Automatikus következtetés

1. Rezolúció

Feladat:

A_1: Ha süt a nap, akkor Péter strandra megy.

A_2: Ha Péter strandra megy, akkor úszik.

A_3: Péternek nincs lehetősége otthon úszni.

Lássuk be, hogy ezekből következik:

B: Ha süt a nap, akkor Péter nem marad otthon.

Formalizálás:

– süt a nap:	p	A_1:	$p \rightarrow q$
– Péter strandra megy:	q	A_2:	$q \rightarrow r$
– Péter úszik:	r	A_3:	$\neg(s \wedge r)$
– Péter otthon marad:	s	B:	$p \rightarrow \neg s$

Átalakítás

logikai következmény

- Kell: $p\rightarrow q,\quad q\rightarrow r, \neg(s\wedge r) \;\Rightarrow\; p\rightarrow\neg s$
  - Minden olyan interpretáció (igazságértékelés), amely kielégíti a feltételeket, az kielégíti a következményt is.
  - vagy: nincs olyan interpretáció (igazságértékelés), amely a feltételeket is, és következmény negáltját is kielégítené.
  - azaz: $(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow r)\wedge\neg(s\wedge r)\wedge\neg(p\rightarrow\neg s)$ kielégíthetetlen
    vagy: $(\neg p\vee q)\wedge(\neg q\vee r)\wedge(\neg s\vee\neg r)\wedge p \wedge s$ kielégíthetetlen

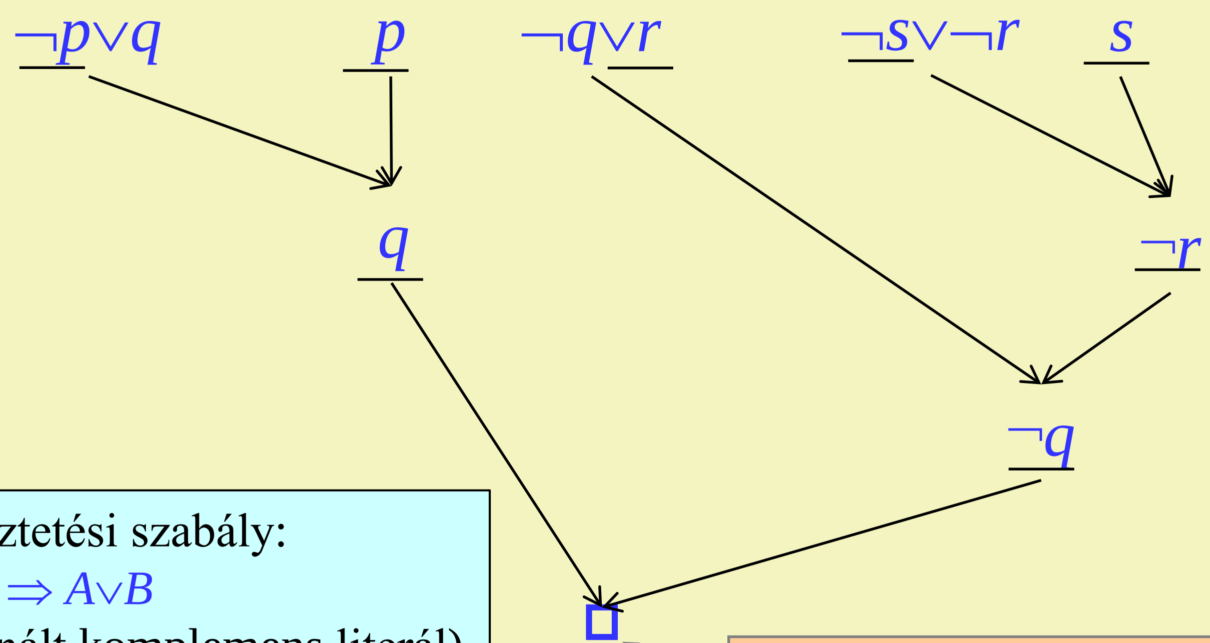
KNF: klózok között ‘és’ művelet
klóz: literálok között ‘vagy’ művelet
literál: ítéletváltozó vagy annak negáltja

- Tehát meg kell mutatnunk, hogy bármelyik interpretációval (igazságértékeléssel) legalább az egyik klóz *hamis* lesz.

Rezolúció = indirekt bizonyítás

- Tekintsük a klózok halmazát és tegyük fel indirekt módon, hogy van olyan interpretáció, amikor mindegyik klóz *igaz*.
- Ekkor például p is, és $\neg p \vee q$ is *igaz*. Ha azonban p *igaz*, akkor $\neg p$ *hamis*, és ekkor a $\neg p \vee q$ csak úgy lehet *igaz*, ha a q is *igaz*.
- A q – amely ugyancsak egy klóz – tehát akárcsak a többi klóz *igaz* az indirekt feltevés szerinti interpretációban. Vegyük hát hozzá az eddigi klózhalmazhoz.
- Az előbbihez hasonló módon bővítsük tovább a klózhalmazt addig, amíg ellentmondáshoz nem jutunk. (Például egyszerre megjelenik a klózhalmazban a q és $\neg q$.)

