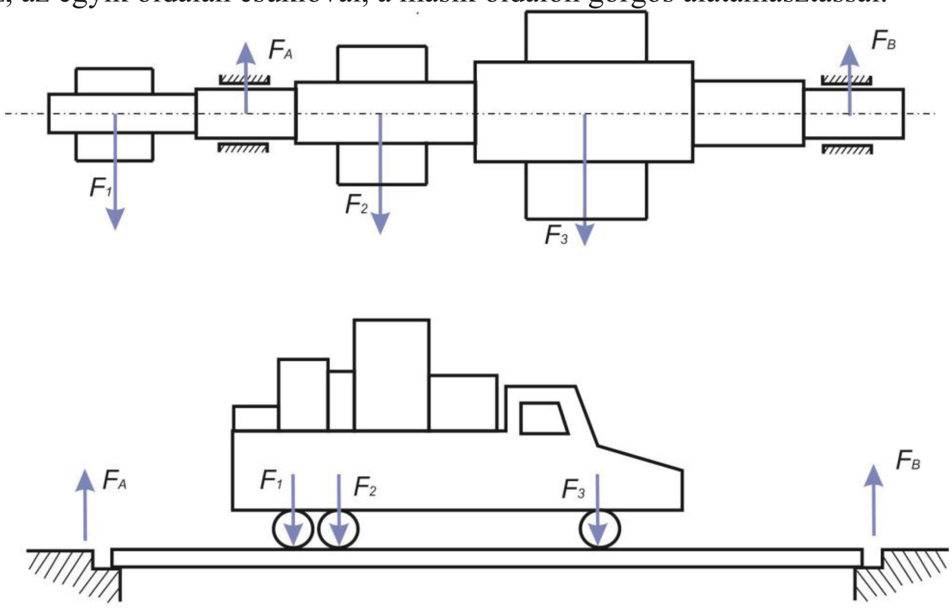
11. Koncentrált és megoszló erőkkel, nyomatékokkal terhelt kéttámaszú és befogott tartók. Reakciók számítása.

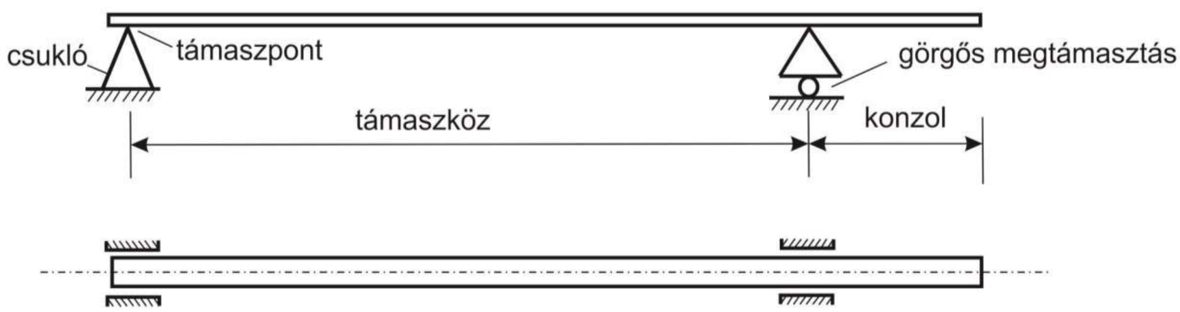
11.1. A kéttámaszú tartó

A műszaki gyakorlatban az egyik leggyakrabban alkalmazott tartószerkezet a ***kéttámaszú tartó***. Egyszerűbb hidakat, tartógerendákat, géptengelyeket két pontjukon megtámasztott merev rudakként modellezünk *(11.1. ábra)*. A prizmatikus, egyenes tengelyű rudat két kényszerrel rögzítjük a környezethez, az egyik oldalán csuklóval, a másik oldalon görgős alátámasztással.



11.1. ábra. Kéttámaszú tartó modellezése

Fontos jellemzőjük a támaszköz és az esetleges konzolhossz. Jelképes ábrázolásukat mutatja a *11.2* ábra. A ***konzol*** azt a részét jelenti a tartószakasznak, amely túlnyúlik a támaszközön. Amelyik tartó konzolt tartalmaz ***konzolos kéttámaszú tartónak*** nevezzük.



