



Ó
B
U
D
A
I

E
G
Y
E
T
E
M



MECHANIKA I. (Statika)

Tartók statikája

1.2.2 Lecke. Egy testből álló tartók egyensúlya



CÉLKITŰZÉS

Ez a lecke bemutatja **befogott, kéttámaszú tartó**, valamint **keretszerkezet** kiegyensúlyozását, reakcióinak meghatározását.

KAPCSOLÓDÓ IRODALOM

Mechanika I. (Statika) elektronikus jegyzet 11., 13.2 fejezet

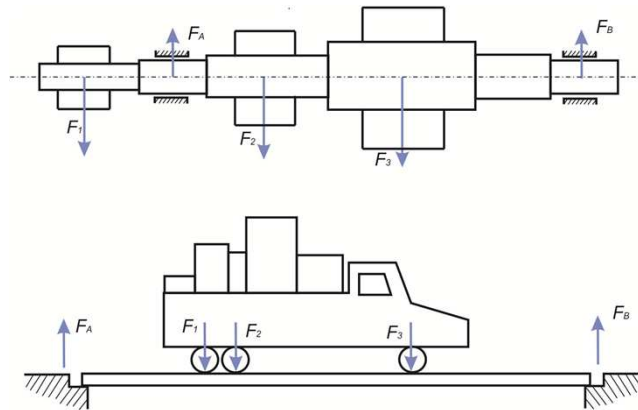
Felhasznált irodalom

- [1] Alfred Böge, Walter Schlemmer: Mechanikai és szilárdságtani feladatgyűjtemény, B+V Lap és Könyvkiadó, Budapest, 1993.
- [2] Kósa Csaba: Nyugvó rendszerek mechanikája. Példatár és útmutató, Budapest, 2009
- [3] Gelencsér Endre: Statika példatár, Gödöllő, 2006



MOTIVÁCIÓ

A tananyag elsajátításával egyrésről a gyakorlatban számos helyen alkalmazott tartószerkezet, a kéttámaszú tartó kiegyensúlyozását sajátíthatjuk el.



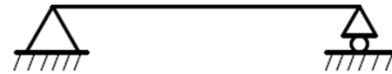
Az egyensúlyozási feladatok során megtanuljuk meghatározni (statikailag határozott szerkezetek esetében) az álló környezethez rögzítést biztosító, ún. kényszerekben keletkező reakciókat. A kéttámaszú tartók mellett befogott tartók és nyitott keretszerkezetek vizsgálatával is foglalkozunk.



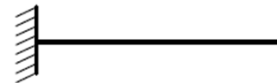
ELMÉLETI ÁTTEKINTÉS

Egyenes és tört tengelyű, statikailag határozott tartószerkezetek:

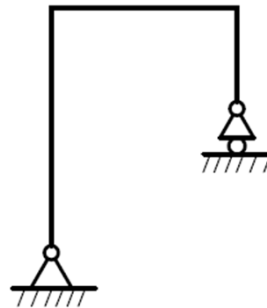
- kéttámaszú tartó,



- befogott tartó,



- nyitott keretszerkezet vagy más néven törttengelyű tartó.





A felsorolt tartószerkezetek közös jellemzője, hogy alkotóelemük egy merev, vagy egyetlen merevnek modellezhető test, a modellalkotás során prizmatikus rúd.

A kéttámaszú és a befogott tartó elnevezések egyenes tengelyű, míg a nyitott keretszerkezet tört tengelyű tartót jelent. Utóbbi esetében a tartót alkotó egyenes, vagy görbe tengelyű rúd elemek egymáshoz sarokmerev kapcsolattal csatlakoznak.

Síkbeli szerkezetek lévén statikai határozottságuk feltétele:

$$k_k = s = 3,$$

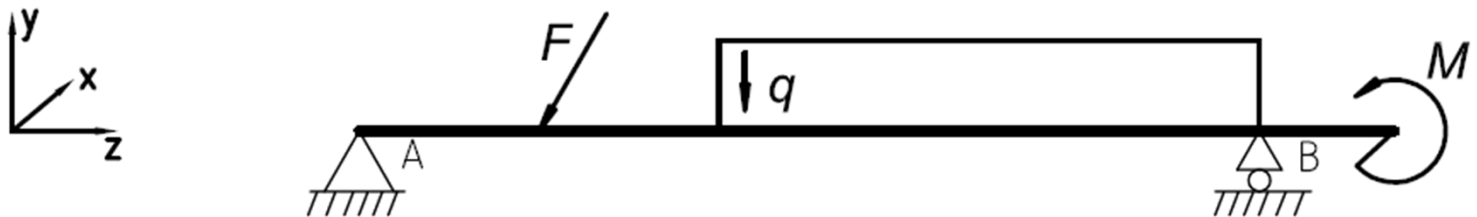
ahol k_k a (külső) kötöttségek, s pedig a szerkezet (merev test) szabadságfokainak száma. Tehát minden esetben – ideális kényszerek segítségével - három kötöttséggel rendelkeznek.



A kényszerekben keletkező, általuk a merev testre kifejtett erőket **kényszererőknek**, **támaszerőknek** vagy **reakcióerőknek** nevezzük. A külső erők aktív (F) erőrendszert, a reakcióerők passzív (A) erőrendszert alkotnak. Statikailag határozott esetben - egyensúly jön létre,- tehát írható:

$$[(F), (A)] \doteq 0.$$

Az egyenes és tört tengelyű, statikailag határozott tartószerkezetek vizsgálatakor alkalmazott jobbsodrású koordináta-rendszer $y - z$ síkja a tartó síkjában található:

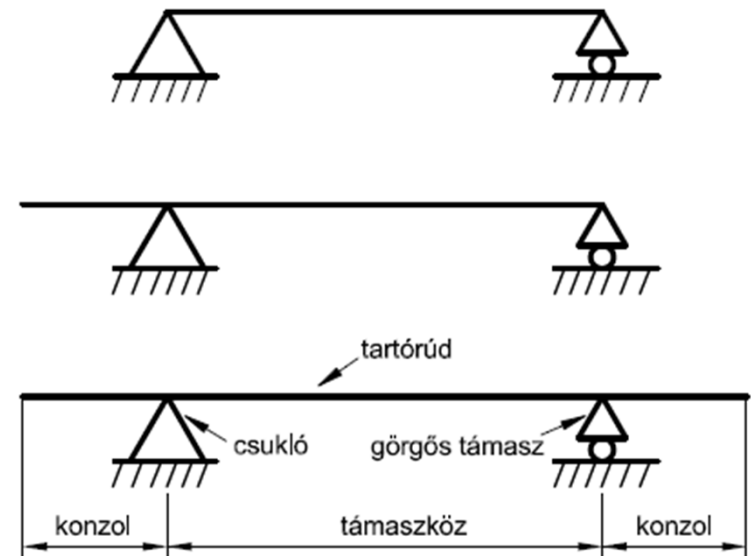




A tartók külső terhelése lehet koncentrált erőrendszer (F_i), megoszló erőrendszer (q_i) és koncentrált nyomaték (M_i).

