Ipari Robotok Kinematikája és Dinamikája

VI. Dinamikai modellezés

Összeállította: Dr. Kuti József
Szerkesztette: Dr. Galambos Péter

Óbudai Egyetem
Pro Sciencia et Futuro

2018. szeptember 21.
Budapest

Bejczy Antal iRobottechnikai Központ

Motiváció

Interpoláció / trajektória követés

- Inverz geometriai modell és háromhurkos kaszkád kör: lépésekben halad, nem sima a mozgás
- Inverz kinematikai modell és kéthurkos kaszkádkör: a kívánt sebességben láthatóak lépések, a pozíció simább

Ok: a PID szabályozások "próbálják kitalálni" a mozgáshoz szükséges sebességet/gyorsulást/nyomatékot

Továbbhaladás: a robot dinamikai modellje alapján határozzuk meg milyen csuklónyomatékok szükségesek

- a robot mozgatásához
- az aktuális terhelések kompenzálására

Dinamika:

- A mozgások okai: erők, nyomatékok
- A rendszer mozgásegyenletei: differenciálegyenletek
- Megoldásai: lehetséges pályák

Elméleti háttér

Anyagi pont dinamikája

Anyagi pontok / testek mozgásállapotának (sebességének) megváltoztatásához egy másik anyagi pont / test ráhatása szükséges.

Ezt a hatást **erőnek** nevezzük. Mértékegysége Newton [N].

Newton I. axiómája

Egy anyagi pont nyugalomban van, vagy egyenes vonalú, egyenletes mozgást végez, ha nem hat rá erő.

Azon vonatkoztatási rendszereket, amelyekben az első axióma teljesül **inerciarendszer**nek nevezzük.

(Rendszerint viszonyítás kérdése. Például: a Föld jó vonatkoztatási rendszer a mindennapi folyamatok leírásához, a bolygók mozgásának leírásához már nem.)

TÉTEL: GALILEI

Ha egy vonatkoztatási rendszer inerciarendszer, akkor minden hozzá képest egyenes vonalú egyenletes mozgást végző rendszer inerciarendszer.

A továbbiakban rendszerint az egyes pozíciókat, sebességeket, gyorsulásokat egy külső inerciarendszerben írunk le, amit világkoordinátarendszernek nevezünk.

(A testhez rögzített, azzal együtt mozgó koordinátarendszer általában nem inerciarendszer.)

Def. Impulzus

Az anyagi pont lendülete (máshol: impulzusa, mozgásmennyisége, lineáris momentuma) alatt az alábbi mennyiséget értjük: $\mathbf{I} = m\dot{\mathbf{r}}(t)$.

Ennek deriváltja $\dot{\mathbf{I}} = \dot{m}\dot{\mathbf{r}}(t) + m\ddot{\mathbf{r}}(t)$, ami (feltételezve, hogy az anyagi pont tömege állandó) $\dot{\mathbf{I}} = m\ddot{\mathbf{r}}(t)$ azaz a tömeg és a gyorsulás szorzata.

Newton II. axiómája

Az anyagi pont impulzusának deriváltja egyenlő a rá ható erők eredőjével $\dot{\mathbf{I}}(t) = \sum \mathbf{F}_i(t)$, azaz $m\ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{F}(t)$.

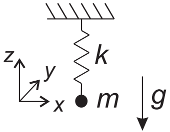
Newton III. axiómája

Két anyagi pont kölcsönhatását leíró erők közös hatásvonalúak és ellentétes irányúak.

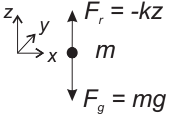
Axiómák: megfigyelésekből származó alapfeltevések, amelyek jól lefedik a hétköznapi tapasztalatokat. A Newtoni dinamika törvényei ezen axiómákból következnek.

PÉLDA: ANYAGI PONT

Tekintsük az ábrán
látható, g gravitációs gyorsulás mellett, k merevségű rugóra felfüggesztett, m tömegű anyagi pontot.



Rajzoljuk fel a *szabadtest ábráját*:
csak a pontot, a rá ható erőket és
a leíráshoz használt koordinátarendszert jelenítsük meg.