11.2 ábra. Kéttámaszú tartó jelképes ábrázolása

A gépek forgó tengelyeire ható általános irányú külpontos erő,- mint például ferdefogú fogaskerékhajtás - esetén három (x-y-z) terheléskomponenssel kell számolnunk. Ezekben az esetekben a szuperpozíció elvét használva határozzuk meg a csapágyakra (alátámasztásokra) ható reakció erőket azáltal, hogy a feladatot visszavezetjük több különböző síkbeli kéttámaszú tartó modellre. Tengelymodellezés esetén a csapágyak középsíkjába feltételezzük a kényszereket.

A továbbiakban a kéttámaszú tartószerkezet feladatok síkproblémaként tárgyaljuk, tehát a tartóra jutó valamennyi erőhatás egy közös síkba esik. Ebben a síkban található a tartó hossztengelye is.

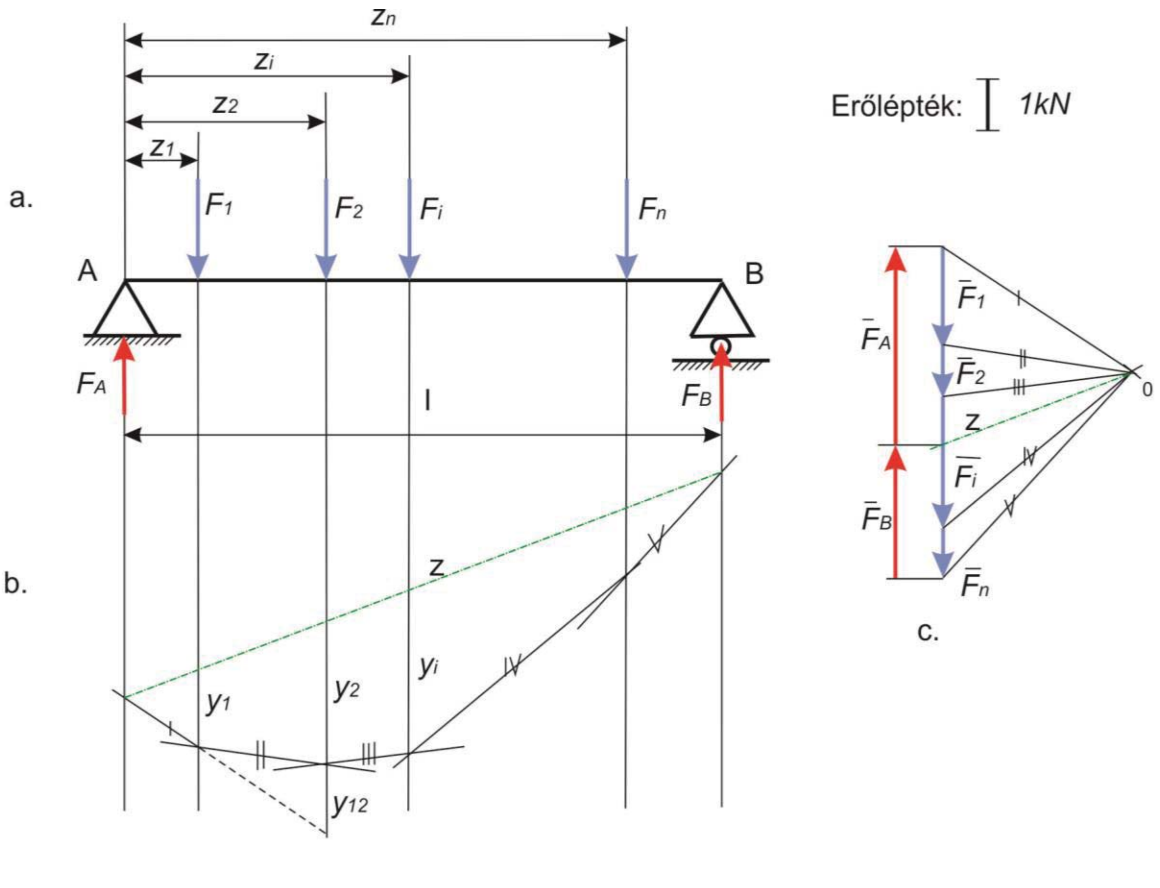
A tartók vizsgálata a reakcióerők meghatározásával kezdődik, a síkbeli erőrendszerek egyensúlyi törvényei alapján. (A 11.3. ábra jelölései alapján)

$$\underline{F}_A + \underline{F}_B + \sum_{i=1}^{n} \underline{F}_i = 0 \qquad (11.1.)$$

$$\underline{r}_A \cdot \underline{F}_A + \underline{r}_B \cdot \underline{F}_B + \sum_{i=1}^{n} \underline{r}_i \cdot \underline{F}_i + \sum_{j=1}^{m} \underline{M}_j = \underline{0} \qquad (11.2.)$$

Mintapéldánkon *(11.3 ábra)* egy nem konzolos kéttámaszú tartót látunk, melyet *n* darab párhuzamos, a tartó tengelyére merőleges erőkből álló erőrendszer terhel. A felvett görgős alátámasztásban ébredő reakcióerő párhuzamos az aktív erőkkel. Ebből következően a csuklós alátámasztásban is csak velük párhuzamos erő ébredhet. A tartót terhelő összes erő párhuzamos és egyensúlyi erőrendszert alkot.

