Ipari Robotok Kinematikája és Dinamikája

III/C 3D transzformációk

Összeállította: Dr. Kuti József
Szerkesztette: Dr. Galambos Péter

2018. szeptember 21.
Budapest

Óbudai Egyetem
Pro Sciencia et Futuro

Bejczy Antal iRobottechnikai Központ

Motiváció

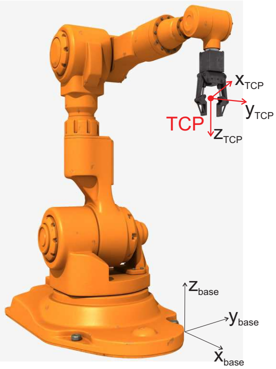
Robot geometria: a csuklóváltozóktól függően meghatározza a TCP-t és a TCP koordinátarendszert.

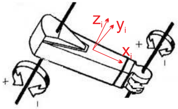
Ez rendszerint nagyon összetett:
ki sem írják teljes formában

Minden szegmenshez egy-egy koordinátarendszer, amik elmozdulhatnak / elfordulhatnak egy tengely irányába/körül.

Hogyan

- írhatóak le
  a koordinátarendszerek egymáshoz képes?
- transzformálhatóak a 2 koordinátarendszer között a pontok/irányok?





2D (eddig):

- Pozíciókülönbség: offszet vektor
- Orientációkülönbség: rotációmátrix
- Póz különbség: homogén transzformáció

3D (a következőkben):

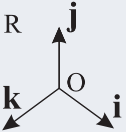
- Pozíciókülönbség: hasonlóan egy offszet vektor
- Orientációkülönbség: rotációmátrix, jóval több lehetőség, mint eddig
- Póz különbség: homogén transzformáció

3D Koordinátarendszer

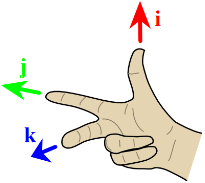
Koordinátarendszer (bázis)

Jobbsodrású, ortonormált koordinátarendszer, leírása O origóval, és $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ bázisvektorokkal, amelyek

- páronként merőlegesek, egységhosszúságúak,
- jobbsodrású rendszert alkotó $(\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k})$ vektorok.



Jobbsodrású koordinátarendszer bázisvektorai a jobbkéz szabálynak megfelelően:



Pozíció: az origó pozíciója

Orientáció: a bázisvektorok iránya

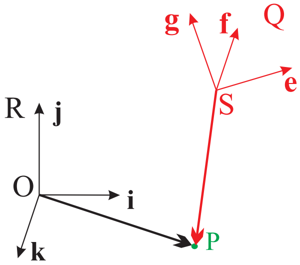
Póz (Pose): a pozíció és orientáció együttese

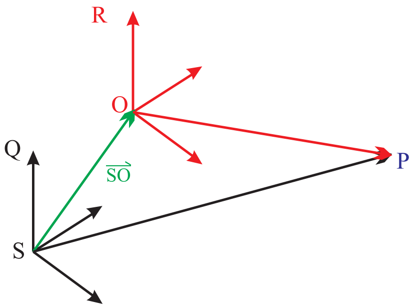
Jelöljön R és Q két koordinátarendszert, origóikat O és S, bázisvektoraikat $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ és $(\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{g})$

Legyen P egy pontja a térnek.

Jelölje $\mathbf{p}_R$ a koordinátáit az R koordinátarendszerben, és $\mathbf{p}_Q$ a Q koordinátarendszerben

Ha $\mathbf{p}_R = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \end{bmatrix}^T$, akkor
$\overrightarrow{OP} = \alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j} + \gamma\mathbf{k}$

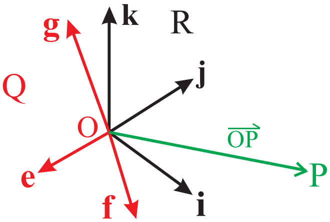




Legyenek R és Q azonos orientációjú koordinátarendszerek, O és S origóval.

Legyen P egy pont, amely koordinátái az R bázisban $\mathbf{p}_R$, az Q bázisban $\mathbf{p}_Q$.

Ezekre $\mathbf{p}_Q = \mathbf{p}_R + \overrightarrow{SO}_R$.



