Ipari Robotok Kinematikája és Dinamikája

III/B 2D transzformációk

Összeállította: Dr. Kuti József

Szerkesztette: Dr. Galambos Péter

Óbudai Egyetem

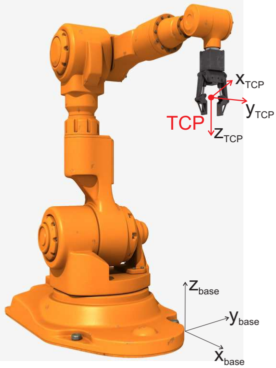
Pro Sciencia et Futuro

2018. szeptember 21.

Budapest

Bejczy Antal iRobottechnikai Központ

Robot geometria: a csuklóváltozóktól függően meghatározza a TCP-t és a TCP koordinátarendszert.

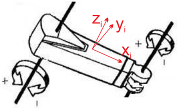


Ez rendszerint nagyon összetett:
ki sem írják teljes formában

Minden szegmenshez egy-egy koordinátarendszer, amik elmozdulhatnak / elfordulhatnak egy tengely irányába/körül.

Hogyan

- írhatóak le
  a koordinátarendszerek egymáshoz képes?
- transzformálhatóak a 2 koordinátarendszer között a pontok/irányok?



Nem csak robotikában nélkülözhetetlen:

- 3D mechanikai problémák
- különösen: repüléstechnika
- mechanikai szimuláció, ütközésvizsgálat (3D játék software)
- 3D grafika

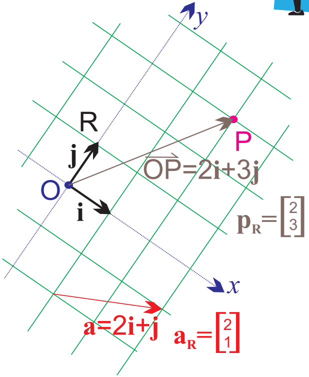
2D Transzformációk

Jelölése: pl. R

Origója: pl. O

Tengelyei: x, y (merőlegesek)

Bázisvektorai: pl. **i**, **j**
(merőlegesek, egység hosszúságúak)



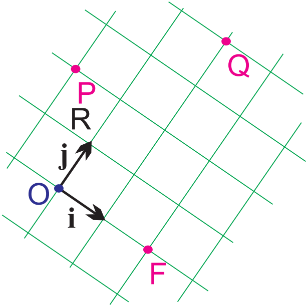
Egy
P **pont** $R(i, j)$ **koordinátarendszerbeli**
koordinátáinak jelölése: $\mathbf{p}_R$, pl. $\mathbf{p}_R = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$

Értelmezése: az O-ból
P-be mutató $\overrightarrow{OP}$ vektor: $\overrightarrow{OP} = \alpha \mathbf{i} + \beta \mathbf{j}$

Vektor (pl. irány) megadása: $\mathbf{a} = \alpha \mathbf{i} + \beta \mathbf{j}$

Koordinátái R**-ben:** $\mathbf{a}_R = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$

1. Adja meg az ábrázolt pontok koorinátáit a jelölt $R(\mathbf{i},\mathbf{j})$ koordinátarendszerben.



2. Jelenítse meg a következő pontokat:

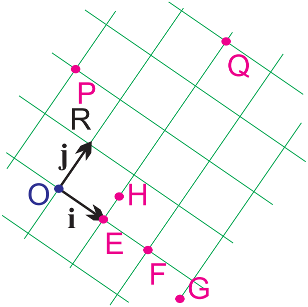
$$\mathbf{e}_R = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{g}_R = \begin{bmatrix} 3 \\ -0.5 \end{bmatrix}, \ \mathbf{h}_R = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

(Megoldások a következő dián)

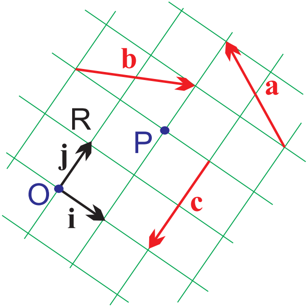
1. $\mathbf{p}_R = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{q}_R = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{f}_R = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

2. $\mathbf{e}_R = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{g}_R = \begin{bmatrix} 3 \\ -0.5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{h}_R = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}$:

Lásd az ábrát



1. Adja meg az ábrázolt vektorok koorinátáit a jelölt $R(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ koordinátarendszerben.



