
IPARI ROBOTOK KINEMATIKÁJA ÉS DINAMIKÁJA

V/B. KINEMATIKAI MODELLEZÉS:
A JACOBI-MÁTRIX TULAJDONSÁGAI

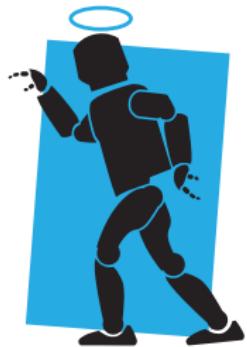
Összeállította: Dr. Kuti József

Szerkesztette: Dr. Galambos Péter



Óbuda Egyetem
Pro Scientia et Futuro

2018. szeptember 21.
Budapest



Bejczy Antal iRobottechnikai
Központ



Eddig

- direkt geometria: adott csuklóváltozókhöz Cartesian poz
- inverz geometria: adott pózhoz csuklóváltozók
- kinematikai modell: egyfajta linearizált, sebességre, illetve kis mozgásokra

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{TCP} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} = \underbrace{\mathbf{J}(q_1, \dots, q_m)}_{6 \times m} \cdot \dot{\mathbf{q}}, \quad \begin{bmatrix} d\mathbf{r}_{TCP} \\ d\varphi \cdot \mathbf{t} \end{bmatrix} = \underbrace{\mathbf{J}(q_1, \dots, q_m)}_{6 \times m} \cdot d\mathbf{q},$$

(ahol $\mathbf{J}(q_1, \dots, q_m)$ a Jacobi-mátrix, \mathbf{t} a tengelye és $d\varphi$ szöge az elfordulásnak)

Interpoláció egyenes/körív mentén, trajektória vezérlés:

- adott $\mathbf{T}_{TCP,d}(t)$ trajektória pontjaihoz
- meghatározandó $\mathbf{q}_d(t)$ kívánt csukló trajektória
- az aktuális \mathbf{q}_0 konfigurációból

Az inverz geometriával meghatározható lenne a trajektória minden pontjához, DE

- számításigényes - a trajektória minden pontjában meg kellene határozni
- figyelve hogy a megfelelő konfigurációt válasszuk a megoldások közül

Megoldása a kinematikai modellel:

- mivel az egyes időpontok között csak kicsit változik a konfiguráció, pozíció, orientáció,
- kereshetjük az adott elmozdulásokat/elfordulásokat megvalósító kis csuklókoordináta változást
- a lineáris modell alapján



A linearizált a kis elmozdulások / elfordulások és a kis csuklókoordináta változások közötti lineáris kapcsolatot írja le

- Látható, hogy a robot képes-e tetszőleges irányba elmozdulni/elfordulni.
- Látható, vannak-e olyan irányok melyekbe nem lehetséges elmozdulás/elfordulás.
- Milyen mozgások nem befolyásolják a TCP helyzetét/orientációját.

A Jacobi-mátrixból mindezek a tulajdonságok könnyen kinyerhetők!

JACOBI MÁTRIX (ISMÉTLÉS)



A TCP pont sebessége lineárisan függ a csuklósebességektől:

$$\mathbf{v}_{TCP}(t) = \sum_{i=1}^m \mathbf{J}_{vi}(\mathbf{q}(t)) \dot{q}_i(t) = \mathbf{J}_v(\mathbf{q}(t)) \cdot \dot{\mathbf{q}}(t)$$

(ami a transzformáció offszet részének deriváltja)

a szögsebesség is lineárisan függ:

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \sum_{i=1}^m \mathbf{J}_{\omega i}(\mathbf{q}(t)) \dot{q}_i(t) = \mathbf{J}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{q}(t)) \cdot \dot{\mathbf{q}}(t)$$

(számítható a transzformáció rotáció részének deriváltjából)

Így az endeffector sebességállapota:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{TCP} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{J}_v(\mathbf{q}) \\ \mathbf{J}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{q}) \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}(q_1, \dots, q_m)} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_m \end{bmatrix}$$