Rezolúciós eljárás

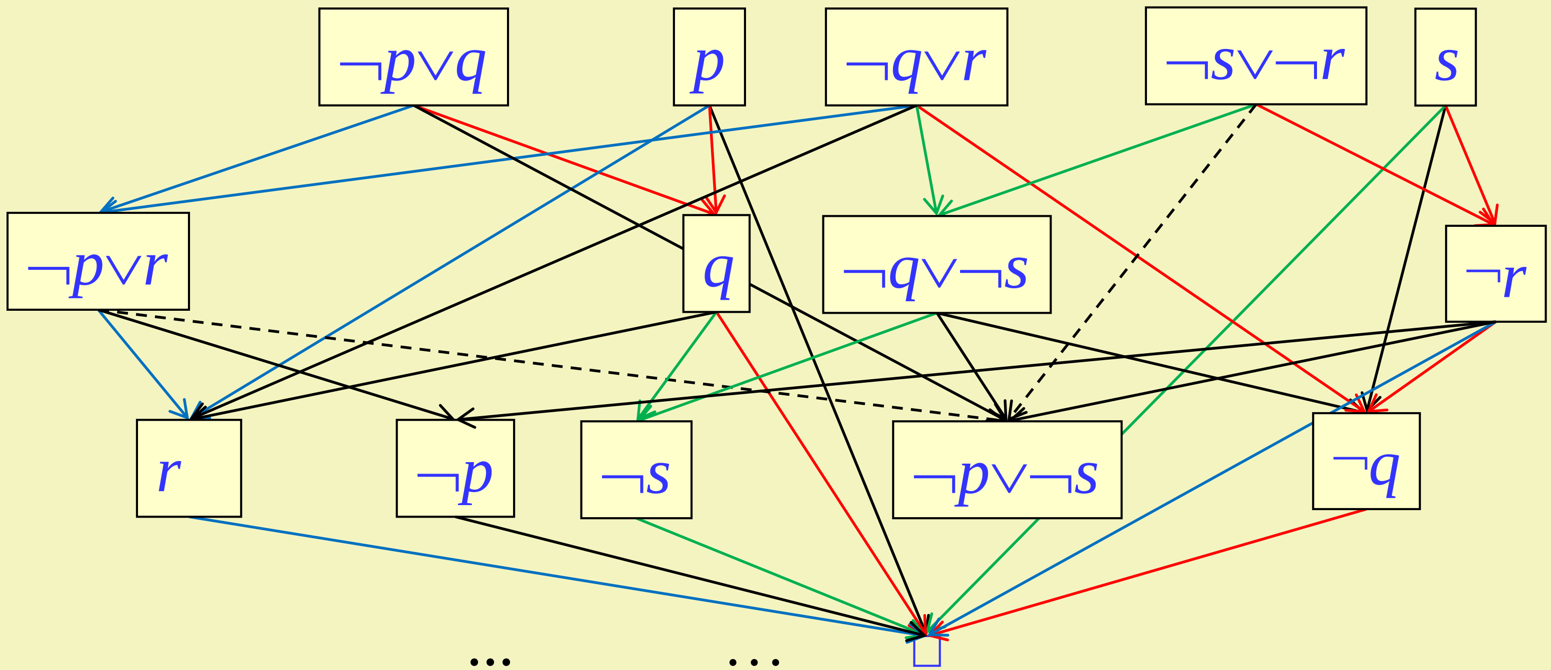


A következtetési szabály:
$l \vee A, \neg l \vee B \Rightarrow A \vee B$
(l az eliminált komplemens literál)

Ellentmondást jelző üres klóz: minden interpretációban hamis

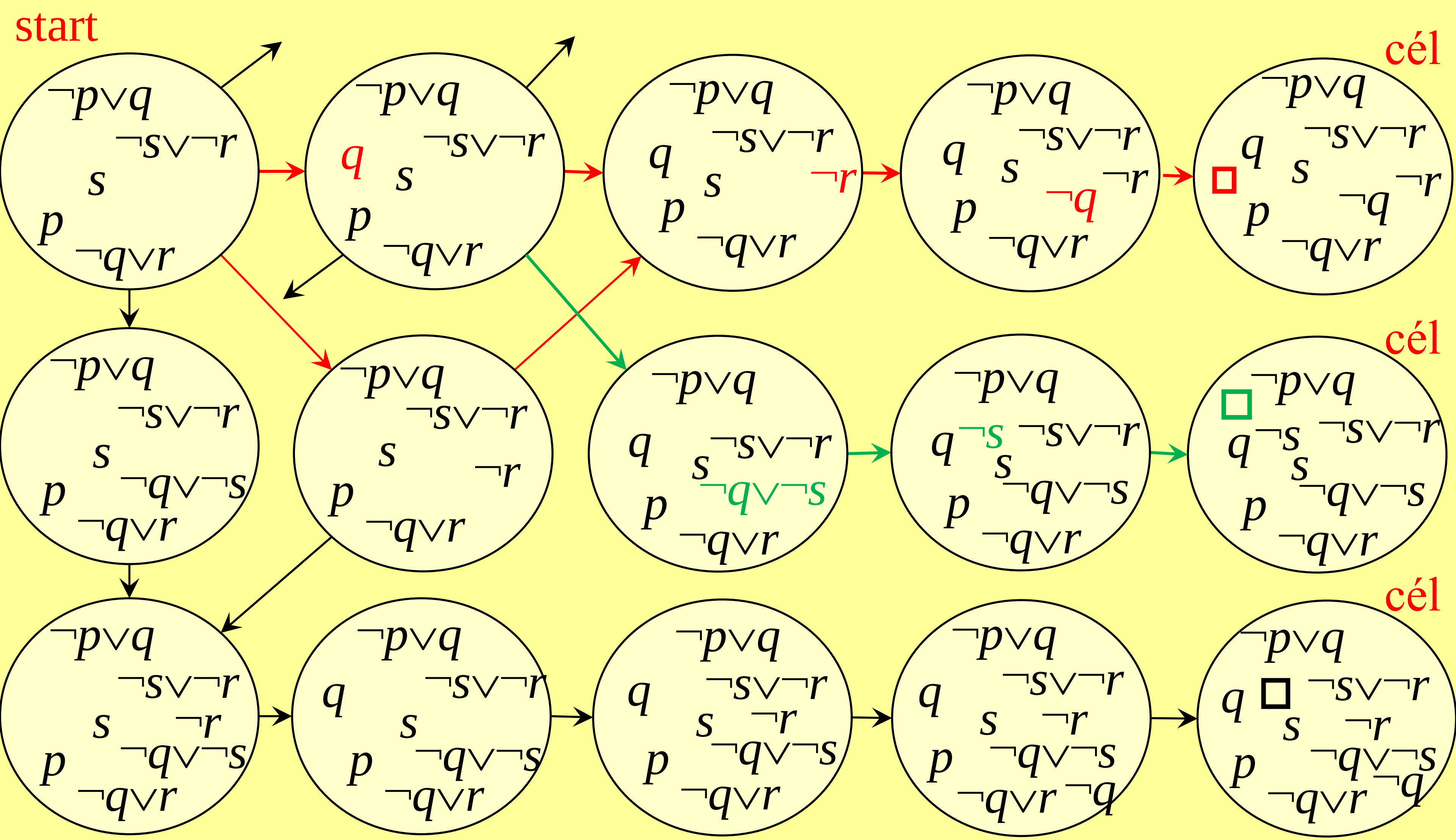
Tehát ha süt a nap, akkor Péter nem marad otthon.