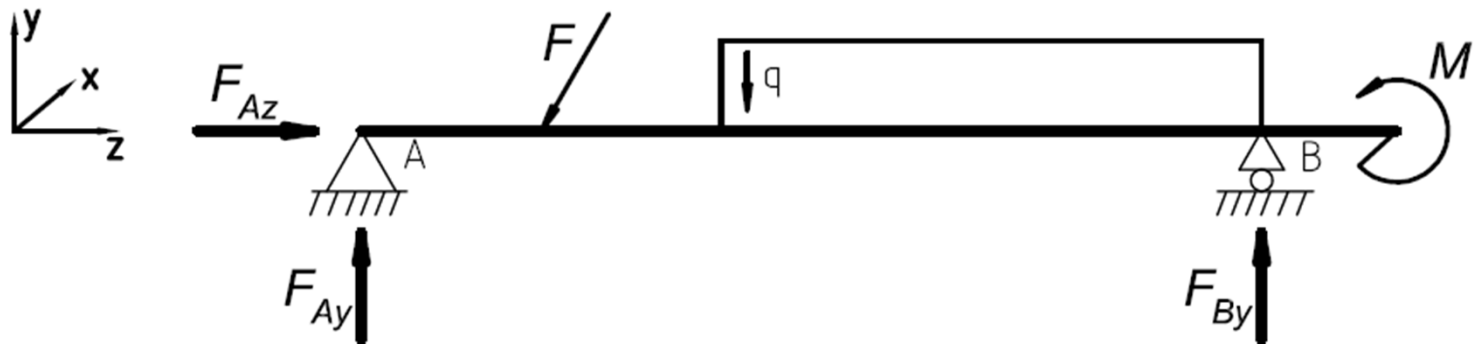
a.) A kéttámaszú tartó a műszaki gyakorlat egyik legismertebb tartószerkezete: egyszerűbb hidak, tartógerendák, géptengelyek modellezésére szolgál.

A tartórúd egyik oldalon **csuklóval**, másik oldalon **görgős támasszal** rögzül. A két kényszer távolsága a támaszköz, amennyiben a rúd túlnyúlik a támaszközön, **konzolos kéttámaszú tartóról** beszélünk.



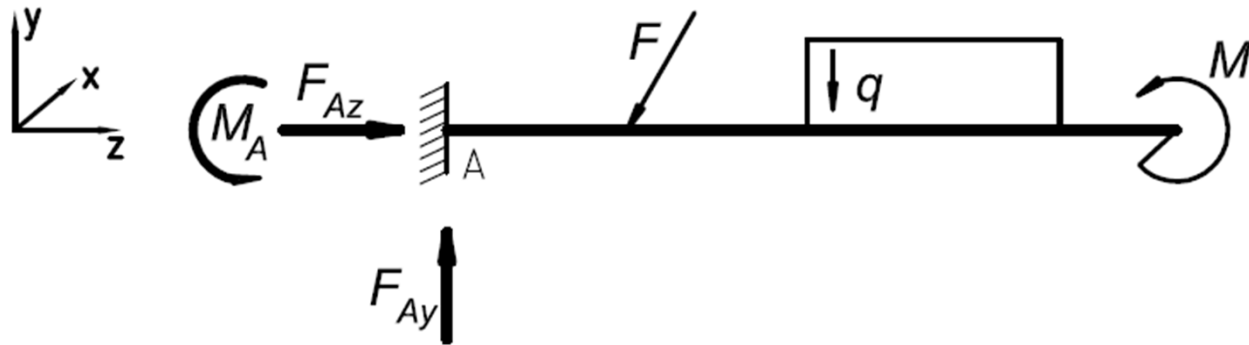


A csuklónál - a külső erőrendszer függvényében - egy tetszőleges irányú erő (F_A) ébred, melyet a feladatok megoldása során y és z irányú komponenseivel keresünk (F_{Ay}, F_{Az}), a görgős támasznál a támasztó felületre merőleges irányú erő (F_B) egyensúlyozza a szerkezetet.



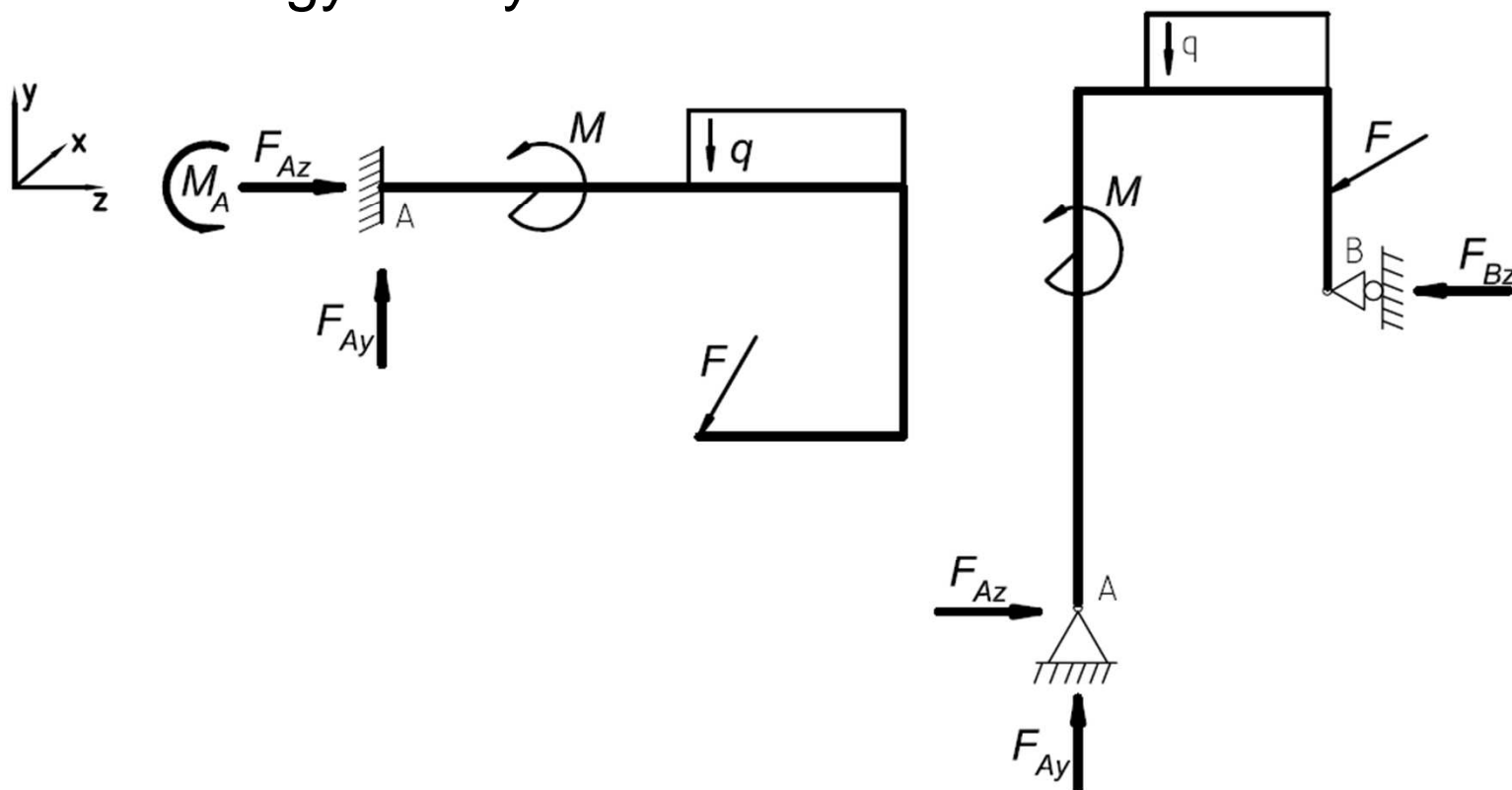


b.) A befogott tartó olyan szerkezet, amelynek egyik vége befogással (pl.: befalazással) kerül rögzítésre. A kényszerben keletkező reakciók egy tetszőleges irányú erő (F_{Ay} , F_{Az}) és egy reakció nyomaték (M_A).





c.) A **nyitott keretszerkezet** vagy más néven törttengelyű tartó, egyenes vagy görbe tengelyű rudak sarokmerekv összekapcsolásával jön létre. A szerkezetet az alkalmazott kényszerektől függően a kéttámaszú, illetve befogott tartóknál ismertetett reakciók egyensúlyozzák.





