Ipari Robotok Kinematikája és Dinamikája

III/A Vektor, mátrix műveletek

Összeállította: Dr. Kuti József
Szerkesztette: Dr. Galambos Péter

Óbudai Egyetem
Pro Sciencia et Futuro

2019. február 21.
Budapest

Bejczy Antal iRobottechnikai Központ

Motiváció

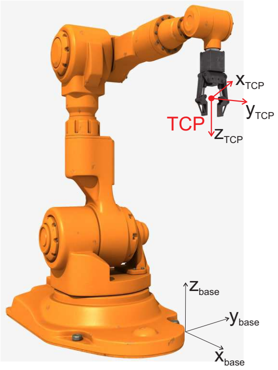
Robot geometria: a csuklóváltozóktól függően meghatározza a TCP-t és a TCP koordinátarendszert.

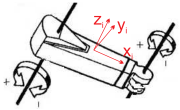
Ez rendszerint nagyon összetett: ki sem írják teljes formában

Minden szegmenshez egy-egy koordinátarendszer, amik elmozdulhatnak / elfordulhatnak egy tengely irányába/körül.

Hogyan

- írhatóak le a koordinátarendszerek egymáshoz képes?
- transzformálhatóak a 2 koordinátarendszer között a pontok/irányok?





Nem csak robotikában nélkülözhetetlen:

- 3D mechanikai problémák
- különösen: repüléstechnika
- mechanikai szimuláció, ütközésvizsgálat (3D játék software)
- 3D grafika

Vektor, mátrix műveletek ismétlés

Skalárok: $a, b, c, \ldots, \alpha, \beta, \gamma, \ldots$

(Oszlop)vektorok: $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \ldots$

Mátrixok: $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \ldots$

Bázisok, pontok: $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \ldots$

Az A pont koordinátái az R koordinátarendszerben: $\mathbf{a}_R$

Az O-ból a P pontba mutató $\overrightarrow{OP}$ vektor koordinátái az R koordinátarendszer orientációjának megfelelően: $\overrightarrow{OP}_R$

Vektor, mátrix műveletek

Vektor transzponáltja

A $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^K$ oszlopvektor transzponáltja az a $\mathbf{v}^T \in \mathbb{R}^{1\times K}$ sorvektor, amelynek az k-dik eleme megegyezik a másik vektor k-dik elemével.

Példa: $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}$

Mátrix transzponáltja

A $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{I\times J}$ mátrix transzponáltja az az $\mathbf{M}^T \in \mathbb{R}^{J\times I}$, amelynek az i-dik sorbeli j-dik eleme megegyezik a másik mátrix j-dik sorának i-dik elemével, azaz a művelet az elemeket tükrözi a főátlóra.

Példa: $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix}$

Vektorok skaláris szorzata

Legyen $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ vektor és $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ vektor, ekkor $\mathbf{p}$ vektor transzponáltja $\mathbf{p}^T \in \mathbb{R}^{1\times 3}$ sorvektor és az $(\mathbf{p}^\mathbf{T}\mathbf{v})$ skaláris szorzat a vektorok elemeinek szorzatösszegeként adódik, azaz

$$\mathbf{p}^\mathbf{T}\mathbf{v} = p_1 v_1 + p_2 v_2 + p_3 v_3 .$$

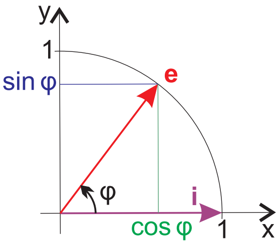
Vektorok skaláris szorzata a vektorok hosszainak és a bezárt szögük cosinusának szorzata: $\mathbf{p}^\mathbf{T}\mathbf{v} = |\mathbf{p}||\mathbf{v}| \cos \phi_{\mathbf{v},\mathbf{p}}$

Példa:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 0.5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 0.5 \\ 0 \end{bmatrix} = \sqrt{3}/2 = \cos(30[\mathrm{deg}])$$

Tekintsük az x-tengely irányában néző $\mathbf{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ egységvektort.

Az óramutatójárásával ellentétes (azaz pozitív) irányba ϕ szöggel való forgatással kapott vektor x és y irányú komponense a szög coszinusa és szinusza: $\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{bmatrix}$, lásd az ábrát.