A *11.1.* egyenlet átrendezésével: $$F_A + F_B = \sum_{i=1}^{n} F_i \qquad (11.3.)$$



11.3. ábra. Kéttámaszú tartó reakció erőnek meghatározása szerkesztéssel

Számítással történő megoldás első lépésként nyomatéki egyensúlyi egyenletet írunk fel valamelyik alátámasztási ponton átmenő, a tartó síkjára merőleges tengelyre. Jelen esetben mindegy melyikre, hiszen csak a tartó keresztmetszetére merőleges erők működnek, így vízszintes erő nincs. Amennyiben vízszintes reakcióerő is keletkezne és annak hatásvonala nem halad át a tartószerkezet görgős alátámasztásán, akkor a nyomatéki egyensúlyi egyenletet a csuklós alátámasztásra ajánlott először felírni!

Tehát írjuk fel a nyomatéki egyensúlyi egyenletet az „A" ponton átmenő tengelyre.

$$\sum M_{iA} = l \cdot F_B - \sum_{i=1}^{n} z_i \cdot F_i = 0 \qquad (11.4.)$$

Az egyenlet átrendezésével kapjuk:

$$F_B = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i \cdot F_i}{l} \qquad (11.5.)$$

Ezt követően a nyomatéki egyensúlyt a „B" ponton átmenő tengelyre írjuk fel.

$$\sum M_{iB} = l \cdot F_A - \sum_{i=1}^{n} (l - z_i) \cdot F_i = 0 \; ; \qquad F_A = \frac{\sum_{i=1}^{n} (l - z_i) \cdot F_i}{l} \qquad (11.6.)$$

Ellenőrzésként a függőleges vetületű erők egyensúlyát írjuk fel. A megoldás helyes, ha összegzésként 0-t kapunk, vagy igen csekély, csak néhány ezrelék eltérést.

$$F_A + F_B - \sum_{i=1}^{n} F_i = 0 \qquad (11.7.)$$

A szerkesztés is az egyensúlyi egyenletek alapján hajtható végre. Az erők egyensúlya miatt azok vektorsokszögének és kötélsokszögének is zártnak kell lennie.

Az erőlépték felvételét követően elsőként képezzünk az erőrendszer *(F_1,F_2,.....F_n)* erőiből léptékhelyesen vektorsokszöget (*11.3.c. ábra*), majd vegyük fel a póluspontot (*O*). Az „*O* " pont, valamint a terhelő erők kezdő és végpontjainak összekötésével kapjuk az I.-V. jelzett pólussugarakat (szerkesztési segédvonal).Ezek párhuzamos eltolásával - beillesztve az eredeti ábrába- kapjuk meg a kötélsokszöget *(11.3.b.ábra)* Mivel a vektorsokszögnek záródnia kell, és a záró oldal az F_A és F_B reakcióerők között található, a kötélsokszög első oldala az F_A, míg az utolsó oldala az F_B reakcióerők hatásvonalát kell metszenie. Az így kapott két metszéspontot összekötjük (z), majd ezzel párhuzamosan a póluspponton át egy egyenest húzunk, ami kimetszi az erők hatásvonalából a reakcióerőket *(11.3.c ábra).* Az erőlépték ismeretében a kapott erőket lemérve pontosan meghatározható azok nagysága.

A gyakorlatban nem csak koncentrált erő okozta terhelések jelentkezhetnek. Könnyen belátható, hogy a tartószerkezet saját tömegéből eredő súlyerő ***megoszló terhelés***ként éri szerkezetünket. Főleg nagyobb tömegű hidak, tartószerkezetek esetében indokolt figyelembevételük.