Tekintsük az R és Q, azonos (O) origójú koordinátarendszereket. Legyenek R bázisvektorai $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ és Q bázisvektorai $(\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{g})$.

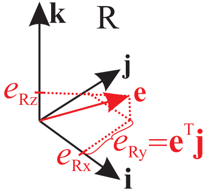
Tekintsük a P pontot, amelyet az R koordinátarendszerben $\mathbf{p}_R = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \end{bmatrix}^T$ ír le, azaz $\overrightarrow{OP} = \alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j} + \gamma\mathbf{k}$.

Hasonlóan a Q koordinátarendszerben, ha $\mathbf{p}_Q = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}^T$, akkor $\overrightarrow{OP} = a\mathbf{e} + b\mathbf{f} + c\mathbf{g}$.

Ismert $\mathbf{p}_Q$ esetén hogyan határozható meg $\mathbf{p}_R$ és hogyan írható le a kapcsolat a koordinátarendszerek között:

$$\overrightarrow{OP} = \alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j} + \gamma\mathbf{k} = a\mathbf{e} + b\mathbf{f} + c\mathbf{g}$$

Adjuk meg a Q bázis $(\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{g})$ bázisvektorait az R koordinátarendszerben: $(\mathbf{e}_R, \mathbf{f}_R, \mathbf{g}_R)$ mint



$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= e_{Rx}\mathbf{i} + e_{Ry}\mathbf{j} + e_{Rz}\mathbf{k} \\ \mathbf{f} &= f_{Rx}\mathbf{i} + f_{Ry}\mathbf{j} + f_{Rz}\mathbf{k} \\ \mathbf{g} &= g_{Rx}\mathbf{i} + g_{Ry}\mathbf{j} + g_{Rz}\mathbf{k} \end{aligned}$$

Behelyettesítve:

$$\alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j} + \gamma\mathbf{k} = (e_{Rx}\mathbf{i} + e_{Ry}\mathbf{j} + e_{Rz}\mathbf{k})a + (f_{Rx}\mathbf{i} + f_{Ry}\mathbf{j} + f_{Rz}\mathbf{k})b +$$
$$+ (g_{Rx}\mathbf{i} + g_{Ry}\mathbf{j} + g_{Rz}\mathbf{k})c = \underbrace{(e_{Rx}a + f_{Rx}b + g_{Rx}c)}_{\alpha}\mathbf{i} +$$
$$+ \underbrace{(e_{Ry}a + f_{Ry}b + g_{Ry}c)}_{\beta}\mathbf{j} + \underbrace{(e_{Rz}a + f_{Rz}b + g_{Rz}c)}_{\gamma}\mathbf{k}$$

Az összefüggést

$$\alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j} + \gamma\mathbf{k} == \underbrace{(e_{Rx}a + f_{Rx}b + g_{Rx}c)}_{\alpha}\mathbf{i} +$$

$$+ \underbrace{(e_{Ry}a + f_{Ry}b + g_{Ry}c)}_{\beta}\mathbf{j} + \underbrace{(e_{Rz}a + f_{Rz}b + g_{Rz}c)}_{\gamma}\mathbf{k}$$

átírva vektoros formába:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}}_{\mathbf{p}_R} = \underbrace{\begin{bmatrix} e_{Rx} & f_{Rx} & g_{Rx} \\ e_{Ry} & f_{Ry} & g_{Ry} \\ e_{Rz} & f_{Rz} & g_{Rz} \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}_{RQ}} \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}}_{\mathbf{p}_Q} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{e}_R & \mathbf{f}_R & \mathbf{g}_R \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}_{RQ}} \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}}_{\mathbf{p}_Q}$$

A forgatás lineáris transzformáció, a Q-ból R-be forgató együttható mátrix: $\mathbf{R}_{RQ}$ ami a rotáció mátrix.

