UTAZÓ ÜGYNÖK PROBLÉMA EVOLÚCIÓS ALGORITMUSSAL

Sándor Burian - AWXYHE
Mesterséges Intelligencia EA

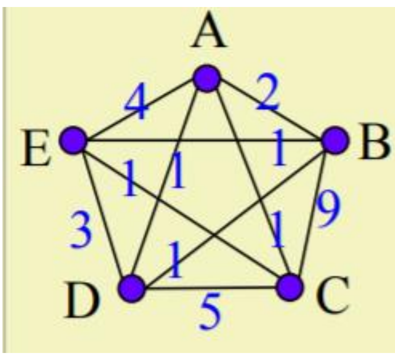
Feladat:

Adott n város a közöttük vezető utak költségeivel. Melyik a legolcsóbb olyan útvonal, amely egy adott városból indulva mindegyik várost pontosan egyszer érintve visszatér a kiinduló városba?

Problématér

A probléma egyedei legyenek a gráf különböző bejárásank módszerei, úgy hogy az elvárt, hogy, a kezdő és végső csúcs ugyanaz (kör) és közben minden csúcs egyszer szerepel. A gráfot egy szomszédossségi matrix segítségével reprezentálhatjuk[1], hiszen egy *n* várost tartalmazó gráf estetén könnyen sűrű gráfhoz juthatunk, így ez a reprezentáció nem hoz rosszabb eredményt mint a szomszédossági listás reprezentáció. Ekkor értelmeszerűen adott, hogy egy-egy bejárást is ennek segítségével reprezentáljunk, úgy, hogy a bejárás során nem használt éleket 0-val jelöljük, a szomszédossági mátrixban, mint ahogy a nem kapcsolódó csúcsokat is.

Például, ha vesszük a következő 5 csúcsú gráfot[2]:



[1] http://aszt.inf.elte.hu/~asvanyi/ad/ad2jegyzet.pdf#page=35 2020 Április 24-25
[2] https://people.inf.elte.hu/gt/mi/01.bevezetes.pdf#page=6 2020 Április 24-25

Ekkor a gráf reprezentációja (*a matrix első oszlopa és első sora a csúcsokat jelzi, nem eleme a mátrixnak*) egy 5X5-ös mátrix:

$$\begin{array}{cccccc} & A & B & C & D & E \\ A & 0 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ B & 2 & 0 & 9 & 1 & 1 \\ C & 1 & 9 & 0 & 5 & 1 \\ D & 1 & 1 & 5 & 0 & 3 \\ E & 4 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{array}$$

Ekkor ha a fenti gráf **ACBDEA** bejárását szeretnénk megadni a következő képpen tehetjük (*a matrix első oszlopa és első sora a csúcsokat jelzi, nem eleme a mátrixnak*):

$$\begin{array}{cccccc} & A & B & C & D & E \\ A & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ B & 0 & 0 & 9 & 1 & 0 \\ C & 1 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ D & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ E & 4 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}$$

Reprezentáció

Mivel az egyedeinket négyzetes mátrixokkal határoztuk meg, így kézenfekvő, hogy a kódolásukat a mátrixok determinánsa adja meg a továbbiakban, így a fenti példát folytatva az **ACBDEA** bejárást a **216**-os érték jelképezi (*1) Felcseréljük az első és a 3. Sort; 2) Az első sor 4-szeresét kivonjuk az utolsó sorból; 3) Felcseréljük az 2. és 4. sort; 4) Elimináljuk a második oszlop elemeit a második sortól kezdve; 5) Hasonlóan a 3.oszlop elemeivel a 3. sortól kezdve; 6) Hasonlóan a 4.oszlop elemeivel a 4.sortól kezdve; majd az also háromszög matrix kinullázása miatt a főátlót összeszorozva a 216-os értéket kapjuk.*).

Rátermettségi függvény

Ebben a reprezentációban az egyedek rátermettségét mérni egyszerű. Minél alacsonyabb az egyedet jelképező szám értéke (minél kisebb a determináns értéke) annál “rátermettebb”, annál olcsóbb az út (kör) számunkra, azaz annál inkább megfelelő.