A tartók vizsgálata a reakció-erőrendszer meghatározásával kezdődik, a síkbeli erőrendszerek egyensúlyi törvényei alapján:

$$\underline{F}_A + \underline{F}_B + \sum_{i=1}^n \underline{F}_i = \underline{0},$$
$$\underline{r}_A \cdot \underline{F}_A + \underline{r}_B \cdot \underline{F}_B + \sum_{i=1}^n \underline{r}_i \cdot \underline{F}_i + \sum_{j=1}^m \underline{M}_j = \underline{0}.$$

Síkbeli, statikailag határozott feladataink esetében tehát az egyensúlyozáshoz 3 ismeretlen meghatározása szükséges, melyet 3 skaláregyenlettel oldhatunk meg.



Egy testből álló tartó egyensúlyának meghatározásához szükséges lépések:

- **reakciók feltételezése** (reakció erők, illetve befogás esetén reakció erő és reakció nyomaték). Ha a számítás során kapott eredmény pozitív, a feltételezett irányok helyesek, ha negatív, a tényleges reakció iránya ellentétes a feltételezéssel.
- **reakciók számítása.** *Kéttámaszú tartó* esetben első lépésként **nyomatéki egyensúlyi egyenletet** írunk fel jellemzően a csuklón átmenő, a tartó síkjára merőleges tengelyre. Ezzel meghatározzuk a görgős támasznál ébredő reakcióerőt. A csuklónál ébredő további két (vagy a terhelések speciális esetében esetenként egy) reakciókomponens **vetületi egyensúlyi egyenletekkel** számítható.



Befogásnál nyomatéki egyensúlyi egyenlettel és a felírt vetületi egyensúlyi egyenletekből határozhatók meg a reakciók.

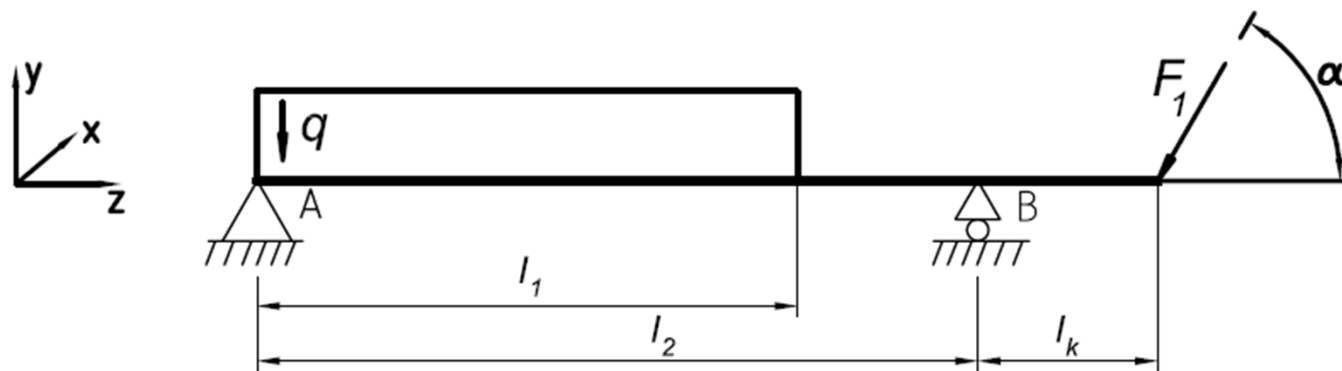
- **reakciók ellenőrzése.** Nyomatéki egyensúlyi egyenletekkel érdemes számításainkat ellenőrizni.

Megjegyzés: a pozitív irányok az alkalmazott jobbsodrású koordináta-rendszer szerint értelmezendők, nyomaték esetében az óramutató járásával ellentétes a pozitív irány.



1. MINTAPÉLDA

Az ábrán egy vegyes terhelésű kéttámaszú tartó látható. Határozzuk meg a kényszerekben ébredő reakció erőket számítással, majd szerkesztéssel is!



Adatok: $F_1 = 6,4 \text{ kN}$, $\alpha = 60^\circ$, $q = 4 \text{ kN/m}$
 $l_1 = 3 \text{ m}$, $l_2 = 4 \text{ m}$, $l_k = 1 \text{ m}$.

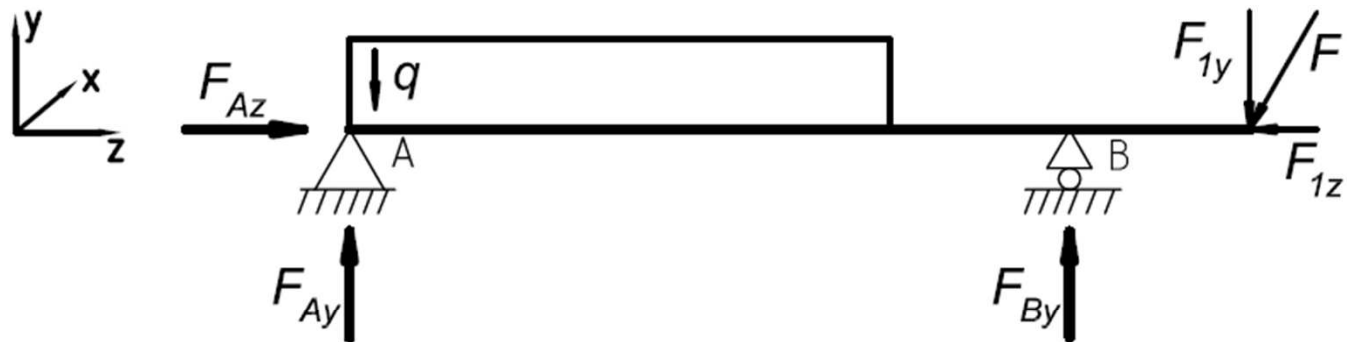


Megoldás

A feladat megoldása számítással:

1. Reakciók feltételezése

A koordináta-rendszerünknek megfelelően pozitív értelemmel feltételezünk reakció erőket. A csuklóban F_{Ay} , F_{Az} , míg a görgős támasznál – jelen feladatban a támasztó felület normálisa y irányú, tehát - az ébredő reakció erő F_{By} .



A számolás kezdetén a ferde hatásvonalú F_1 erőt felbontjuk y és z irányú összetevőkre.



2. Reakciók számítása

A megoszló erőrendszert erőtanilag helyettesíthetjük a súlyvonalában ható koncentrált erővel, melynek nagysága:

$$F_q = q \cdot l.$$

Nyomatéki egyensúlyi egyenletet írunk fel az „A” ponton átmenő x tengelyre:

$$\sum M_{iA} = 0 = - \underbrace{q \cdot l_1}_{F_q} \cdot \frac{l_1}{2} + F_{By} \cdot l_2 - F_{1y} \cdot (l_2 + l_k)$$

F_q a helyettesítő erő karja, azaz a megoszló erőrendszer súlyvonalának távolsága „A” ponttól.

(F_{Ay} , F_{Az} és F_{1z} -nek nincs nyomatéka az „A” ponton átmenő x tengelyre, mivel hatásvonaluk átmegy rajta.)



Az egyenlet átrendezése után kapjuk:

$$\begin{aligned} F_{By} &= \frac{q \cdot l_1 \cdot \frac{l_1}{2} + F_{1y} \cdot (l_2 + l_k)}{l_2} = \\ &= \frac{q \cdot l_1 \cdot \frac{l_1}{2} + F_1 \cdot \sin \alpha \cdot (l_2 + l_k)}{l_2} = \\ &= \frac{4 \frac{kN}{m} \cdot 3m \cdot \frac{3m}{2} + 6,4 kN \cdot \sin 60^\circ \cdot (4m + 1m)}{4m} = \\ &= 11,43 kN \end{aligned}$$

Mivel F_{By} értéke pozitív, a feltételezésünknek megfelelő irányba hat.



