



Ó
B
U
D
A
I

E
G
Y
E
T
E
M



MECHANIKA I. (Statika)

Tartók statikája

1.2.1 Lecke. Kényszerek, szabadságfok, statikai határozottság



CÉLKITŰZÉS

Ez a lecke bemutatja a **kényszerek, szabadságfok, statikai határozottság** fogalmak értelmezését.

KAPCSOLÓDÓ IRODALOM

Mechanika I. (Statika) elektronikus jegyzet 8. fejezet.

Felhasznált irodalom

- [1] M. Csizmadia Béla, Nándori Ernő: Statika, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1996
- [2] Kósa Csaba: Nyugvó rendszerek mechanikája. Példatár és útmutató, Budapest, 2009



MOTIVÁCIÓ

A tananyag elsajátításával a kényszerek, szabadságfok, statikai határozottság fogalmak értelmezésén túl képesek lehetünk egy vagy több összekapcsolt szerkezet nyugalmanak vizsgálatára.



ELMÉLETI ÁTTEKINTÉS

A merev test mozgása a térben hat komponensre bontható fel:

- x, y, z irányú haladó mozgás, illetve
- x, y, z tengelyek körüli forgás.

A merev test a térben így összesen 6 **szabadsági fokkal** (s) rendelkezik.

Szabadságfok: a test vagy szerkezet helyzetét egyértelműen meghatározó egymástól független skaláradatok száma.

A statikában vizsgált testek relatív nyugalomban vannak, bár a rájuk ható külső erőrendszer általában nem egyensúlyi, aminek hatására a test mozgásba jönne. A testet az elmozdulások, elfordulások ellen biztosítani kell, azaz közvetve, vagy közvetlenül a földhöz kell kapcsolni. A térben ezt 6 **kötöttséggel**



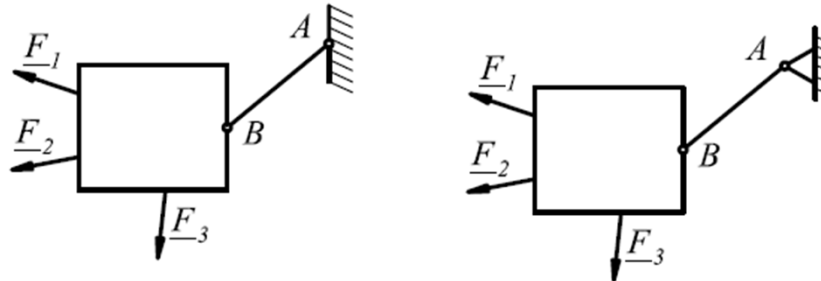
(k) érhetjük el, mely kötöttségeket együttesen **kényszereknek** nevezünk. A kényszerekkel egymáshoz és az álló környezethez kapcsolt testek összességét, melyek erő felvételére illetve továbbítására alkalmasak, együttesen **szerkezetnek** nevezzük.

A kényszerekben keletkező, általuk a merev testre kifejtett erőket **kényszererőnek**, **támaszerőnek** vagy **reakcióerőnek** nevezzük.

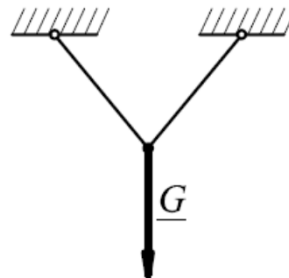
A valós kényszerek sokfélék és bonyolultak, a keletkező erőhatások összetettek. A valóságot modellezve jutunk az **ideális kényszerekhez**. Feladatainkban elsősorban síkbeli szerkezetek egyensúlyának vizsgálatával foglalkozunk, így a kényszerek közül is a síkbeli kényszertípusokat tárgyaljuk.