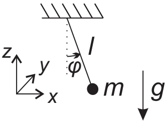
Ekkor Newton II. alapján: $m \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -kz - mg \end{bmatrix}$

Tehát: $\ddot{x} = 0$, $\ddot{y} = 0$ és $m\ddot{z} = -kz - mg$ adja meg a pont gyorsulását. Nyugalomban van, ha sebességei zérusak és $-kz - mg = 0$, azaz $z = -mg/k$.

ANYAGI PONT KÉNYSZERMOZGÁSA

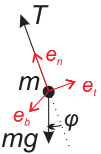
A kényszerek megkötéseket adnak az egyes koordinátákra, sebességekre, gyorsulásokra és ezek biztosítására ismeretlen nagyságú kényszererők jelennek meg a rendszerben. A mozgásegyenletekben így egyaránt vannak ismeretlenek a gyorsulások és az erők között.

Tekintsük az ábrán látható ingát φ kitérített helyzetben.



Rajzoljuk meg a szabadtest ábrát és használjuk a kisérő triéder koordinátarendszerrel azonos helyzetű álló koordinátarendszert. Jelöljék az egyes vektorok tangenciális, normális és binormális komponenseit t, n, b alsó indexek.

Mivel a kényszer körmozgás, a normális irányú gyorsulás: $\ddot{r}_n = \dot{r}^2/l$.

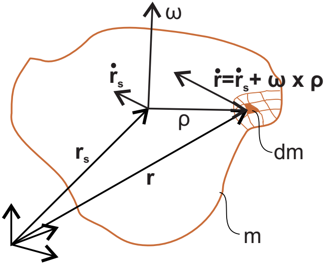


Newton II. alapján: $m \begin{bmatrix} \ddot{r}_t \\ \ddot{r}_n \\ \ddot{r}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -mg\sin\varphi \\ T - mg\cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix}$

Így $\ddot{r}_b = 0$, $\ddot{r}_t = -g\sin\varphi$ és $T = mg\cos\varphi + m\dot{r}^2/l$.

Ezekből a világkoordinátarendszerbeli értékek is számíthatóak.

A merev test tekinthető mereven összerögzített, végtelenül kicsiny (*dm* tömegű) anyagi pontokból álló rendszernek.



Az anyagi pontrendszernél használt összegzések itt folytonos integrálokkal írhatóak le. Például $\int_m \mathbf{r} dm$ jelentése: az egyes *dm* tömegű anyagi pontok helyzetének a tömegükkel súlyozott összege.

Forgását a szögsebesség vektor írja le, amivel az egyes pontjainak sebessége: $\dot{\mathbf{r}}_A = \dot{\mathbf{r}}_B + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{BA}$ és azok gyorsulására: $\ddot{\mathbf{r}}_A = \ddot{\mathbf{r}}_B + \boldsymbol{\epsilon} \times \mathbf{r}_{BA} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{BA})$, ahol $\boldsymbol{\epsilon} = \dot{\boldsymbol{\omega}}$ a szöggyorsulás.

TÖMEGKÖZÉPPONT

- Teljes tömege: $m = \int_m dm$
- Súlypontja: $\mathbf{r}_S(t) = \int_m \mathbf{r} dm/m$
- Súlypontjának sebessége: $\dot{\mathbf{r}}_S(t) = \int_m \dot{\mathbf{r}} dm/m$
- Súlypontjának gyorsulása: $\ddot{\mathbf{r}}_S(t) = \int_m \ddot{\mathbf{r}} dm/m$

Impulzus

A test impulzusa: $\mathbf{I}(t) = \int_m \dot{\mathbf{r}}(t) dm = m\dot{\mathbf{r}}_S(t)$

Az impulzus derivált: $\dot{\mathbf{I}}(t) = m\ddot{\mathbf{r}}_S(t)$

Tekintsünk egy merev testet, amire $\mathbf{F}_i$ erők hatnak $i = 1, ..., l$

Jelölje tömegét m, ezzel a súlypontjának gyorsulása:

$$\underbrace{m\ddot{\mathbf{r}}_s}_{\frac{d}{dt}\mathbf{I}} = \underbrace{\sum_i \mathbf{F}_i}_{\mathbf{F}_e}$$

