Ipari Robotok Kinematikája és Dinamikája

V/A. Kinematikai modellezés: Elméleti háttér

Összeállította: Dr. Kuti József
Szerkesztette: Dr. Galambos Péter

Óbudai Egyetem
Pro Sciencia et Futuro

2018. szeptember 21.
Budapest

Bejczy Antal iRobottechnikai Központ

Robotmodellezés: Kinematikai szint

Kinematikai (mozgástani) **modell**: a geometriai modell alapján a sebességeket, gyorsulásokat, így a mozgásokat írja le (a mozgások okaival (erők, nyomatékok) nem foglalkozik)

A modell a kis elmozdulások / elfordulások és a kis csuklókoordináta változások közötti lineáris kapcsolatot írja le

Leosztva az idővel mutatja a sebesség/szögsebesség és a csuklósebességek kapcsolatát is.

- Látható, hogy a robot képes-e tetszőleges irányba elmozdulni/elfordulni.
- Látható, vannak-e olyan irányok melyekbe nem lehetséges elmozdulás/elfordulás.
- Milyen mozgások nem befolyásolják a TCP helyzetét/orientációját.

Továbbá a kívánt sebesség megadható közvetlenül a szabályozásnak (ezzel simább mozgás, nem diszkrét lépések)

Anyagi pont kinematikája

Anyagi pont kinematikája

Def.: Anyagi pont

Az anyagi pont olyan test melynek méretei a vizsgálat szemszögéből elhanyagolhatóak, mozgása egyetlen pontjának mozgásával jellemezhető.

Mozgástörvény

A **mozgástörvény** az anyagi pont helyzetét (a helyvektort az idő függvényében) írja le: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$

Tekinthetőek a koordinátái is:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$$

Anyagi pont szabadságfokainak száma: 3

(Szabadságfok: az általános leíráshoz minimálisan szükséges skalár függvények száma.)

Átlagsebesség

Az elmozdulás Δt idő alatt és az eltelt Δt idő hányadosa:

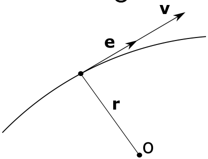
$$\mathbf{v}_{\Delta t}(t) = \frac{\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}$$

Pillanatnyi sebesség

$dt \to 0$ idő alatti elmozdulás alapján számított sebesség, azaz $\mathbf{r}(t)$ első deriváltja:

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{dt\to 0} \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \lim_{dt\to 0} \frac{\mathbf{r}(t+dt) - \mathbf{r}(t)}{dt} = \dot{\mathbf{r}}(t)$$

A pillanatnyi sebességvektor mindig érintő irányú:



Számítása numerikusan (véges differencia módszer): kicsi, de numerikusan még kezelhető Δt-vel számítani a hányadost.

Állandó $\mathbf{v}$ sebesség és $\mathbf{r}_0$ kezdeti érték esetén a trajektória egyenes vonalú egyenletes mozgás: $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v} \cdot t$.

(Az $\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{v}$ differenciálegyenlet megoldásaként.)

Ha a pont koordinátája egy időfüggő paraméterrel adott: $\mathbf{r}(q_1(t))$ (például egycsuklós "robot" TCP koordinátája), a sebessége ekkor a deriválás lánc szabálya alapján:

$$\dot{\mathbf{r}}(q_1(t)) = \frac{d\mathbf{r}(q_1(t))}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}(q_1)}{\partial q_1} \frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}(q_1)}{\partial q_1} \dot{q}_1(t)$$

Példa: 1 rotációs csukló végpontja

$$\mathbf{r}(q_1(t)) = \begin{bmatrix} l\cos(q_1(t)) \\ l\sin(q_1(t)) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{r}}(q_1(t)) = \begin{bmatrix} l\partial\cos(q_1(t))/\partial q_1 \cdot \dot{q}_1(t) \\ l\partial\sin(q_1(t))/\partial q_1 \cdot \dot{q}_1(t) \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -l\sin(q_1(t)) \\ l\cos(q_1(t)) \\ 0 \end{bmatrix} \dot{q}_1(t)$$

A derivált lineárisan függ a csuklósebességtől az adott pontban!