2. Jelenítse meg a következő vektorokat, a bejelölt P pontból:

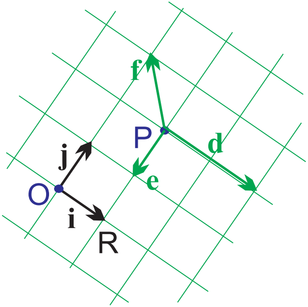
$$\mathbf{d}_R = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{e}_R = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{f}_R = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(Megoldások a következő dián)

1. $\mathbf{a}_R = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_R = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{c}_R = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$

2. $\mathbf{d}_R = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{e}_R = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{f}_R = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$:

Lásd az ábrát



ALAPFOGALMAK

Koordinátarendszer:

- **Jobbsodrású:** az y tengelyt az x tengely +90fokos elfordításával kapjuk meg (óramutató járásával ellentétes irány), egyébként balsodrású (a tárgy során csak jobbsodrású koordinátarendszereket használunk)
- **Pozíció/helyzet:** az origó helyzete
- **Orientáció:** a bázisvektorok iránya
- **Póz:** a pozíció és az orientáció együttese
  Két koordinátarendszer azonos, ha a pózuk azonos

Egy P **pont koordinátáinak jelölése** az R koordinátarendszerben $\mathbf{p}_R$, a Q koordinátarendszerben $\mathbf{p}_Q$

Egy "a" vektor koordinátáinak jelölése az R koordinátarendszerben $\mathbf{a}_R$, a Q koordinátarendszerben $\mathbf{a}_Q$

Ezek rendszerint más értékek

Transzformáció koordinátarendszerek között:

- a P pont $\mathbf{p}_Q$ koordinátái alapján $\mathbf{p}_R$ meghatározása (vagy fordítva)

  (Pl.: a robot TCP pontjának (a TCP koordinátarendszerének origója) helyzete a base koordinátarendszerben)

- az "**a**" vektor $\mathbf{a}_Q$ koordinátái alapján $\mathbf{a}_R$ meghatározása (vagy fordítva)

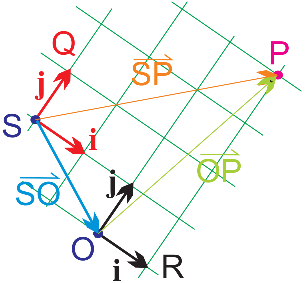
  (Pl.: a robot TCP koordinátarendszerének z irányának leírása a base koordinátarendszerben)

Transzformáció
Azonos orientációjú koordinátarendszerek között

Az ábrán látható $R(\mathbf{i},\mathbf{j})$ és $Q(\mathbf{i},\mathbf{j})$ koordinátarendszer, és egy P pont

Azonos orientáció: a két koordinátarendszer bázisvektorai megegyeznek: $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$

Az origók távolsága adott: $\overrightarrow{SO} = d_x\mathbf{i} + d_y\mathbf{j}$



Ezzel ha a P pont R-beli koordinátái:

$\mathbf{p}_R = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, akkor $\overrightarrow{OP} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$

Átszámítása Q-ba:

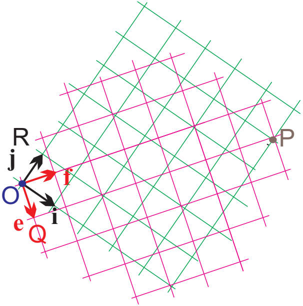
$$\overrightarrow{SP} = \overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OP} = d_x\mathbf{i} + d_y\mathbf{j} + a\mathbf{i} + b\mathbf{j} = (d_x + a)\mathbf{i} + (d_y + b)\mathbf{j}$$

Így $\mathbf{p}_Q = \begin{bmatrix} d_x + a \\ d_y + b \end{bmatrix} = \underbrace{\overrightarrow{SO}_Q}_{offset} + \mathbf{p}_R$

Gyakorlás: Adjuk meg az ábrán látható esetre $\overrightarrow{SO}_Q$ offszetet! Adjuk meg $\mathbf{p}_R$ koordinátákat és azokból számítsuk ki $\mathbf{p}_Q$-t, majd ellenőrizzük az ábra alapján!