A megoszló erőrendszert erőtanilag helyettesíthetjük a súlyvonalában ható

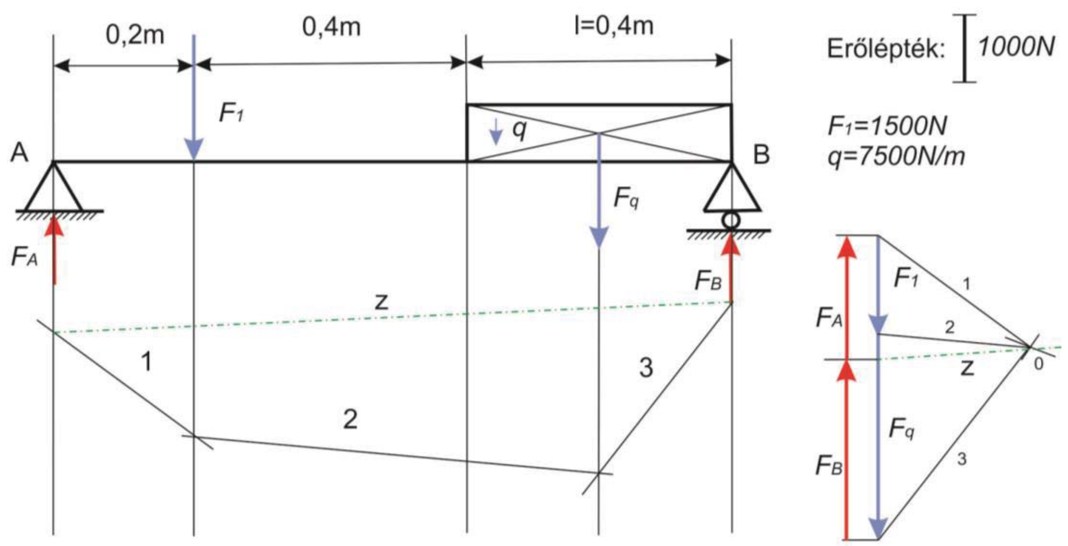
$$F_q = q \cdot l \qquad (11.8.)$$

nagyságú koncentrált eredő hatóerővel. Ez az ún. „***helyettesítő koncentrált erő***".

A reakcióerők meghatározása innentől kezdve megegyezik a koncentrált erők által terhelt kéttámaszú tartónál bemutatottakkal. Eltérés az igénybevételi ábrák meghatározásánál és ábrázolásánál tapasztalható, ahogy azt majd az igénybevételi függvények című fejezetben be is mutatjuk.

Általában koncentrált és megoszló erőrendszer egyszerre terheli a tartószerkezetet, ez az ún. ***vegyes terhelésű kéttámaszú tartó***.

A következő példában két tárcsaagy helyezkedik el a tengelyen. Az egyik tárcsaagy rövidebb szakaszon fekszik fel –így ott terhelése csaknem koncentrált *(*F_1*)*-, míg a másik hosszabb szakaszon - egyértelműen megoszló terhelésként *(*F_q*)* kell figyelembe vennünk. A megoldás a koncentrált és a megoszló terhelés szuperpozíciójával végezhető el. A *11.4 ábra* konkrét megoldásának menetét a példatár tartalmazza.



11.4. ábra. Vegyes terhelésű kéttámaszú tartó

Gyakran fordul elő, hogy a tartóhoz keresztirányban mereven kell (Pl.:hegesztéssel) függőleges rudat rögzíteni, amit aztán erőpár terhel. Ebben az estben az erők okozta terhelés forgatónyomaték formájában jelentkezik, a tartószerkezet egy meghatározott helyén. A terhelés egy helyhez kötött koncentrált nyomatékkal helyettesíthető, melynek nagysága:

$M = \pm k|F|$, előjele a szokásos módon állapítható meg. *(11.9.)*

Ha csak koncentrált nyomaték terheli tartónkat, akkor a támaszok reakcióerőinek is erőpárt kell alkotniuk annak egyensúlyozására. Számításuk a nyomaték és a támaszköz (*l*) ismeretében triviális.

A reakcióerők:

$$|F_A| = |F_B| = \frac{|M|}{l} \qquad (11.10.)$$

értelmük ellentétes és a terhelő nyomaték előjelétől függ.

Amennyiben a tartószerkezetre nem csak koncentrált nyomaték, hanem koncentrált erő és/vagy megoszló terhelés is hat, a számítást a *11.3. ábránál* leírtak szerint kell elvégezni, de a nyomatéki egyenletek felírásánál a koncentrált nyomatékokat előjel helyesen kell figyelembe venni!