Ha a pont koordinátája több időfüggő paramétertől függően adott: $\mathbf{r}(q_1(t), q_2(t), ..., q_m(t))$ (például robot TCP koordinátája),

a sebessége ekkor a deriválás lánc szabálya és a többváltozós függvények deriválási szabálya alapján:

$$\dot{\mathbf{r}}(q_1(t), q_2(t), ..., q_m(t)) = \frac{\partial \mathbf{r}(q_1, q_2, ..., q_m)}{\partial q_1}\dot{q}_1(t) +$$
$$+ \frac{\partial \mathbf{r}(q_1, q_2, ..., q_m)}{\partial q_2}\dot{q}_2(t) + \cdots + \frac{\partial \mathbf{r}(q_1, q_2, ..., q_m)}{\partial q_m}\dot{q}_m(t) =$$
$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}(q_1, q_2, ..., q_m)}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial \mathbf{r}(q_1, q_2, ..., q_m)}{\partial q_m} \end{bmatrix} \cdot \dot{\mathbf{q}}(t) =$$
$$= grad(\mathbf{r}(\mathbf{q})) \cdot \dot{\mathbf{q}}(t)$$

A derivált lineárisan függ a csuklósebességektől az adott pontban!

Számítása: symbolic toolbox / véges differencia módszer.

Példa: 2 rotációs csukló végpontja

$$\mathbf{r}(q_1(t), q_2(t)) = \begin{bmatrix} l_1 \cos(q_1(t)) \\ l_1 \sin(q_1(t)) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_2 \cos(q_1(t) + q_2(t)) \\ l_2 \sin(q_1(t) + q_2(t)) \\ 0 \end{bmatrix},$$

ekkor a derivált

$$\dot{\mathbf{r}}(q_1(t), q_2(t)) = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(q_1(t)) \\ l_1 \cos(q_1(t)) \\ 0 \end{bmatrix} \dot{q}_1(t) + \frac{\partial}{\partial q_1} \begin{bmatrix} l_2 \cos(q_1(t) + q_2(t)) \\ l_2 \sin(q_1(t) + q_2(t)) \\ 0 \end{bmatrix} \dot{q}_1$$

$$+ \frac{\partial}{\partial q_2} \begin{bmatrix} l_2 \cos(q_1(t) + q_2(t)) \\ l_2 \sin(q_1(t) + q_2(t)) \\ 0 \end{bmatrix} \dot{q}_2(t) = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(q_1(t)) \\ l_1 \cos(q_1(t)) \\ 0 \end{bmatrix} \dot{q}_1(t) +$$

$$+ \begin{bmatrix} -l_2 \sin(q_1(t) + q_2(t)) \\ l_2 \cos(q_1(t) + q_2(t)) \\ 0 \end{bmatrix} (\dot{q}_1(t) + \dot{q}_2(t)) =$$

$$= \begin{bmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_{1+2} & -l_2 s_{1+2} \\ l_1 c_1 + l_2 c_{1+2} & l_2 c_{1+2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}$$

Merev test kinematikája

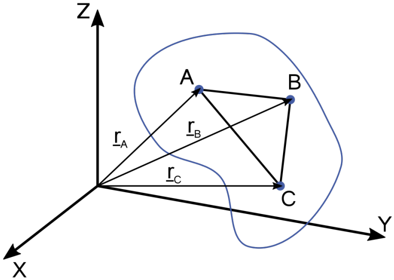
Def. Merev test

Merevnek tekinthető az a test, mely pontjainak távolsága mozgás során nem változik, vagyis **bármely két pontjának távolsága időben állandó**.

Ezzel a merev test alakja,
térfogata szintén változatlan marad.

