5. Tartószerkezetek statikája

5.1. Az igénybevétel fogalma. Az igénybevételi függvények és az igénybevételi ábrák

Szerkezet a merev testek és az állvány (föld) kényszerekkel történő összekapcsolásával keletkezik.

Tartószerkezet olyan nyugalomban lévő szerkezet, amely a rá ható tetszőleges külső terhelés hatására is nyugalomban marad. Leggyakoribb alkotóeleme a prizmatikus rúd. Csak statikailag határozott tartószerkezetekkel foglalkozunk egyenlőre, tehát térbelinél s=k=6, síkbelinél s=k=3 minden egyes elemre.

Igénybevételnek nevezzük a tartó egyes keresztmetszeteit terhelő belső erőket. Az igénybevétel okozza a testek deformációját (lásd. Szilárdságtan) és sokszor a tönkremenetelét.

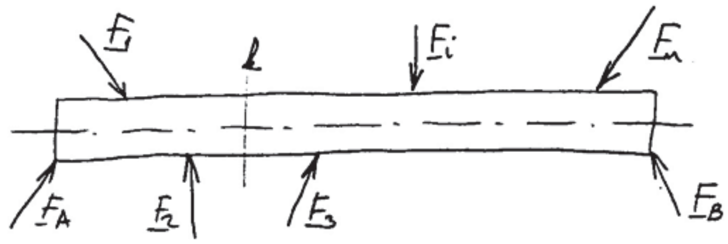
$$\underline{F}_A + \underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \underline{F}_3 + \ldots + \underline{F}_i + \ldots + \underline{F}_n + \underline{F}_B = \underline{0}$$

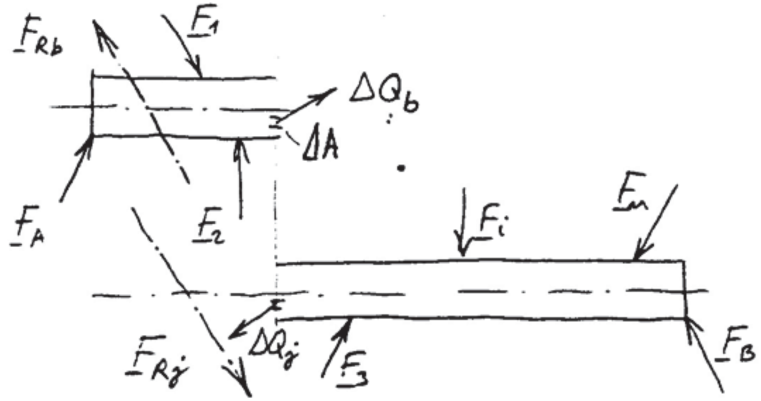
$$\underline{F}_{Rb} = \underline{F}_A + \underline{F}_1 + \underline{F}_2$$

$$\underline{F}_{Rj} = \underline{F}_3 + \ldots + \underline{F}_i + \ldots + \underline{F}_n + \underline{F}_B$$

$$\underline{F}_{Rb} + \underline{F}_{Rj} = \underline{0} \quad \Rightarrow \quad \underline{F}_{Rb} = -\underline{F}_{Rj}$$

$$\left|\underline{F}_{Rb}\right| = \left|\underline{F}_{Rj}\right|$$





A „k" keresztmetszet „A" felületén megoszló erő:

$$\underline{Q}_b = \int_{(A)} \frac{d\underline{Q}_b}{dA} \cdot dA \quad ; \qquad \underline{Q}_j = \int_{(A)} \frac{d\underline{Q}_j}{dA} \cdot dA$$

Ezzel az elvágott tartó egyensúlyba kerül:

$$\underline{F}_{Rb} + \underline{Q}_b = \underline{0} \quad \Rightarrow \quad \underline{F}_{Rb} = -\underline{Q}_b$$ ill. $$\underline{F}_{Rj} + \underline{Q}_j = \underline{0} \quad \Rightarrow \quad \underline{F}_{Rj} = -\underline{Q}_j$$

de $\underline{F}_{Rb} = -\underline{F}_{Rj}$, ezért $\underline{Q}_b = \underline{F}_{Rj}$

$$\underline{Q}_j = \underline{F}_{Rb}$$

Igénybevételnek nevezzük a bal oldali erők eredőjét ($\underline{F}_{Rb}$), ez megállapodás.

Húzó vagy nyomó (normális) igénybevétel a vizsgált keresztmetszettől balra lévő erők eredőjének tengelyirányú összetevője:

$$F_N = \underline{F}_{Rb} \cdot \underline{i} = \left|\underline{F}_{Rb}\right| \cdot \cos\alpha = \sum_{i=1}^{n} \left|\underline{F}_{bi}\right| \cdot \cos\alpha_i$$

Pozitív, ha a keresztmetszettől el mutat, tehát húzza azt. Negatív a nyomó igénybevétel.

Nyíró (tangenciális) igénybevétel az $\underline{F}_{Rb}$ erő tengelyre merőleges összetevője:

$$F_T = \left|\underline{F}_{Rb}\right| \cdot \sin\alpha = \sum_{i=1}^{n} \left|\underline{F}_{bi}\right| \cdot \sin\alpha_i$$

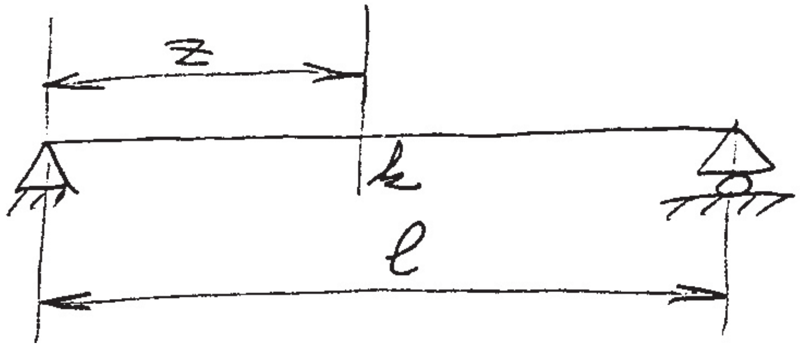
Hajlító igénybevétel az erő nyomatéka a keresztmetszet hajlítási tengelyére.