Síkbeli ideális kényszerek:

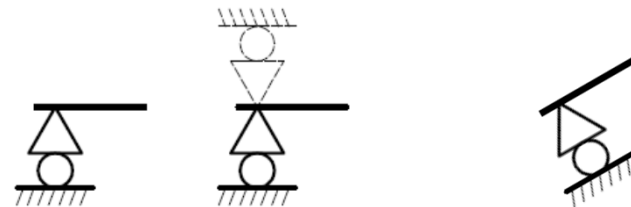
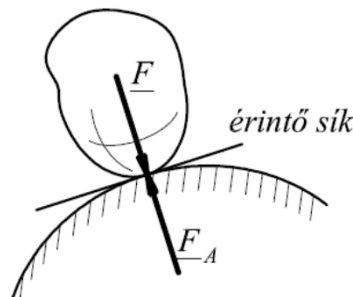
- merev rúd vagy támaszrúd ($k = 1, s = 2$)



- kötéll ($k = 1, s = 2$)

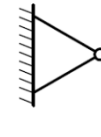
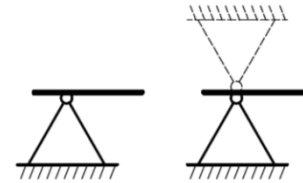
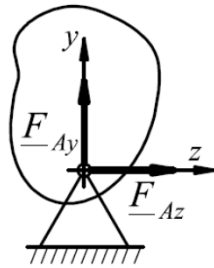


- megtámasztás ($k = 1, s = 2$)

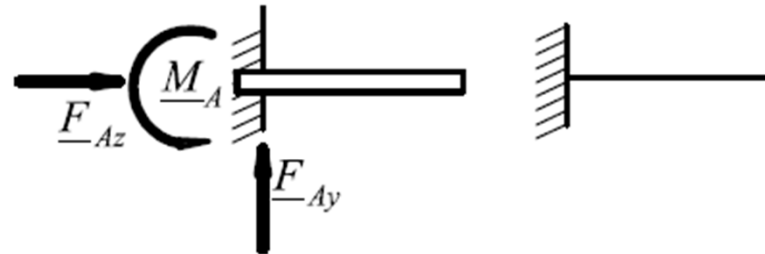




- **síkbeli csukló** ($k = 2, s = 1$)



- **befogás vagy befalazás** ($k = 3, s = 0$)



A kényszerekkel a szerkezetek szabad mozgását korlátozzuk, azaz szabadságfokukat csökkentjük, „lekötjük”, legtöbbször megszüntetjük.



Szerkezetek statikai határozottságának vizsgálata

a.) Egy merev vagy egyetlen merevnek modellezhető test vagy szerkezet esetén a statikai határozottság szükséges (de nem elégséges) feltétele:

$$k_k = s,$$

ahol k_k a (külső) kötöttségek, s pedig a szerkezet (merev test) szabadságfokainak száma.

Ha a síkban (térben):

$k < s = 3$ (térben: $s = 6$) a test mozogni tud, megtámasztása labilis, vagy labilis nyugalomban maradhat;
 $k = s = 3$ (térben: $s = 6$), a test nyugalomban van, a szerkezet **statikailag határozott**;



$k > s = 3$ (térben: $s = 6$), akkor a test nyugalomban van, a szerkezet támasztás szempontjából statikailag határozatlan, az erőviszonyok egyértelműen csak a szilárdságtan módszereivel határozhatók meg, a statikai határozatlanság fokszáma: $k_n = k_k - s$.

A kényszerekkel nem csupán az *álló környezethez*, hanem *egymáshoz* is kapcsolhatjuk a merev testeket. Az egymáshoz kapcsolás helyén, - az úgynevezett belső kényszereknél - jelenlévő erők a belső kényszererők, vagy egyszerűen belső erők.

b.) Kényszerekkel egymáshoz kapcsolt merev vagy merevnek modellezhető testek vagy szerkezetek esetén a statikai határozottság szükséges (de nem elégséges) feltétele:

$$k_b + k_k = s_0,$$



ahol k_b a szerkezet összes elemének belső, k_k az összes külső kötöttsége, $s_ö$ pedig a szerkezet összes elem szabadságfokának összege.

