# 1. Vektor- és mátrixalgebrai alapismeretek

Az első fejezetben áttekintjük a mechanika tanulmányok során fontos matematikai fogalmakat, műveleteket és átismételjük az alkalmazásukhoz elengedhetetlen ismereteket.

## 1.1. A vektor fogalma, értelmezése

A testek, jelenségek mérhető tulajdonságait mennyiségeknek nevezzük. A mennyiség lehet:
- skalár (Pl.: hőmérséklet, sűrűség, tömeg),
- vektor (Pl.: erő, sebesség, gyorsulás).

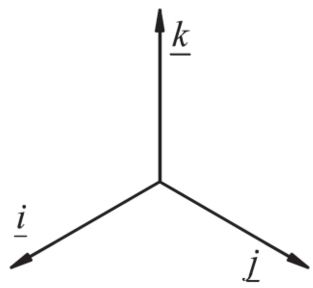
A ***vektor*** a fizikában és a matematikában is egyaránt fontos fogalom: irányított szakasz, amelynek nagysága, iránya, értelme (irányítottsága) van. Jelölése: aláhúzott kis- vagy nagybetű (pl.: $\underline{a}$).

## 1.2. A vektor megadása

Válasszunk a térben három, páronként egymásra merőleges egységvektort (egységvektor: 1 egységnyi hosszúságú vektor), melyek elnevezése rendre: $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$.

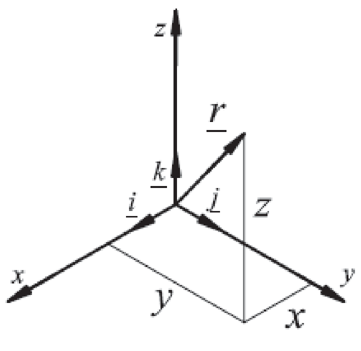
$$\underline{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \underline{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \underline{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \qquad (1.1.)$$

Alkosson ez a három egységvektor jobbsodrású koordinátarendszert (1.1. ábra):




*1.1. ábra. Jobbsodrású koordinátarendszer*

Ezen egységvektorok lineáris kombinációjával a tér bármely vektora egyértelműen előállítható (1.2. ábra):



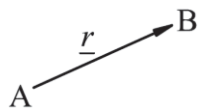

*1.2. ábra. $\underline{r}$ vektor a jobbsodrású koordinátarendszerben*

$$\underline{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad (1.2.)$$

$$\underline{r} = x \cdot \underline{i} + y \cdot \underline{j} + z \cdot \underline{k}. \quad (1.3.)$$

A vektor nagysága (abszolút értéke) a vektor hosszát adja meg (1.3. ábra):

$$\left|\underline{r}\right| = AB = \left|\overrightarrow{AB}\right|. \quad (1.4.)$$




*1.3. ábra. $\underline{r}$ vektor hossza*

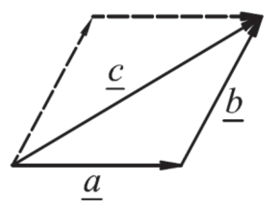
## 1.3. Műveletek vektorokkal

### 1.3.1. Vektorok összeadása

Vektorok összegzésével vektort kapunk (1.4. ábra):

$$\underline{a} + \underline{b} = \underline{c}. \quad (1.5.)$$

Szerkesztéssel:




*1.4. ábra. Vektorok összeadása szerkesztéssel*

Számítással:

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}, \underline{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix}, \quad (1.6.)$$

$$\underline{c} = \underline{a} + \underline{b} = \left(a_x \cdot \underline{i} + a_y \cdot \underline{j} + a_z \cdot \underline{k}\right) + \left(b_x \cdot \underline{i} + b_y \cdot \underline{j} + b_z \cdot \underline{k}\right) = \quad (1.7.)$$

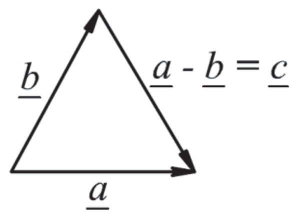
$$= (a_x + b_x) \cdot \underline{i} + \left(a_y + b_y\right) \cdot \underline{j} + (a_z + b_z) \cdot \underline{k} = \begin{bmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{bmatrix}.$$

### 1.3.2. Vektorok kivonása

Vektorok kivonása szintén vektort eredményez (1.5. ábra):

$$\underline{a} - \underline{b} = \underline{a} + \left(-\underline{b}\right) = \underline{c}. \quad (1.8.)$$

Szerkesztéssel:




*1.5. ábra. Vektorok kivonása szerkesztéssel*

A különbségvektor mindig a kisebbítendő vektor felé mutat!