Cáfolati-, rezolúciós gráf



- Cáfolati gráf: az üres klózt előállítását bemutató gráf
- Rezolúciós gráf: az összes klóz előállítását mutató gráf

Reprezentációs gráf



A reprezentációs gráf tulajdonságai

- Egy csúcs egyetlen klózzal tartalmaz többet a szülőcsúcsánál: olyannal, amelyik a szülő csúcs két klózából vezethető le.
  - Mindegyik csúcs tartalmazza a kiinduló klózokat.
  - Nincsenek körök.
  - Az a rezolúciós lépés, amely egy csúcsban elvégezhető, az annak azon gyerek csúcsában is elvégezhető, amelyhez egy másik rezolúciós lépés árán jutottunk el.
- Ha van cáfolat, akkor minden csúcsból el lehet jutni egy üres klózt is tartalmazó célcsúcsba.
  - Nincs rossz döntés, legfeljebb csak felesleges.
- Ítéletkalkulusban a gráfnak csak véges sok különböző csúcsa lehet, predikátumkalkulusban lehet végtelen sok is.

Példa:Kuruzslók-e a doktorok?

A_1: Van olyan páciens, aki minden doktorban megbízik.

A_2: A kuruzslókban egyetlen páciens sem bízik meg.

Lássuk be, hogy

B : Egyetlen doktor sem kuruzsló.

Formalizálás:

P(x): *x* egy páciens

D(y): *y* egy doktor

K(y): *y* egy kuruzsló

M(x,y): *x* megbízik az *y*-ban

$A_1 : \exists x\{P(x) \wedge \forall y[D(y) \rightarrow M(x,y)]\}$

$A_2 : \forall x\{P(x) \rightarrow \forall y[K(y) \rightarrow \neg M(x,y)]\}$

$B : \forall x[D(x) \rightarrow \neg K(x)]$

Kell: $\exists x\{P(x) \wedge \forall y[D(y) \rightarrow M(x,y)]\} \wedge \forall x\{P(x) \rightarrow \forall y[K(y) \rightarrow \neg M(x,y)]\}$
$\wedge \neg \forall x[D(x) \rightarrow \neg K(x)]$ kielégíthetetlen

Formulák klóz-formára (SKNF) hozása

1. Kiküszöböljük az ↔ és a → műveleti jeleket (logikai törvények).
2. Redukáljuk a negációk hatáskörét (DeMorgan azonosságok).
3. Standardizáljuk a változókat (kvantoronkénti átnevezés).
4. Egzisztenciális kvantorok kiküszöbölése. (Skolemizálás: $\forall x_1 \ldots \forall x_n \exists z F(\ldots, z, \ldots)$ helyett $\forall x_1 \ldots \forall x_n F(\ldots, f(x_1, \ldots, x_n), \ldots)$
   – nem ekvivalens átalakítás, de kielégíthetőség tartó)
5. Univerzális kvantorok kiemelése a formula elejére a sorrendjük megtartásával. (prenex normál forma)
6. A formula többi részét konjunktív normálformára alakítjuk (kommutatív, asszociatív, disztributív törvények).
7. Kialakítjuk a klózokat (a kvantorokat, és a konjunkciós műveleti jeleket elhagyjuk, a változókat klózonként egyedivé nevezzük át.)

Skolemizált konjuktív normálforma (SKNF)

$a \rightarrow b$ helyett $\neg a \vee b$

A_1: $\exists x\{P(x) \wedge \forall y[D(y) \rightarrow T(x,y)]\} = \exists x\{P(x) \wedge \forall y[\neg D(y) \vee T(x,y)]\} \approx$

$\approx P(\mathbf{a}) \wedge \forall y[\neg D(y) \vee T(\mathbf{a},y)] = \forall y\{P(a) \wedge [\neg D(y) \vee T(a,y)]\}$

$P(a)$, $\neg D(y) \vee T(a,y)$

Skolemizálás
a a Skolem konstans

A_2: $\forall x\{ P(x) \rightarrow \forall y[Q(y) \rightarrow \neg T(x,y)]\} =$

$a \rightarrow b$ helyett $\neg a \vee b$

$= \forall x\{\neg P(x) \vee \forall y[\neg Q(y) \vee \neg T(x,y)]\} =$

$= \forall x \forall u\{\neg P(x) \vee \neg Q(y) \vee \neg T(x,y)\}$

változó átnevezés

$\neg P(x) \vee \neg Q(u) \vee \neg T(x,u)$

$a \rightarrow b$ helyett $\neg a \vee b$

B: $\neg \forall x[D(x) \rightarrow \neg Q(x)] = \neg \forall x[\neg D(x) \vee \neg Q(x)] =$