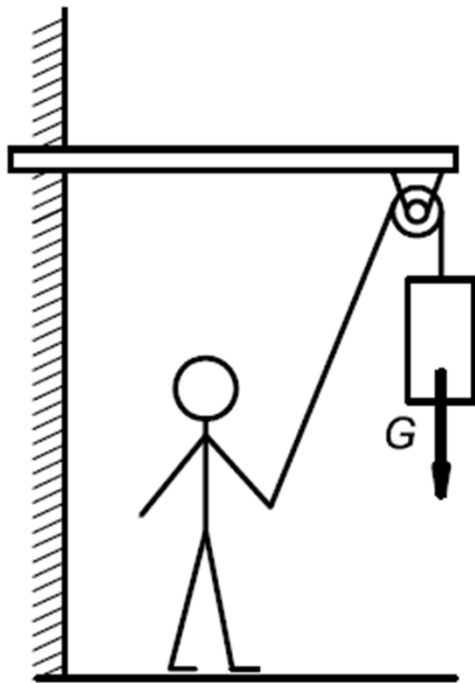
Amennyiben az egyenlőség nem teljesül, a szerkezet lehet:

- mozgékony (labilis), ha $k_b + k_k < s_ö$,
- statikailag határozatlan, ha $k_b + k_k > s_ö$. Ez esetben a statikai határozatlanság fokszáma: $k_n = k_b + k_k - s_ö$.



1. MINTAPÉLDA

A merev befogású ideális tartót az ábrán látható módon éri terhelés, vizsgáljuk meg a szerkezet statikai határozottságát!

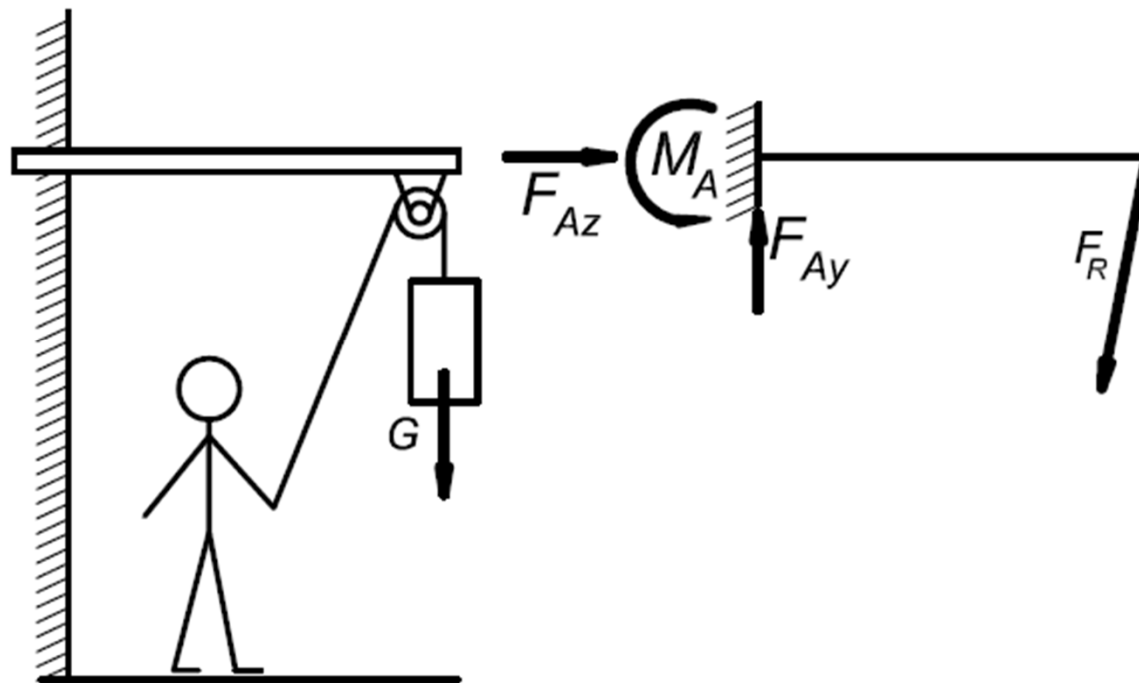


Megoldás

A szerkezet áll:

- 1 rúdból, melyek szabadságfoka $s = 3$,

$$s = 1 \cdot 3 = 3$$



- külső kényszerként egy befogásból $k = 3$

$$k_k = 3.$$



Vizsgálat:

$$k_k = s \rightarrow 3 = 3,$$

tehát a szerkezet statikailag határozott.

