritmmönster för lista

- Traversering
  - Besök systematiskt alla element i objektet
- Sökning
  - Sök efter det första elementet som uppfyller ett bestämt villkor
- Filtrering
  - Filtrera ut (behåll) alla element som uppfyller ett bestämt villkor
- Reduktion
  - Beräkna en funktion av objektets elementvärden
    - Ex. summera alla tal i en lista
- Avbildning (mappning)
  - Transformera varje elementvärde i en datastruktur
    - Ex. multiplicera alla talen i en lista med 4

# Traversering

- Besök systematiskt alla element i objektet

```
Algorithm List-traverse(l: Directed list,
                        Do-stuff: Function)
// Input: A directed list and a function to apply
//   to each element in the list. The function
//   should accept element values. The input list
//   might be modified.
// Output: None.

// Start at the beginning of the list
p ← First(l)
while not Isend(p, l) do
  // Apply function to each element
  Do-stuff(Inspect(p, l))
  // Advance to next element
  p ← Next(p, l)
```



# Sökning

- Sök efter ett element som uppfyller ett bestämt villkor

```
Algorithm List-seek(l: Directed list,
                    Match: Function)
// Input: A list and a match function. The function
//   should return True if the element value
//   matches what the caller wants.
// Output: True/False + pos for the first matching
//   element, if any.

// Start at the beginning of the list
p ← First(l)
while not Isend(p, l) do
  // Does the element value match what we want?
  if Match(Inspect(p, l)) then
    // Yes, return True and the position
    return (True, p)
  else
    // No, advance in the list
    p ← Next(p, l)
// No match found, return False
return (False, None)
```



# Filtrering

- Filtrera ut alla element som uppfyller ett bestämt villkor

```
Algorithm List-filter(l: Directed list, Match: Function)
// Input: A list and a match function. The function
//   should return True if the element value
//   matches what the caller wants.
// Output: A list with all matching elements.
// NOTE: The output list is in the reverse order.

// Start with an empty output list
matched ← Empty()
p ← First(l)
while not Isend(p, l) do
  // Does the element value match?
  val ← Inspect(p, l)
  if Match(val) then
    // Yes, insert it first in the output list
    matched ← Insert(val, First(matched), matched)
  // Advance in the input list
  p ← Next(p, l)
// Return the list of matched element values
return matched
```



# Avbildning (mappning)

- Transformera varje elementvärde i en datastruktur

```
Algorithm List-map(l: Directed list, Map: Function)
// Input: A list and a mapping function. The function
//   should accept an element value and return a
//   transformed value.
// Output: A list with transformed elements in
//   the same order as in the input list.

// Start with an empty output list
// Keep track of last position in m, i.e. position
// where to insert elements
m ← Empty()
q ← First(m)

p ← First(l)
while not Isend(p, l) do
  v ← Map(Inspect(p, l))
  (m, q) ← Insert(v, q, m)
  q ← Next(q, m)
  p ← Next(p, l)
return m
```

# Reduktion

- Beräkna en funktion av objektets elementvärden

```
Algorithm List-reduce(l: Directed list,
                      Combine: Function)
// Input: A list and a function. The function
//   should accept two element values and return
//   a combination of the values
// Output: The result of the function applied to
//   all elements in the list
// NOTE: The function should be commutative

p ← First(l)
res ← Inspect(p, l)
while not Isend(p, l) do
  res ← Combine(res, Inspect(p, l))
  p ← Next(p, l)
return res
```



# Exempel

- Skriv en algoritm som delar upp en lista så att udda tal hamnar i en ny lista och jämna tal i en annan



# Algoritm 1

```
Algorithm List-split1(l: Directed list)
// Input: A list holding integers
// Output: Two lists holding the odd and even numbers
//   of the input list, respectively, in unchanged
//   order
odd ← List-empty()
ipo ← First(odd) // Insert position in odd list
even ← List-empty()
ipe ← First(even) // Insert position in even list
p ← First(l) // Position in input list
while not Isend(p, l) do
  v ← Inspect(p, l)
  if Is-odd(v) then
    // Insert and advance in odd list
    (odd, ipo) ← Insert(v, ipo, odd)
    ipo ← Next(ipo, odd)
  else
    // Insert and advance in even list
    (even, ipe) ← Insert(v, ipe, even)
    ipe ← Next(ipe, even)
  // Advance in input list
  p ← Next(p, l)
return (odd, even)
```



# Algoritm 2

```
Algorithm List-split2(l: Directed list)
// Input: A list holding integers
// Output: One lists holding the odd numbers and
//   the original list, modified to hold
//   the even numbers only
odd ← List-empty()
ipo ← First(odd) // Insert position in odd list
p ← First(l) // Position in input list
while not Isend(p, l) do
  v ← Inspect(p, l)
  if Is-odd(v) then
    // Insert and advance in odd list
    (odd, ipo) ← Insert(v, ipo, odd)
    ipo ← Next(ipo, odd)
    // Remove from input list
    // Returned p will refer to next unprocessed element
    (l, p) ← Remove(p, l)
  else
    // Advance to next unprocessed element in input list
    p ← Next(p, l)
return (odd, l)
```