Számítással:

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}, \underline{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix}, \tag{1.9.}$$

$$\underline{c} = \underline{a} - \underline{b} = \left(a_x \cdot \underline{i} + a_y \cdot \underline{j} + a_z \cdot \underline{k}\right) - \left(b_x \cdot \underline{i} + b_y \cdot \underline{j} + b_z \cdot \underline{k}\right) = \tag{1.10.}$$

$$= (a_x - b_x) \cdot \underline{i} + \left(a_y - b_y\right) \cdot \underline{j} + (a_z - b_z) \cdot \underline{k} = \begin{bmatrix} a_x - b_x \\ a_y - b_y \\ a_z - b_z \end{bmatrix}.$$

### 1.3.3. Vektorok skalárral (számmal) való szorzása; nyújtás, zsugorítás

Vektort skalárral szorozva vektort kapunk. A $\boldsymbol{\lambda} \cdot \underline{a}$ vektor az $\underline{a}$ vektorral párhuzamos, hossza $|\boldsymbol{\lambda}| \cdot |\underline{a}|$. Ha $|\boldsymbol{\lambda}| > 1$ nyújtásról, ha$|\boldsymbol{\lambda}| < 1$ zsugorításról beszélünk. Ha $\boldsymbol{\lambda} = 0$, az eredmény nullvektor. Ha $\boldsymbol{\lambda} > 0$, a $\boldsymbol{\lambda} \cdot \underline{a}$ vektor iránya az $\underline{a}$ vektor irányával megegyezik. Ha $\boldsymbol{\lambda} < 0$, a $\boldsymbol{\lambda} \cdot \underline{a}$ vektor iránya az $\underline{a}$ vektor irányával ellentétes.

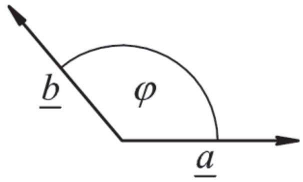
$$\lambda \cdot \underline{a} = \lambda \cdot \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \cdot a_x \\ \lambda \cdot a_y \\ \lambda \cdot a_z \end{bmatrix}. \tag{1.11.}$$

### 1.3.4. Vektorok skaláris szorzata

Az a és b vektorok skaláris szorzatának azt az

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \cos\varphi \tag{1.12.}$$

skaláris mennyiséget nevezzük, ahol $\varphi$ a két vektor által bezárt kisebbik szög (1.6. ábra). $\underline{a} \cdot \underline{b} > 0$ esetén a vektorok hegyesszöget, $\underline{a} \cdot \underline{b} < 0$ esetén tompaszöget zárnak be. Két egymásra merőleges vektor skaláris szorzata zérus, azaz $\underline{a} \cdot \underline{b} = 0$.




*1.6. ábra. A két vektor által bezárt kisebbik szög*

Vektorok skaláris szorzata koordinátákkal:

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z. \qquad (1.13.)$$

Speciális esetként nézzük most az egységvektorok skaláris szorzatait. Először az $\underline{i}$ egységvektor önmagával vett szorzatát, mely a definíció szerint:

$$\underline{i} \cdot \underline{i} = |\underline{i}| \cdot |\underline{i}| \cdot \cos 0° = 1. \qquad (1.14.)$$

Ellenőrzésként vegyük $\underline{i}$ egységvektor önmagával vett skaláris szorzatát koordinátákkal:

$$\underline{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\underline{i} \cdot \underline{i} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 1. \qquad (1.15.)$$

Vegyük $\underline{i}$ és $\underline{j}$, egymásra merőleges egységvektorok skaláris szorzatát, mely a definíció szerint:

$$\underline{i} \cdot \underline{j} = |\underline{i}| \cdot |\underline{j}| \cdot \cos 90° = 0. \qquad (1.16.)$$

Ellenőrzésként vegyük $\underline{i}$ és $\underline{j}$ egységvektorok skaláris szorzatát koordinátákkal:

$$\underline{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \underline{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\underline{i} \cdot \underline{i} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 0. \qquad (1.17.)$$