Válasz/értékelés

A feladat megoldása során vizsgáltuk a vázolt szerkezet statikai határozottságát.

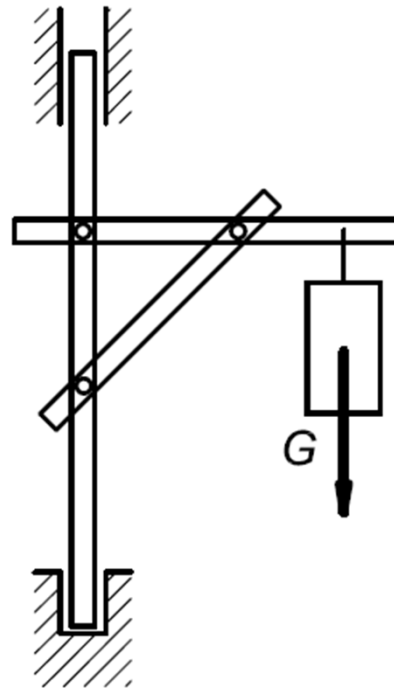
A megoldás során a mechanikai modell figyelembe vételével számba vettük a merev test (tartó) szabadságfokát, illetve a külső kényszer kötöttségét.

A szabadságfok és kötöttségek ismeretében ellenőriztük a statikai határozottságot.



2. MINTAPÉLDA

Az ábrán egy emelőszerkezet sematikus rajza látható. A mechanikai modell elkészítése után vizsgáljuk meg a szerkezet statikai határozottságát!

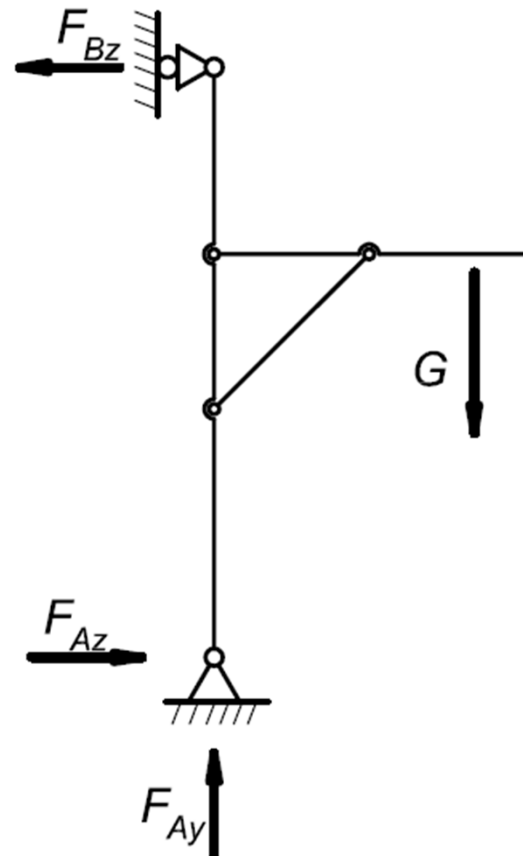
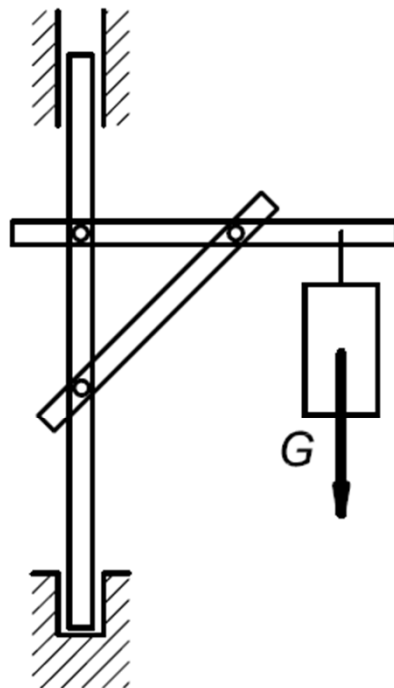