Tengely iránya és a forgatás
iránya közötti kapcsolat: jobbkéz szabály

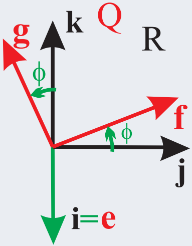
FORGATÁS AZ x TENGELY KÖRÜL

Könnyen belátható, hogy

$$\mathbf{e}_R = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{f}_R = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos\phi \\ \sin\phi \end{bmatrix},\ \mathbf{g}_R = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin\phi \\ \cos\phi \end{bmatrix}.$$

Így

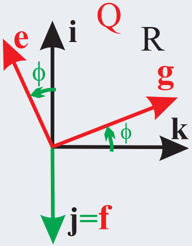
$$\mathbf{R}_{RQ} = \mathrm{Rot}_{\mathrm{x},\phi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$



Forgatás az y tengely körül

Könnyen belátható,

hogy $\mathbf{f}_R = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{e}_R = \begin{bmatrix} \cos\phi \\ 0 \\ -\sin\phi \end{bmatrix}$, $\mathbf{g}_R = \begin{bmatrix} \sin\phi \\ 0 \\ \cos\phi \end{bmatrix}$



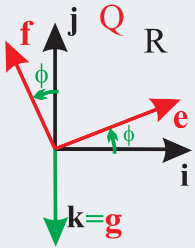
Így

$$\mathbf{R}_{RQ} = \mathrm{Rot}_{y,\phi} = \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi \end{bmatrix}$$

Forgatás az z tengely körül

Könnyen belátható,

hogy $\mathbf{g}_R = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{e}_R = \begin{bmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{f}_R = \begin{bmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{bmatrix}$.



Így

$$\mathbf{R}_{RQ} = \mathrm{Rot}_{z,\phi} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Legyen adott két koordinátarendszer:

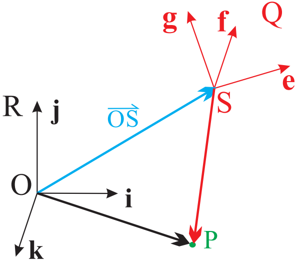
- egy R jelű $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ bázisvektorokkal és O origóval,
- egy Q jelű $(\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{g})$ bázisvektorokkal és S origóval

Keressük a transzformációt, amivel bármely P pont, Q koordinátarendszerbeli $\mathbf{p}_Q$ leírása alapján meghatározható $\mathbf{p}_R$.

Írjuk fel az origók közötti vektort R-ben: $\overrightarrow{OS}_R$

A rotáció mátrixot Q orientációja és R orientációja között: $\mathbf{R}_{RQ}$

Ezzel a transzformáció: $\mathbf{p}_R = \mathbf{R}_{RQ}\mathbf{p}_Q + \overrightarrow{\mathrm{OS}}_R$



Pontok homogén koordinátái:

$$\mathbf{p}_H = \begin{bmatrix} p_x & p_y & p_z & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{p}^T & 1 \end{bmatrix}^T$$

Vektorok homogén koordinátái:

$$\mathbf{a}_H = \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^T & 0 \end{bmatrix}^T$$

Homogén transzformáció: ekkor a pontok koordinátarendszerek közötti transzformációja:

$$\mathbf{p}_R = \mathbf{R}_{RQ}\mathbf{p}_Q + \overrightarrow{OS}_R = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{RQ} & \overrightarrow{OS}_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_Q \\ 1 \end{bmatrix} \text{ megadható, mint}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{p}_R \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{p}_{RH}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{RQ} & \overrightarrow{OS}_R \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}_{RQ}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{p}_Q \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{p}_{QH}}, \text{ azaz } \mathbf{p}_{RH} = \mathbf{T}_{RQ}\mathbf{p}_{QH}$$

Hasonlóan vektorokra: $\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{a}_R \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}_{RH}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{RQ} & \overrightarrow{OS}_R \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}_{RQ}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{a}_Q \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}_{QH}}$

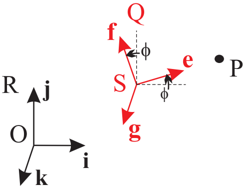
Megjegyzés: A továbbiakban nem jelöljük külön, hogy homogén koordinátákról van-e szó: $\mathbf{r}_Q \equiv \mathbf{r}_{QH}$, $\mathbf{r}_R = \mathbf{T}_{RQ}\mathbf{r}_Q$

Gyakorlás
Pont koordinátáinak transzformációja

Példa: adott $Q(\mathbf{e},\mathbf{f},\mathbf{g})$ és $R(\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k})$ koordinátarendszer