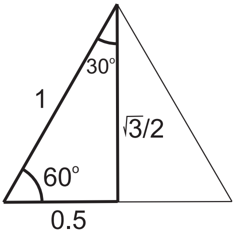
Ebből következik, hogy a szögfüggvények

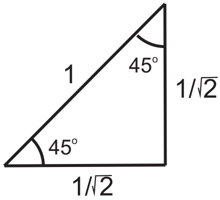
- periodikusak,
  értékeik 2π-nként ismétlődnek:
  $\sin\phi = \sin(\varphi + 2\pi)$, $\cos\varphi = \cos(\varphi + 2\pi)$
- és szimmetrikusak:
  $\sin\varphi = \sin(\pi - \varphi)$, $\cos\varphi = \cos(-\varphi)$

A szög tangense, cotangense, ezek hányadosai:
$\tan\varphi = \sin\varphi / \cos\varphi$, $\cot\varphi = \cos\varphi / \sin\varphi$

Nevezetes szögek coszinusza és szinusza
(az egyenlő oldalú és az egyenlő szárú háromszögek tulajdonságai alapján):

$\phi[deg]$	$\cos\phi$	$\sin\phi$
0	1	0
30	$\sqrt{3}/2$	$1/2$
45	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$
60	$1/2$	$\sqrt{3}/2$
90	0	1
120	$-1/2$	$\sqrt{3}/2$
135	$-1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$





Szögfügvények invertálása

Mivel $\cos\varphi = \cos(-\varphi) = \cos(\varphi + 2k\pi) = \cos(-\varphi + 2k\pi)$
(minden $k \in \mathbb{Z}$ egész számra),
a $\cos\varphi = 0.1$ megoldásai: $\varphi = \pm\mathrm{acos}(0.1) + 2k\pi$

Mivel $\sin\varphi = \sin(\pi - \varphi) = \sin(\varphi + 2k\pi) = \sin(\pi - \varphi + 2k\pi) \qquad (k \in \mathbb{Z})$,
a $\sin\varphi = 0.1$ megoldásai: $\varphi = \begin{cases} \mathrm{asin}(0.1) + 2k\pi \\ \pi - \mathrm{asin}(0.1) + 2k\pi \end{cases}$

Mivel $\tan\varphi = \tan(\varphi + k\pi) \qquad (k \in \mathbb{Z})$,
a $\tan\varphi = 0.1$ megoldásai: $\varphi = \mathrm{atan}(0.1) + k\pi$

Ha $\sin\varphi = a$, $\cos\varphi = b$, akkor $\varphi = \mathrm{atan2}(a, b) + 2k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$,

ahol $\mathrm{atan2}(a, b) = \begin{cases} \pi/2 & \textit{if} \quad b = 0, a > 0 \\ 3\pi/2 & \textit{if} \quad b = 0, a < 0 \\ \mathrm{atan}(a/b) & \textit{if} \quad b > 0 \\ \mathrm{atan}(a/b) + \pi & \textit{if} \quad b < 0 \end{cases}$

(Elég (ca), (cb) értékeket megadni, ha c valamilyen pozitív érték!)

MÁTRIX-VEKTOR SZORZAT

Legyen $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mátrix és $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ vektor, ekkor az $(\mathbf{Mv})$ egy 3 elemű oszlopvektor és az i-dik eleme az $\mathbf{M}$ mátrix i-dik sorvektorának és a $\mathbf{v}$ vektornak a skaláris szorzataként adódik, azaz

$$(\mathbf{Mv})_i = m_{i1}v_1 + m_{i2}v_2 + m_{i3}v_3.$$

Példa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.1 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -0.5 & 0.2 \\ 0 & 0.5 & \sqrt{3}/2 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \\ 0.3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Mátrixok szorzata

Legyenek $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{a \times b}$ és $\mathbf{N} \in \mathbb{R}^{b \times c}$ mátrixok, ekkor az $(\mathbf{MN})$ egy $a \times c$ méretű mátrix és az i-dik sorának j-dik eleme az $\mathbf{M}$ mátrix i-dik sorának és a $\mathbf{N}$ mátrix j-dik sorának elemeinek szorzatösszegeként adódik, azaz

$$(\mathbf{MN})_{ij} = m_{i1} n_{1j} + m_{i2} n_{2j} + m_{i3} n_{3j} + \cdots + m_{ib} n_{bj}.$$