Perdület a súlypontra

Perdület a súlypontra:

$$\boldsymbol{\pi}_S = \int_m \underbrace{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_S)}_{\boldsymbol{\rho}} \times \dot{\mathbf{r}} dm = \int_m \boldsymbol{\rho} \times (\dot{\mathbf{r}}_S + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho})\, dm =$$

$$= \underbrace{\int_m \boldsymbol{\rho} dm}_{=0} \times \dot{\mathbf{r}}_S + \int_m \boldsymbol{\rho} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho})\, dm = \cdots = \boldsymbol{\Theta}_S \boldsymbol{\omega}(t)$$

ahol $\boldsymbol{\Theta}_S(t) = \begin{bmatrix} \Theta_x & -D_{xy} & -D_{xz} \\ -D_{xy} & \Theta_y & -D_{yz} \\ -D_{xz} & -D_{yz} & \Theta_z \end{bmatrix}$ a súlypontra számított tehetetlenségi nyomatéki mátrix a világ koordináta rendszerben:

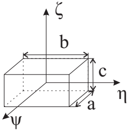
$\Theta_x = \int_m (\rho_y^2 + \rho_z^2) dm$
$D_{xy} = \int_m \rho_x \rho_y dm$

a további értékek hasonlóan.

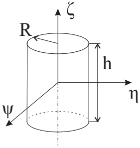
TEHETETLENSÉGI NYOMATÉK

A tehetetlenségi nyomaték értékei – a szögsebességhez, szöggyorsuláshoz hasonlóan – függenek a koordinátarendszertől. A testhez képest mozgó koordinátarendszerben az értékeik is változnak, ezért azt mindig a test súlypontjához rögzített, célszerűen választott orientációjú koordinátarendszerben adják meg.

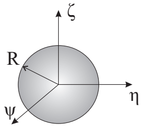
Például egyszerű testek tehetetlenségi nyomatékai a tömegközéppontjukra, a hozzájuk rögzített (ψ, η, ζ) koordináta rendszerben:



Téglatest: $\Theta_\psi = m\frac{b^2+c^2}{12}$, $\Theta_\eta = m\frac{a^2+c^2}{12}$, $\Theta_\zeta = m\frac{a^2+b^2}{12}$



Henger: $\Theta_\psi = \Theta_\eta = m\frac{3R^2+h^2}{12}$, $\Theta_\zeta = \frac{mR^2}{2}$



Gömb: $\Theta_\psi = \Theta_\eta = \Theta_\zeta = \frac{2mR^2}{3}$

A deviációs nyomatékok zérusak: $D_{ij} = 0$.

Def. Tehetetlenségi főirányok

Azt a (ψ, η, ζ) koordinátarendszert, amelyben a tehetetlenségi nyomatékok mátrixa $\mathbf{\Theta}_{S0}$ diagonálmátrix (azaz a deviációs nyomatékok zérusak) főtengely rendszernek, tengelyeit tehetetlenségi főirányoknak nevezzük.

Adott $\mathbf{\Theta}_S$ tehetetlenségi nyomatéki mátrix esetén:

- sajátvektorai a tehetetlenségi főtengelyek,
- a belőlük képzett $\mathbf{R}$ mátrix az a koordinátarendszer-forgatás, amely a főtengely rendszerbe visz,
- sajátértékei a fő tehetetlenségi nyomatékok.

azaz $\mathbf{\Theta}_S = \mathbf{R}\mathbf{\Theta}_{S0}\mathbf{R}^{-1}$, ha egy pont koordinátáit (ψ, η, ζ)-ban $\boldsymbol{\rho}$, (x, y, z)-ben $\mathbf{r}$ jelöli: $\mathbf{r} = \mathbf{R}\boldsymbol{\rho}$.

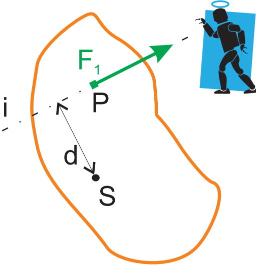
Adott $\mathbf{\Theta}_{S0}$ tehetetlenségi nyomatéki mátrix esetén, egy vektorral való szorzáshoz

- a vektort írjuk le a fötengely rendszerben,
- végezzük el a mátrix-vektor szorzást,
- az eredményt transzformáljuk vissza,

azaz $\mathbf{\Theta}\mathbf{v} = \mathbf{R}(\mathbf{\Theta}_0(\mathbf{R}^T\mathbf{v}))$

Merev testre ható erők:

- támadáspont „P"
- hatásvonal „$\mathbf{i}$"



A forgató hatása függ
a hatásvonal és súlypont távolságától (erőkar).