$\overrightarrow{OS}_R = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T \quad \phi = 30[deg]$

$$\mathbf{R}_{RQ} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Kérdés: $\mathbf{p}_R$, ha $\mathbf{p}_Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$

Megoldás:

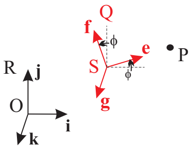
$$\mathbf{p}_R = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{RQ} & \overrightarrow{OS}_R \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_Q \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 & 2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}+2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Példa:

$$\overrightarrow{OS}_R = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T \quad \phi = 30[deg]$$

$$\mathbf{R}_{RQ} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_{RQ} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{RQ} & \overrightarrow{OS}_R \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 & 2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Kérdés: hogyan lehet az **f** bázisvektort megadni az R bázisban?
(Motiváció: Merre néz valamelyik szegmens.)

Megoldás: $\mathbf{f}_Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$

$$\mathbf{f}_R = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{RQ} & \overrightarrow{OS}_R \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_Q \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 & 2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

További 3D orientáció leírások

Euler-szögek

Euler

Tetszőleges forgatás megadható 3 elemi (x/y/z tengely körüli) forgatás sorozataként.

Típusok:

- Klasszikus Euler-szögek: 2 tengely körüli forgatások: z-x-z (x-y-x, y-z-y, z-y-z, x-z-x, y-x-y)
- Roll-Pitch-Yaw szögek (Tait–Bryan szögek, Cardanian szögek): z-y-x (x-y-z, y-z-x, z-x-y, x-z-y, y-x-z)

További tulajdonságok sem egyértelműen definiáltak, itt kettő általánosan használt konvenció.

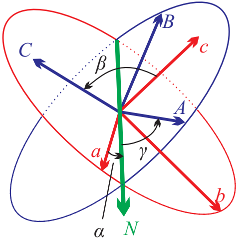
Klasszikus Euler-szögek

$z - x - z$ tengely körüli forgatások, $\alpha - \beta - \gamma$ szögekkel, ahol $\alpha = -\pi ... \pi$, $\beta = 0..\pi$, $\gamma = -\pi ... \pi$

Jelölje a kiindulási koordinátarendszert R, tengelyeit a, b, c, hasonlóan az elforgatottal Q, tengelyeit A, B, C.

Jelölje az ab és AB síkok metszetét képző egyenest N, iránya hogy az N körül c-t C forgató β szög a megfelelő tartományba essen

1. Az első z körüli forgatás beforgatja az a tengelyt N-be (α)
2. Ekkor az x körüli forgatát N körül forgat, és beforgatható c tengely C-be (β)
3. Végül a z tengely körüli forgatás C körül forgat és beforgatható az a tengely N-ből A-ba (γ)



Ezzel:

$$\mathbf{p}_R = \underbrace{Rot(z, \alpha) Rot(x, \beta) Rot(z, \gamma)}_{\mathbf{R}_{\alpha,\beta,\gamma}} \mathbf{p}_Q$$

$$\mathbf{R}_{\alpha,\beta,\gamma} = \begin{bmatrix} c_\alpha c_\gamma - s_\alpha c_\beta s_\gamma & -c_\alpha s_\gamma - s_\alpha c_\beta c_\gamma & s_\alpha s_\beta \\ s_\alpha c_\gamma + c_\alpha c_\beta s_\gamma & -s_\alpha s_\gamma + c_\alpha c_\beta c_\gamma & -c_\alpha s_\beta \\ s_\beta s_\gamma & s_\beta c_\gamma & c_\beta \end{bmatrix}$$

Euler szögek meghatározása a rotáció mátrixból:

Atan2 függvény

Adott $a_1 = h \sin\alpha$ és $a_2 = h\cos\alpha$, ahol $h > 0$.