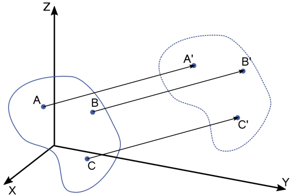
Merev test térbeli helyzete
megadható bármely 3 nem egy
egyenesbe eső pontjának helyzetével,

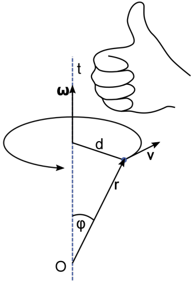
vagy egy tetszőleges pontjának
pozíciójával és a test orientációjával.



Merev test sebességállapota,
ha csak síkban mozoghat:

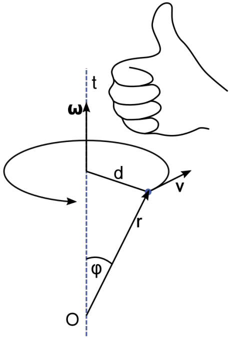
- végezhet tisztán haladó mozgást: minden pontja azonos nagyságú és irányú sebességgel halad: $\mathbf{v}_P(t) = \mathbf{v}(t)$, minden P-re
- forgó mozgást:
  a zérus sebességű (álló) pontok képezik a test forgástengelyét,
  a többi pont sebességének nagysága a távolság és a szögsebesség szorzatából, iránya merőleges az álló ponttal összekötő sugárra,
  a jobb-kéz szabálynak megfelelően:





Szögsebességvektor (ω):

- párhuzamos a forgástengellyel,
- iránya a forgás irányából a jobbkéz szabály szerint,
- nagysága pedig a forgómozgás sebessége (rad/sec)-ben.



Síkmozgás esetén,
ha a szögsebesség nem zérus,

- mindig van zérus sebességű tengely,
- a pontok sebessége: $\boldsymbol{v_P} = \omega \times \boldsymbol{r_{OP}}$

Lehetséges esetek (egy adott pillanatban):

- Tisztán haladó mozgás: tetszőleges x, y, z irányba
- Tiszta forgó mozgás: van egy tengely zérus sebességű pontokból, és a test pontjai ekörül forognak, a szögsebesség $\boldsymbol{\omega}$
- Összetett mozgás: minden mozgás megadható egy forgómozgás és a forgás tengelyével párhuzamos irányú haladó mozgás eredőjeként

Így egy tetszőleges pont sebessége: $\boldsymbol{v_P} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r_{OP}} + \mathbf{v}$

Tetszőleges A és B pontok sebességének kapcsolata

Sebességeik:

$$\boldsymbol{v_B} = \omega \times \boldsymbol{r_{BO}} + \mathbf{v}$$

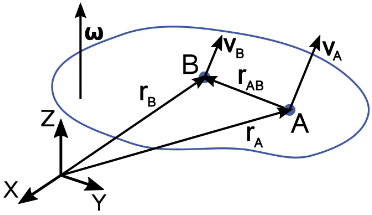
$$\boldsymbol{v_A} = \omega \times \boldsymbol{r_{AO}} + \mathbf{v}$$

Ezeket kivonva egymásból:

$$\boldsymbol{v_B} - \boldsymbol{v_A} = \omega \times \boldsymbol{r_{OB}} + \mathbf{v} - (\omega \times \boldsymbol{r_{OA}} + \mathbf{v})$$

$$\boldsymbol{v_B} = \boldsymbol{v_A} + \omega \times (\boldsymbol{r_{OB}} - \boldsymbol{r_{OA}}) = \boldsymbol{v_A} + \omega \times (\boldsymbol{r_{AO}} + \boldsymbol{r_{OB}}) = \boldsymbol{v_A} + \omega \times \boldsymbol{r_{AB}}$$

A test bármely pontjának a sebessége következik egy tetszőleges pont sebességéből és a szögsebességből.

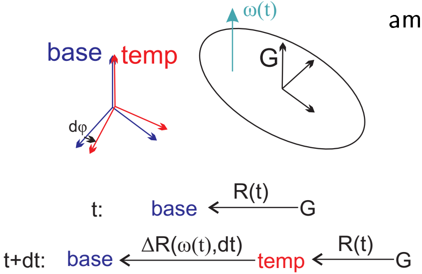


Jelölje a test orientációját az időben $\mathbf{R}(t)$ rotáció mátrix, szögsebességét $\boldsymbol{\omega}(t)$.