11.2. Befogott tartók

Az olyan tartószerkezetet, amelynek az egyik vége befogással van rögzítve (például befalazással) ***befogott tartónak*** nevezzük. A befogás a tartót mereven rögzíti, így mind az elmozdulást, mind az elfordulást gátolja, a tartó tetszőleges erőrendszer hatására is egyensúlyban marad. A síkbeli befogásban

$F_A(F_{Ax};F_{Ay})$ reakcióerő és M_A reakciónyomaték

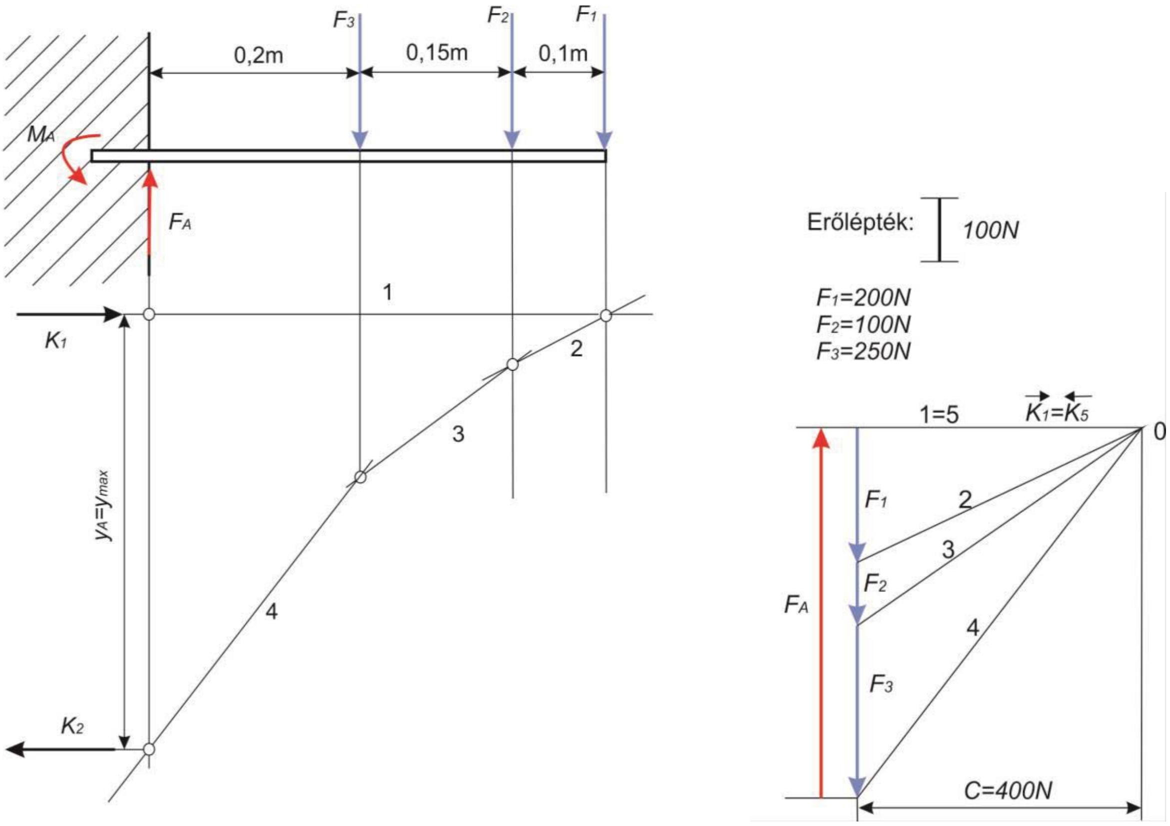
ébredhet.

A *11. 5. ábrán* látható függőleges koncentrált erőkkel terhelt befogott tartóban ébredő reakcióerőt és reakciónyomatékot a tartóra ható függőleges erők egyensúlya alapján határozhatjuk meg:

$$\sum F_{iy} = F_A - F_1 - F_2 - F_3 = 0 \qquad (11.11.)$$

A reakció nyomatékot pedig a befogási támaszra felírt nyomatéki egyensúlyi egyenlet alapján kapjuk meg:

$$\sum M_{iA} = 0 \qquad (11.12.)$$



a. b.