De Morgan's törvény

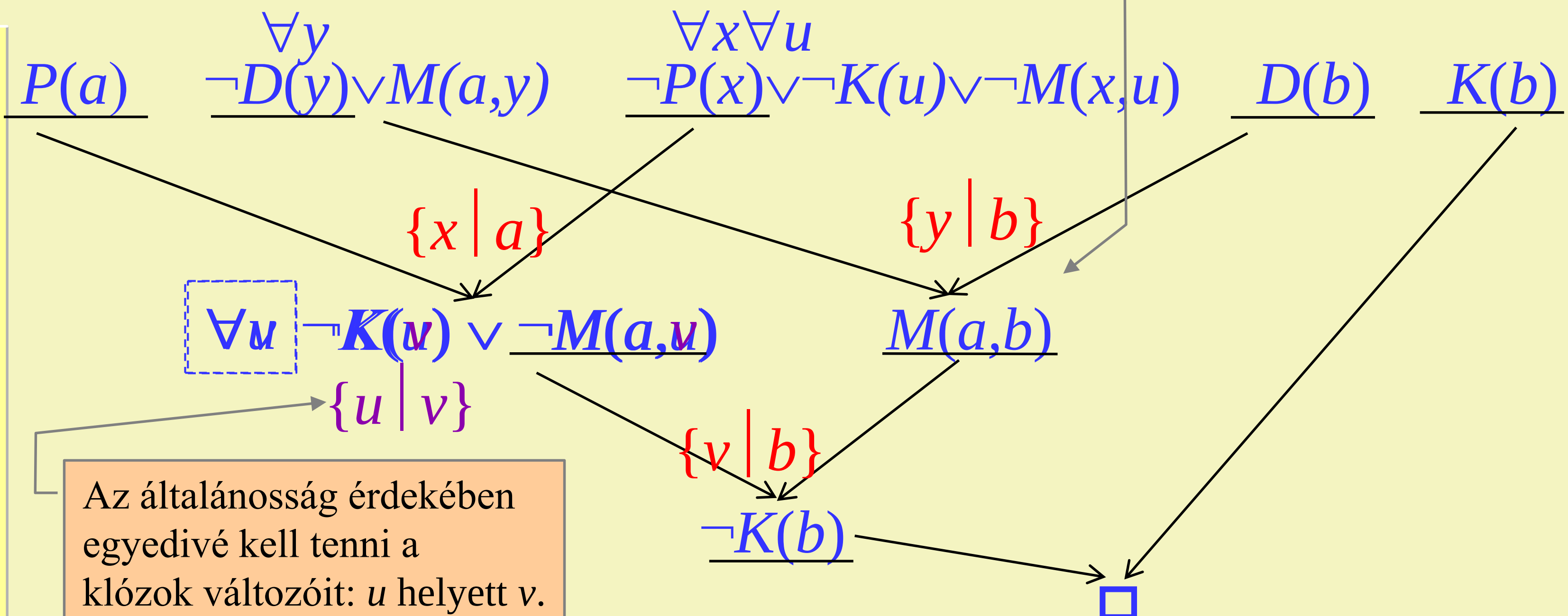
$= \exists x[D(x) \wedge Q(x)] \approx D(\mathbf{b}) \wedge Q(\mathbf{b})$

b a Skolem konstans

$D(b)$, $Q(b)$

Rezolúciós eljárás

Egy klózpár rezolválásához olyan változó helyettesítésére van szükség, amellyel az elhagyásra kiszemelt komplemens literálok azonos alakra hozhatók. (Az egyesítő algoritmussal egy ilyen helyettesítés található meg.) Ezt követően a klózpár ezen helyettesítéssel kapott példányait rezolváljuk.



Általános rezolúciós szabály:

$C_1 = P(t_{11},\dots,t_{1n}) \vee \dots \vee P(t_{r1},\dots,t_{rn}) \vee C_1'$; $C_2 = \neg P(u_{11},\dots,u_{1n}) \vee \dots \vee \neg P(u_{s1},\dots,u_{sn}) \vee C_2'$

C_1' vagy C_2' lehet üres, de tartalmazhatják $P(\dots)$ illetve $\neg P(\dots)$ további előfordulásait.

ha $P(t_{11},\dots,t_{1n}), \dots , P(t_{r1},\dots,t_{rn}), P(u_{11},\dots,u_{1n}), \dots , P(u_{s1},\dots,u_{sn})$ egyesíthetők a δ változó-helyettesétéssel, akkor C_1 és C_2 rezolvense: $R(C_1 , C_2) = C_1'\delta \vee C_2'\delta$

Rezolúció = lokális keresés

- globális munkaterület: aktuális klózhalmaz
- kiindulási érték: az „axiómák $\Rightarrow$ célállítás” klózai
- terminálási feltétel:
  - sikeres: üres klóz
  - sikertelen: nincs újabb rezolvens klóz
- kereső szabály: rezolvens képzés
- vezérlési stratégia: nem-módosítható
- heurisztika: jó lenne a hatékonyság miatt, de sajnos nincs

ADAT := *kezdeti érték*
while $\neg$*terminálási feltétel*(ADAT) **loop**
SELECT SZ FROM *alkalmazható szabályok*
ADAT := SZ(ADAT)
endloop

Rezolúció algoritmusa

$A_1, A_2, \ldots, A_n \Rightarrow B$ helyett azt vizsgáljuk, kielégíthetetlen-e az $A_1, A_2, \ldots, A_n, \neg B$ formulák klóz formája

1. *KLÓZOK* := $A_1, A_2, \ldots, A_n$ és $\neg B$ formulák klózai
2. **loop**
3. **if** $\square \in$ *KLÓZOK* **then return** *kielégíthetetlen*
4. **if** nincs olyan $C_1, C_2 \in$ *KLÓZOK*, amelyre $R(C_1, C_2)$ még nem ismert (nincs a *KLÓZOK* közt) **then return** *nem kielégíthetetlen*
5. **select** $C_1, C_2 \in$ *KLÓZOK*, ahol $R(C_1, C_2)$ nem ismert
6. *KLÓZOK* := *KLÓZOK* $\cup\ R(C_1, C_2)$
7. **endloop**

Rezolúció tulajdonságai

- Helyes (eljárás): ha terminál, akkor helyes eredményt ad. (Üres klóz megtalálásakor a kiinduló klóz halmaz kielégíthetetlen, ha nem tud újabb klózt előállítani, akkor a kiinduló klóz halmaz kielégíthető.) Ugyanakkor elsőrendű logikában nem biztosan terminál.
- Teljes (eljárás): egy kielégíthetetlen klóz halmazból véges lépésben levezethető az üres klóz.
- Elsőrendű logikában a kielégíthetetlenség csak parciálisan dönthető el, mert nem terminál garantáltan a módszer:
  $\{\neg P(x), \quad P(y) \lor \neg P(f(y)), \quad P(a)\ \}$

Válaszadás rezolúcióval

"Ha Fifi mindenhová követi Jánost, és
János most az iskolában van,
akkor hol van most Fifi?"