Vetületi egyensúlyi egyenletet írunk fel y irányba:

$$\sum F_{iy} = 0 = F_{Ay} - q \cdot l_1 + F_{By} - F_{1y}$$

Átrendezés után:

$$\begin{aligned} F_{Ay} &= q \cdot l_1 + F_{1y} - F_{By} = \\ &= 4 \text{ kN/m} \cdot 3\text{m} + 6,4 \text{ kN} \cdot \sin 60^\circ - 11,43 \text{ kN} = \\ &= 6,11 \text{ kN} \end{aligned}$$

Mivel F_{Ay} értéke pozitív, a feltételezésünknek megfelelő irányba hat.

Vetületi egyensúlyi egyenletet írunk fel z irányba:

$$\sum F_{iz} = 0 = F_{Az} - F_{1z}$$



Átrendezés után:

$$\begin{aligned} F_{Az} &= F_{1z} = F_1 \cdot \cos \alpha = 6,4 \text{ kN} \cdot \cos 60^\circ = \\ &= 3,20 \text{ kN} \end{aligned}$$

Mivel F_{Az} értéke pozitív, a feltételezésünknek megfelelő irányba hat.

3. Reakciók ellenőrzése

Ellenőrzésképpen felírhatunk nyomatéki egyensúlyi egyenletet a „B” ponton átmenő x tengelyre:

$$\sum M_{iB} = -F_{Ay} \cdot l_2 + q \cdot l_1 \cdot \left(l_2 - \frac{l_1}{2} \right) - F_{1y} \cdot l_k$$

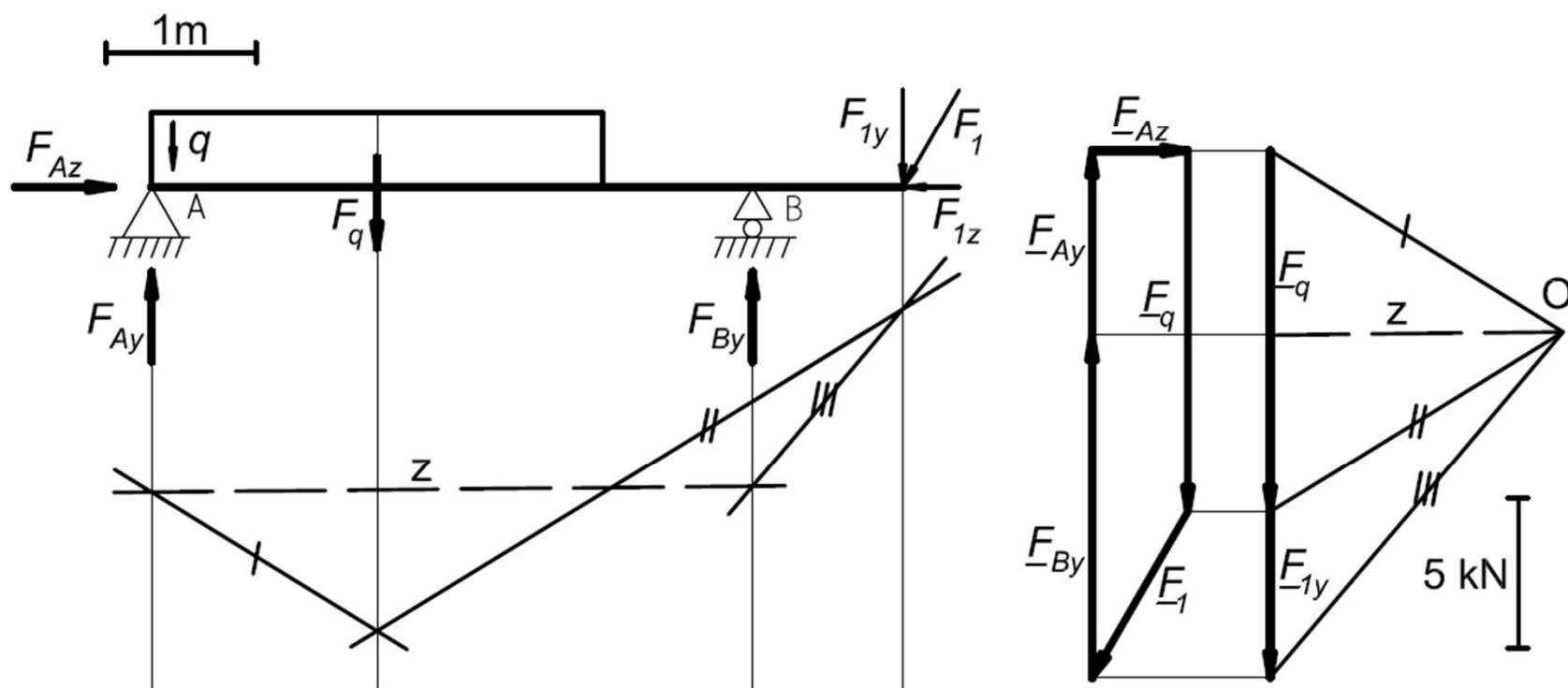
$$\sum M_{iB} = 0 \text{ kNm}$$

Tehát a számításaink helyesek.



A feladat megoldása szerkesztéssel:

Hosszlépték felvétele után megrajzoljuk az elrendezési ábrát, majd egy megfelelően megválasztott erőléptékkel a vektorábrát. A kötélsokszög szerkesztéséhez az erőknek csak a függőleges komponenseit vesszük figyelembe.





Felveszünk egy póluspontot, és megrajzoljuk a kötéloldalakat. A kötéloldalakkal párhuzamosokat húzunk az elrendezési ábrába. Az első és utolsó kötéloldalakkal elmetsszük a reakcióerők függőleges hatásvonalait. Az így kapott metszéspontokat összekötjük (z). A z egyenessel párhuzamost húzunk a vektorábrába az O ponton keresztül, ami kimetszi az erők hatásvonalából a reakcióerőket.

Az erőlépték ismeretében a kapott erőket lemérve pontosan meghatározható azok nagysága.

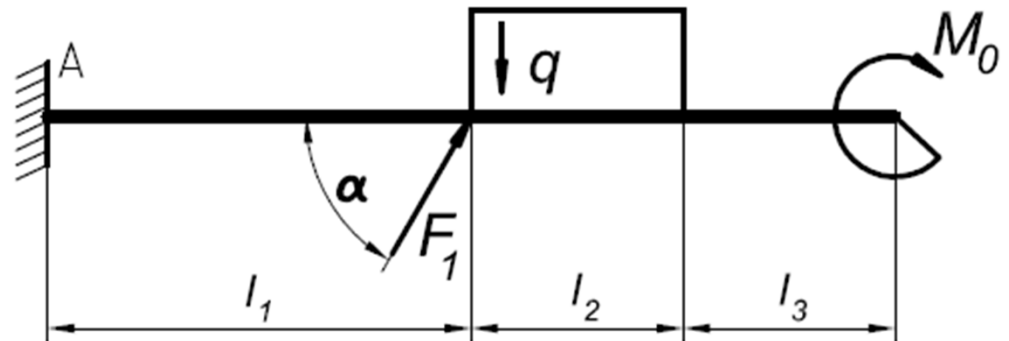
Válasz/értékelés

A feladat megoldása során elvégeztük egy vegyes terhelésű kéttámaszú kiegyensúlyozását, meghatároztuk a tartó reakció erőit számítással és szerkesztéssel.