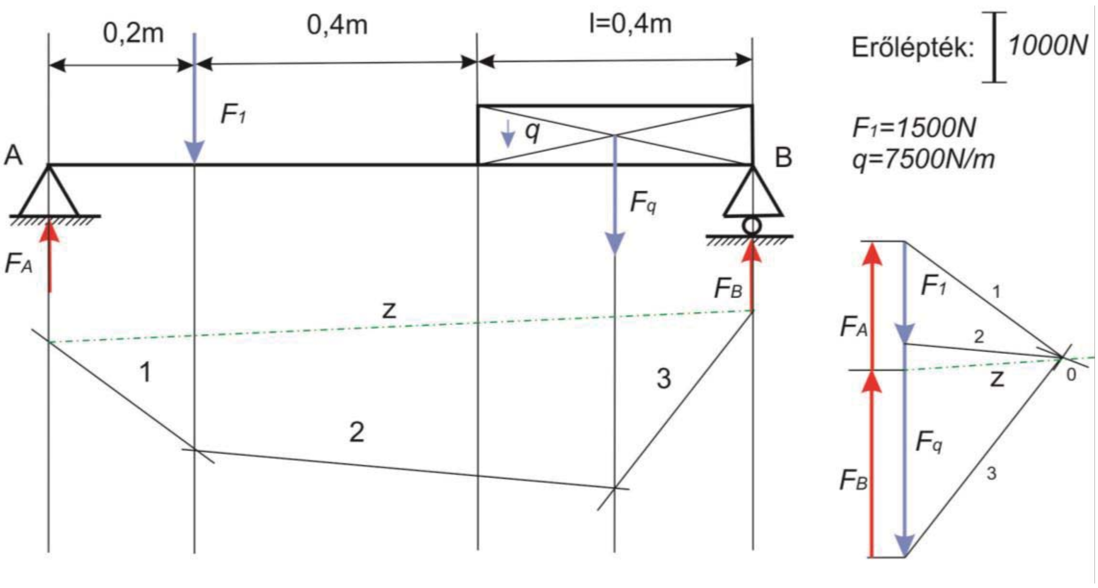
11.5. ábra. Koncentrált erőkkel terhelt befogott tartó

Szerkesztéssel történő megoldás esetén az erőlépték felvétele után jobbról bal felé haladva mérjük fel az erőket a vektorsokszögben (*11.5.b ábra)*. Az első pólussugarat a könnyebb szerkeszthetőség miatt vízszintesen ábrázoljuk, majd kijelöljük a pólustávolságot *(C=400N)* rajta. A kötélsokszög szerkesztésének menete a korábbi ismertek szerint történik, melyből kiadódó eredmény az F_A reakció erő és az M_A reakció nyomaték. A feladat teljes megoldását a példatár tartalmazza.

11.1. PÉLDA

Határozzuk meg számítással és szerkesztéssel a 11.6. ábrán látható vegyes terhelésű kéttámaszú tartó reakcióerőit!

A következő példában két tárcsaagy fekszik fel a tengelyre. Az egyik tárcsaagy rövidebb szakaszon fekszik fel –így ott a terhelése csaknem koncentrált (F_1)-, míg a másik hosszabb szakaszon - egyértelműen megoszló terhelésként (F_q) kell figyelembe vennünk. A megoldáshoz a koncentrált és a megoszló terhelés szuperpozíciója vezet.



a. b.

11.6. ábrán Vegyes terhelésű kéttámaszú tartó

A megoszló erőrendszert helyettesítő koncentrál erő:

$$F_q = q \cdot l = 7500\frac{N}{m} \cdot 0{,}4m = 3000N$$

Nyomatéki egyensúlyi egyenlet a „B" pontra:

$$\sum M_{iB} = F_1 \cdot 0{,}8m + F_q \cdot 0{,}2m - F_A \cdot 1{,}0m = 0$$

$$F_A = 1800N(\uparrow)$$

Nyomatéki egyensúlyi egyenlet az *„A"* pontra:

$$\sum M_{iA} = -F_1 \cdot 0{,}2m - F_q \cdot 0{,}8m + F_B \cdot 1{,}0m = 0$$

$$F_B = 2700N(\uparrow)$$

Ellenőrzés a függőleges vetületi egyensúly alapján:

$$\sum F_{iy} = F_A - F_1 - F_q + F_B = 0$$

a számítás helyes.

A szerkesztés is az egyensúlyi egyenletek alapján hajtható végre. Az erők egyensúlya miatt azok vektorsokszögének és kötélsokszögének is zártnak kell lennie. Párhuzamos erők egyensúlyának feltételei: a zárt vektorábra, a folytonos nyílfolyam és a zárt kötélábra.