Formalizáció:

$H(y,x)$ ~ y dolog az x helyen van

$\forall x[H(János,x) \rightarrow H(Fifi,x)]$

$H(János, iskola)$

Először lássuk be, hogy létezik-e Fifi számára hely a világban?

$\exists x H(Fifi,x)$

Cáfolati gráf

$\neg H(Fifi, x_2)$ $\qquad$ $\neg H(János, x_1) \vee H(Fifi, x_1)$

$\{x_2 | x_1\}$

$\neg H(János, v)$ $\{x_1 | v\}$ $\qquad$ $H(János, iskola)$

$\{v | iskola\}$

$\square$

Válaszadási gráf

$H(Fifi, x_2) \vee \neg H(Fifi, x_2)$ $\qquad$ $\neg H(János, x_1) \vee H(Fifi, x_1)]$

$\{x_2 | x_1\}$

$H(Fifi, v) \vee \neg H(János, v)$ $\{x_1 | v\}$ $\qquad$ $H(János, iskola)$

$\{v | iskola\}$

$H(Fifi, iskola)$

Válaszadási eljárás

1. A kérdést (ki, mit, hol, mikor, mennyiért) egy „van-e válasz a kérdésre” célállítással helyettesítjük.
2. Rezolúcióval belátjuk, hogy a célállítás következik az axiómákból.
3. A célállítás negáltjából származó klózokat negáltjaik hozzáfűzésével érvényes formulákká egészítjük ki.
4. A cáfolati gráf által meghatározott rezolúciót követve létrehozzuk a hasonló szerkezetű válaszadási gráfot, amelynek gyökere tartalmazza az egyik választ.

Rezolúciós stratégiák

- A rezolúció nem-determinisztikus. Egy lépésben
  - egyszerre több rezolválható klóz pár lehet
  - egy klóz párban több komplemens literál pár lehet
  - ugyanannak a literálnak több előfordulása lehet

    $\{P(x,f(a))\vee P(x,f(y))\vee Q(y), \quad \neg P(z,f(a))\vee\neg Q(z), \quad P(u,f(a))\vee\neg Q(a)\}$

modellfüggő vezérlési stratégiák: csak klóz alapú reprezentáció esetén értelmezhetőek.

- Egy rezolúciós stratégia a rezolúció alapalgoritmusát kiegészítő olyan előírás, amely
  - sorrendet ad a rezolvens képzésekre (sorrendi stratégia)
  - korlátozza egy adott pillanatban előállítható rezolvensek körét (vágó strat.)

sérülhet a módszer teljessége

Rezolúció kritikája

- A rezolúció nem jó MI módszer:
  - A számos modellfüggő vezérlési stratégia ellenére sem hatékony, sok felesleges rezolúciós lépést végez.
  - Nem építhető heurisztika a vezérlési stratégiába, mert az állítások a klóz-formára hozás után már nem emlékeztetnek a feladatban betöltött szerepükre, ezért nehéz „súgni”, hogy mely klózokkal érdemes próbálkozni.

A formulák alakja segítheti a következtetést

Ha például be kell látnunk azt, hogy

$$A,\ C\to\neg A,\ \ A\to B,\ \ \neg B\to D\ \Rightarrow\ B$$

akkor könnyű kitalálni, hogy mely feltételekre van szükség a bizonyításnál: $A,\ A\to B\ \Rightarrow\ B$

De a rezolúció nem képes felhasználni ezt a segítséget, hiszen eliminálja az implikációt a formulákból:

$$A,\ \neg C\vee\neg A,\ \ \neg A\vee B,\ \ B\vee D,\ \ \neg B$$

Olyan következtetési eljárás kell, ahol az állítások megőrzik eredeti alakjukat, különösen az implikációt.

2. Szabályalapú logikai következtetés

- Egy $A_1, \ldots, A_n \Rightarrow C$ probléma esetén az axiómákat két csoportba soroljuk: szabályokra és tényekre.

axiómák → tények: konkrét ismeret implikáció nélküli formulákban

axiómák → szabályok: általános ismeret implikációs formulákban $A \rightarrow B$

Az előre- illetve a hátrafelé láncolás

- ***Előrefelé láncolás***: egy alkalmas (illeszthető) szabály segítségével egy állításból új állítást vezet le.

tény: $Kutya(Fifi) \wedge Postás(Jani)$
szabály: $\forall x \forall y\ Kutya(x) \wedge Postás(y) \rightarrow Harap(x,y)$

$\Rightarrow$ $Harap(Fifi, Jani)$

Nehezebb lenne, ha itt nem alaki, hanem logikai ekvivalenciát kellene igazolni. Pl. a tény: $\neg(\neg Kutya(Fifi) \vee \neg Postás(Jani))$

Illeszthetőség vizsgálat: a tény ekvivalens a szabály előfeltételével az $\{x \mid Fifi, y \mid Jani\}$ helyettesítés mellett (amit az egyesítő algoritmus számol ki).