2. MINTAPÉLDA

Az ábrán egy vegyes terhelésű befogott tartó látható. Határozzuk meg a befogásnál ébredő reakciókat!



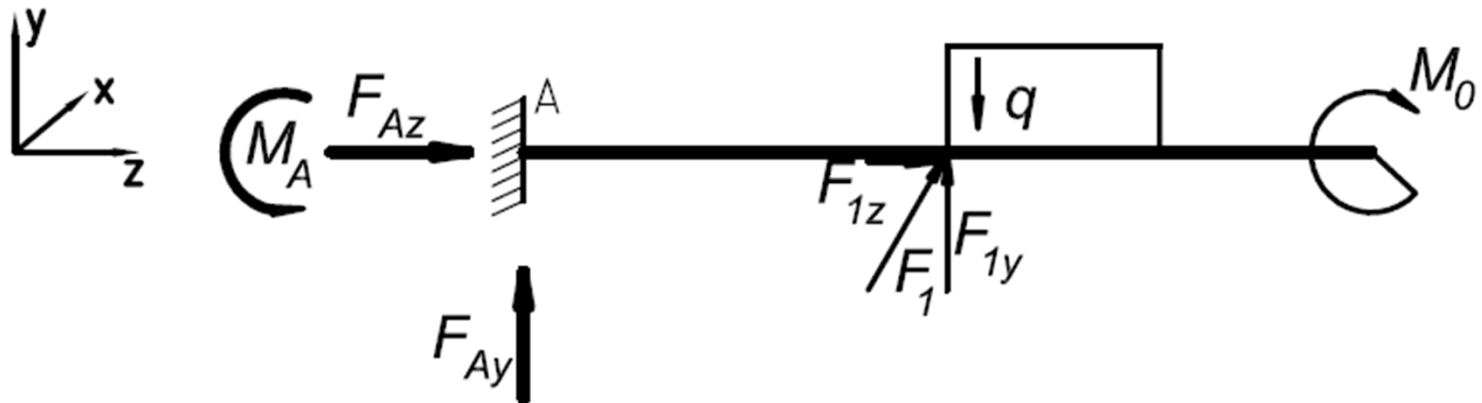
Adatok: $F_1 = 4,3 \text{ kN}$, $\alpha = 60^\circ$, $q = 3 \text{ kN/m}$, $M_0 = 2 \text{ kNm}$
 $l_1 = 4 \text{ m}$, $l_2 = 2 \text{ m}$, $l_3 = 2 \text{ m}$.



Megoldás

1. Reakciók feltételezése

A koordináta-rendszerünknek megfelelően pozitív érte-



lemmel feltételezzük a reakció erő komponenseket és a reakció nyomatékot. A befogási keresztmetszetben F_{Ay} , F_{Az} , M_A ébrednek. A 3 ismeretlen meghatározásához 3 egyenlet felírása szükséges.

A számolás kezdetén a ferde hatásvonalú F_1 erőt felbontjuk y és z irányú összetevőkre.



2. Reakciók számítása

Nyomatéki egyensúlyi egyenletet írunk fel az „A” ponton átmenő x tengelyre:

$$\sum M_{iA} = 0 = M_A + F_{1y} \cdot l_1 - q \cdot l_2 \cdot \left(l_1 + \frac{l_2}{2} \right) - M_0$$

Az egyenlet átrendezése után kapjuk:

$$\begin{aligned} M_A &= q \cdot l_2 \cdot \left(l_1 + \frac{l_2}{2} \right) + M_0 - F_{1y} \cdot l_1 = \\ &= q \cdot l_2 \cdot \left(l_1 + \frac{l_2}{2} \right) + M_0 - (F_1 \cdot \sin \alpha) \cdot l_1 = \\ &= 3 \frac{kN}{m} \cdot 2 m \cdot \left(4 m + \frac{2 m}{2} \right) + 2 kNm - 3,72 kN \cdot 4 m = \\ &= 17,10 kNm \end{aligned}$$



Mivel M_A értéke pozitív, a feltételezésünknek megfelelő irányba hat.

Vetületi egyensúlyi egyenletet írunk fel y irányba:

$$\sum F_{iy} = 0 = F_{Ay} + F_{1y} - q \cdot l_2$$

Átrendezés után:

$$\begin{aligned} F_{Ay} &= q \cdot l_2 - F_{1y} = q \cdot l_2 - F_1 \cdot \sin \alpha = \\ &= 3 \text{ kN/m} \cdot 2 \text{ m} - 4,3 \text{ kN} \cdot \sin 60^\circ = \\ &= 2,28 \text{ kN} \end{aligned}$$

Mivel F_{Ay} értéke pozitív, a feltételezésünknek megfelelő irányba hat.

Vetületi egyensúlyi egyenletet írunk fel z irányba:

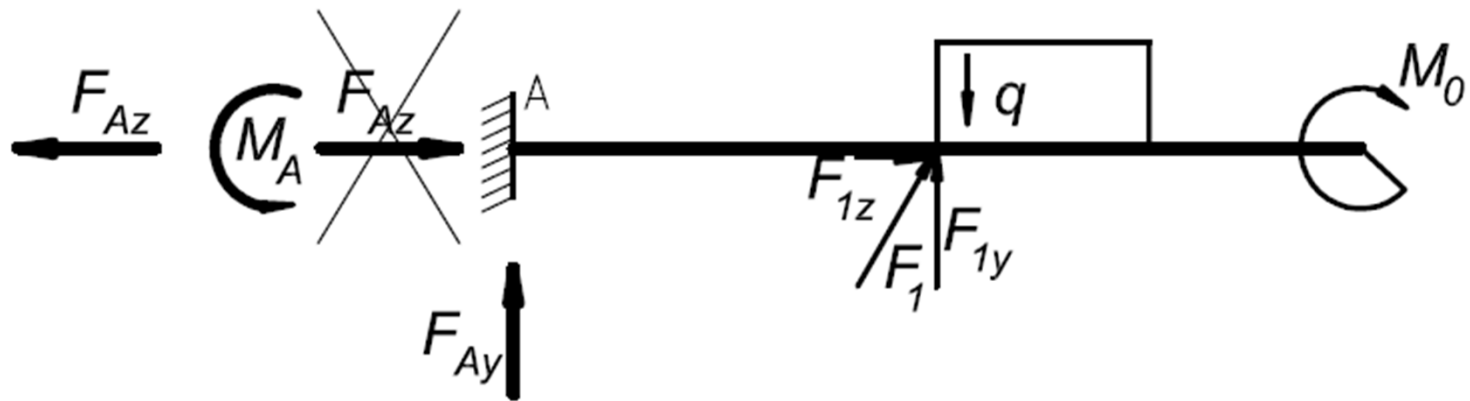
$$\sum F_{iz} = 0 = F_{Az} + F_{1z}$$



Átrendezés után:

$$\begin{aligned} F_{Az} &= -F_{1z} = -F_1 \cdot \cos \alpha = 4,3 \text{ kN} \cdot \cos 60^\circ = \\ &= -2,15 \text{ kN} \end{aligned}$$

Mivel F_{Az} értéke negatív, a feltételezésünkkel ellentétes irányba hat. Ilyenkor a további számítások előtt célszerű az eredeti feltételezést megfordítani, a kapott számértékkel pedig pozitívként számolni tovább.



Így F_{Az} értéke :

$$F_{Az} = 2,15 \text{ kN}$$



3. Reakciók ellenőrzése

Ellenőrzésképpen felírhatunk nyomatéki egyensúlyi egyenletet a tartó szabad végére:

$$\sum M_i = M_A - F_{1y} \cdot (l_2 + l_3) + q \cdot l_2 \cdot \left(l_3 + \frac{l_2}{2} \right) - M_0$$

$$\sum M_i = 0 \text{ kNm}$$

Tehát a számításaink helyesek.