Tekintsünk egy merev testet, amire $\mathbf{F}_i$ erők hatnak $\mathbf{r}_i$ támadásponttal

Jelölje tömegét m, súlypontjára számított tehetetlenségi nyomaték mátrixát $\mathbf{\Theta}_S$, szögsebességét $\boldsymbol{\omega}$, szöggyorsulását ϵ.

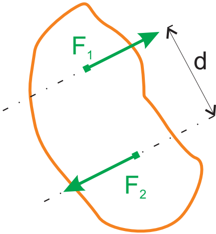
Ekkor testre ható erők, nyomatékok és a test gyorsulása közötti kapcsolat:

$$\underbrace{\mathbf{\Theta}_S\epsilon + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{\Theta}_S\boldsymbol{\omega}}_{\frac{d}{dt}\pi_S} = \underbrace{\sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_S) \times \mathbf{F}_i}_{\mathbf{M}_S} .$$

Erőpár: két erő ($\mathbf{F}_1$ és $\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_1$) amely

- azonos nagyságú,
- ellentétes irányú,
- más hatásvonalú

Nem mozdítja el a súlypontot: $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = 0$



Csak forgat: $\dot{\pi}_S = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_S) \times \mathbf{F}_1 + (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_S) \times \mathbf{F}_2 =$
$(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_S - \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_S) \times \mathbf{F}_1 = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{F}_1$

- nagysága : csak a hatásvonalak távolságától és az erők nagyságatól függ ($F \cdot d$)
- iránya: merőleges a hatásvonalak síkjára

A hatását: nyomatéknak, mértékegysége: [Nm].

Pl. rotációs csuklóban a mozgató nyomaték

DINAMIKA ALAPTÉTELE MEREV TESTRE

Tekintsünk egy merev testet, amire $\mathbf{F}_i$ erők hatnak $\mathbf{r}_i$ támadásponttal és $\mathbf{M}_k$ nyomatékok.

Jelölje tömegét m, súlypontjára számított tehetetlenségi nyomaték mátrixát $\boldsymbol{\Theta}_S$, szögsebességét $\boldsymbol{\omega}$, szöggyorsulását $\boldsymbol{\epsilon}$.

Ekkor testre ható erők, nyomatékok és a test gyorsulása közötti kapcsolat:

$$\underbrace{m\ddot{\mathbf{r}}_S}_{\frac{d}{dt}\mathbf{I}} = \underbrace{\sum_i \mathbf{F}_i}_{\mathbf{F}_e},$$

$$\underbrace{\boldsymbol{\Theta}_S\boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Theta}_S\boldsymbol{\omega}}_{\frac{d}{dt}\pi_S} = \underbrace{\sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_S) \times \mathbf{F}_i + \sum_k \mathbf{M}_k}_{\mathbf{M}_S}.$$

Merev test kényszermozgása

Csuklóval rögzítés a környezethez képest csak egy tengelyű elfordulás, tiltott:

- 2 tengely körüli elfordulás $\rightarrow$ 2 kényszernyomaték
- 3 elmozdulás $\rightarrow$ 3 kényszererő

Aktív csukló: harmadik (hiányzó irányú) nyomaték, nagyságát aktívan állítva (Pl.: csuklónyomaték)

Mozgásegyenletek:

- 5 kényszererő/nyomaték ami kiadódik abból hogy a csukló pozíciója, orientációja kötött 5 irányba
- 6 skalár differenciálegyenlet

Kifejezve az ismeretlen kényszererőket, marad egy skalár diff.egyenlet, ami leírja hogyan mozog/leng/áll a test a csuklón

Példa: robotkar

6 csuklós eset:

- minden szegmens újabb 6 skaláregyenlet és újabb 5 ismeretlen skalár kényszermennyiség,
- összesen $6 \cdot 6 = 36$ skalár egyenlet és 30 kényszermennyiség

Kifejezve 6 skalár differenciálegyenlet.

Hasonlóan összetett, több kényszerrel összerögzített rendszerek esetén a Newton módszer alkalmazása során a kényszererők száma nagy mértékben megnehezítheti a mozgásegyenletek levezetését, azonban az energia alapú megközelítések mint a másodfajú Lagrange mozgásegyenlet közvetlenül szolgáltatják a diff. egyenletrendszert.