- ***Hátrafelé láncolás***: egy állítás bizonyítását visszavezeti egy alkalmas (illeszthető) szabály előfeltételének igazolására.

cél: $Kutya(Fifi)$
szabály: $\forall x\ Ugat(x) \rightarrow Kutya(x)$

$\rightsquigarrow$ elég belátni: $Ugat(Fifi)$

Szerencsénk van, hogy az illesztésnél literált literállal kellett összevetni. Ekkor alaki azonosság = logikai ekvivalencia

Illeszthetőség vizsgálat: a cél ekvivalens a szabály következményével az $\{x \mid Fifi\}$ helyettesítés mellett (amit az egyesítő algoritmus számol ki).

Szabályalapú következtetés irányai

- Egy tényekkel, szabályokkal és célállítással megadott probléma bizonyítható
  - ***előre haladva***: a tényekből indulva előrefelé láncolással új állításokat vezetünk le, majd azokból még újabbakat, amíg a célállítást meg nem kapjuk
  - ***visszafelé haladva***: a célt hátrafelé láncolással részcélokra cseréljük le, a részcélokat további részcélokkal váltjuk fel, amíg tények által igazolható részcélokhoz nem jutunk.

Ezek a módszerek nem teljesek:
Például a $P \to Q,\ \neg P \to Q$ szabályokból a fenti módszerek egyike sem vezeti le a Q célállítás, pedig $P \to Q,\ \neg P \to Q \Rightarrow Q$

Előre haladó szabályalapú reprezentáció

célja, hogy a hátrafelé láncolásnál literált literállal kelljen összevetni

ÉS/VAGY formájú (ÉVF) kifejezések:
– literálok
– $A \wedge B$, $A \vee B$ alakú formulák, ahol
az A és B is ÉVF kifejezés.

- **Tény**:
  - universálisan kötött tetszőleges ÉVF kifejezés
- **Szabályok**:
  - $L \rightarrow W$ alakú univerzálisan kötött kifejezések, ahol L egy literál, a W pedig ÉVF kifejezés
- **Cél**:
  - $L_1 \vee \ldots \vee L_n$ alakú egzisztenciálisan kötött kifejezés, ahol $L_1, \ldots, L_n$ literálok.

Példa előre haladó szabályalapú következtetésre

Tény:

$(A \lor \neg B) \land C$

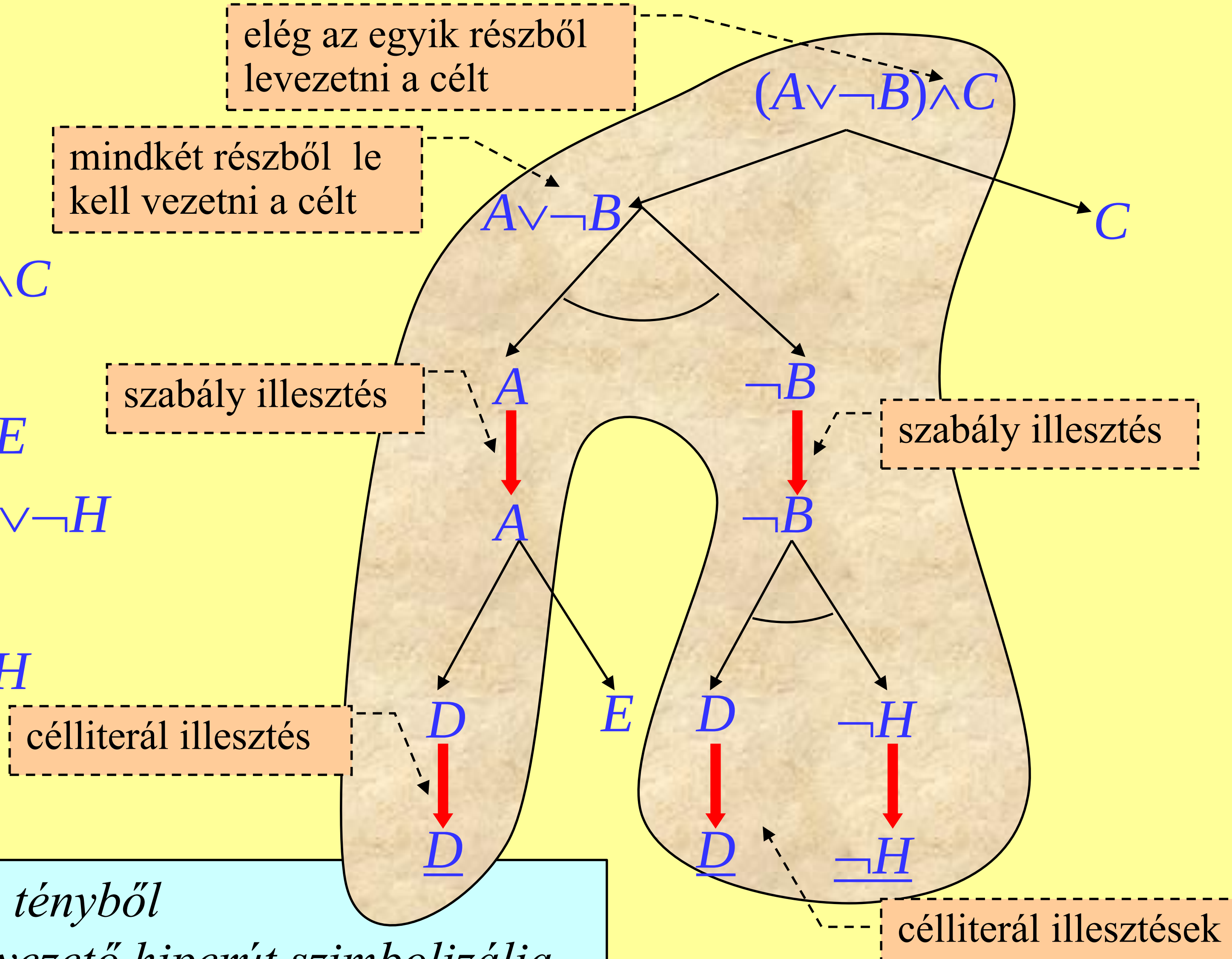
Szabályok:

$A \rightarrow D \land E$

$\neg B \rightarrow D \lor \neg H$

Cél:

$D \lor G \lor \neg H$



A bizonyítást a tényből célliterálokba vezető hiperút szimbolizálja

Visszafelé haladó szabályalapú reprezentáció

célja, hogy a hátrafelé láncolásnál literált literállal kelljen összevetni

- **Tény**:
  - $L_1\wedge \dots \wedge L_n$ alakú univerzálisan kötött kifejezés, ahol $L_1, \dots, L_n$ literálok.
- **Szabályok**:
  - $W \rightarrow L$ alakú univerzálisan kötött kifejezések, ahol L egy literál, a W pedig ÉVF kifejezés
- **Cél**:
  - egzisztenciálisan kötött tetszőleges ÉVF kifejezés

ÉS/VAGY formájú (ÉVF) kifejezések:
– literálok
– $A\wedge B$, $A\vee B$ alakú formulák, ahol az A és B is ÉVF kifejezés.

Példa visszafelé haladó szabályalapú következtetésre

Tény:

$A \wedge C \wedge \neg D$

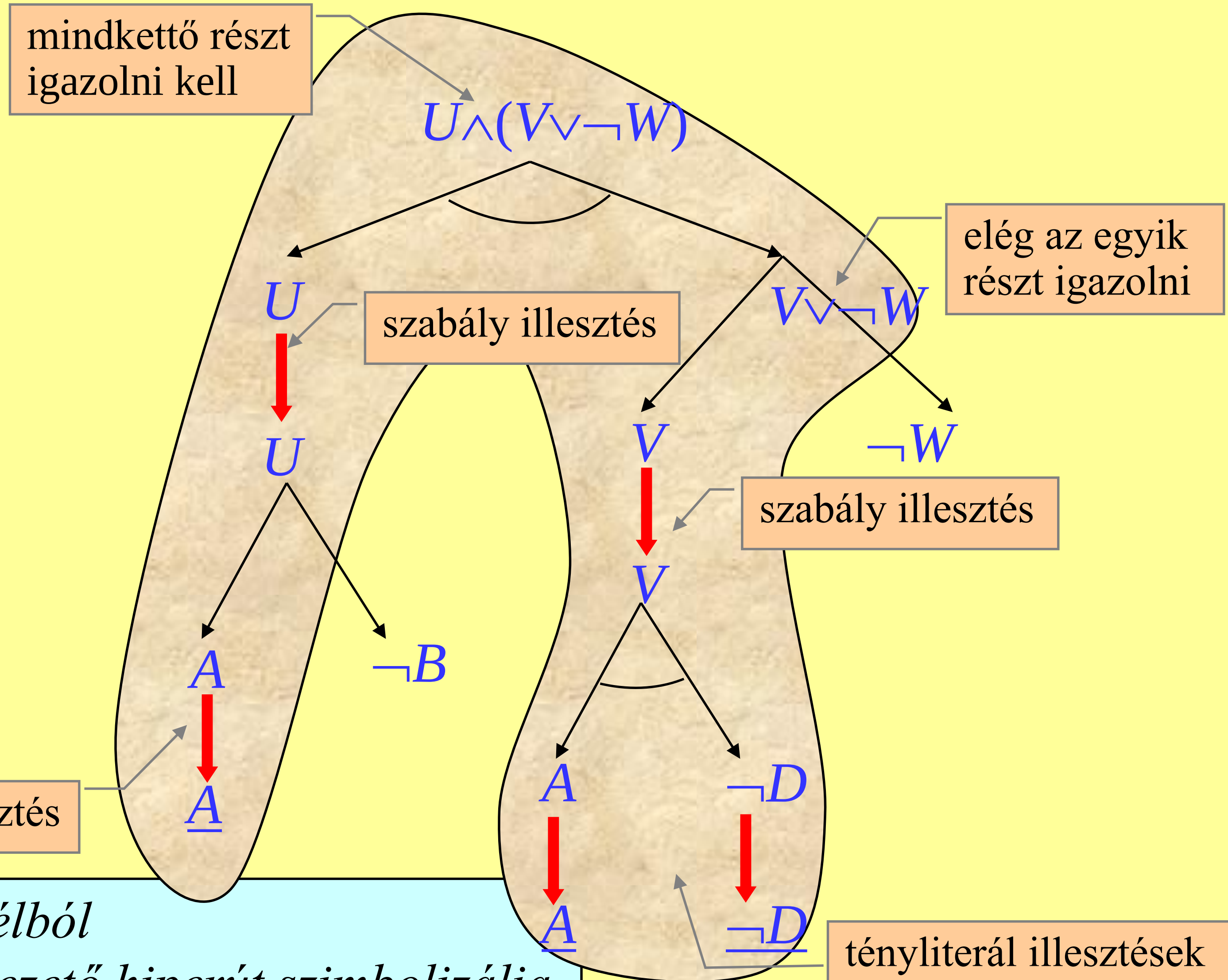
Szabályok:

$A \vee \neg B \rightarrow U$

$A \wedge \neg D \rightarrow V$

Cél:

$U \wedge (V \vee \neg W)$



A bizonyítást a célból tényliterálokba vezető hiperút szimbolizálja

Példa

Fifi és Gyilkos kutyák, Fifi csóválja a farkát, Cili nyávog. A nyávogó állatok a macskák. Az a kutya, amelyik csóválja a farkát, barátságos. A macskák nem félnek a barátságos kutyáktól. Nevezzünk meg olyan kutya-macska párt, ahol a macska nem fél a kutyától!