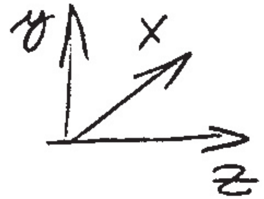
Pozitív, ha az óramutató járásával ellentétesen forgat.

$$M = \left| \underline{r}_{Rb} \times \underline{F}_{Rb} \right| = M_b = \sum_{(b)} M_i$$

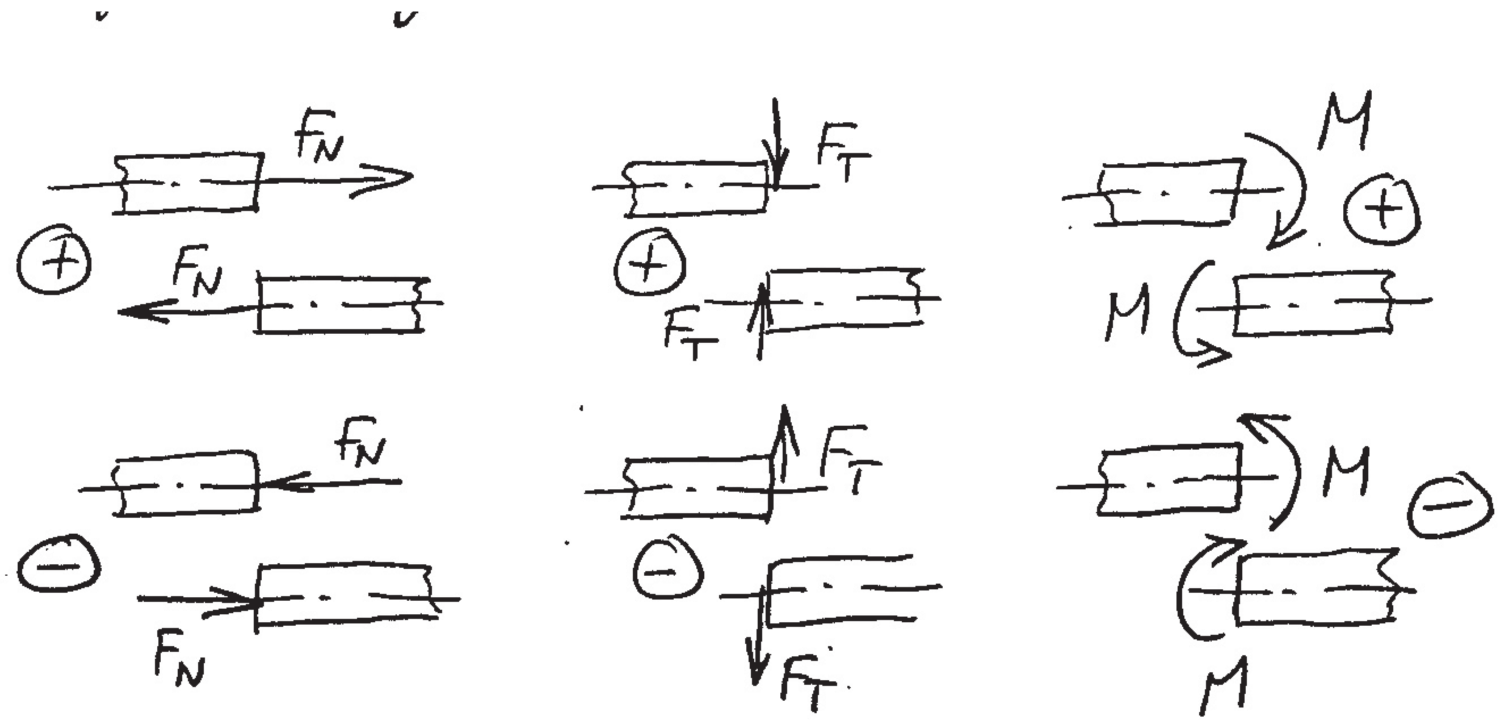
Az igénybevételt a tartó valamennyi keresztmetszetében ismeri kell, ez igénybevételi függvényhez vezet:

$$F_N = F_N(z)$$
$$F_T = F_T(z)$$
$$M = M(z)$$





Előjelszabály:



Igénybevételi ábra, melynek minden egyes ordinátája megmutatja, hogy a felette lévő keresztmetszetben mekkora a bal oldali erők eredőjének $\left[\underline{F}_{Rb};\underline{M}_{Rb}\right]_k$ vektorkettőse. A redukált vektorkettős a „k" keresztmetszetben:

A redukált vektorkettős a „k" keresztmetszetben:

$$\underline{F}_{Rb} = F_{xb} \cdot \underline{i} + F_{yb} \cdot \underline{j} + F_{zb} \cdot \underline{k}$$

$$\underline{M}_{Rb} = M_{xb} \cdot \underline{i} + M_{yb} \cdot \underline{j} + M_{zb} \cdot \underline{k}$$

Az M_{zb} =T összetevő a keresztmetszetet csavarja.