Ehhez szükséges:

- általános koordináták és általános erők bevezetése (= robotikában a csuklóváltozók és csuklónyomatékok)
- mozgási, potenciális energia felírása

Általános koordináták

Tekintsünk egy mechanikai rendszert, és válasszunk N skalár koordinátát $(q_1, ..., q_N)$, amellyel leírható minden test pozíciója, orientációja:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_1 &= f_1(q_1, .., q_N),\\ &\vdots\\ \mathbf{r}_M &= f_M(q_1, .., q_N),\end{aligned}$$

és ezeket használva nincs szükség kényszerekre tetszőleges q_n értékek esetén kielégítik a kényszereket.

Többféleképpen felvehető, megfelelő választással egyszerűsíthető a levezetés a későbbiekben - csak hosszú gyakorlat után.

Pl.: a robotkar csuklókoordinátái

DEF. MOZGÁSI ENERGIA

Egy m tömegű, $\mathbf{v}$ sebességű anyagi pont mozgási energiája: $T = \frac{1}{2} m\mathbf{v}^2$.
Egy m tömegű, $\mathbf{\Theta}_S$ tehetetlenségi nyomítékú merev test mozgási energiája:
$T = \frac{1}{2} \int_m \dot{\mathbf{r}}^2 dm = \frac{1}{2} \int_m (\dot{\mathbf{r}}_S + \omega \times \rho)^2 dm = \cdots = \frac{1}{2} m\dot{\mathbf{r}}_S^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{\Theta}_S \boldsymbol{\omega}$

A merev test sebessége, szögsebessége megadható mint

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_S(t) \\ \boldsymbol{\omega}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{J}(\mathbf{q}(t))\dot{\mathbf{q}}(t)$$

így a rendszer mozgási energiája is kifejezhető az általános koodinátákkal és deriváltjukkal $T = T(\dot{q}_1, .., \dot{q}_N, q_1, .., q_N)$.

Potenciális erők

Potenciális erő, potenciális energia

Azon F erőket, melyek munkája csak a kezdeti és végső pozíciótól függ (és független a bejárt úttól) potenciálisnak nevezünk, mert létezik U potenciál függvény, amelynek gradienseként megadható a függvény: $\mathbf{F} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}$.

Ekkor a két pont között mozgatva az anyagi pontot az erő munkája a pontok közötti potenciálkülönbség: $W_{01} = U(\mathbf{r}_1) - U(\mathbf{r}_0)$.

Potenciális erők:

- gravitációs tér $F_g = -mg\mathbf{e}_z \rightarrow U = mgz$ (Ell.: $-\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} = [0\ 0\ \ -mg]$.)
- lineáris rugó $F_k = k(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}) \rightarrow U = k(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r})^2/2$ (Ell.: $-\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} = k(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r})$.)
- elektrosztatikus tér, etc.

Nem-potenciális erők:

- csillapítás
- csúszó súrlódás
- etc.

Az általános koordinátákkal is megadható a rendszer potenciális energiája $U = U(q_1, .., q_N)$.

Egyéb erők

Def. F erő teljesítménye

Egy $\mathbf{v}$ sebességű anyagi pontra ható $\mathbf{F}$ erő teljesítménye a $\mathbf{v}$ sebesség és a $\mathbf{F}$ erő skaláris szorzata: $P = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{v}$.
Merev test esetén az erő és támadáspontjának sebességének skaláris szorzata.

Def. M nyomaték teljesítménye

Egy $\boldsymbol{\omega}$ szögsebességű testre ható $\mathbf{M}$ nyomaték teljesítménye a $\boldsymbol{\omega}$ sebesség és a $\mathbf{M}$ erő skaláris szorzata: $P = \mathbf{M}^T \cdot \boldsymbol{\omega}$.
Merev test esetén az erő és támadáspontjának sebességének skaláris szorzata.

Valamint azok az erők teljesítménye, amelyek nem kényszerekből vagy potenciálisak:

$$P^* = \sum_{k=1}^{K} \mathbf{F}_k^T \dot{\mathbf{r}}_k + \sum_{l=1}^{L} \mathbf{M}_l^T \boldsymbol{\omega},$$

ami lineárisan függ az általános koordináták deriváltjától (csuklósebességektől):

$$P^* = \sum_{n=1}^{N} Q_n(\mathbf{F}_1, .., \mathbf{F}_K, \mathbf{M}_1, .., \mathbf{M}_L, \mathbf{q}) \cdot \dot{q}_n$$

ahol $Q_n()$ az n-dik ált. koordinátához tartozó általános erő (csuklónyomaték).