Megoldás

Ó
B
U
D
A
I

E
G
Y
E
T
E
M





A mechanikai modell megalkotása után a szerkezetről látható, hogy áll:

- 3 rúdból, melyek szabadságfoka egyenként $s = 3$, így a 3 rúd összes szabadságfoka

$$s_{\text{ö}} = 3 \cdot 3 = 9$$

- 3 belső csuklóból, melyek kötöttsége egyenként $k = 2$, így a belső kötöttség összesen

$$k_b = 3 \cdot 2 = 6$$

- külső kényszerként egy megtámasztásból $k = 1$ és egy síkbeli csuklóból $k = 2$.

$$k_k = 1 + 2 = 3.$$



$$k_b + k_k = s_{\ddot{o}} \rightarrow 6 + 3 = 9,$$

tehát a szerkezet statikailag határozott.

Válasz/értékelés

A feladat megoldása során vizsgáltuk az emelőszerkezet statikai határozottságát.

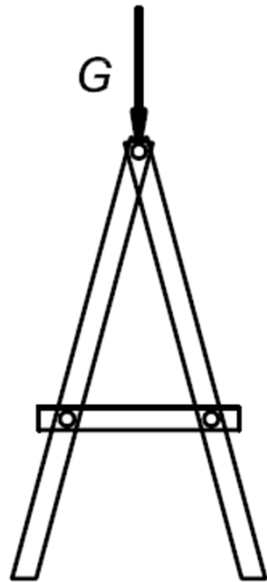
A megoldás során a mechanikai modell felvétele után számba vettük az egyes elemek szabadságfokát, illetve a külső és belső kényszerek kötöttségét.

A szabadságfok és kötöttségek ismeretében ellenőriztük a statikai határozottságot.



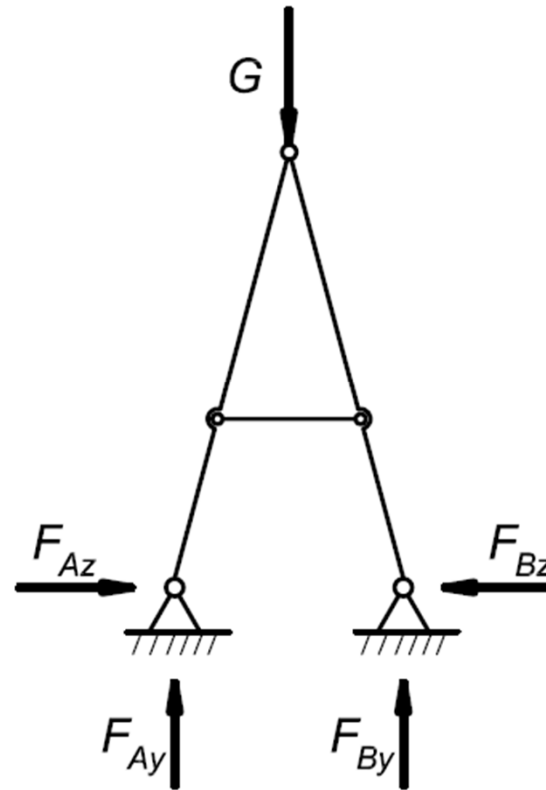
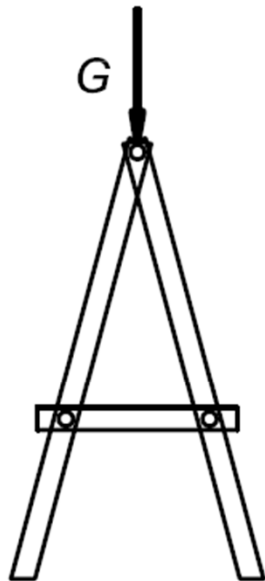
3. MINTAPÉLDA

Az ábrán egy bakállvány sematikus rajza látható. A mechanikai modell elkészítése után vizsgáljuk meg a szerkezet statikai határozottságát!