A skaláris szorzat definícióját átrendezve meghatározhatjuk  két vektor által bezárt szög nagyságát:

$$\cos \varphi = \frac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{|\underline{a}| \cdot |\underline{b}|}. \qquad (1.18.)$$

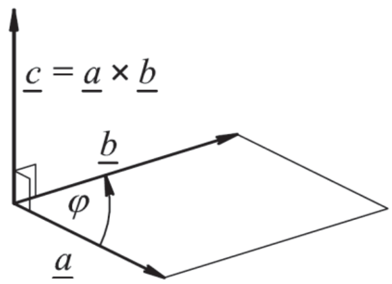
### 1.3.5. Vektorok vektoriális szorzata

Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok vektoriális szorzata a $\underline{c}$ vektor, ha

$$|\underline{c}| = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \sin \varphi, \qquad (1.19.)$$

ahol $\varphi$ a két vektor által bezárt kisebbik szög. $|\underline{c}|$ egyenlő az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok által meghatározott paralelogramma területével. A vektoriális szorzás eredményeként kapott $\underline{c}$ vektor merőleges az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok által kifeszített síkra, mégpedig úgy, hogy $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ vektorok jobbsodrású rendszert alkotnak (1.7. ábra). Két vektor vektoriális szorzata a definíció értelmében zérus, ha a két vektor egymással párhuzamos. A vektoriális szorzás jelölése:

$$\underline{c} = \underline{a} \times \underline{b}. \tag{1.20.}$$




*1.7. ábra. Vektorok vektoriális szorzatának értelmezése*

Vektorok vektoriális szorzata koordinátákkal:

$$\begin{aligned}\underline{c} = \underline{a} \times \underline{b} &= \left(a_x\underline{i} + a_y\underline{j} + a_z\underline{k}\right) \times \left(b_x\underline{i} + b_y\underline{j} + b_z\underline{k}\right) = \\ &= a_xb_x\underline{i} \times \underline{i} + a_xb_y\underline{i} \times \underline{j} + a_xb_z\underline{i} \times \underline{k} + \\ &+ a_yb_x\underline{j} \times \underline{i} + a_yb_y\underline{j} \times \underline{j} + a_yb_z\underline{j} \times \underline{k} + \\ &+ a_zb_x\underline{k} \times \underline{i} + a_zb_y\underline{k} \times \underline{j} + a_zb_z\underline{k} \times \underline{k}.\end{aligned} \tag{1.21.}$$

A vektoriális szorzat definicióját az egységvektorokra alkalmazva kapjuk:

$$\underline{i} \times \underline{i} = \underline{0}, \tag{1.22.}$$

$$\underline{i} \times \underline{j} = \underline{k}, \tag{1.23.}$$

$$\underline{i} \times \underline{k} = -\underline{j}, \tag{1.24.}$$

$$\underline{j} \times \underline{i} = -\underline{k}, \tag{1.25.}$$

$$\underline{j} \times \underline{j} = \underline{0}, \tag{1.26.}$$

$$\underline{j} \times \underline{k} = \underline{i}, \tag{1.27.}$$

$$\underline{k} \times \underline{i} = \underline{j}, \tag{1.28.}$$

$$\underline{k} \times \underline{j} = -\underline{i}, \tag{1.29.}$$

$\underline{k} \times \underline{k} = \underline{0},$ *(1.30.)*

$$\underline{c} = \underline{a} \times \underline{b} = a_x b_y \underline{k} - a_x b_z \underline{j} - a_y b_x \underline{k} - a_y b_z \underline{i} - a_z b_x \underline{j} - a_z b_y \underline{i} = \quad (1.31.)$$

$$= \underline{i} \cdot (a_y b_z - a_z b_y) - \underline{j} \cdot (a_x b_z - a_z b_x) + \underline{k} \cdot (a_x b_y - a_y b_x).$$

Ezen levezetés eredménye megegyezik a a determináns kifejtési szabályával,

$$\underline{c} = \underline{a} \times \underline{b} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \quad (1.32.)$$

$$= \underline{i} \cdot (a_y b_z - a_z b_y) - \underline{j} \cdot (a_x b_z - a_z b_x) + \underline{k} \cdot (a_x b_y - a_y b_x).$$

### 1.4. Szabad és kötött vektorok

Fizikai tartalmuk alapján megkülönböztetünk szabad- és kötött vektorokat. Szabad vektornak nevezzük a kezdőpontjával a tér bármely pontjára áthelyezhető, önmagával párhuzamosan eltolható vektort. (Pl.: forgatónyomaték-vektor) Kötött vektornak nevezzük a vektort, ha támadáspontja térben rögzített pont. Kötött vektor csak a hatásvonala mentén csúsztatható el (pl.: erő-vektor).