Az erőlépték felvételét követően elsőként képezzünk az erőrendszer *(F_1,F_q)* erőiből léptékhelyesen vektorsokszöget (*11.6.b. ábra*), majd vegyük fel a póluspontot (*O*). Az „*O* " pont, valamint a terhelő erők kezdő és végpontjainak összekötésével kapjuk az 1-3. jelzett pólussugarakat (szerkesztési segédvonal). Ezek párhuzamos eltolásával - beillesztve az eredeti ábrába- kapjuk meg a kötélsokszöget *(11.6.a.ábra)* Mivel a vektorsokszögnek záródnia kell, és a záró oldal az F_A és F_B reakcióerők között található, a kötélsokszög első oldalának az F_A, míg az utolsó oldalának az F_B reakcióerők hatásvonalát kell metszenie. Az így kapott két metszéspontot összekötjük (*z*), majd ezzel párhuzamosan a pólusponton át egy egyenest húzunk, ami kimetszi az erők hatásvonalából a reakcióerőket *(11.6.b ábra)*.

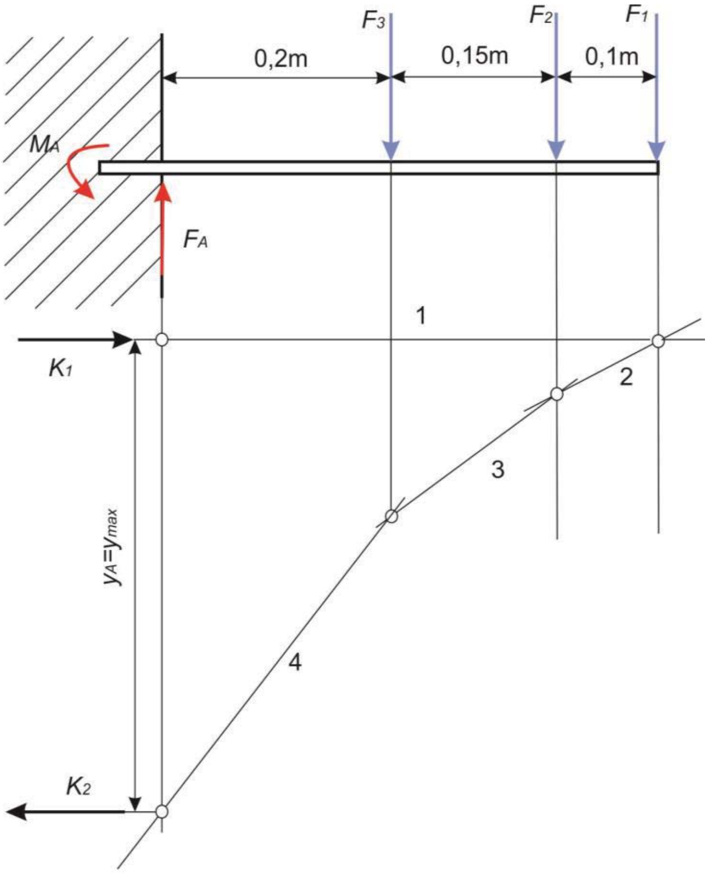
Az erőlépték ismeretében a kapott erőket lemérve hozzávetőlegesen pontosan meghatározható azok nagysága:

$F_A = 2670N$

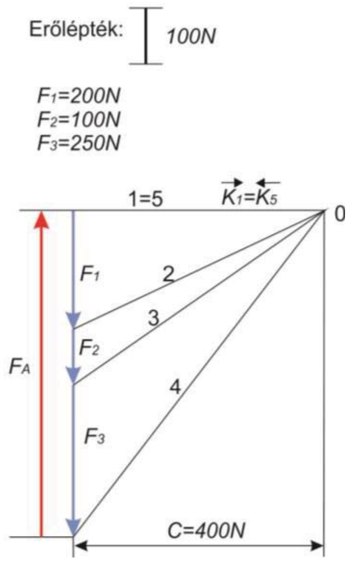
$F_B = 1830N$

11.2. PÉLDA

Határozzuk meg a 11. 7. ábrán látható koncentrált erőkkel terhelt befogott tartóban ébredő reakcióerőt és reakciónyomatékot számítással és szerkesztéssel!



a.



b.

11.7. ábra. Koncentrált erőkkel terhelt befogott tartó

A reakcióerő a tartóra ható függőleges erők egyensúlya alapján határozhatók meg.

$$\sum F_{iy} = F_A - F_1 - F_2 - F_3 = F_A - 200N - 100N - 250N = 0,$$

innen $F_A = 550N(\uparrow)$

Megjegyzés: A tartószerkezeten csak függőleges erők működnek, így $F_{Ax}=0$, tehát $F_{Ay}=F_A$.