Transzformáció
Azonos origójú koordinátarendszerek között

Az ábrán látható $R(\mathbf{i},\mathbf{j})$ és $Q(\mathbf{e},\mathbf{f})$ koordinátarendszer azonos O origóval, és egy P pont



Az orientációra: $\mathbf{e}_R = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ és $\mathbf{f}_R = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$,

azaz $\mathbf{e} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ és $\mathbf{f} = c\mathbf{i} + d\mathbf{j}$

Ezzel ha a P pont Q-beli koordinátái:

$\mathbf{p}_Q = \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}$, akkor $\overrightarrow{OP} = g\mathbf{e} + h\mathbf{f}$

Átszámítása R-be: $\overrightarrow{OP} = g\mathbf{e} + h\mathbf{f} =$

$= g(a\mathbf{i} + b\mathbf{j}) + h(c\mathbf{i} + d\mathbf{j}) = (ag + ch)\mathbf{i} + (bg + dh)\mathbf{j}$

$$\text{Így } \mathbf{p}_R = \begin{bmatrix} ag + ch \\ bg + dh \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{e}_R & \mathbf{f}_R \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}_{RQ}} \mathbf{p}_Q$$

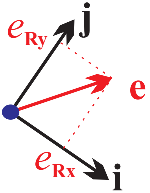
Gyakorlás: Az ábrán $\mathbf{f} = 0.6\mathbf{i} + 0.8\mathbf{j}$ és $\mathbf{e} = 0.8\mathbf{i} - 0.6\mathbf{i}$. Adjuk meg $\mathbf{p}_Q$ koordinátákat és azokból számítsuk ki $\mathbf{p}_R$-t, majd ellenőrizzük az ábra alapján!

Ebben az esetben a $R \leftarrow Q$ transzformáció az $\mathbf{R}_{RQ}$ mátrixszal szorzás: $\mathbf{p}_R = \underbrace{\begin{bmatrix}\mathbf{e}_R & \mathbf{f}_R\end{bmatrix}}_{\mathbf{R}_{RQ}} \mathbf{p}_Q$, ami a rotáció mátrix.

Azonos orientáció: a rotáció mátrix az egységmátrix $\mathbf{R}_{RQ} = \mathbf{I}$

Mivel

$$\mathbf{e}_R = \begin{bmatrix} e_{Rx} \\ e_{Ry} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}^T\mathbf{i} \\ \mathbf{e}^T\mathbf{j} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{R}_{RQ} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}^T\mathbf{i} & \mathbf{f}^T\mathbf{i} \\ \mathbf{e}^T\mathbf{j} & \mathbf{f}^T\mathbf{j} \end{bmatrix}$$



Ahonnan

$$\mathbf{R}_{RQ}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{i}^T\mathbf{e} & \mathbf{j}^T\mathbf{e} \\ \mathbf{i}^T\mathbf{f} & \mathbf{j}^T\mathbf{f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_Q & \mathbf{j}_Q \end{bmatrix} = \mathbf{R}_{QR},$$

ami a visszaforgatás, azaz a transzformáció inverze:

$$\mathbf{R}_{QR} = \mathbf{R}_{RQ}^{-1} = \mathbf{R}_{RQ}^T.$$

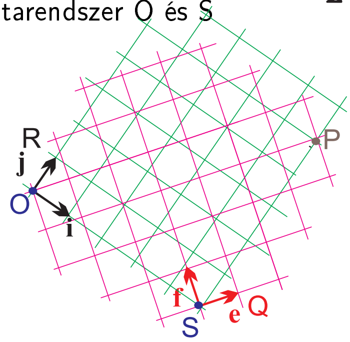
Tehát a forgatási mátrix ortogonális, az inverzének az előállításához elegendő transzponálni. Ekkor $\mathbf{p}_Q = \mathbf{R}_{QR}\mathbf{p}_R = \mathbf{R}_{RQ}^T\mathbf{p}_R$

Az ábrán látható $R(\mathbf{i},\mathbf{j})$ és $Q(\mathbf{e},\mathbf{f})$ koordinátarendszer O és S origóval, és egy P pont