Válasz/értékelés

A feladat megoldása során elvégeztük egy vegyes terhelésű befogott tartó kiegyensúlyozását, meghatároztuk a tartó reakcióit.



3. MINTAPÉLDA

Az ábrán egy vegyes terhelésű nyitott keretszerkezet látható. Határozzuk meg a kényszerekben ébredő reakciókat!

Adatok:

$$F_1 = 12 \text{ kN},$$

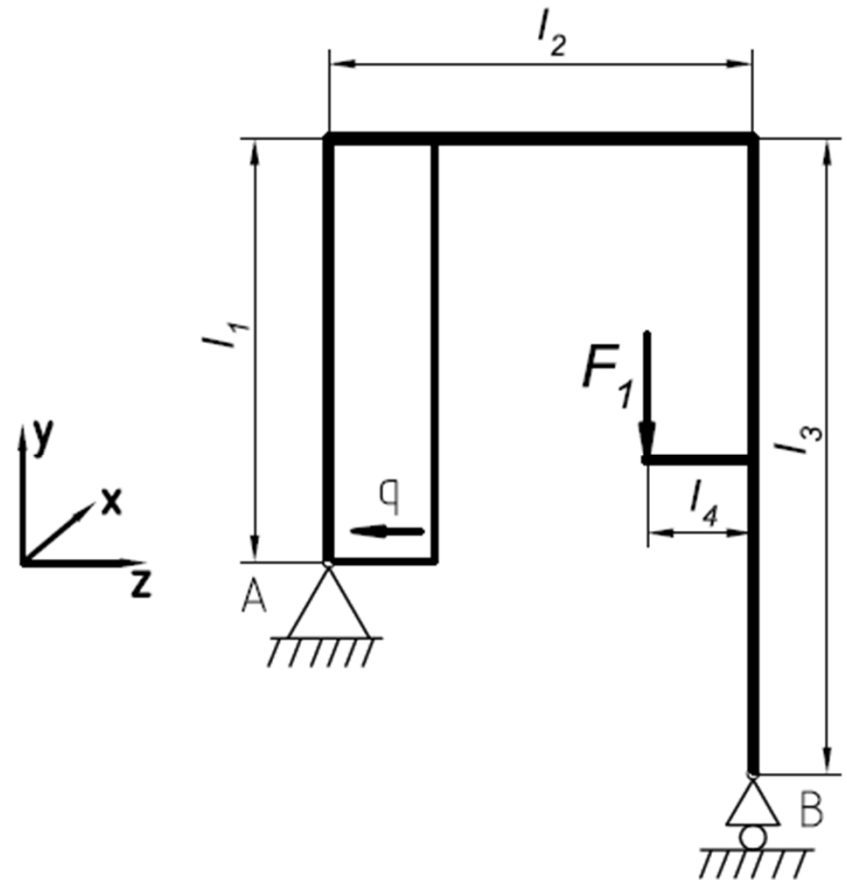
$$q = 2 \text{ kN/m},$$

$$l_1 = 4 \text{ m},$$

$$l_2 = 4 \text{ m},$$

$$l_3 = 6 \text{ m},$$

$$l_4 = 1 \text{ m}.$$



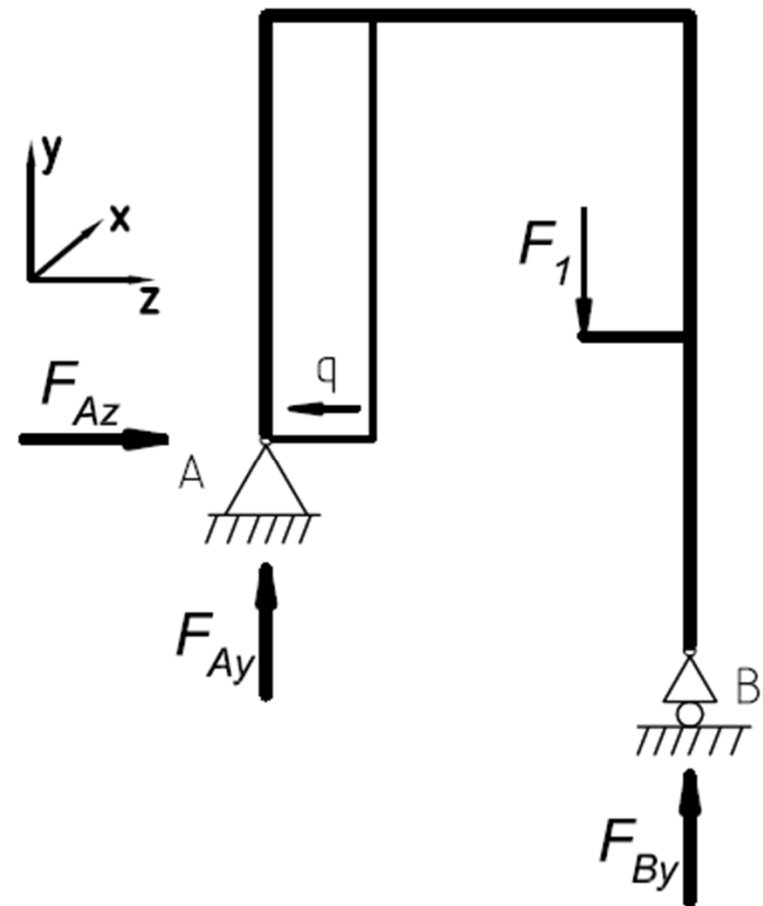


Megoldás

1. Reakciók feltételezése

A koordináta-rendszerünknek megfelelően pozitív értelemmel feltételezünk reakció erőket. A csuklóban

F_{Ay}, F_{Az} , míg a görgős támasznál – jelen feladatban a támasztó felület normálisa y irányú, tehát – az ébredő reakció erő F_{By} .





2. Reakciók számítása

Nyomatéki egyensúlyi egyenletet írunk fel az „A” ponton átmenő x tengelyre:

$$\sum M_{iA} = 0 = q \cdot l_1 \cdot \frac{l_1}{2} - F_1 \cdot (l_2 - l_4) + F_{By} \cdot l_2$$

Az egyenlet átrendezése után kapjuk:

$$\begin{aligned} F_{By} &= \frac{-q \cdot l_1 \cdot \frac{l_1}{2} + F_1 \cdot (l_2 - l_4)}{l_2} = \\ &= \frac{-2 \frac{kN}{m} \cdot 4m \cdot \frac{4m}{2} + 12 \text{ kN} \cdot (4m - 1m)}{4m} = \\ &= 5 \text{ kN} \end{aligned}$$

Mivel F_{By} értéke pozitív, a feltételezésünknek megfelelő irányba hat.



Vetületi egyensúlyi egyenletet írunk fel y irányba:

$$\sum F_{iy} = 0 = F_{Ay} - F_1 + F_{By}$$

Átrendezés után:

$$\begin{aligned} F_{Ay} &= F_1 - F_{By} = \\ &= 12 \text{ kN} - 5 \text{ kN} = 7 \text{ kN} \end{aligned}$$

Mivel F_{Ay} értéke pozitív, a feltételezésünknek megfelelő irányba hat.

Vetületi egyensúlyi egyenletet írunk fel z irányba:

$$\sum F_{iz} = 0 = F_{Az} - q \cdot l_1$$

Átrendezés után:

$$F_{Az} = q \cdot l_1 = 2 \text{ kN/m} \cdot 4 \text{ m} = 8 \text{ kN}$$



Mivel F_{Az} értéke pozitív, a feltételezésünknek megfelelő irányba hat.