Másodfajú-Lagrange mozgásegyenlet

Ideális kényszer: A kényszererők teljesítménye zérus

Típusai:

- Stacioner geometriai kényszer: megadható mint $f(\mathbf{r}) = 0$ (csap, csukló, kötél)
- Instacioner geometriai kényszer: függ az időtől is $f(\mathbf{r}, t) = 0$ (változó hosszúságú kötél)
- Stacioner kinematikai kényszer: megadható mint $f(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r}) = 0$ (tapadási súrlódás)
- Instacioner kinematikai kényszer: függ az időtől is $f(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r}, t) = 0$

(Nemideális kényszerek: pl. csúszási súrlódás.)

Másodfajú-Lagrange mozgásegyenlet

Geometriai kényszerek esetén, megfelelően választott $(q_1, .., q_N)$ általános koordinátákkal leírt rendszer N mozgásegyenlete megadható mint

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_n} - \frac{\partial (T-U)}{\partial q_n} = Q_n^* \quad (n = 1..N)$$

ahol T a rendszer mozgási energiája és U a potenciális energiája és $Q_n^* = \frac{\partial P^*}{\partial \dot{q}_n}$ az egyéb erők teljesítményéből származtatott általános erő.

Közvetlenül adja a mozgásegyenletek rendszerét, nem kell kifejezni a kényszererőket/nyomatékokat

Megjegyzés

A deriválások, behelyettesítések a legtöbb szimbolikus matematikai programcsomagban (pl.: Wolfram Mathematica) elvégezhetőek.

A kapott mozgásegyenletek mindig átírhatóak vektoros alakba:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{Q}^*,$$

ahol

- $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ a tehetlenségi mátrix (szimmetrikus, teljes rangú, sajátértékei pozitívak),
- $\mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ a rendszer dinamikáját írja le,
- $\mathbf{Q}^*$ az általános erők vektora.

Robotikai alkalmazás

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{Q}^*,$$

ahol

- $\mathbf{q}$: a csuklóváltozók vektora
- $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ a tehetlenségi mátrix (szimmetrikus, teljes rangú, sajátértékei pozitívak)
- $\mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ a rendszer dinamikáját (gravitáció, centripetális erők) írja le
- $\mathbf{Q}^*$ az általános erők vektora: csuklónyomatékok és külső terhelések

Alkalmazásai:

- a mozgatáshoz szükséges nyomatékok kiszámítása
- figyelembe véve (kompenzálva) a robotra ható terheléseket (erők, nyomatékok)
- inverz geometriai alakalmazás
- (optimális: minimális energiaigényű pálya tervezése)

Kiszámított nyomatékok módszere

Legyen a robot dinamikai alapegyenlete:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{Q}^*,$$

az együtthatónk általunk ismert közelítőleges értéke: $\hat{\mathbf{M}}(\mathbf{q})$, $\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$

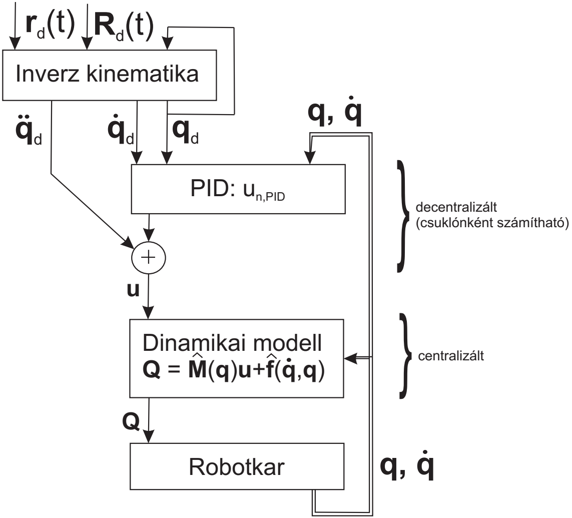
Tegyük fel, hogy a robotkarra csak a csuklónyomatékok hatnak (vagy nem ismerjük a többit).