Az origóra: $\overrightarrow{OS} = m\mathbf{i} + n\mathbf{j}$

Az orientációra: $\mathbf{e}_R = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ és $\mathbf{f}_R = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$,

azaz $\mathbf{e} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ és $\mathbf{f} = c\mathbf{i} + d\mathbf{j}$



Ezzel ha a P pont Q-beli koordinátái:

$\mathbf{p}_Q = \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}$, akkor $\overrightarrow{SP} = g\mathbf{e} + h\mathbf{f}$

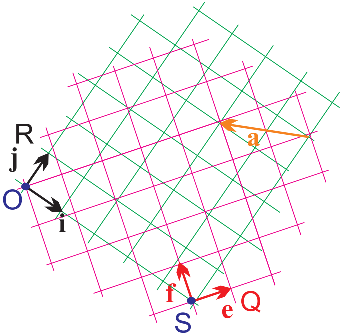
Átszámítása R-be: $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OS} + g\mathbf{e} + h\mathbf{f} =$

$$= m\mathbf{i} + n\mathbf{j} + g(a\mathbf{i} + b\mathbf{j}) + h(c\mathbf{i} + d\mathbf{j}) = (m + ag + ch)\mathbf{i} + (n + bg + dh)\mathbf{j}$$

Így: $\mathbf{p}_R = \begin{bmatrix} ag + ch + m \\ bg + dh + n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \mathbf{R}_{RQ}\mathbf{p}_Q + \overrightarrow{OS}_R$

Gyakorlás: Az ábrán $\mathbf{f} = -0.8\mathbf{i} + 0.6\mathbf{j}$ és $\mathbf{e} = 0.6\mathbf{i} + 0.8\mathbf{i}$. Adjuk meg $\mathbf{p}_Q$ koordinátákat, $\overrightarrow{OS}_R$ offszetet és azokból számítsuk ki $\mathbf{p}_R$-t, majd ellenőrizzük az ábra alapján!

Az ábrán látható $R(\mathbf{i},\mathbf{j})$ és $Q(\mathbf{e},\mathbf{f})$ koordinátarendszer O és S origóval, és egy **a** vektor



Az orientációra: $\mathbf{e}_R = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ és $\mathbf{f}_R = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$,

azaz $\mathbf{e} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ és $\mathbf{f} = c\mathbf{i} + d\mathbf{j}$

Ezzel ha az **a** vektor Q-beli koordinátái:

$\mathbf{p}_Q = \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}$, akkor $\mathbf{a} = g\mathbf{e} + h\mathbf{f}$

Átszámítása R-be: $\mathbf{a} = g\mathbf{e} + h\mathbf{f} =$

$$= g(a\mathbf{i} + b\mathbf{j}) + h(c\mathbf{i} + d\mathbf{j}) = (ag + ch)\mathbf{i} + (bg + dh)\mathbf{j}$$

Így: $\mathbf{a}_R = \begin{bmatrix} ag + ch \\ bg + dh \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix} = \mathbf{R}_{RQ}\mathbf{a}_Q$

Gyakorlás: Az ábrán $\mathbf{f} = -0.8\mathbf{i} + 0.6\mathbf{j}$ és $\mathbf{e} = 0.6\mathbf{i} + 0.8\mathbf{i}$. Adjuk meg $\mathbf{a}_Q$ koordinátákat és azokból számítsuk ki $\mathbf{a}_R$-t, majd ellenőrizzük az ábra alapján!

Homogén koordináták

Pontok homogén koordinátái:

ha $\mathbf{p}_R = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ a homogén koordinátázása: $\mathbf{p}_{RH} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ 1 \end{bmatrix}$

Ezzel $\mathbf{p}_Q = \mathbf{R}_{QR}\mathbf{p}_R + \overrightarrow{SO}_Q = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{QR} & \overrightarrow{SO}_Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_R \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{p}_{QH} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_Q \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{QR} & \overrightarrow{SO}_Q \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_R \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{QR}\mathbf{p}_{RH}$$

Vektorok homogén koordinátái:

ha $\mathbf{a}_R = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ a homogén koordinátázása: $\mathbf{a}_{RH} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \end{bmatrix}$

Ezzel $\mathbf{a}_{QH} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_Q \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{QR} & \overrightarrow{SO}_Q \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_R \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{QR}\mathbf{a}_{RH}$

$\mathbf{T}_{QR}$: homogén transzformáció, 3x3 mátrix

Azonos koordinátarendszerek

A forgatási mátrix az egységmátrix: $\mathbf{R}_{RQ} = \mathbf{I}$.