Ekkor α számítható, mint $\alpha = \mathrm{atan2}(a_1, a_2)$, mégpedig

$$\mathrm{atan2}(a_1, a_2) = \begin{Bmatrix} \mathrm{atan}(a_1/a_2) & ha & a_1 > 0 \\ \mathrm{atan}(a_1/a_2) - \pi & ha & a_1 < 0 \;\&\; a_2 < 0 \\ \mathrm{atan}(a_1/a_2) + \pi & ha & a_1 < 0 \;\&\; a_2 \geq 0 \\ -\pi/2 & ha & a_1 = 0 \;\&\; a_2 < 0 \\ \pi/2 & ha & a_1 = 0 \;\&\; a_2 > 0 \\ \varnothing & ha & a_1 = 0 \;\&\; a_2 = 0 \end{Bmatrix}$$

Ezzel:

- $\beta = \pm acos(R_{3,3})$ - a megengedett tartomány $(0..\pi)$ miatt '+'
- $\gamma = atan2(R_{3,1}, R_{3,2})$ - mivel $\sin\beta \geq 0$
- $\alpha = atan2(R_{1,3}, -R_{2,3})$ - mivel $\sin\beta \geq 0$

Ha megengednénk a $\beta = (-\pi..0)$ tartományt:

- $\beta = -acos(R_{3,3})$,
- $\gamma = atan2(-R_{3,1}, -R_{3,2})$,
- $\alpha = atan2(-R_{1,3}, R_{2,3})$

Probléma:
Ha $\sin\beta = 0$:

$$\mathbf{R}_{\alpha,\beta,\gamma} = \begin{bmatrix} c_{\alpha+\gamma} & -s_{\alpha+\gamma} & 0 \\ s_{\alpha+\gamma} & c_{\alpha+\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A két tengely egybeesik ezért nem definiált az α és γ szögek közötti különbség. (Az előző összefüggések sem használhatóak, mert 0,0 az input.)

Ún.: Gimbal lock effektus

Problémák: definiálás, deriválás, távolság a különböző szöghelyzetek között

Megjegyzés: az Euler-kézcsukló ilyen struktúrájú – az Euler-szögek megfeleltethetőek a csuklóváltozóknak

Kis kitérések esetén szemléletes:

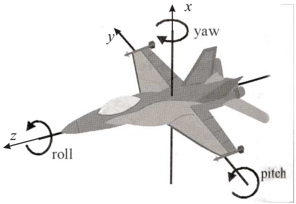
1. Roll: csavarás
2. Pitch: (az eredetileg vizszintes) tengely körüli billentés
3. Yaw: (az eredetileg függőleges) tengely körüli forgatás

A sorrend és a kiindulási koordinátarendszer használata nem egységes

Gyakran: $z - y - x$ tengely körüli forgatások
α, β, γ szögekkel (lásd az ábrát)

Ezzel:

$$\mathbf{p}_R = \underbrace{Rot(z,\alpha)Rot(y,\beta)Rot(x,\gamma)}_{\mathbf{R}_{\alpha,\beta,\gamma}}\mathbf{p}_Q$$



$$\mathbf{R}_{\alpha,\beta,\gamma} = \begin{bmatrix} c_\alpha c_\beta & -s_\alpha c_\gamma + c_\alpha s_\beta s_\gamma & s_\alpha s_\gamma + c_\alpha s_\beta c_\gamma \\ s_\alpha c_\beta & c_\alpha c_\gamma + s_\alpha s_\beta s_\gamma & -c_\alpha s_\gamma + s_\alpha s_\beta c_\gamma \\ -s_\beta & c_\beta s_\gamma & c_\beta c_\gamma \end{bmatrix}$$

A szögek számítása hasonló módon mint a (Klasszikus) Euler-szögeknél: (feltételezve, hogy $\alpha = -\pi ... \pi$, $\beta = -\pi/2 ... \pi/2$, $\gamma = -\pi ... \pi$)

- $\gamma = atan2(R_{3,2}, R_{3,3})$
- $\alpha = atan2(R_{1,2}, R_{1,1})$
- $\beta = asin(-R_{3,1})$

Megjegyzés: a RPY-kézcsukló ilyen struktúrájú – a RPY-szögek megfeleltethetőek a csuklóváltozóknak

TENGELY-SZÖG (AXIS-ANGLE) LEÍRÁS

TÉTEL (EULER)

Tetszőleges elforgatások sorozataként kapott állapot megadható egy megfelelő tengely körüli elforgatással.