Formalizálás:

$K(x)$ ~ *x kutya*

$M(x)$ ~ *x macska*

$Cs(x)$ ~ *x csóvál,*

$Ny(x)$ ~ *x nyávog*

$B(x)$ ~ *x barátságos*

$F(x,y)$ ~ *x fél y-tól*

Tény: $K(Fifi) \wedge K(Gyilkos) \wedge Cs(Fifi) \wedge Ny(Cili)$

Szabályok:

$\forall x\,(Ny(x) \rightarrow M(x))$

$\forall x\,(K(x) \wedge Cs(x) \rightarrow B(x))$

$\forall x \forall y\,(K(x) \wedge B(x) \wedge M(y) \rightarrow \neg F(y,x))$

Cél: $\exists x\, \exists y\, (M(x) \wedge \neg F(x,y) \wedge K(y))$

válaszadáshoz:
van-e keresett kutya-macska pár

Bizonyítás

Tény: $K(Fifi), K(Gyilkos), Cs(Fifi), Ny(Cili)$

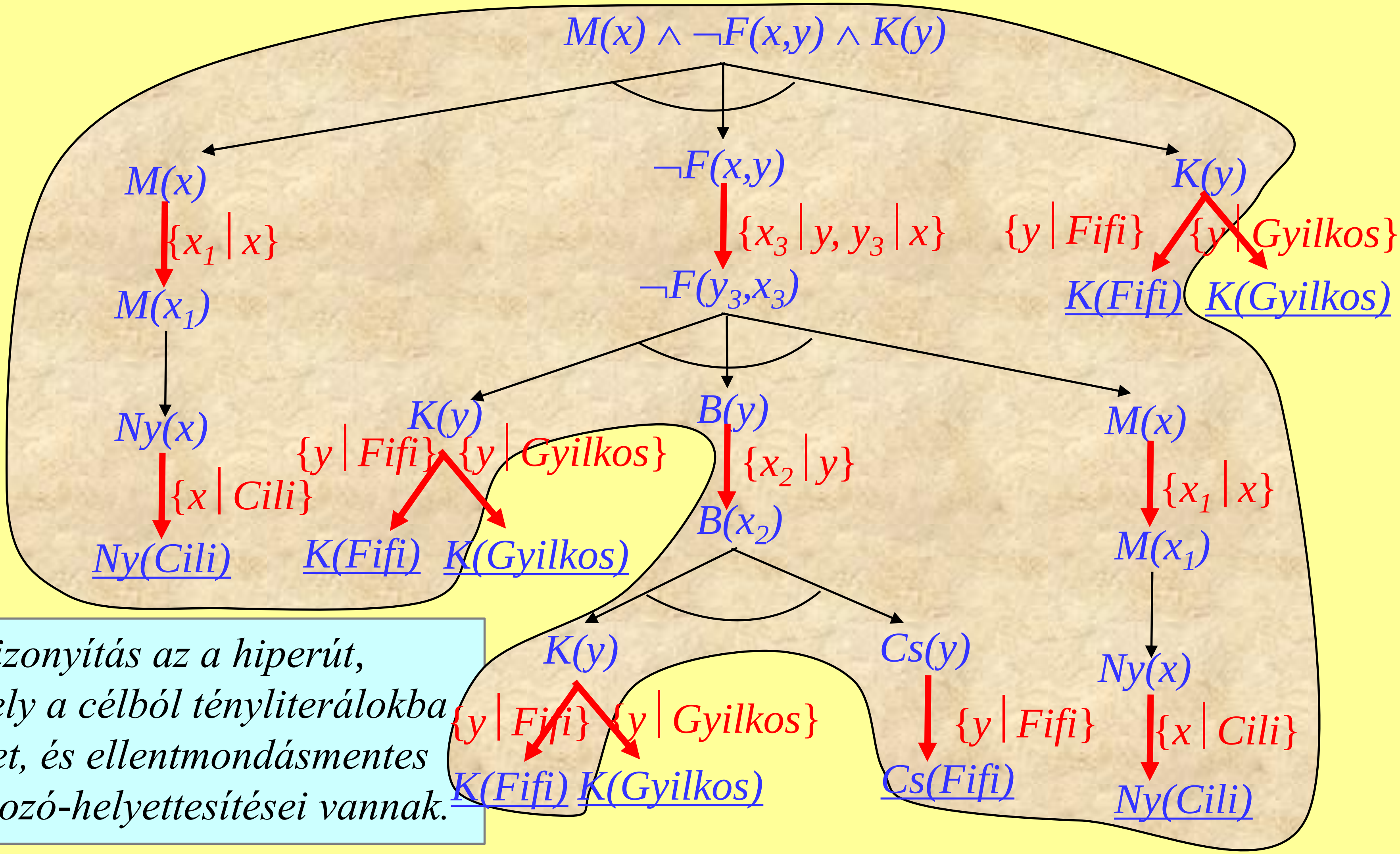
Szabályok: $Ny(x_1) \rightarrow M(x_1)$

$K(x_2) \wedge Cs(x_2) \rightarrow B(x_2)$

$K(x_3) \wedge B(x_3) \wedge M(y_3) \rightarrow \neg F(y_3,x_3)$

Cél:

A hiperút változó-helyettesítéseiből olvasható ki a válasz: $\{x \mid Cili,\ y \mid Fifi\}$



A bizonyítás az a hiperút, amely a célból tényliterálokba vezet, és ellentmondásmentes változó-helyettesítései vannak.

Szabályalapú következtetés = visszalépéses keresés

- Célja egy bizonyítás keresése, amit egy ÉS/VAGY gráfbeli ellentmondásmentes megoldás gráf reprezentál.
- Kereső rendszer
  - Globális munkaterület: megkezdett bizonyítás (hiperút)
  - Kereső rendszer szabályai: láncolások illetve visszalépés
  - Vezérlési stratégia (elsődleges): visszalépéses stratégia
  - Modellfüggő stratégiák
    - Formulák alakjának kihasználása
    - A tény (cél) illesztése előzze meg a szabály-illesztést.
  - Heurisztikák: az adott feladat speciális ismeretei
    - Metaszabályok, kiértékelő függvény