Megoldás





A mechanikai modell megalkotása után a szerkezetről látható, hogy áll:

- 3 rúdból, melyek szabadságfoka egyenként $s = 3$, így a 3 rúd összes szabadságfoka

$$s_{\text{ö}} = 3 \cdot 3 = 9$$

- 3 belső csuklóból, melyek kötöttsége egyenként $k = 2$, így a belső kötöttség összesen

$$k_b = 3 \cdot 2 = 6$$

- külső kényszerként két síkbeli csuklóból $k = 2$.

$$k_k = 2 \cdot 2 = 4.$$



$$k_b + k_k = 6 + 4 = 10 \neq s_{\ddot{o}} = 9$$

$$k_n = k_b + k_k - s_{\ddot{o}} = 10 - 9 = 1,$$

tehát a szerkezet statikailag egyszeresen határozatlan.

Válasz/értékelés

A feladat megoldása során vizsgáltuk a bakállvány statikai határozottságát.

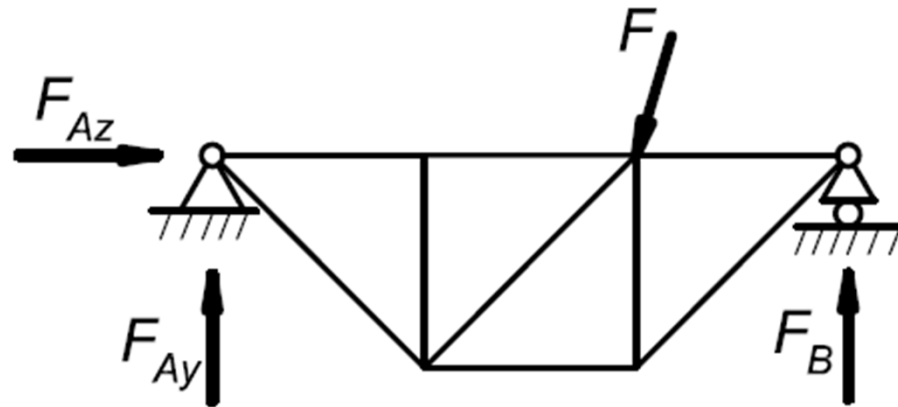
A megoldás során a mechanikai modell felvétele után számba vettük az egyes elemek szabadságfokát, illetve a külső és belső kényszerek kötöttségét.

A szabadságfok és kötöttségek ismeretében ellenőriztük a statikai határozottságot és meghatároztuk a határozatlanság fokszámát.



4. MINTAPÉLDA

Az ábrán egy síkbeli rácsos szerkezet mechanikai modellje látható, vizsgáljuk meg a szerkezet statikai határozottságát!





Megoldás

A statikai határozottság megállapítása többféle módszerrel is lehetséges.

a.) Először az eddig ismertetett módon, a szerkezetet szétbontjuk rudakra, külső és belső kényszerekre. A belső csuklók számának meghatározásánál arra kell figyelni, hogy egy-egy csomópontban a csukló szám a csomópontba bekapcsolt rudak számánál eggyel kevesebb.

A tartó tehát áll:

- 9 rúdból, melyek szabadságfoka egyenként $s = 3$, így a 9 rúd összes szabadságfoka

$$s_{\text{ö}} = 9 \cdot 3 = 27,$$



- 12 belső csuklóból, melyek kötöttsége egyenként $k = 2$, így a belső kötöttség összesen

$$k_b = 12 \cdot 2 = 24,$$

- külső kényszerként egy megtámasztásból $k = 1$ és egy síkbeli csuklóból $k = 2$.

$$k_k = 1 + 2 = 3.$$

Vizsgálat:

$$k_b + k_k = s_{\text{ö}} \rightarrow 24 + 3 = 27,$$

tehát a szerkezet statikailag határozott.



b.) Másik megoldás, ha figyelembe vesszük, hogy a csomópontokban a rudak kapcsolata csuklós és csak itt kapnak terhelést. Tehát a rudakban csak rúdirányú erő ébredhet. Így a rúd felfogható egy rúdirányú elmozdulást gátló kényszerként. Ez esetben a síkbeli rácsos szerkezetünk csomópontokból (c), belső kényszerekből (rudak, r) és külső kényszerekből (k_k) áll.