Az eltolás zérus vektor: $\overrightarrow{OS} = 0$.

$$\mathbf{T}_{RQ} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{RQ} & \overrightarrow{OS} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}$$

Transzlációk megadása

A $\mathbf{t}$ irányba α nagyságú elmozdulás:

$$\mathbf{T} = \mathrm{Trans}(\mathbf{t}, \alpha) = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \alpha\mathbf{t} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

Rotációk megadása

$\mathbf{R}$ rotációval:

$$\mathbf{T} = \mathrm{Rot}(\mathbf{R}) = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

Műveletek transzlációkkal, rotációkkal

$$\mathrm{Trans}(\mathbf{t},\alpha)\mathrm{Trans}(\mathbf{r},\beta) = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \alpha\mathbf{t} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \beta\mathbf{r} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \alpha\mathbf{t} + \beta\mathbf{r} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Rot}(\mathbf{R}_1)\mathrm{Rot}(\mathbf{R}_2) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 & 0 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1\mathbf{R}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Trans}(\mathbf{t},\alpha)\mathrm{Rot}(\mathbf{R}) = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \alpha\mathbf{t} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \alpha\mathbf{t} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Rot}(\mathbf{R})\mathrm{Trans}(\mathbf{r},\beta) = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & 0 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \beta\mathbf{r} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{R}\beta\mathbf{r} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

Transzformáció inverze

Adott $\mathbf{T}_{RQ} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{RQ} & \overrightarrow{OS}_R \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$ és $\mathbf{p}_R$, hogyan határozható meg $\mathbf{p}_Q$ és így $\mathbf{T}_{QR}$ transzformáció?

Mivel $\mathbf{p}_R = \mathbf{R}_{RQ}\mathbf{p}_Q + \overrightarrow{OS}_R$: $\mathbf{p}_Q = \mathbf{R}_{RQ}^{-1}(\mathbf{p}_R - \overrightarrow{OS}_R)$

Mivel $\mathbf{R}$ ortogonális: $\mathbf{p}_Q = \underbrace{\mathbf{R}_{RQ}^T}_{\mathbf{R}_{QR}} \mathbf{p}_R \underbrace{-\mathbf{R}_{RQ}^T \overrightarrow{OS}_R}_{\overrightarrow{SO}_Q}$

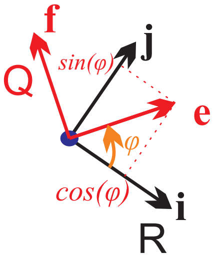
Innen a homogén transzformáció inverze:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{p}_Q \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{p}_{QH}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{RQ}^T & -\mathbf{R}_{RQ}^T \overrightarrow{OS}_R \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}_{RQ}^{-1} = \mathbf{T}_{QR}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{p}_R \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{p}_{RH}}$$

Gyakorlás: Állítsuk össze a legutóbbi példához a $\mathbf{T}_{RQ}$ transzformációt és ellenőrizzük az eredményt. Állítsuk össze az inverzét a fentiek alapján és ellenőrizzük az eredményt az ábra alapján!

Orientáció: szögelfordulás

A koordinátarendszer orientációja egyértelműen megadható egy szöggel. Tekintsük $R(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ és $Q(\mathbf{e}, \mathbf{f})$ koordinátarendszereket



Ekkor a rotációmátrix:

$$\mathbf{R}_{RQ} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_R & \mathbf{f}_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

Inverze: $(-\varphi)$ szöggel "visszaforgatás":

$$\mathbf{R}_{RQ}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(-\varphi) & -\sin(-\varphi) \\ \sin(-\varphi) & \cos(-\varphi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} = \mathbf{R}_{RQ}^T$$

(Láthatóan ortogonális.)

Köszönöm a figyelmet!

Óbudai Egyetem
Pro Sciencia et Futuro

Bejczy Antal iRobottechnikai Központ