3. Reakciók ellenőrzése

Ellenőrzésképpen felírhatunk nyomatéki egyensúlyi egyenletet a „B” ponton átmenő x tengelyre:

$$\sum M_{iB} = q \cdot l_1 \cdot \left(l_3 - \frac{l_1}{2} \right) + F_1 \cdot l_4 - \\ - F_{Ay} \cdot l_2 - F_{Az} \cdot (l_3 - l_1)$$

$$\sum M_{iB} = 0 \text{ kNm}$$

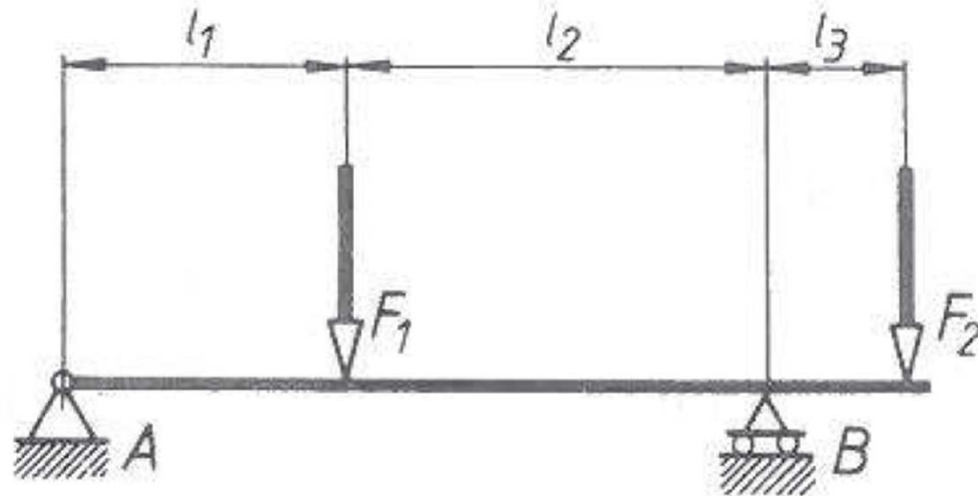
Tehát a számításaink helyesek.

Válasz/értékelés

A feladat megoldása során meghatároztuk a tartó reakció erőit.

1. FELADAT

Az ábrán látható konzolos tartóra F_1, F_2 erő hat. A távolságok ismeretében határozzuk meg a kényszerekben ébredő reakció erőket!



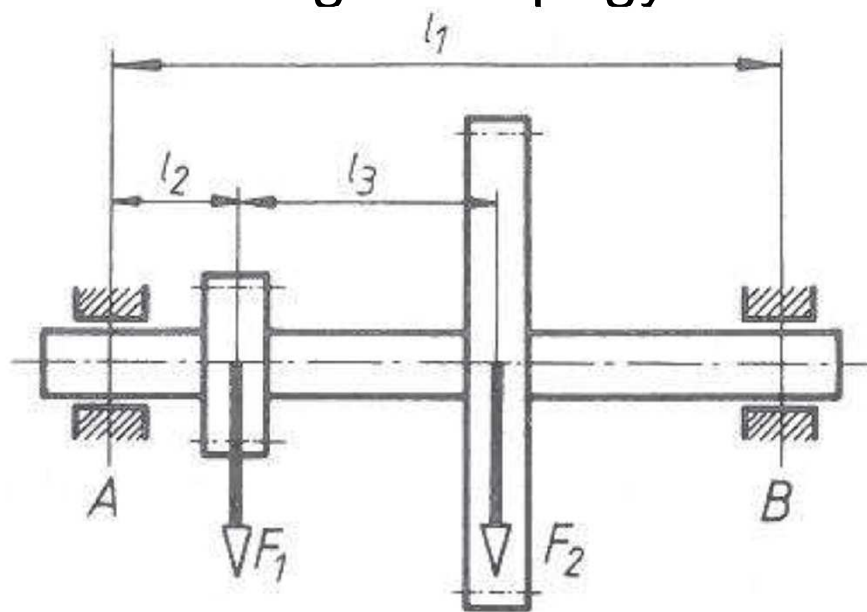
Adatok: $F_1 = 30 \text{ kN}$, $F_2 = 20 \text{ kN}$,
 $l_1 = 2 \text{ m}$, $l_2 = 3 \text{ m}$, $l_3 = 1 \text{ m}$.

Végeredmények: $F_A = 14 \text{ kN}$, $F_B = 36 \text{ kN}$.



2. FELADAT

Az ábrán látható kettős csapágyazású hajtóműtengelyen két fogaskerék található, melyek a tengelyt F_1, F_2 erővel terhelik. A távolságok ismeretében határozzuk meg a csapágyakban ébredő reakció erőket!



Adatok: $F_1 = 6,5 \text{ kN}$, $F_2 = 2 \text{ kN}$,

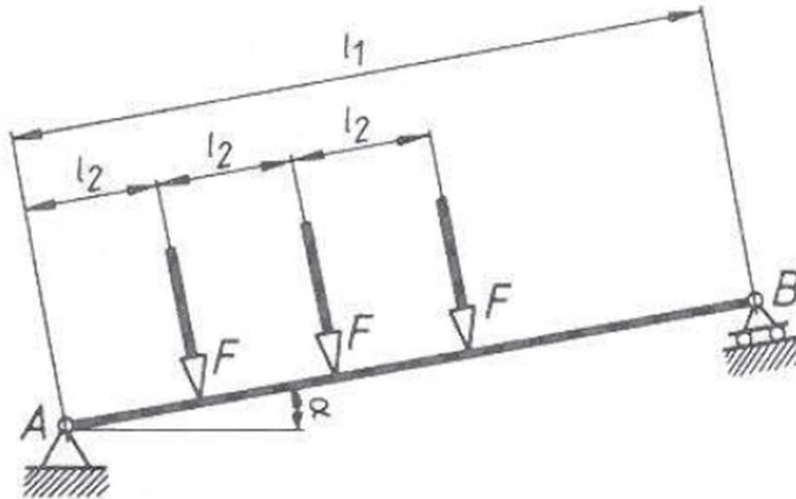
$l_1 = 1,2 \text{ m}$, $l_2 = 0,22 \text{ m}$, $l_3 = 0,69 \text{ m}$.

Végeredmények: $F_A = 5,79 \text{ kN}$, $F_B = 2,71 \text{ kN}$.



3. FELADAT

Az ábrán látható tartó a vízszinteshez képest α szögben fekszik. A görgős támasz párhuzamos síkban helyezkedik el a tartóval. A tartóra merőlegesen 3 darab F erő hat. A távolságok ismeretében határozzuk meg a kényszerekben ébredő reakció erőket!



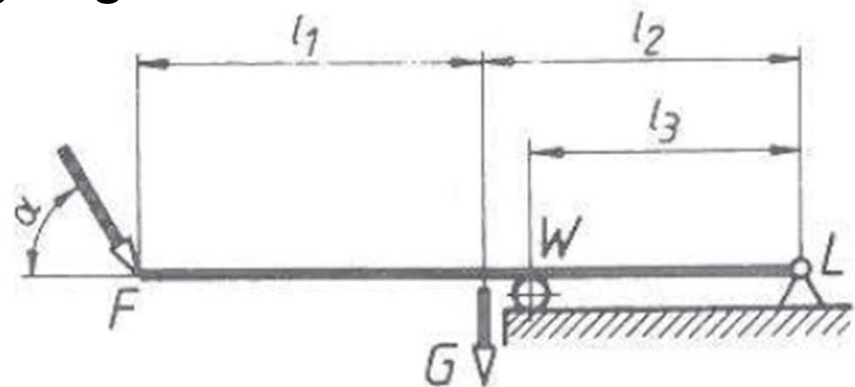
Adatok: $F = 10 \text{ kN}$, $\alpha = 10^\circ$,
 $l_1 = 5 \text{ m}$, $l_2 = 1 \text{ m}$.