A test dt kis időegység alatt $d\varphi = |\boldsymbol{\omega}(t)| \cdot dt$ szöggel fordulna el, a $\boldsymbol{\omega}(t)$ iránya által adott tengely körül (jelölje $\mathbf{t}$).

Ezt az elfordulást leírhatjuk rotáció mátrixszal (a Rodriques-képletbe behelyettesítve): $\Delta\mathbf{R}(\boldsymbol{\omega}(t), dt)$.

"t" időpontban: $\mathbf{R}$ írja le a base$\leftarrow$ G orientációt
"$t + dt$" időpontban: $\Delta\mathbf{R}$ írja le a kis elfordulást (base$\leftarrow$temp), amihez G további $\mathbf{R}$



Új orientáció: $\mathbf{R}(t + dt) = \Delta\mathbf{R}(\boldsymbol{\omega}(t), dt)\mathbf{R}(t)$ - nem hozzáad, rászoroz!

A ROTÁCIÓ MÁTRIX DERIVÁLTJA

$\Delta\mathbf{R}(\boldsymbol{\omega}(t), dt)$ számításához a Rodriques-képlet

$$\mathbf{R}_{\mathbf{t},d\varphi} = \begin{bmatrix} (1-\cos d\varphi)t_x t_x + \cos d\varphi & (1-\cos d\varphi)t_x t_y - t_z \sin d\varphi & (1-\cos d\varphi)t_x t_z + t_y \sin d\varphi \\ (1-\cos d\varphi)t_x t_y + t_z \sin d\varphi & (1-\cos d\varphi)t_y t_y + \cos d\varphi & (1-\cos d\varphi)t_y t_z - t_x \sin d\varphi \\ (1-\cos d\varphi)t_x t_z - t_y \sin d\varphi & (1-\cos d\varphi)t_y t_z + t_x \sin d\varphi & (1-\cos d\varphi)t_z t_z + \cos d\varphi \end{bmatrix}$$

mivel $d\varphi = |\omega| dt$ "kicsi", $\sin d\varphi \approx d\varphi$, $\cos d\varphi \approx 1$

és a tengely $\mathbf{t} = \boldsymbol{\omega}/|\omega|$, behelyettesítve

$$\Delta\mathbf{R}(\boldsymbol{\omega}(t), dt) \approx \begin{bmatrix} 1 & -t_z d\varphi & t_y d\varphi \\ t_z d\varphi & 1 & -t_x d\varphi \\ -t_y d\varphi & t_x d\varphi & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\omega_z dt & \omega_y dt \\ \omega_z dt & 1 & -\omega_x dt \\ -\omega_y dt & \omega_x dt & 1 \end{bmatrix}$$

Ezzel a derivált kifejezése:

$$\dot{\mathbf{R}}(t) = \frac{\mathbf{R}(t+dt) - \mathbf{R}(t)}{dt} = \frac{\Delta\mathbf{R}(\boldsymbol{\omega}(t), dt)\mathbf{R}(t) - \mathbf{R}(t)}{dt} =$$

$$= \frac{\Delta\mathbf{R}(\boldsymbol{\omega}(t), dt) - \mathbf{I}}{dt}\mathbf{R}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\omega_z(t) & \omega_y(t) \\ \omega_z(t) & 0 & -\omega_x(t) \\ -\omega_y(t) & \omega_x(t) & 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\omega}(t)\times} \mathbf{R}(t) =$$

$$= \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{R}(t)$$

Miért "$\boldsymbol{\omega}\times$":
ha megszorozzuk a mátrixot egy tetszőleges **a** vektorral:

$$\begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega_z a_y + \omega_y a_z \\ \omega_z a_x - \omega_x a_z \\ -\omega_y a_x + \omega_x a_y \end{bmatrix} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}$$

ami a vektoriális szorzat

A szögsebesség és az orientáció változásának kapcsolata:
$\dot{\mathbf{R}}(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{R}(t)$