$\mathbf{J}(q_1, \dots, q_m)$: az ún. Jacobi-mátrix



$\mathbf{J}(q_1, \dots, q_m)$: az ún. Jacobi-mátrix

- az aktuális (\mathbf{q}) konfigurációban
- megadja a csuklósebességek és a sebesség/szögsebesség kapcsolatát,
- ami lineáris
- megadja kis elmozdulások/elfordulások és a csuklókoordináták változásának összefüggését is
(mindkét oldalt megszorozva dt -vel, bal oldalt $d\mathbf{r}_{TCP}$ elmozdulás, $d\varphi$ elfordulás, jobb oldalon dq ; csuklókoordináta változások, az együttható itt is a $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ Jacobi-mátrix)



$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{TCP} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} = \mathbf{J}(q_1, \dots, q_m) \dot{\mathbf{q}}$$

Tekintsünk egy 6 csuklós robotot: $m = 6$, \mathbf{J} : 6×6 méretű

Mátrix rangja:

- teljes ($n = 6$) rangú: tetszőleges \mathbf{v} és $\boldsymbol{\omega}$ megvalósítható, mivel invertálható

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}(q_1, \dots, q_6)^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{TCP} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix}$$
- ellenkező esetben $n < 6$: **szinguláris állapot**
 - n darab sebesség és szögsebesség kombináció egymástól függetlenül módosítható, a többi kiadódik,
 - vannak olyan csuklósebesség kombinációk ($6 - n$) amelyek nem befolyásolják a TCP sebességet/orientációt



J: $6 \times m$ méretű. Ha a csuklók száma: $m < 6$

A mátrix rangja $n \leq m < 6$: minden szinguláris helyzet

- n darab sebesség és szögsebesség kombináció egymástól függetlenül módosítható, a többi kiadódik,
- ha $n < m$: vannak olyan csuklósebesség kombinációk ($m - n$) amelyek nem befolyásolják a TCP sebességet/orientációt

Pl.: a síkmanipulátor, csak x , y és z körüli elfordulás lehetséges



\mathbf{J} : $6 \times m$ méretű. Ha a robot redundáns $m > 6$:

A mátrix rangja $n \leq 6$

- vannak olyan csuklósebesség kombinációk ($m - n$) amelyek nem befolyásolják a TCP sebességet/orientációt
- ha a mátrix rangja 6:
tetszőleges sebesség, szögsebesség kombináció megvalósítható
- ha a mátrix rangja $n < 6$: szinguláris helyzet
 n darab sebesség és szögsebesség kombináció egymástól függetlenül módosítható, a többi kiadódik,

Pl.: KUKA IIWA a null pozíciója szinguláris helyzet, pedig redundáns robot



Jelölje a csuklók számát m

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{TCP} \\ \omega \end{bmatrix} = \underbrace{\mathbf{J}(q_1, \dots, q_m)}_{6 \times m} \cdot \dot{\mathbf{q}}$$

Jelölje a mátrix rangját $n (\leq 6)$

Mátrix nulltere (**magtér**): azon $\dot{\mathbf{q}}$ vektorok halmaza, amelyek esetén a sebesség és a szögsebesség zérus marad (megadhatóak $m - n$ vektor kombinációiként)

Növeli: csuklók száma, szinguláris helyzet

Képtér: Az elérhető sebesség/szögsebesség kombinációk halmaza (a rang ennek a dimenziója, megadhatóak n vektor kombinációiként)

Csökkenti: szinguláris helyzet, növeli csuklók száma

Numerikusan nehezen értelmezhető: mikor csökken a rang, hogyan történik az átmenet. A megoldás: SVD

Jelölje a csuklók számát m



$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{TCP} \\ \omega \end{bmatrix} = \underbrace{\mathbf{J}(q_1, \dots, q_m)}_{6 \times m} \cdot \dot{\mathbf{q}}$$

SVD: $\mathbf{J} = \sum_{i=1}^n \underbrace{\mathbf{u}_i}_{6 \times 1} \underbrace{\sigma_i}_{>0} \underbrace{\mathbf{v}_i^T}_{1 \times m} =$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \dots & \mathbf{u}_6 \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}: 6 \times 6} \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \\ 0 & 0 & & \sigma_n & 0 & \dots \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}}_{\mathbf{S}: 6 \times m} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^T \\ \mathbf{v}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_m^T \end{bmatrix}}_{\mathbf{V}^T: m \times m}$$

- \mathbf{U}, \mathbf{V} szinguláris mátrixok, $\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i$ szinguláris vektorok
- $\mathbf{u}_i^T \mathbf{u}_j = 1$ ha $i = j$, egyébként 0
- $\mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_j = 1$ ha $i = j$, egyébként 0
- $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n > 0$: szinguláris értékek



- ① A \mathbf{v}_i vektorok ortogonális irányokat jelölnek ki a csuklótérben,
- ② amelyekhez σ_i erősítések és
- ③ \mathbf{u}_i Cartesian-térbeli sebességek és szögsebességek tartoznak!