Példa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.1 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -0.5 & 0.2 \\ 0 & 0.5 & \sqrt{3}/2 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & -1 & 0.2 \\ 0 & 1 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vektorok diadikus szorzata

Speciális mátrix-mátrix szorzatnak is tekinthető.
Legyen $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ vektor és $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ vektor, ekkor $\mathbf{p}$ vektor transzponáltja $\mathbf{p}^T \in \mathbb{R}^{1\times 3}$ sorvektor és az $(\mathbf{vp}^\mathbf{T})$ diadikus szorzat egy 3×3 méretű mátrix, amely i-dik sorának j-dik eleme a $\mathbf{v}$ vektor i-dik és a $\mathbf{p}$ vektor j-dik elemének szorzataként adódik, azaz

$$(\mathbf{vp}^T)_{ij} = v_i p_j .$$

Példa:

$$\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 5 & 6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4 & 5 & 6\\8 & 10 & 12\\12 & 15 & 18\end{bmatrix}$$

Egységmátrix

Olyan kvadratikus (négyzetes) mátrix, amelynek a főátlójában egyesek szerepelnek, a többi eleme zérus.

3x3-as egységmátrix: $\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Egységmátrixszal megszorozva egy vektor/mátrixot önmagát kapjuk vissza. Pl.: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1*2+0*3+0*4 \\ 0*2+1*3+0*4 \\ 0*2+0*3+1*4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

Mátrix inverze

Az $\mathbf{M}^{-1}$ kvadratikus mátrixot az $\mathbf{M}$ kvadratikus mátrix inverzének nevezzük, ha szorzatuk az egységmátrixot adja vissza:

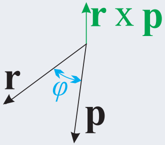
$\mathbf{M}\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{I}$

Példa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -0.5 \\ 0 & 0.5 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 0.5 \\ 0 & -0.5 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vektoriális szorzat

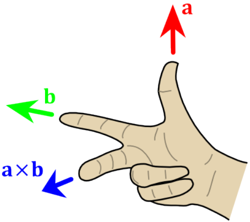
Legyenek $\mathbf{r}, \mathbf{p}$ 3D vektorok. Ezek vektoriális szorzata alatt a következő kifejezést értjük



$$\mathbf{r} \times \mathbf{p} = \begin{bmatrix} r_y p_z - r_z p_y \\ r_z p_x - r_x p_z \\ r_x p_y - r_y p_x \end{bmatrix}.$$

Nagyságára: $|\mathbf{r} \times \mathbf{p}| = |\mathbf{r}||\mathbf{p}| \sin \phi_{\mathbf{r},\mathbf{p}}$.
Irányára: $(\mathbf{r} \times \mathbf{p})$ merőleges $\mathbf{r}, \mathbf{p}$ vektorokra, és $\mathbf{r}, \mathbf{p}, (\mathbf{r} \times \mathbf{p})$ jobbsodrású rendszert alkot.

Vektoriális szorzat eredményének iránya a jobb kéz szabály alapján:



Ortogonális mátrixok

Olyan mátrixok, amelyek transzponáltja azonos az inverzével $\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M}^T$.

Pl. $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

$\mathbf{M}$ akkor és csak akkor ortogonális, ha $\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M}^T$, azaz $\mathbf{M}\mathbf{M}^T = \mathbf{I}$.

Ellenőrzése:

$$\mathbf{M}\mathbf{M}^T = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1/2 + 1/2 & -1/2 + 1/2 \\ -1/2 + 1/2 & 1/2 + 1/2 \end{bmatrix} = \mathbf{I}$$

Determináns

Az oszlopvektorok által kifeszített test (paralelepipedon) előjeles térfogata.

3×3 mátrixok determinánsa pozitív, ha az oszlopvektorok jobbsodrású rendszer alkotnak.

Értéke zérus, ha bármely oszlopvektora megadható a többi lineáris kombinációiként,

- azaz nem lineárisan függetlenek az oszlopvektorok,
- azaz a mátrix nem teljes rangú,
- azaz nem invertálható.

Köszönöm a figyelmet!

Óbudai Egyetem
Pro Sciencia et Futuro

Bejczy Antal iRobottechnikai Központ