A csomópontok anyagi pontként viselkednek, szabadságfoka $s = 2$, tehát $s_0 = 2c$.

Síkbeli rácsos szerkezetek statikai határozottságának szükséges (de nem elégséges) feltétele:

$$k_b + k_k = s_0$$

$$r + k_k = 2c$$



A tartó tehát áll:

- 6 csomópontból, melyek szabadságfoka egyenként $s = 2$, így a 6 csomópont összes szabadságfoka

$$s_{\text{ö}} = 2 \cdot c = 2 \cdot 6 = 12,$$

- 9 rúdból, melyek kötöttsége egyenként $k = 1$, így a belső kötöttség összesen

$$k_b = 9 \cdot 1 = 9 = r,$$

- külső kényszerként egy megtámasztásból $k = 1$ és egy síkbeli csuklóból $k = 2$.

$$k_k = 1 + 2 = 3.$$

Vizsgálat:

$$k_b + k_k = s_{\text{ö}} \rightarrow r + k_k = 2c \rightarrow 9 + 3 = 12,$$

tehát a szerkezet statikailag határozott.



Megjegyezzük, hogy elégséges feltételként a síkbeli rácsos szerkezet külső és belső határozottságát is vizsgálni kell.

Válasz/értékelés

A feladat megoldása során vizsgáltuk a síkbeli rácsos szerkezet statikai határozottságát kétféle szempontból. A megoldás során a mechanikai modell figyelembe vételével számba vettük az egyes elemek szabadságfokát, illetve a külső és belső kényszerek kötöttségét.

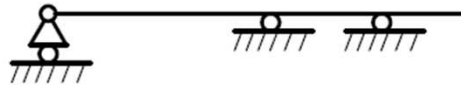
A szabadságfok és kötöttségek ismeretében ellenőriztük a statikai határozottságot.



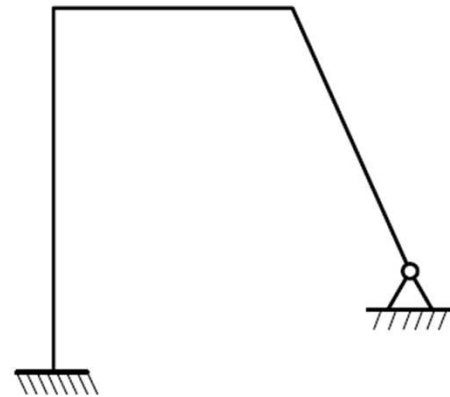
1. FELADAT

Vizsgáljuk meg a szerkezetek statikai határozottságát!

a.)



b.)



Végeredmény:

a.) $k_k = 1 + 1 + 1 = s = 3$ és a támaszerők nem metsződnek egy pontban, tehát a szerkezet statikailag határozott,

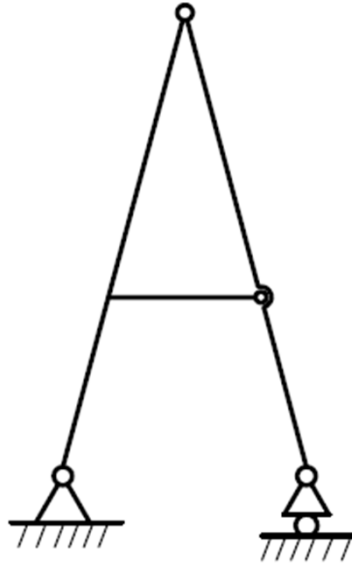
b.) $k_k = 3 + 2 > s = 3$ a szerkezet statikailag határozatlan, a határozatlansági fok:

$$k_n = k_k - s = 5 - 3 = 2.$$



2. FELADAT

Vizsgáljuk meg a szerkezet statikai határozottságát!