Így minden rotáció leírható a forgatás $\mathbf{t}$ tengelyével és φ szögével

RODRIQUES-KÉPLET

Egy $\mathbf{t}$ tengely körüli ϕ szögő elfordulás a következő rotáció mátrixszal írható le:

$$\mathbf{R}_{\mathbf{t},\phi} = \begin{bmatrix} (1-\cos\phi)t_x t_x + \cos\phi & (1-\cos\phi)t_x t_y - t_3\sin\phi & (1-\cos\phi)t_x t_z + t_2\sin\phi \\ (1-\cos\phi)t_x t_y + t_3\sin\phi & (1-\cos\phi)t_y t_y + \cos\phi & (1-\cos\phi)t_y t_z - t_1\sin\phi \\ (1-\cos\phi)t_x t_z - t_2\sin\phi & (1-\cos\phi)t_y t_z + t_1\sin\phi & (1-\cos\phi)t_z t_z + \cos\phi \end{bmatrix}$$

Bizonyítás: középiskolai matek

(Levezetés)

Legyen a Q bázis: az R bázis ϕ szöggel elforgatva a $\mathbf{t}$ (normalizált) tengely körül.
Kérdés: $\mathbf{R}_{\mathrm{RQ}}$ transzformáció.

Tekintsünk általánosan egy $\mathbf{p} = \mathbf{p}_Q$ pontot, forgassuk el a $\mathbf{t}$ tengely körül ϕ szöggel, ami az $\mathbf{p}_R$ koordinátákat adja meg.

A $\mathbf{p}$ pont $\mathbf{t}$ tengellyel párhuzamos része:

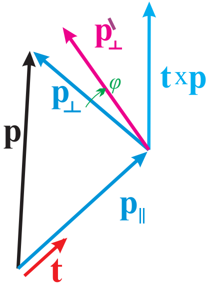
$$\mathbf{p}_{||} = \mathbf{t}(\mathbf{t}^T\mathbf{p}).$$

Míg a tengelyre merőleges része:

$$\mathbf{p}_{\perp} = \mathbf{p} - \mathbf{p}_{||}.$$

Ekkor az elforgatott vektor:

$$\mathbf{p}_R = \mathbf{p}_{||} + \mathbf{p}_{\perp}\cos\phi + \mathbf{t} \times \mathbf{p}_{\perp}\sin\phi$$



Amiből:

$$\mathbf{p}_R = \mathbf{t}(\mathbf{t}^T\mathbf{p}) + (\mathbf{p} - \mathbf{t}(\mathbf{t}^T\mathbf{p}))\cos\phi + \mathbf{t} \times (\mathbf{p} - \mathbf{t}(\mathbf{t}^T\mathbf{p}))\sin\phi =$$

$$= (1-\cos\phi)\mathbf{t}\mathbf{t}^T\mathbf{p} + \cos\phi\mathbf{p} + \sin\phi\mathbf{t} \times \mathbf{p} =$$

$$= (1-\cos\phi)\begin{bmatrix} t_x t_x & t_x t_y & t_x t_z \\ t_x t_y & t_y t_y & t_y t_z \\ t_x t_z & t_y t_z & t_z t_z \end{bmatrix}\mathbf{p} + \cos\phi\mathbf{I}\mathbf{p} + \sin\phi\begin{bmatrix} t_2 p_3 - t_3 p_2 \\ t_3 p_1 - t_1 p_3 \\ t_1 p_2 - t_2 p_1 \end{bmatrix} =$$

$$(1-\cos\phi)\begin{bmatrix} t_x t_x & t_x t_y & t_x t_z \\ t_x t_y & t_y t_y & t_y t_z \\ t_x t_z & t_y t_z & t_z t_z \end{bmatrix}\mathbf{p} + \cos\phi\mathbf{I}\mathbf{p} + \sin\phi\begin{bmatrix} 0 & -t_3 & t_2 \\ t_3 & 0 & -t_1 \\ -t_2 & t_1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{p} =$$

$$= \begin{bmatrix} (1-\cos\phi)t_x t_x + \cos\phi & (1-\cos\phi)t_x t_y - t_3\sin\phi & (1-\cos\phi)t_x t_z + t_2\sin\phi \\ (1-\cos\phi)t_x t_y + t_3\sin\phi & (1-\cos\phi)t_y t_y + \cos\phi & (1-\cos\phi)t_y t_z - t_1\sin\phi \\ (1-\cos\phi)t_x t_z - t_2\sin\phi & (1-\cos\phi)t_y t_z + t_1\sin\phi & (1-\cos\phi)t_z t_z + \cos\phi \end{bmatrix}$$