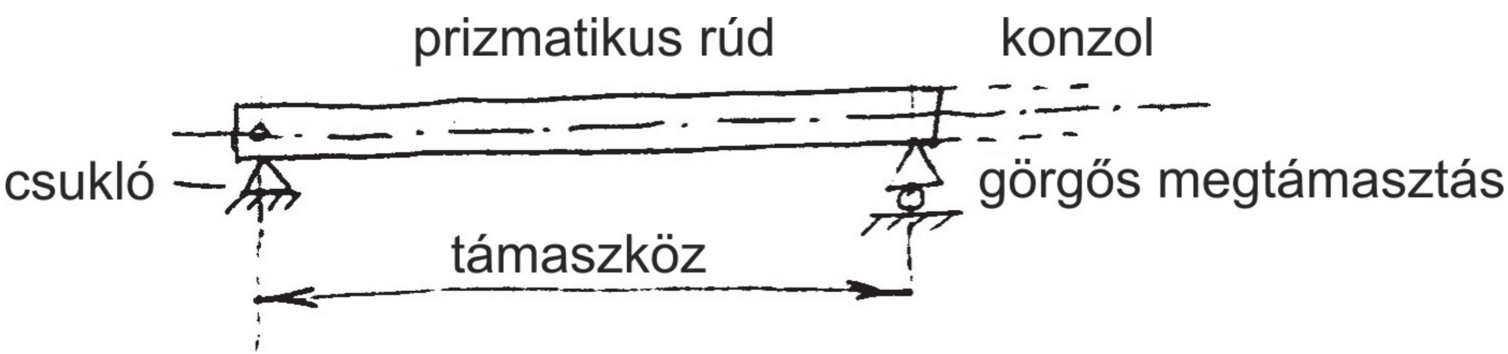
<u>Csavaró igénybevételt</u> okoz az $\underline{M}_{zb}$ =T nyomaték.

Az igénybevételeket tetszőleges „z”helyen kell ismerni.
Igénybevételi függvények:

$$F_N = F_N(z)$$
$$F_T = F_T(z)$$
$$M = M(z)$$
$$T = T(z)$$

Mindig a tartó hossztengelye lesz a „z” irány, a keresztmetszet az „xy” sík.

5.2. Koncentrált erőkkel terhelt kéttámaszú tartó



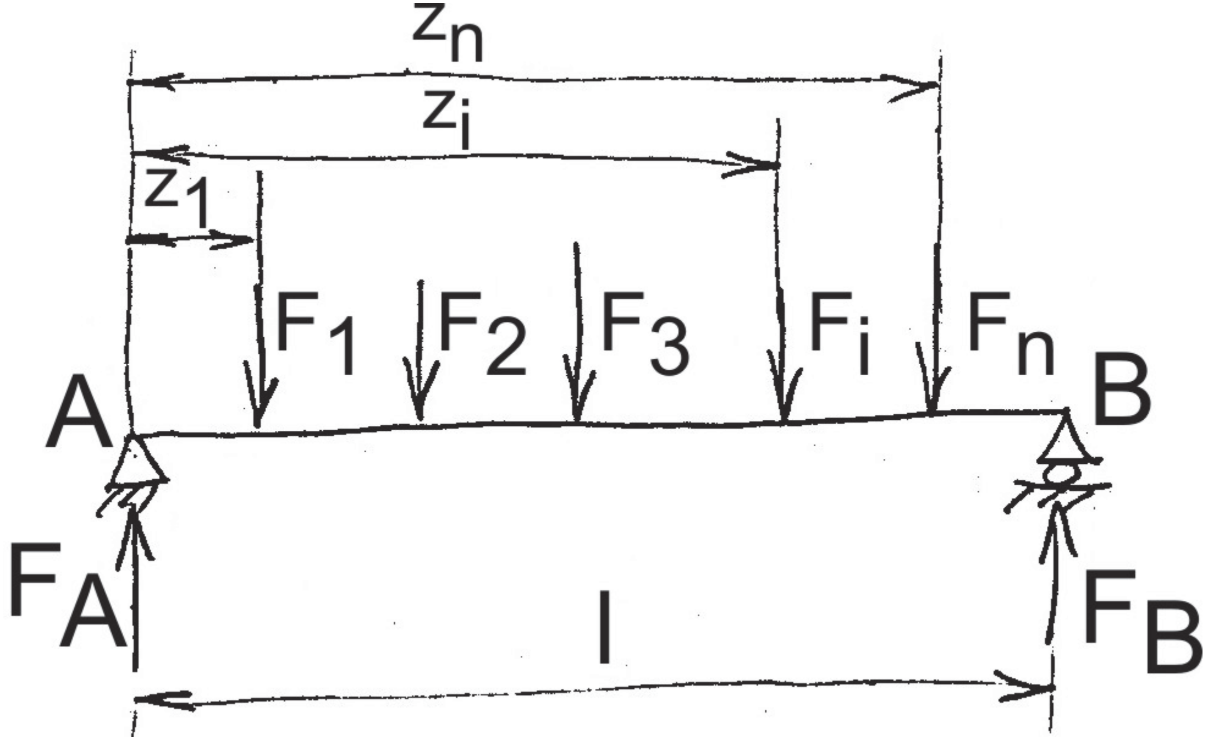
Síkproblémaként tárgyalható.