A fenti példát folytatva:

Gráf pontok nevei bejárási sorrendben	ACBDEA	ABCDEA
Reprezentációs matrix[3] (***problématér egyede***)	$\begin{array}{cccccc} & A & B & C & D & E \\ A & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ B & 0 & 0 & 9 & 1 & 0 \\ C & 1 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ D & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ E & 4 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{cccccc} & A & B & C & D & E \\ A & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ B & 2 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ C & 0 & 9 & 0 & 5 & 0 \\ D & 0 & 0 & 5 & 0 & 3 \\ E & 4 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}$
Determináns értéke (***reprezentációs érték***)	216	2160
Kör értéke kiszámolva, az élek értékének összeadásával	(AC) + (CB) + (BD) + (DE) + (EA) = 1 + 9 + 1 + 3 + 4 = 18	(AB) + (BC) + (CD) + (DE) + (EA) = 2 + 9 + 5 +3 + 4 = 23

Azaz, az alacsonyabb determináns érték, az alacsonyabb élösszeghez tartozik.

[3] *a matrix első oszlopa és első sora a csúcsokat jelzi, nem eleme a mátrixnak*

Evolúciós operátorok

Az egyedek kiválasztását, a szelekciót a csonkolásos módszerrel végezve kapjuk meg az új, rekombinálásra kijelölt egyedek halmazát. A csonkolást úgy végezzük, hogy a rátermettségi függvényt használva az egyedek átlagát figyelve az átlagérték vagy az alatti elemeket választjuk ki.

Példa folytatva az előzőeket:

Vegyük hozzá a korábban felvett ACBDEA és ABCDEA-hoz a ABDCEA és az ABDECA bejárást:

Gráf pontok nevei bejárási sorrendben	ABDCEA	ABDECA
Reprezentációs matrix[4] **(*problématér egyede*)**	$\begin{array}{cccccc} & A & B & C & D & E \\ A & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ B & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ C & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ D & 0 & 1 & 5 & 0 & 0 \\ E & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{cccccc} & A & B & C & D & E \\ A & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ B & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ C & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ D & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ E & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}$
Determináns értéke **(*reprezentációs érték*)**	80	12
Kör értéke kiszámolva, az élek értékének összeadásával	(AB) + (BD) + (DC) + (CE) + (EA) = 2 + 1 + 5 + 1 + 4 = 13	(AB) + (BD) + (DE) + (EC) + (CA) = 2 + 1 + 3 +1 + 4 = 11

[4] *a matrix első oszlopa és első sora a csúcsokat jelzi, nem eleme a mátrixnak*

Összesítve növekvő sorrendben *(fentről lefele)*:

BEJÁRÁS	**Kör értéke élösszegként**	**Determináns értéke**
ABDECA	11	12
ABDCEA	13	80
ACBDEA	18	216
ABCDEA	23	2160

Az átlag a fenti értékekkel: $\frac{0+80+216+2160}{4} = \frac{2456}{4} = 614$ Tehát az ABCDEA bejáráson kívűl mindegyiket használni tudjuk a rekombinációhoz.

A rekombinációhoz kereszztezést használhatunk, méghozzá, nem teljesen véletlenszerűen, hanem figyelembe véve az azonos éleket. Ha a két rekombinálandó mátrixban van azonos él, akkor azok cseréje értelmetlen. Tehát ha a mátrixok azonos pontjain az értékek ugynaazok akkor azok cseréjére nincs szükség. A maradék sorok között véleltenszerűen kicserélhetünk véletlen számú sort.

Például folytatva a korábbi példát[5]:

ABDCEA	$\begin{array}{cccccc} & A & B & C & D & E \\ A & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ B & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ C & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ D & 0 & 1 & 5 & 0 & 0 \\ E & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$
ABDECA	$\begin{array}{cccccc} & A & B & C & D & E \\ A & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ B & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ C & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ D & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ E & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}$

[5] *a matrixok első oszlopa és első sora a csúcsokat jelzi, nem eleme a mátrixnak*

A második sor egyezik mindkét mátrixban, de a többi nem, így cseréljük ki mondjuk a 3. és 4. sort[6]:

ÚJ ABDCEA	$\begin{array}{cccccc} & A & B & C & D & E \\ A & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ B & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ C & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ D & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ E & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$
ÚJ ABDECA	$\begin{array}{cccccc} & A & B & C & D & E \\ A & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ B & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ C & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ D & 0 & 1 & 5 & 0 & 3 \\ E & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}$