Nyomatéki egyensúlyi egyenletet felírva a befogási támaszra:

$$\sum M_{iA} = M_A - F_1 \cdot 0{,}45m - F_2 \cdot 0{,}35m - F_3 \cdot 0{,}2m = 0,$$ innen

$M_A = 187{,}5Nm$, iránya ellentétes az óramutató járásával.

Az erőlépték felvétele után a szerkesztésnél jobbról bal felé haladva mérjük fel az erőket a vektorsokszögben (*11.7.b ábra)*. Az első pólussugarat a könnyebb szerkeszthetőség miatt vízszintesen ábrázoljuk, majd kijelöljük a pólustávolságot *(C=400N)*. A kötélsokszög szerkesztésének menete az ismertek szerint történik. Először az *1*-es pólussugárral húzunk párhuzamost az F_1 erőig, majd a metszésponttól a *2*-es pólussugárral az F_2-ig. Az így kialakuló újabb metszésponttól a *3*-as pólussugárral az F_3 erő vonaláig. A keletkezett metszésponttól a *4*-es pólussugárral húzunk párhuzamost az F_A reakcióerő hatásvonaláig (*11.7.a ábra.*)

Az F_A erőnek egyensúlyt kell tartania a tartót terhelő erőkkel, ezért a vektorsokszög zárt, és az *5*-ös pólussugár azonos az *1*-essel, míg a kötélsokszög nyitott.

A vektorsokszögből az erőlépték segítségével leolvasható a támaszerő:

$$F_A = 550N(\uparrow).$$

A kötélsokszög nyomatéki ábrája pedig megadja a támasznyomatékot:

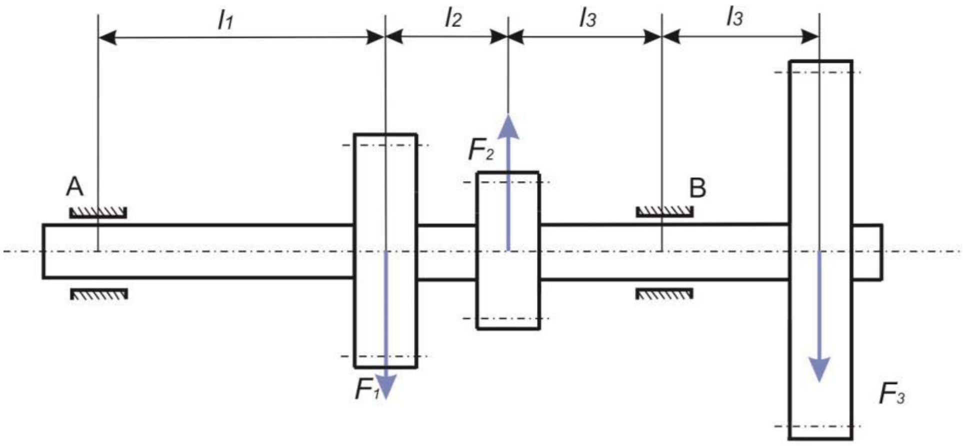
$y_A = 0{,}46m$, így

$$M_A = C \cdot y_A = 0{,}46m \cdot 400N = 186Nm$$

11.3. FELADAT

Határozzuk meg szerkesztéssel és számítással a 11.8.ábrán látható tengely A és B ponton ébredő reakcióerőit!

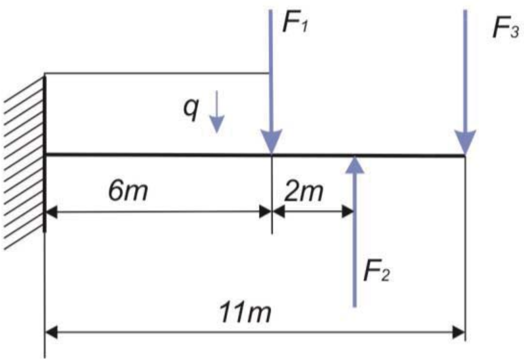
A hajtóműtengelyt a fogaskerekek $F_1 = 3kN$, $F_2=7kN$ *és* $F_3=2{,}5kN$ erővel terhelik. A tengely hosszméretének adatai: $l_1=250mm$, $l_2=150mm$, $l_3=200mm$.



11.8. ábra

11.4. FELADAT

Határozzuk meg a 11.9. ábrán látható befogott tartó reakció erejét, reakció nyomatékát számítással és szerkesztéssel! F_1=10kN, F_2=10kN, F_3=5kN, q=5kN/m



11.9. ábra