Reakcióerők meghatározása:

$$\underline{F}_A + \underline{F}_B + \sum_{i=1}^{n} \underline{F}_i = \underline{0}$$

$$\underline{r}_A \times \underline{F}_A + \underline{r}_B \times \underline{F}_B + \sum_{i=1}^{m} \underline{M}_i + \sum_{i=1}^{n} \underline{r}_i \times \underline{F}_i = \underline{0}$$

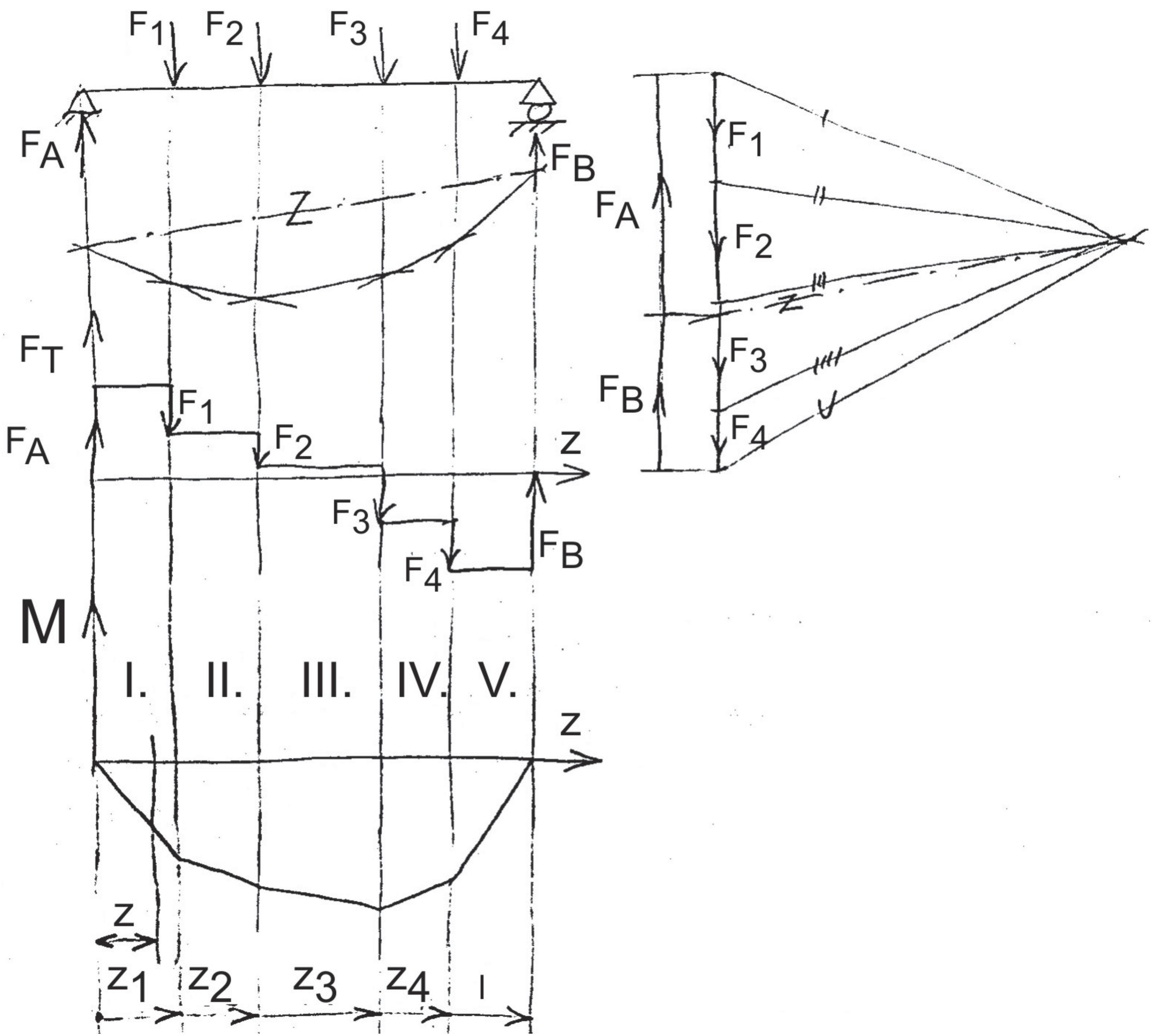
Ha a tartót csak párhuzamos erők terhelik:



$$F_A + F_B = \sum_{i=1}^{n} F_i$$

$$M_A = l \cdot F_B - \sum_{i=1}^{n} z_i \cdot F_i = 0 \quad \Rightarrow \quad F_B = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i \cdot F_i}{l}$$

Szerkesztés:



I. $0 \le z < z_1 \quad F_T(z) = F_A \quad ; \quad M(z) = -z \cdot F_A$

II. $z_1 \le z < z_2 \quad F_T(z) = F_A - F_1;$

$$M(z) = -z \cdot F_A + (z - z_1) \cdot F_1$$

III. $z_2 \le z \le z_3 \quad F_T(z) = F_A - F_1 - F_2$

$$M(z) = -z \cdot F_A + (z - z_1) \cdot F_1 + (z - z_2) \cdot F_2$$

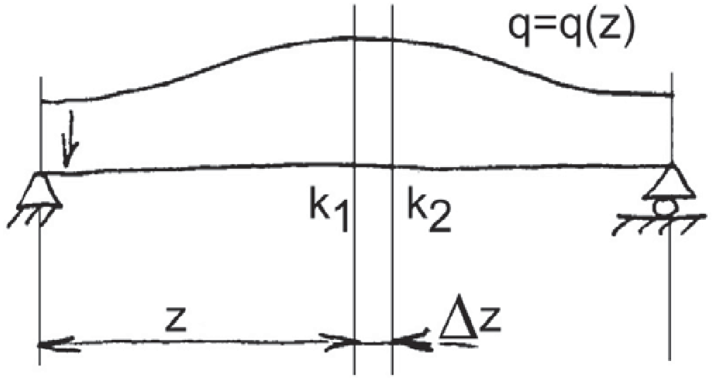
IV. $z_3 \le z < z_4 \quad F_T(z) = F_A - F_1 - F_2 - F_3$

$$M(z) = -z \cdot F_A + (z - z_1) \cdot F_1 + (z - z_2) \cdot F_2 + (z - z_3) \cdot F_3$$