Végeredmények: $F_A = 18 \text{ kN}$, $F_B = 12 \text{ kN}$.



4. FELADAT

Az ábrán látható ugródeszkára ható súlyerő G . Elugráskor a deszkára F erő hat, α szögben. A görgős támasz párhuzamos síkban helyezkedik el a tartóval. A tartóra merőlegesen 3 darab F erő hat. A távolságok ismeretében határozzuk meg a W görgőre és az L csuklóra ható erő nagyságát, utóbbinak a vízszintessel bezárt szögét!



Adatok: $G = 0,3 \text{ kN}$,

$$F = 0,9 \text{ kN}, \alpha = 60^\circ,$$

$$l_1 = 2,6 \text{ m}, l_2 = 2,4 \text{ m}, l_3 = 2,1 \text{ m}.$$

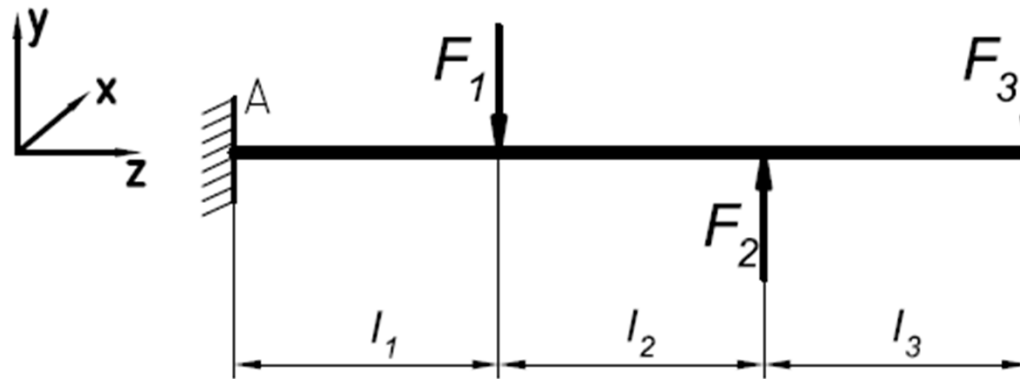
Végeredmények: $F_W = 2,20 \text{ kN}$,

$$F_L = 1,21 \text{ kN}, \alpha_L = 68,1^\circ.$$



5. FELADAT

Az ábrán látható befogott tartóra F_1, F_2, F_3 erő hat. A távolságok ismeretében határozzuk meg a kényszerben ébredő reakciókat!



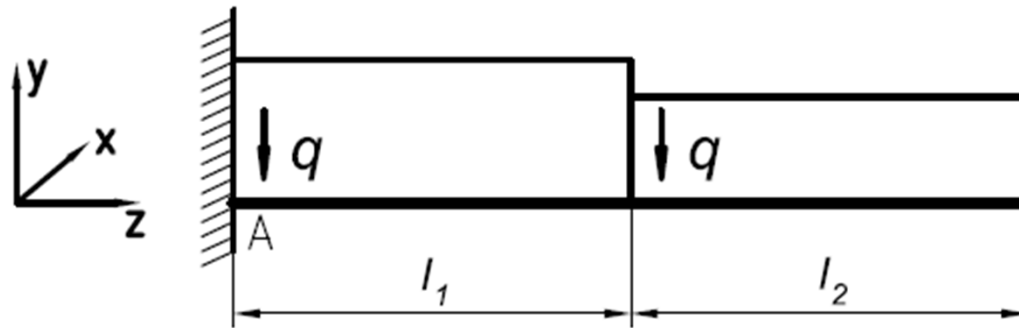
Adatok: $F_1 = 4 \text{ kN}$, $F_2 = 2,5 \text{ kN}$, $F_3 = 3,5 \text{ kN}$,
 $l_1 = l_2 = l_3 = 0,5 \text{ m}$.

Végeredmények: $F_A = 5 \text{ kN}$,
 $M_A = 4,75 \text{ kNm}$.



6. FELADAT

Az ábrán látható befogott tartóra q_1, q_2 megoszló erőrendszer hat. A távolságok ismeretében határozzuk meg a kényszerben ébredő reakciókat!



Adatok: $q_1 = 6 \text{ kN/m}$, $q_2 = 3 \text{ kN/m}$,
 $l_1 = l_2 = 2 \text{ m}$.

Végeredmények: $F_A = 18 \text{ kN}$,
 $M_A = 30 \text{ kNm}$.



7. FELADAT

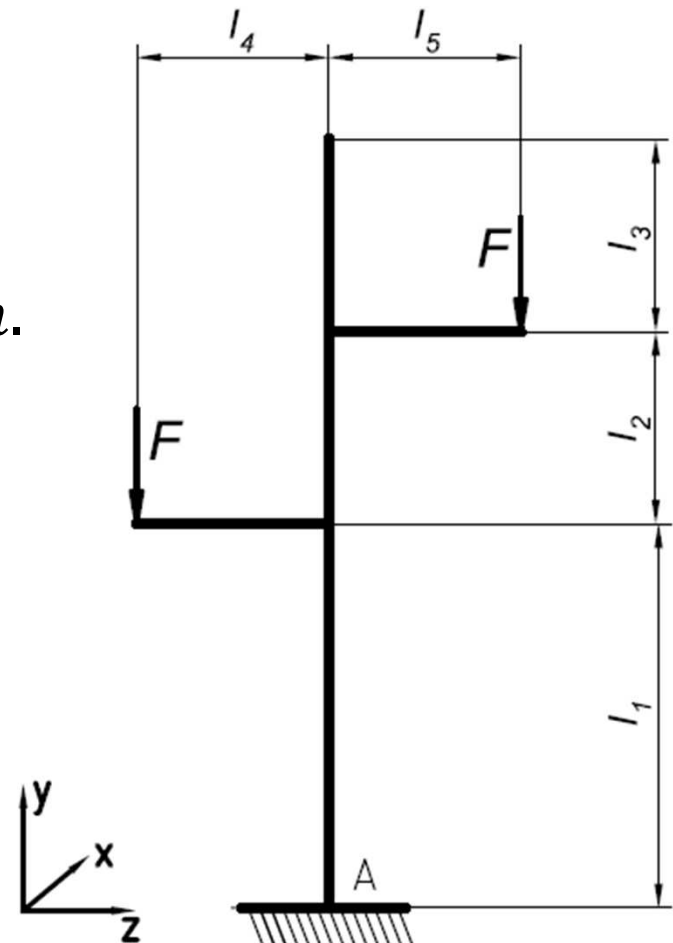
Az ábrán látható nyitott keretszerkezetre F_1, F_2 erő hat. A távolságok ismeretében határozzuk meg a kényszerben ébredő reakciókat!

Adatok: $F = 2 \text{ kN}$,

$$l_1 = 2 \text{ m},$$

$$l_2 = l_3 = l_4 = l_5 = 1 \text{ m}.$$

Végeredmények: $F_A = 4 \text{ kN}$.





8. FELADAT

Az ábrán látható nyitott keretszerkezetre F koncentrált erő és q megoszló erőrendszer hat. A távolságok ismeretében határozzuk meg a kényszerekben ébredő reakciókat!

Adatok: $F = 5 \text{ kN}$, $q = 2,5 \text{ kN/m}$,

$$l_1 = l_2 = 2 \text{ m},$$

$$l_3 = 2,5 \text{ m}$$

$$l_4 = 1,5 \text{ m}.$$

Végeredmények:

$$F_{Az} = -5 \text{ kN},$$

$$F_{Ay} = -2 \text{ kN},$$

$$F_{By} = 12 \text{ kN}.$$