Ha a szögsebesség állandó $\boldsymbol{\omega}(t) = \boldsymbol{\omega}$, a diff. egyenlet megoldása az állandó sebességű forgás: $\mathbf{R}(t) = e^{(\boldsymbol{\omega}\times)t}\mathbf{R}(0)$

Ha adott az orientáció és a deriváltja, a szögsebesség számítható:

$$\begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} = \dot{\mathbf{R}}(t)\mathbf{R}(t)^T.$$

Ha az endeffector orientációja rotáció mátrixszal adott, a csuklóváltozók függvényeként:

$$\mathbf{R}(q_1(t), \ldots, q_m(t)) = \mathbf{R}_{base,tool}(q_1, \ldots, q_m)$$

a deriváltja lineárisan függ a csuklósebességektől (mint a pozíciónál)

$$\dot{\mathbf{R}}(q_1, \ldots, q_m) = \frac{\partial \mathbf{R}(q_1, \ldots, q_m)}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \mathbf{R}(q_1, \ldots, q_m)}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \\ + \cdots + \frac{\partial \mathbf{R}(q_1, \ldots, q_m)}{\partial q_m}\dot{q}_m = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \mathbf{R}_{base,tool}(q_1, \ldots, q_m)}{\partial q_i}\dot{q}_i$$

azaz a szögsebesség is lineárisan függ a csuklósebességekből:

$$\begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} = \dot{\mathbf{R}}(t)\mathbf{R}(t)^T = \\ = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \mathbf{R}_{base,tool}(q_1, \ldots, q_m)}{\partial q_i}\mathbf{R}(q_1, \ldots, q_m)^T \dot{q}_i.$$

Jacobi mátrix

A TCP pont sebessége lineárisan függ a csuklósebességektől:

$$\mathbf{v}_{TCP}(t) = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{J}_{\mathbf{v}i}(\mathbf{q}(t))\dot{q}_i(t) = \mathbf{J}_{\mathbf{v}}(\mathbf{q}(t)) \cdot \dot{\mathbf{q}}(t)$$

(ami a transzformáció offszet részének deriváltja)

a szögsebesség is lineárisan függ:

$$\omega(t) = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{J}_{\omega i}(\mathbf{q}(t))\dot{q}_i(t) = \mathbf{J}_{\omega}(\mathbf{q}(t)) \cdot \dot{\mathbf{q}}(t)$$

(számítható a transzformáció rotáció részének deriváltjából)

Így az endeffector sebességállapota:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{TCP} \\ \omega \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\mathbf{v}}(\mathbf{q}) \\ \mathbf{J}_{\omega}(\mathbf{q}) \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}(q_1,\ldots,q_m)} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_m \end{bmatrix} \quad \leftarrow \text{a geometriai modell linearizáltja}$$

$\mathbf{J}(q_1, \ldots, q_m)$: az ún. Jacobi-mátrix az együtthatók az adott $\mathbf{q}$ konfigurációban

$\mathbf{J}(q_1, \ldots, q_m)$: az ún. Jacobi-mátrix

- az aktuális ($\mathbf{q}$) konfigurációban
- megadja a csuklósebességek és a sebesség/szögsebesség kapcsolatát,
- ami lineáris
- megadja kis elmozdulások/elfordulások és a csuklókoordináták változásának összefüggését is
  (mindkét oldalt megszorozva dt-vel, bal oldalt $d\mathbf{r}_{TCP}$ elmozdulás, $d\varphi$ elfordulás, jobb oldalon dq_i csuklókoordináta változások, az együttható itt is a $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ Jacobi-mátrix)

Ha megvan szimbolikus alakban a Jacobi mátrix, vagy algoritmus a numerikus meghatározására adott csuklóváltozókhoz:
a direkt kinematikai feladat meg van oldva

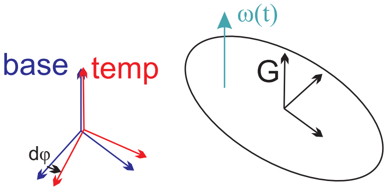
$\rightarrow$ A direkt geometriai feladat megoldásából származtatható a Jacobi-mátrix, azaz a kinematikai modell!
(Numerikus/szimbolikus deriválással.)