V. $z_4 \le z < l \quad F_T(z) = F_A - F_1 - F_2 - F_3 - F_4 = -F_B$

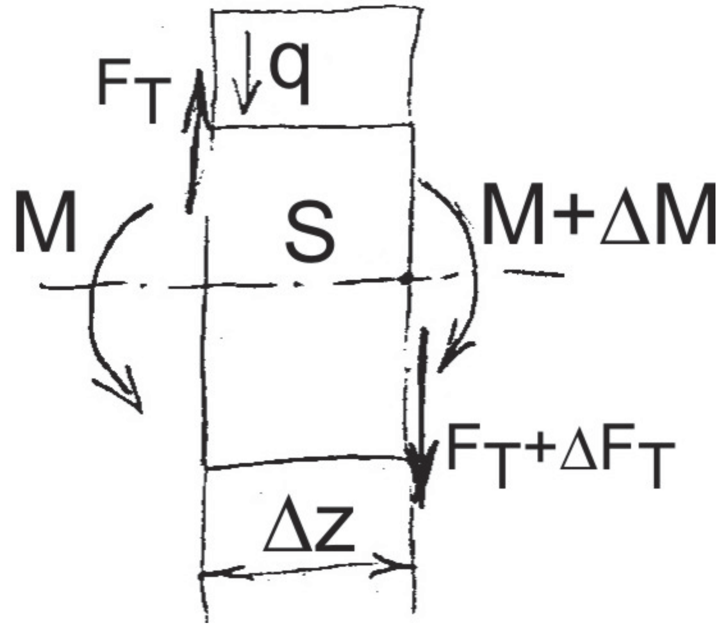
$$M(z) = -z \cdot F_A + \sum_{i=1}^{4} (z - z_i) \cdot F_i = -(l - z) \cdot F_B$$

5.3. Megoszló erőkkel terhelt kéttámaszú tartó



Az „S” pontra írjuk fel az elemi rúdrész nyomatéki egyenletét:

$$-M+\left(M+\Delta M\right)+F_T\cdot\Delta z-q\cdot\Delta z\cdot\frac{\Delta z}{2}=0$$



Rendezve és Δz-vel elosztva:

$$\frac{\Delta M}{\Delta z}=-F_T+\frac{q\cdot\Delta z}{2}$$

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta M}{\Delta z}=\boxed{\frac{dM}{dz}=-F_T}$$

Az elemi rész nyíróerő egyensúlyi egyenlete:

$$\Delta F_T = -q \cdot \Delta z$$

$$\frac{\Delta F_T}{\Delta z} = -q$$

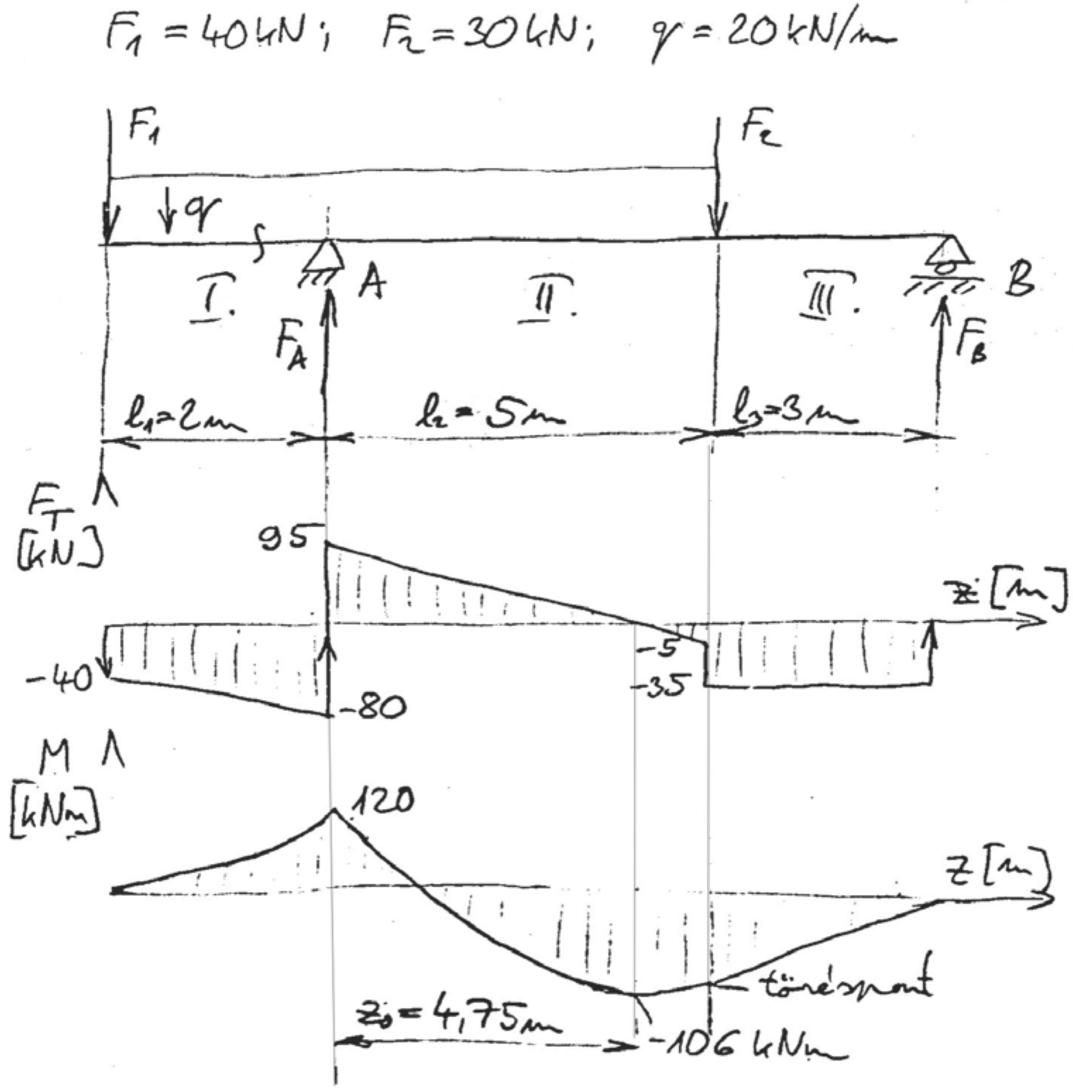
$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta F_T}{\Delta z} = \boxed{\frac{dF_T}{dz} = -q}$$