Mostmár csak egy dolgunk van, eldönteni, hogy az új útvonalak amiket legyártottunk működőképesek-e, azaz egy oszlopban vagy egy sorban nincs-e kettőnél több nem nulla elem, illetve minden oszlopban és sorban van-e legalább kettő nem nulla elem. Mivel sorokat cseréltünk, és nem oszlopokat a rekombinálás során ezért csak az oszlopokban lehet hiba, így elég csak azokat figyelnünk. A mutációt abban az oszlopban lehet kezdeni ahol kettőnél több nem nulla elem van, méghozzá egy olyan értékkel az oszlopból amelyhez tartozó sorban nincs két nem nulla elem, vagy több mint két nem nulla elem van, figyelembe véve az esetleges kettőnél kevesebb nem nulla elemet tartalmazó oszlopokat, hogy azokat töltsük fel értékkel. A mutáció értéke szükségszerűen az adott két csúcs közti út értéke. Ha több ilyen elem is lehetséges akkor véletlenszerűen válasszunk egyet. Ha olyan egységet módosítanánk ami önmagára mutat (hurokél, ha nincs hurokél a gráfban), vagy olyan élhez adna értéket ami nincs akkor továbbemnve az első lehetőséget mutáljuk, a fentiek szerint.

[6] *a matrixok első oszlopa és első sora a csúcsokat jelzi, nem eleme a mátrixnak*

Példa az előzőek alapján[7]:

ÚJ

ABDCEA

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & A & B & C & D & E \\
\hline
A & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 \\
B & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
C & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
D & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\
E & 4 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{array}
\xrightarrow{\substack{Az\ 1.\ \text{és}\ 5.oszlopban \\ 3\ nem\ nulla\ elem\ van \\ viszont\ a\ 3.\text{és}\ 4.oszlopban \\ csak\ egy\ nem\ 0\ elem\ van.}}
\begin{array}{c|ccccc}
 & A & B & C & D & E \\
\hline
A & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 \\
B & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
C & 1^{[8]} & 0 & 0 & 5^{[9]} & 0 \\
D & 0 & 0 & 5^{[10]} & 0 & 3 \\
E & 0 & 1^{[11]} & 1 & 0 & 0
\end{array}
$$

Ellenben a visszahelyezés során figyelembe kell vegyünk egy fontos információt: nem helyezhetünk vissza olyan új egyedet ami olyan utat jelöl ami többször megy át egy csúcson mint egy. A fenti példa ilyen. Csak olyan egyedet helyezhetünk be a populációba ami az eredeti feltételeknek megfelel, azaz: kört alkot, és szimetrikus a mátrixa!

Stratégiai paraméterek

Fontos leszögeznünk, hogy a populáció mérete elég nagy kell egyen arányaiban a gráf méretével, azaz legalább 1,5 szöröse a gráf csúcsszámának. A mutáció valószínűségét a fentiekben láttuk, nagyban függ a véletlenszerűen megadott értéktől arekombináció során. Az utódképzési ráta szintén ettől a számtól függ, hiszen, ha túl sok olyan egyedet állítunk elő amit ne mtudunk visszahelyezni a populációba akkor hamarabb leállhat az algoritmus mint szeretnénk. Avisszahelyezési rátát az órán tanult képlet adja meg[12]:

$$\text{utódképzési ráta (u)} = \frac{\text{utódok száma}}{\text{populáció száma}}$$

$$\text{visszahelyezési ráta (v)} = \frac{\text{lecserélendő egyedek száma}}{\text{populáció száma}}$$

---

[7] *a matrixok első oszlopa és első sora a csúcsokat jelzi, nem eleme a mátrixnak*

[8] Az 1. oszlop 3. és 5. elemét kinullázzuk és a 3. sor 3. és 4. elemét beírnánk a megfelelő értékkel, de a 3.so 3. eleme hurokélet adna ezértezt elvetjük

[9] Ennek a változtatása nem okoz gondot így elvégezzük

[10] Továbbmenve az első lehetőségnél pótoljuk az elmaradt mutálódást

[11] A szükséges utolsó mutálódás, mivel ebben az oszlopban mostmár csak két nem nulla érték volt és az első oszlopban viszont három, így ott több volt itt viszont kevesebb

[12] https://people.inf.elte.hu/gt/mi/08.evolucio.pdf#page=26 2020 Április 25

Ahol a lecserélendő egyedek száma a szelekciókor “kidobott” egyedek száma:

ha $u=v$, akkor feltétlen cseréről van szó

ha $u<v$, akkor egy utód több példánya is bekerülhet

ha $u>v$, akkor az utódok közül szelektál

Ahol az utódok közül is úgy szelektál ahogy a szelekciónál meghatároztuk.