Például: ha $\dot{\mathbf{q}} = \alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{TCP} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} = \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}} = \sum_{i=1}^n \mathbf{u}_i \sigma_i \mathbf{v}_i^T (\alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2) = \\ = \mathbf{u}_1 \sigma_1 \mathbf{v}_1^T \alpha \mathbf{v}_1 + \mathbf{u}_2 \sigma_2 \mathbf{v}_2^T \beta \mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_1 \sigma_1 \alpha + \mathbf{u}_2 \sigma_2 \beta$$

Jól látható az SVD felbontáson:

- rang: a nem-zérus szinguláris értékek száma (n),
- képtér: a lehetséges elmozdulások a nem-zérus szinguláris értékek tartozó \mathbf{u} szinguláris vektorok ($\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$) kombinációi
- nulltér: azon csuklósebesség vektorok, amelyek nem jelennek meg a sebességen, szögsebességen a zérus szinguláris értékekhez tartozó \mathbf{v} vektorok ($\mathbf{v}_{n+1}, \mathbf{v}_{n+2}, \dots, \mathbf{v}_m$) kombinációi



Numerikus tulajdonságok:

- Ha pontosan a szinguláris helyzetben vagyunk: a rang 6 alá csökken $n < 6$ (a 6. szinguláris érték nulla)
- A közeledve a szinguláris helyzethez az utolsó szinguláris érték nagymértékben csökkenni kezd: a kapcsolódó irányba való elmozduláshoz egyre nagyobb csuklósebességek szükségesek
- A szinguláris értékekkel jellemzhető, hogy az aktuális konfigurációból, mennyire lehet tetszőleges irányba elmozdulni

Manipulálhatóság: a szinguláris értékek szorzata (megjelenik a torzulás):

$$w = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \dots \cdot \sigma_6 = |\det \mathbf{J}(q_1, \dots, q_m)|$$

SZINGULÁRIS HELYZETEK: UR5



A leglátványosabb szinguláris helyzete a robotkarnak, amikor 4 csuklójának a tengelye párhuzamossá válik

Ekkor egy 4 csuklós mechanizmusként mozgatható a kar a végpont mozdulása nélkül

Közben a TCP mozgatásának egy szabadságfoka elveszik (az ábrán az y körüli elfordítás nem valósítható meg)

(Az animáció Acrobat Reader-ben kattintással indítható/léptethető)



Jól látható, hogy egy szinguláris érték tartósan közel zérus

- Így egy bizonyos irányba nem mozdítható/fordítható el a TCP
- Mindig van egy olyan csuklósebesség vektor, ami nem befolyásolja a TCP pózt (nulltér)

Az fenti szimulációban a nulltérben léptetjük a robotot

(Minden szimulációs lépésben lekérdezve a Jacobi-mátrixot, SVD, v_6 vektor előírása csuklósebességgént)



A kinyújtott helyzet az egyik legproblémásabb a UR5 esetén
Ekkor a TCP szabadságfoka 3-ra csökken

- nem mozdítható el x,z irányokba
- nem fordítható el y körül

Ezek nem tartós szinguláris helyzetek, kis (alig látható) mozgások már nagy numerikus változásokat eredményeznek
Pl. a 3-as csukló lassú "betörése":



A 4-as csukló lassú "betörése":

Ezekben az esetekben is a nulltérből választunk ki egy (az adott csuklót dominánsan behajlító irányt)



A z irányú csavarás:

(A látható elmozdulás érdekében jelentős kitéréseket kellett alkalmazni, emiatt a TCP helyzete láthatóan megváltozik...)



Ha csak a pozíciókra írnánk fel a kinematikai modellt, \mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2 , \mathbf{u}_3 egy ortonormált koordinátarendszeret adna a térben

az egyes tengelyek irányába σ_1 , σ_2 , σ_3 erősítéssel tudnánk mozogni, továbbá azok között azok kombinációival: kirajzolva egy ellipszoidot adnak, sugarai a szinguláris értékek.