A két differenciálegyenlet együtt:

$$\frac{d^2 M}{dz^2} = -\frac{dF_T}{dz} = q$$

Az eredmény segítséget nyújt a szerkesztéshez.

Pl.



F_A=175 kN

F_B=35 kN

$$z_0 = \frac{F_A - F_1 - q * l_1}{q} = 4{,}75\ \mathrm{m}$$

I. $0 \le z \le 2m \quad F_T(z) = -F_1 - q \cdot z$

$$M(z) = F_1 \cdot z + \frac{q}{2} \cdot z^2$$

II. $2m \le z \le 7m \quad F_T(z) = -F_1 - q \cdot z + F_A$

$$M(z) = F_1 \cdot z + \frac{q}{2} \cdot z^2 - F_A \cdot (z - l_1)$$

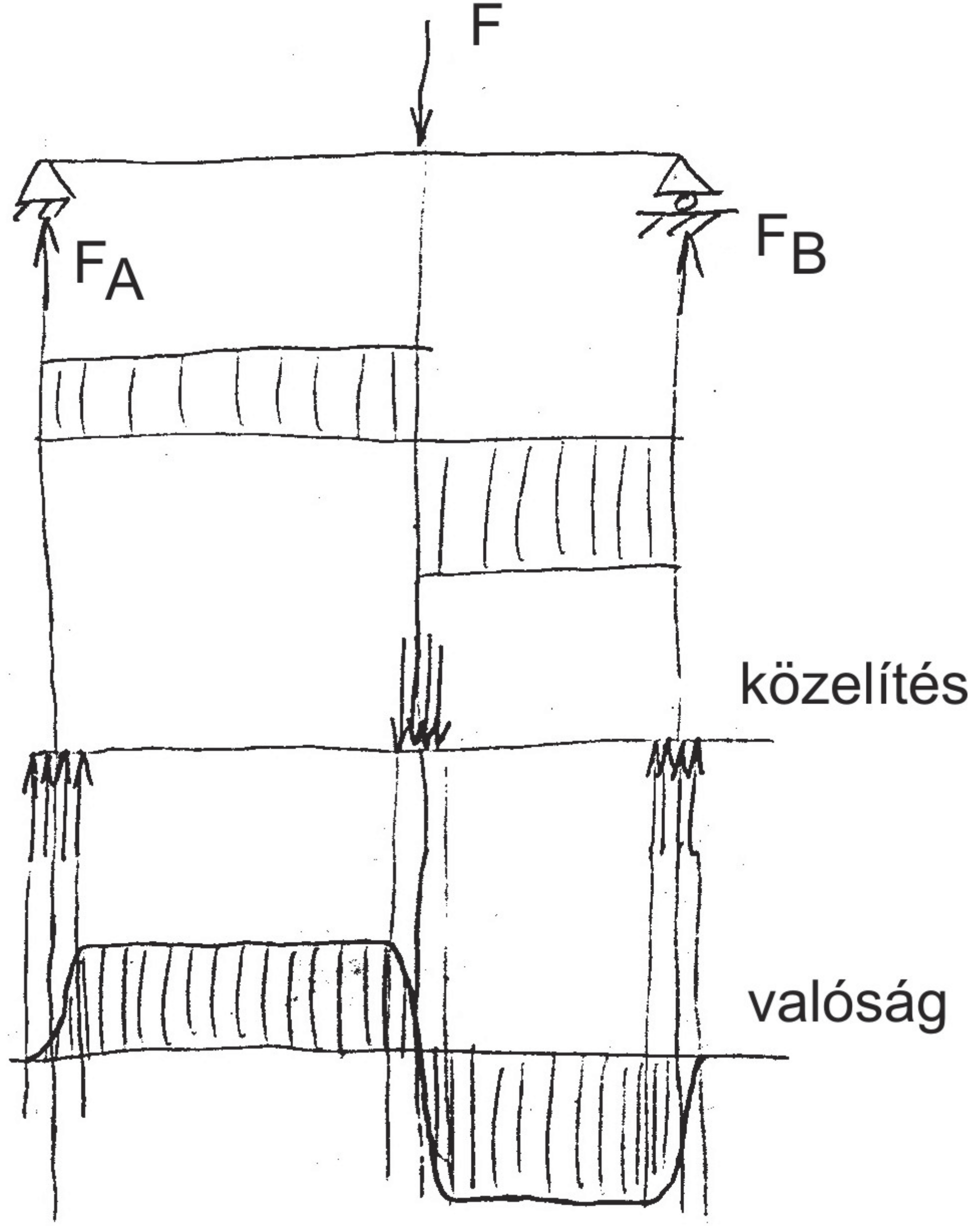
III. $7m \le z \le 10m$

$$F_T(z) = -F_1 - q \cdot (l_1 + l_2) + F_A - F_2 = -F_B$$

$$M(z) = F_1 \cdot z + q \cdot (l_1 + l_2)\left(z - \frac{l_1 + l_2}{2}\right) - F_A \cdot (z - l_1) + F_2 \cdot [z - (l_1 + l_3)]$$