A kívánt csuklógyorsulás $u_n(t)$:

- a trajektória tartásához szükséges csuklógyorsulás $\ddot{q}_{d,n}(t)$
- kiegészítve az aktuális pozícióhibából PID szabályozással képzett kompenzációval
  $P\left[q_n(t) - q_{d,n}(t)\right] + I\int\left[q_n(\tau) - q_{d,n}(\tau)\right]d\tau + D\left[\dot{q}_n(t) - \dot{q}_{d,n}(t)\right]$

Így az alkalmazandó csuklónyomatékok:

$$\mathbf{Q}^*(t) = \hat{\mathbf{M}}(\mathbf{q})\mathbf{u}(t) + \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$$



$\mathbf{r}_d(t)$
$\mathbf{R}_d(t)$
Inverz kinematika
$\ddot{\mathbf{q}}_d$
$\dot{\mathbf{q}}_d$
$\mathbf{q}_d$
$\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}$
PID: $u_{n,PID}$
decentralizált
(csuklónként számítható)
u
Dinamikai modell
$\mathbf{Q} = \hat{\mathbf{M}}(\mathbf{q})\mathbf{u}+\hat{\mathbf{f}}(\dot{\mathbf{q}},\mathbf{q})$
centralizált
Q
Robotkar
$\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}$

TERHELÉSKOMPENZÁLÁS

Jelölje a TCP ponban ható erőket, nyomatékokat $\mathbf{F}_e$ és $\mathbf{M}_e$. Teljesítményük írható mint:

$$P = \mathbf{F}_e^T \mathbf{v}_{TCP} + \mathbf{M}_e^T \omega$$

Átírva vektoros alakba:

$$P = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_e \\ \mathbf{M}_e \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{TCP} \\ \omega \end{bmatrix}$$

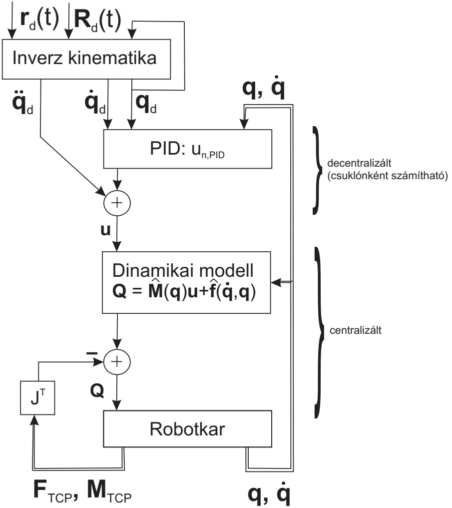
ami a kinematikai modell alpján:

$$P = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_e \\ \mathbf{M}_e \end{bmatrix}^T \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = \underbrace{\left(\mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \begin{bmatrix} \mathbf{F}_e \\ \mathbf{M}_e \end{bmatrix} \right)^T}_{\mathbf{Q}^T} \dot{\mathbf{q}}$$

Tehát a Cartesian térbeli (TCP pontban ható) erőkkel és nyomatékokkal egyenértékű csuklónyomatékok a Jacobi-transzponálttal számíthatóak:

$$\mathbf{Q}_{terheles} = \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \begin{bmatrix} \mathbf{F}_e \\ \mathbf{M}_e \end{bmatrix}$$

A csuklónyomatékok meghatározása során figyelembe véve kompenzálható



A 3 hurkos kaszkáddal szemben itt már csak az ismeretlen tényezőket ellensúlyozza a PID, amit ki lehet számolni meghatározunk - gyorsabb, pontosabb, megbízhatóbb rendszer.

JACOBI-TRANSZPONÁLT ALAPÚ INVERZ KINEMATIKA

Adott $\mathbf{v}$ sebességű, ω szögsebességű mozgáshoz hogyan változtassuk meg a csuklósebességet?

Tegyük fel hogy $\mathbf{v}$ nagyságú és irányú erő hat a TCP-re és ω nagyságú és irányú nyomaték.Ez a következő csuklónyomatékokkal egyenértékű:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \omega \end{bmatrix}$$

Legyenek a csuklósebességek arányosak ezekkel a csuklónyomatékokkal:

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{K}\mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \omega \end{bmatrix}$$

Nem lesz egyenes a pálya, de tart egy megoldás felé, nem jelenik meg a szingularitás, a deadlock helyzeteket külön kezelni kell.

Köszönöm a figyelmet!

Óbudai Egyetem
Pro Sciencia et Futuro

Bejczy Antal iRobottechnikai Központ