- Ha gömb jellegű: azonos erőfeszítéssel mozoghatunk bármely irányba
- Ha nagymértékben deformálódk (0.01 -szer kisebb egy sugár, azaz szinguláris érték) egyes irány(ok)ba alig mozoghatunk

Szögsebesség & sebesség: hasonlóan 6D-ben (kevésbé szemléletes).

A szinguláris értékek a **manipulálhatósági ellipszoid** sugarai, arányaik jellemzik az aktuális konfigurációt.



Síkmanipulátor ($RR \parallel R \parallel$, az első karhossz: $a_1 = 0.4[m]$, a második: $a_2 = 0.3[m]$) inicializálása:

```
L1 = Revolute('a',0.4,'alpha',0,'d',0,'offset',0);
L2 = Revolute('a',0.3,'alpha',0,'d',0,'offset',0);
L3 = Revolute('a',0,'alpha',0,'d',0,'offset',0);
robot = SerialLink([L1 L2 L3]);
```

Jacobi meghatározása, nullpozícióban:

```
q = [0;0;0];
J = robot.jacob0(q);
ans =
```

```
0      0      0
0.7000  0.3000  0
0      0      0
0      0      0
0      0      0
1.0000  1.0000  1.0000
```

Az egyes sorok v_x , v_y , v_z , ω_x , ω_y , ω_z értékeit adják meg, ha megszorozzuk a mátrixot jobbról \dot{q}_1 , \dot{q}_2 , \dot{q}_3 csuklósebességek vektorával.

Mivel síkmanipulátor, v_z , ω_x , ω_y zérus, és v_x a szinguláris helyzet miatt nem befolyásolható a csuklósebességekkel.



$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.7000 & 0.3000 & 0 \\ 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 \end{bmatrix}}_{J} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix}$$

Rang számítás:

$$r = \text{rank}(J)$$

SVD:

$$[U, S, V] = \text{svd}(J)$$

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 0.0000 & -1 \\ -0.3385 & -0.9410 & 0 \\ -0.9410 & 0.3385 & 0 \\ 1.8330 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0.4693 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0000 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} -0.6426 & -0.6822 & -0.3487 \\ -0.5688 & 0.1198 & 0.8137 \\ -0.5134 & 0.7213 & -0.4650 \end{bmatrix}$$



Jacobi-mátrix variációk:

- Az orientáció változását nem mindig a szögsebességgel írják le, néhol a RPY/Euler szögek deriváltjaival
A szögek deriváltjai és a szögsebességek kapcsolata lineáris:
 $\dot{\varphi} = \mathbf{C}(\mathbf{q})\boldsymbol{\omega}$ így könnyen számítható, hasonlóan kezelhető, DE ezek a szögek használata mindenkor problémás...
- Egyes esetekben a sebességeket nem a *base* koorindátarendszerben, hanem a TCP frame elforgatott rendszerében írják le, és erre származtatják a Jacobi-mátrixot, amit "endeffector Jacobi-mátrix"-nak neveznek. (És az eddig "manipulator Jacobi-mátrix"-nak.)

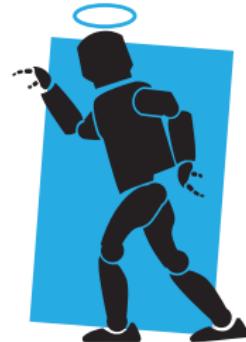


- A sebesség/szögsebesség és a csuklósebességek közötti kapcsolat lineáris (bár függ a konfigurációtól)
→ pl. kétszeres csuklósebességek kétszeres sebességeket eredményez az adott konfigurációból
- Egyes konfigurációkban, a szinguláris helyzetekben nem lehet bizonyos irányba elmozdulni (a képtérből hiányzó irányok), itt bizonyos mozgások nem eredményeznek elmozdulást az endeffektornál (nulltér)
- A szinguláris helyzetek közelében bizonyos irány(ok)ba csak nagyon nagy csuklósebességekkel lehet mozgást megvalósítani
- Ezek numerikusan jól vizsgálhatóak a Jacobi-mátrixon keresztül, ami közvetlenül származtatható a geometriai modellből
- Redundáns robotkarok: több csukló, minden van nulltér, könnyebben elkerülhetők a szinguláris helyzetek

Köszönöm a figyelmet!



Óbudai Egyetem
Pro Scientia et Futuro



Bejczy Antal iRobototechnikai
Központ