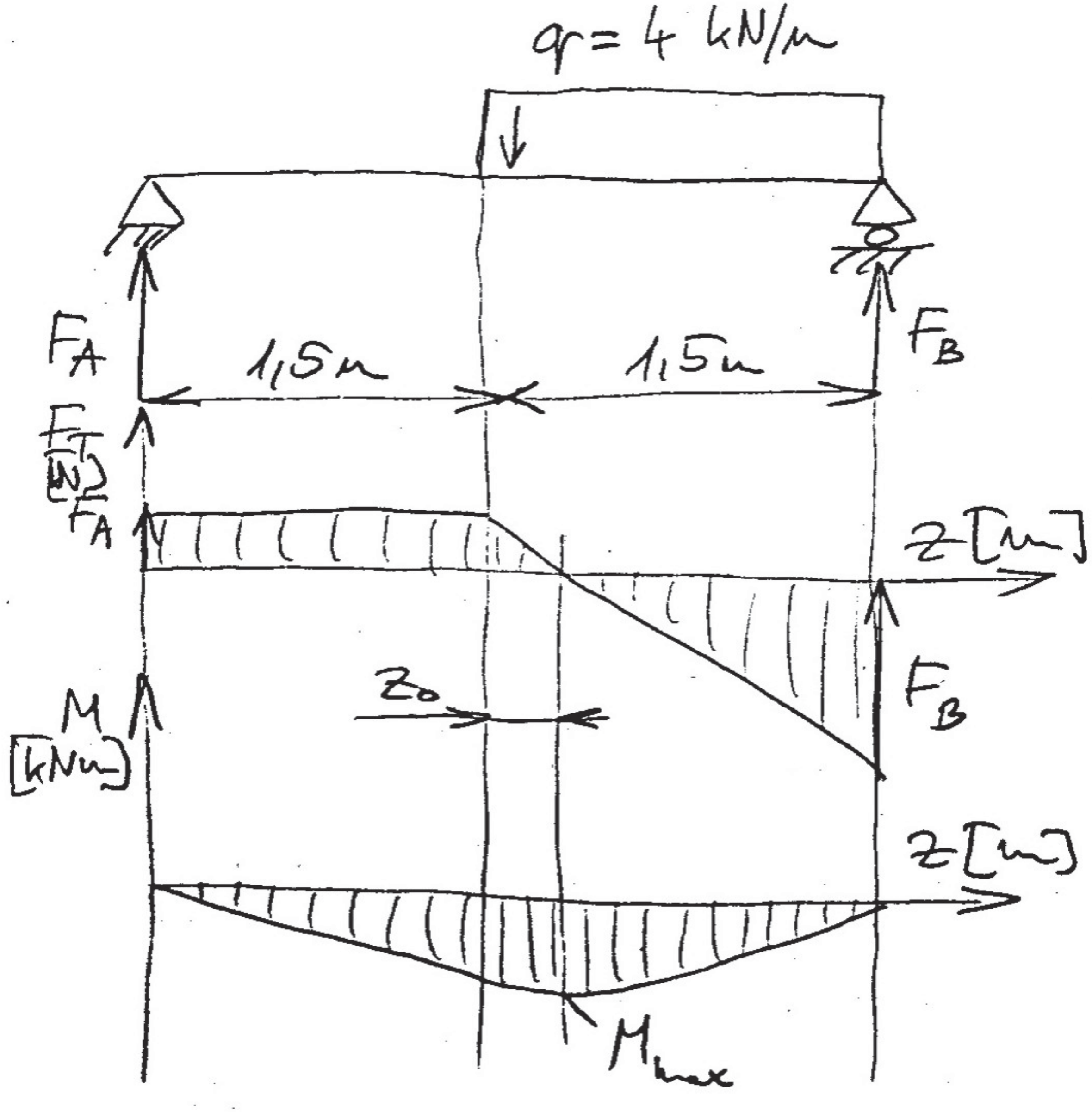
$$M(z) = -[(l_1 + l_2 + l_3) - z] \cdot F_B$$

Pl.



A valóságban nincs koncentrált erő, a nyíróerő ábra folytonos.

Pl.