Kvaternió (Quaternion)

Motiváció:

- Euler-szögek, RPY szögek: többféle definíció, numerikusan nem mindig szerencsés a Gimbal-lock miatt, rotációmátrix számítása: trigonomentriai függvények
- Rotáció mátrix: redundáns az ábrázolás (9 érték a 3 helyett), numerikus hibák esetén nem egyértelmű az értelmezés

„Ötlet”:

- az orientáció leírása a forgatás **t** tengelye és ϕ szögével
- hogy definiálva legyen $\phi = 0$-ban is (ahol értelmetlen a tengely), és a teljes fordulatokra azonos értéket adjon: súlyozzuk a tengely koordinátáit $\sin(\phi/2)$-vel
- hogy rekonstruálni lehessen a ϕ értékét, legyen koordináta a $\cos(\phi/2)$ érték is

Így a kvaterniót a következő értékek definiálják:

$$[\underbrace{t_x \sin(\phi/2)}_{x} \quad \underbrace{t_y \sin(\phi/2)}_{y} \quad \underbrace{t_z \sin(\phi/2)}_{z} \quad \underbrace{\cos(\phi/2)}_{w}]$$

($\cos\phi$, $\sin\phi$ használata esetén $\phi = \pi$ fordulat nem lenne detektálható...)

Redundancia: 4 koordináta a 3 helyett

Tulajdonságai:

- $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$ (a numerikus hibák könnyen korrigálhatóak)
- nem jelenik meg Gimbal-lock (minden helyzetet egyértelműen definiál, az elmozdulásokat folytonosan követi le)
- invertálás: ϕ előjelet vált $\rightarrow$ x, y, z előjelet vált („olcsó")
- elforgatások eredője: később („olcsó")
- vektorok elforgatása: később („olcsó")

Speciális esetek:

- nincs forgatás: $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- x tengely körüli forgatás: $\begin{bmatrix} \sin(\phi/2) & 0 & 0 & \cos(\phi/2) \end{bmatrix}$
- y tengely körüli forgatás: $\begin{bmatrix} 0 & \sin(\phi/2) & 0 & \cos(\phi/2) \end{bmatrix}$
- y tengely körüli forgatás: $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \sin(\phi/2) & \cos(\phi/2) \end{bmatrix}$

Quaterniók (**a** és **b**) eredője:

- $c_x = a_w b_x + a_x b_w - a_y b_z + a_z b_y$
- $c_y = a_w b_y + a_x b_z + a_y b_w - a_z b_x$
- $c_z = a_w b_z - a_x b_y + a_y b_x + a_z b_w$
- $c_w = a_w b_w - a_x b_x - a_y b_y - a_z b_z$

Kvaternió rotáció mátrixá alakítása (Rodriques-képlet + középiskolai trigonometria)

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 - 2(a_y^2 + a_z^2) & 2a_x a_y - 2a_z a_w & 2a_x a_z + 2a_y a_w \\ 2a_x a_y + 2a_z a_w & 1 - 2(a_x^2 + a_z^2) & 2a_z a_y - 2a_x a_w \\ 2a_x a_z - 2a_y a_w & 2a_y a_z + 2a_x a_w & 1 - 2(a_x^2 + a_y^2) \end{bmatrix}$$

Bonyolultnak tűnik, de nincs sin/cos, csak szorzatok szerepelnek.

Vektor forgatása adott kvaternióval: mátrixszá alakítás és szorzás.

(Matematikai háttér: a komplex számok kiterjesztése - a fenti csak a pongyola, mérnöki alkalmazáshoz szükséges leírás.)

Homogén transzformáció:

- pozíció: offszet vektor
- orientáció:
  - rotáció mátrix
  - tengely/szög
  - Euler szögek
  - RPY szögek
  - kvaternió

A továbbiakban a homogén transzformációkat az egyszerűség kedvéért 4×4 mátrixként jelöljük és használjuk.

De az implementációkban az offszetet vektorként és a forgatást kvaternióval tárolják, és az egyes műveleteket is ezekkel definiálják – az eddigieknek megfelelően...

Köszönöm a figyelmet!

Óbudai Egyetem
Pro Sciencia et Futuro

Bejczy Antal iRobottechnikai Központ