## PÉLDÁK ÉS FELADATOK

### 1.1. PÉLDA

*Adott az* $\underline{a}$ *vektor. Határozzuk meg a vektor abszolút értékét illetve egységvektorát!*

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$|\underline{a}| = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 4 + 4} = \sqrt{9} = 3,$$

$$\underline{a}^0 = \frac{\underline{a}}{|\underline{a}|} = \begin{bmatrix} \frac{a_x}{|\underline{a}|} \\ \frac{a_y}{|\underline{a}|} \\ \frac{a_z}{|\underline{a}|} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \underline{i} + \frac{2}{3} \cdot \underline{j} + \frac{2}{3} \cdot \underline{k}.$$

Ellenőrzés:

Ha az $\underline{a}^0$ valóban egységvektor, akkor abszolút értéke 1:

$$|\underline{a}^0| = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{9}{9}} = 1.$$

## 1.2. PÉLDA

*Adott $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektor. Határozzuk meg a $\underline{c} = \underline{a} + \underline{b}$ vektort!*

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix},$$

$$\underline{c} = \underline{a} + \underline{b} = (a_x + b_x) \cdot \underline{i} + \left(a_y + b_y\right) \cdot \underline{j} + (a_z + b_z) \cdot \underline{k} =$$

$$= (2+1) \cdot \underline{i} + (3+3) \cdot \underline{j} + (4+5) \cdot \underline{k} = \begin{bmatrix} 2+1 \\ 3+3 \\ 4+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

## 1.3. PÉLDA

*Adott $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektor. Határozzuk meg a $\underline{c} = \underline{a} - \underline{b}$ vektort!*

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\underline{c} = \underline{a} - \underline{b} = (a_x - b_x) \cdot \underline{i} + \left(a_y - b_y\right) \cdot \underline{j} + (a_z - b_z) \cdot \underline{k} =$$

$$= (2-1) \cdot \underline{i} + (3-3) \cdot \underline{j} + (4-0) \cdot \underline{k} = \begin{bmatrix} 2-1 \\ 3-3 \\ 4-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

## 1.4. PÉLDA

*Adott $\lambda$ és $\underline{a}$ vektor. Számítsuk ki a $\underline{b} = \lambda \cdot \underline{a}$ vektor koordinátáit!*

$$\lambda = 3, \underline{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix},$$

$$\underline{b} = \lambda \cdot \underline{a} = \lambda \cdot \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot 0 \\ 3 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

## 1.5. PÉLDA

*Adott $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektor. Határozzuk meg a két vektor skaláris szorzatát!*

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \underline{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z = 2 \cdot 4 + 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 0 = 8 - 4 + 0 = 4.$$

## 1.6. PÉLDA

*Adott $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektor. Határozzuk meg a két vektor által bezárt szög nagyságát.*

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \underline{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\cos\varphi = \frac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{|\underline{a}| \cdot |\underline{b}|} = \frac{3 \cdot 2 + 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 0}{\sqrt{3^2 + 1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 0^2}} = \frac{6 - 2 + 0}{3{,}7 \cdot 2{,}8} = 0{,}4,$$

$$\varphi = 67{,}8°.$$

**1.7. PÉLDA**

*Adott $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektor. Határozzuk meg a $\underline{c} = \underline{a} \times \underline{b}$ vektort!*

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

$$\underline{c} = \underline{a} \times \underline{b} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix},$$

$$= \underline{i} \cdot \big(3 \cdot 3 - 2 \cdot (-2)\big) - \underline{j} \cdot (2 \cdot 3 - 2 \cdot 0) + \underline{k} \cdot (2 \cdot (-2) - 3 \cdot 0) =$$

$$= \underline{i} \cdot 13 - \underline{j} \cdot 6 - \underline{k} \cdot 4 = \begin{bmatrix} 13 \\ -6 \\ -4 \end{bmatrix}.$$