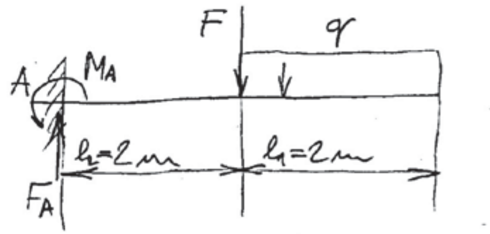
$$F_A = 1{,}5\ kN$$

$$F_B = 4{,}5\ kN$$

$$z_0 = \frac{F_A}{q} = 0{,}375\ m$$

$$M_{\max} = -2{,}531\ kNm$$

Pl.: Befogott tartó



$F = 3\ kN$
$q = 2\ kN/m$

I. $\underline{0 \le z \le 2m}$

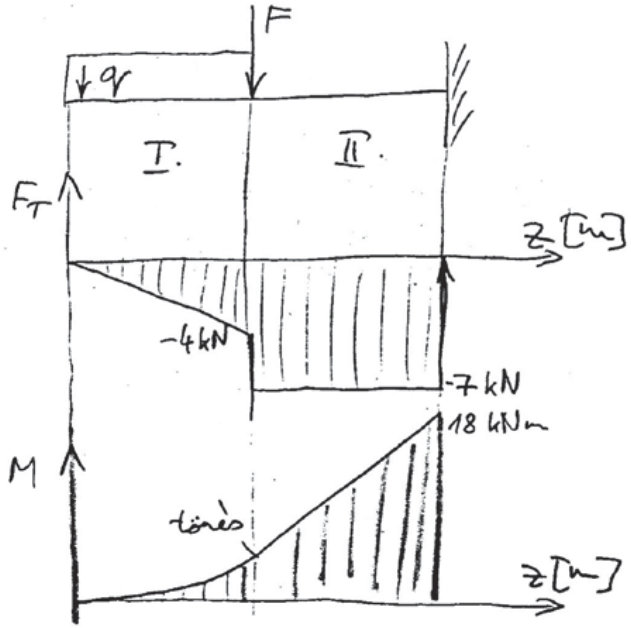
$$F_T(z) = -q \cdot z$$

$$M(z) = \frac{q}{2} \cdot z^2$$

II. $\underline{2m \le z \le 4m}$

$$F_T(z) = q \cdot l_1 + F$$

$$M(z) = q \cdot l_1 \cdot \left(z - \frac{l_1}{2} \right) + F \cdot (z - l_1)$$



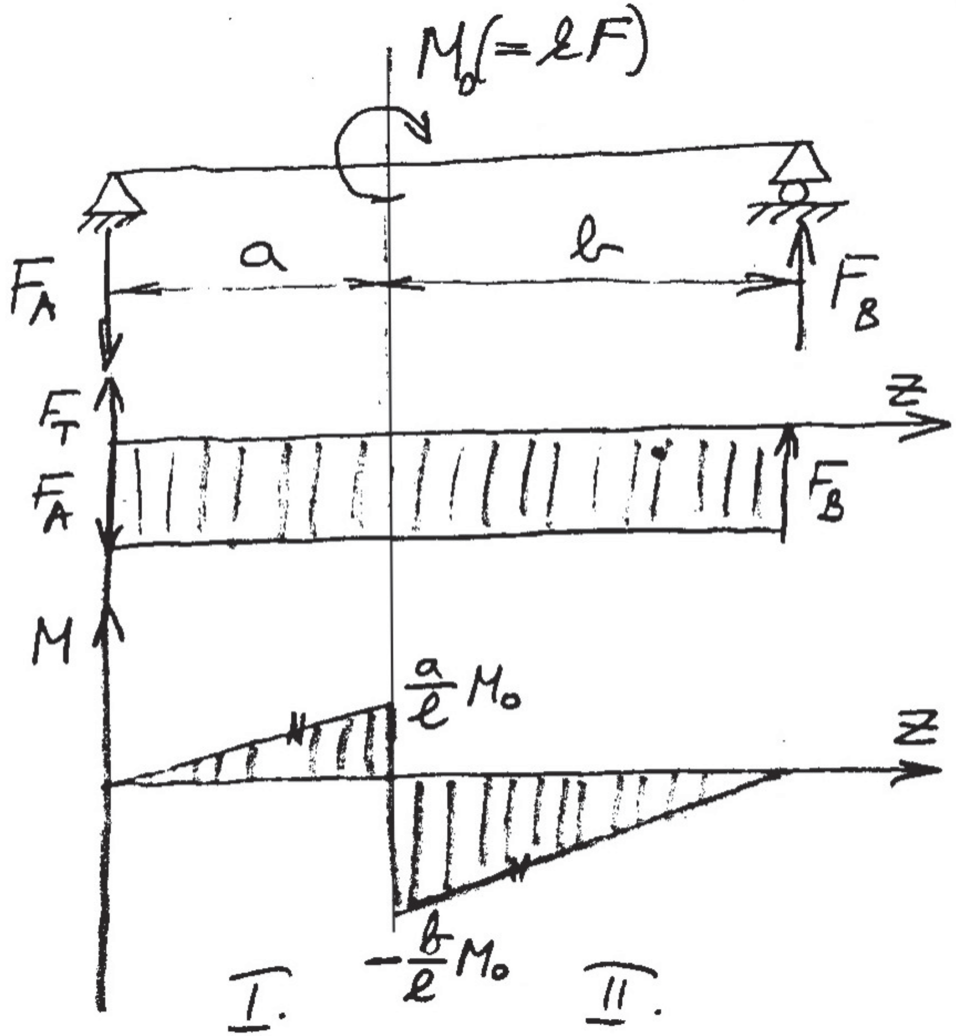
$$F_T(4m) = 2\ kN/m \cdot 2\ m + 3\ kN = 7\ kN$$

$$M(4m) = 2\ kN/m \cdot 2\ m \cdot \left(4\ m - \frac{2\ m}{2} \right) + 3\ kN \cdot (4\ m - 2\ m) = 18\ kNm$$

$$F_A = 7\ kN$$

$$M_A = 18\ kNm$$

Pl.:



I. $\underline{0 \le z < a}$

$$M(z) = \frac{M_0}{l} \cdot z$$

II. $\underline{a \le z \le l}$

$$M(z) = \frac{M_0}{l} \cdot z - M_0 = M_0\left(\frac{z}{l} - 1\right)$$