A szögsebesség és a további orientáció leírások kapcsolata

A KVATERNIÓ DERIVÁLTJA

Jelölje a test orientációját $\mathbf{Q}(t)$ kvaternió, szögsebességét $\boldsymbol{\omega}(t)$.

A test dt kis időegység alatt $d\varphi = |\boldsymbol{\omega}(t)| \cdot dt$ szöggel fordulna el, a $\boldsymbol{\omega}(t)$ iránya által adott tengely körül (jelölje $\mathbf{t}$).



t: base $\xleftarrow{Q(t)}$ G

t+dt: base $\xleftarrow{\Delta Q(\omega(t),dt)}$ temp $\xleftarrow{Q(t)}$ G

Ezekkel az új orientációt szorzással kapjuk (láncszabály):

$\mathbf{Q}(t+dt) = \Delta\mathbf{Q}(\boldsymbol{\omega}(t), dt)\mathbf{Q}(t)$, Az elfordulást leírhatjuk kvaternióval:

$$\Delta\mathbf{Q}(\omega(t), dt) =$$

$$\begin{bmatrix} t_x \sin(d\varphi/2) & t_y \sin(d\varphi/2) & t_z \sin(d\varphi/2) & \cos(d\varphi/2) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} t_x d\varphi/2 & t_y d\varphi/2 & t_z d\varphi/2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_x dt/2 & \omega_y dt/2 & \omega_z dt/2 & 1 \end{bmatrix}$$

amiből a deriváltra

$$\dot{\mathbf{Q}}(t) = \frac{\mathbf{Q}(t+dt) - \mathbf{Q}(t)}{dt} = \frac{\Delta\mathbf{Q}(\omega(t), dt) - [0001]}{dt}\mathbf{Q}(t) =$$

$$= \begin{bmatrix} \omega_x/2 & \omega_y/2 & \omega_z/2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{Q}(t)$$

innen $\begin{bmatrix} \omega_x & \omega_y & \omega_z & 0 \end{bmatrix} = 2\dot{\mathbf{Q}}(t)\mathbf{Q}(t)^{-1}$

Itt a leginkább közvetlen a kapcsolat az orientáció leírása és a szögsebesség között

A EULER/RPY SZÖGEK DERIVÁLTJAI

NEM a szögsebesség!

Hanem "valami", ami függ az alkalmazott konvenciótól.

Pl.: a bemutatott RPY konvencióban

$$\mathbf{R}_{\alpha,\beta,\gamma} = \begin{bmatrix} c_\alpha c_\beta & -s_\alpha c_\gamma + c_\alpha s_\beta s_\gamma & s_\alpha s_\gamma + c_\alpha s_\beta c_\gamma \\ s_\alpha c_\beta & c_\alpha c_\gamma + s_\alpha s_\beta s_\gamma & -c_\alpha s_\gamma + s_\alpha s_\beta c_\gamma \\ -s_\beta & c_\beta s_\gamma & c_\beta c_\gamma \end{bmatrix}$$

a β szög: $\beta = asin(-R_{3,1})$

Ha végigvezetjük ebből a deriváltját: $\dot{\beta} = asin'(-R_{3,1})\dot{R}_{3,1}$

Mivel $asin'(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$, $asin'(-R_{3,1}) = 1/\sqrt{1-s_\beta^2} = 1/c_\beta$

A mátrixszorzásból:

$$\dot{R}_{3,1} = \begin{bmatrix} -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{1,1} \\ R_{2,1} \\ R_{3,1} \end{bmatrix} = -\omega_y c_\alpha c_\beta + \omega_x s_\alpha c_\beta$$

Így ebben az esetben a deriváltra: $\dot{\beta} = -\omega_y c_\alpha + \omega_x s_\alpha$

Gyorsulás, szöggyorsulás és a csuklógyorsulások kapcsolata

GYORSULÁS

DEF.: GYORSULÁS

A pozíció második deriváltja

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = \frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2}$$

a sebesség első deriváltja

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = \frac{d}{dt}\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \frac{d\dot{\mathbf{r}}(t)}{dt}$$

"a sebesség pillanatnyi változási sebessége".

Állandó gyorsulású pont pályája: $\ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{a}$, adott kezdeti sebesség $\mathbf{v}_0$ és kezdeti pozíció esetén $\mathbf{r}_0$:

Egyszer integrálva a differenciálegyenletet: a sebesség lineárisan változik $\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a} \cdot t$

Tovább integrálva kapjuk a pozíciót: $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 \cdot t + \mathbf{a} \cdot \frac{t^2}{2}$

Tetszőleges P és A pontok gyorsulásának kapcsolata, a sebességet megadó összefüggés

$\boldsymbol{v_B} = \boldsymbol{v_A} + \omega \times \boldsymbol{r_{AB}}$

deriválásával: $\boldsymbol{a_B} = \boldsymbol{a_A} + \underbrace{\dot{\omega}}_{=\epsilon} \times \boldsymbol{r_{AB}} + \omega \times \dot{\boldsymbol{r}}_{AB}$

ahol $\epsilon = \dot{\omega}$ a szöggyorsulás és

$\dot{\boldsymbol{r}}_{AB} = \dot{\boldsymbol{r}}_B - \dot{\boldsymbol{r}}_A = \boldsymbol{v_B} - \boldsymbol{v_A} = \omega \times \boldsymbol{r_{AB}}$

A szögsebesség (ω) és a szöggyorsulás (ϵ) ismeretében, a test bármely pontjának a gyorsulása számítható egy tetszőleges pont gyorsulásából:

$\boldsymbol{a_B} = \boldsymbol{a_A} + \epsilon \times \boldsymbol{r_{AB}} + \omega \times (\omega \times \boldsymbol{r_{AB}})$

Tehát egy pont gyorsulása és a test szöggyorsulása leírja a test gyorsulásállapotát.

Eddig a kinematikai modell:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{TCP} \\ \omega \end{bmatrix} = \underbrace{\mathbf{J}(q_1, ..., q_m)}_{6 \times m} \cdot \dot{\mathbf{q}}$$

Ennek a deriválásával leírható gyorsulás és a szöggyorsulás a csuklóváltozókkal:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_{TCP} \\ \epsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{v}}_{TCP} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \underbrace{\underbrace{\dot{\mathbf{J}}(q_1, ..., q_m)}_{=\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial J}{\partial q_i} \dot{q}_i} \dot{\mathbf{q}}(t)}_{=\mathbf{c}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})} + \mathbf{J}(q_1, ..., q_m) \ddot{\mathbf{q}}(t)$$

A gyorsulás és a szöggyorsulások között is a $\mathbf{J}$ Jacobi-mátrix teremt kapcsolatot (de jelen van egy sebességtől függő $\mathbf{c}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ tag is)

Összefoglalás

- A merev testek sebességállapota egyértelműen jellemezhető egy pontjuk sebességével és a test szögsebességével
- A csuklósebességek és a sebesség, szögsebesség közötti kapcsolat konfigurációfüggő, de lineáris

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{TCP} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} = \underbrace{\mathbf{J}(q_1, \ldots, q_m)}_{6 \times m} \cdot \dot{\mathbf{q}},$$

  az együttható mátrixot Jacobi-mátrixnak nevezzük
- Ha adott a kívánt orientáció idő függvénye, annak deriváltjából megadható a kívánt szögsebesség
- A gyorsulás, szöggyorsulás és a csuklógyorsulások között szintén a Jacobi-mátrix teremt kapcsolatot

Köszönöm a figyelmet!

Óbudai Egyetem
Pro Sciencia et Futuro

Bejczy Antal iRobottechnikai Központ