Végeredmény:

A szerkezet statikailag egyszeresen határozatlan:

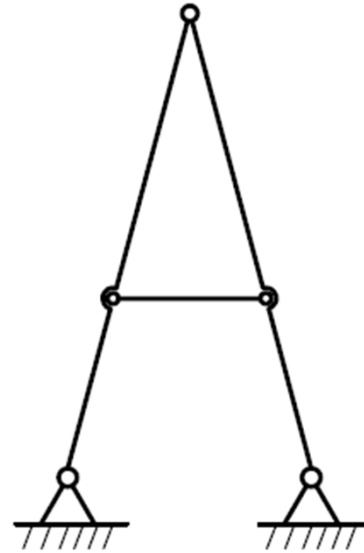
- belsőleg egyszeresen határozatlan,
- külsőleg határozott.

$$k_n = k_b + k_k - s_{\text{ö}} = 4 + 3 - 6 = 1$$



3. FELADAT

Vizsgáljuk meg a szerkezet statikai határozottságát!



Végeredmény:

A szerkezet statikailag egyszeresen határozatlan:

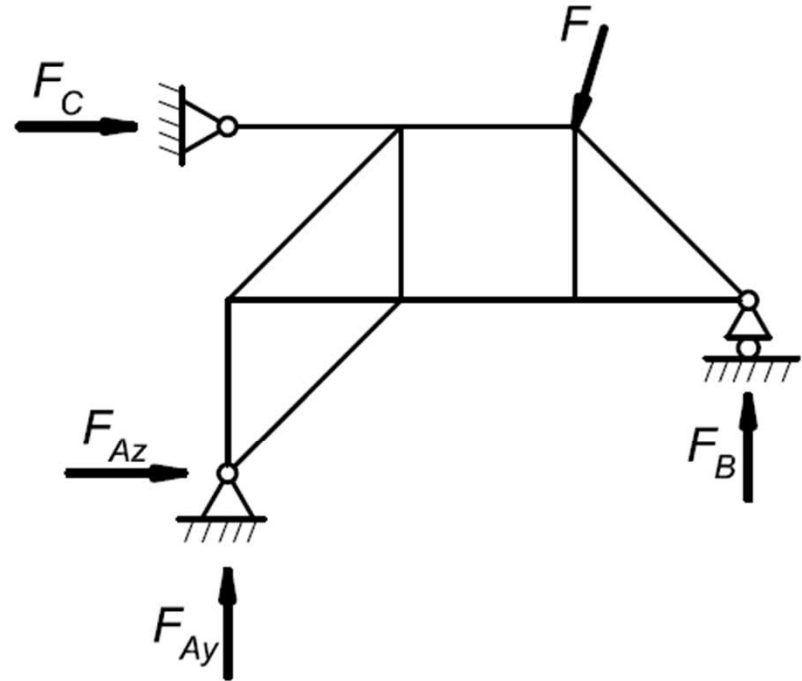
- belsőleg határozott,
- külsőleg egyszeresen határozatlan.

$$k_n = k_b + k_k - s_{\text{ö}} = 6 + 4 - 9 = 1$$



4. FELADAT

Vizsgáljuk meg a szerkezet statikai határozottságát!



Végeredmény:

A szerkezetre a statikai határozottság szükséges feltétele teljesül, de:

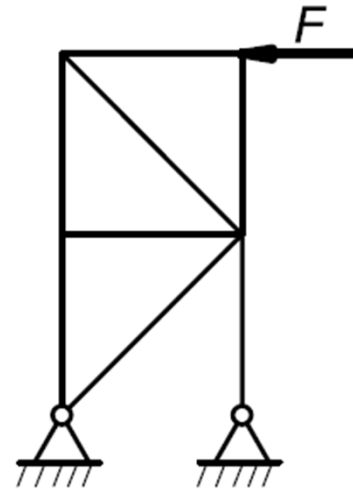
- belsőleg labilis,
- külsőleg egyszeresen határozatlan.

$$2c = r + k_k \rightarrow 2 \cdot 7 = 10 + 4$$



5. FELADAT

Vizsgáljuk meg a szerkezet statikai határozottságát!



Végeredmény:

A szerkezetre a statikai határozottság szükséges feltétele teljesül, és:

- belsőleg határozott,
- külsőleg határozott.

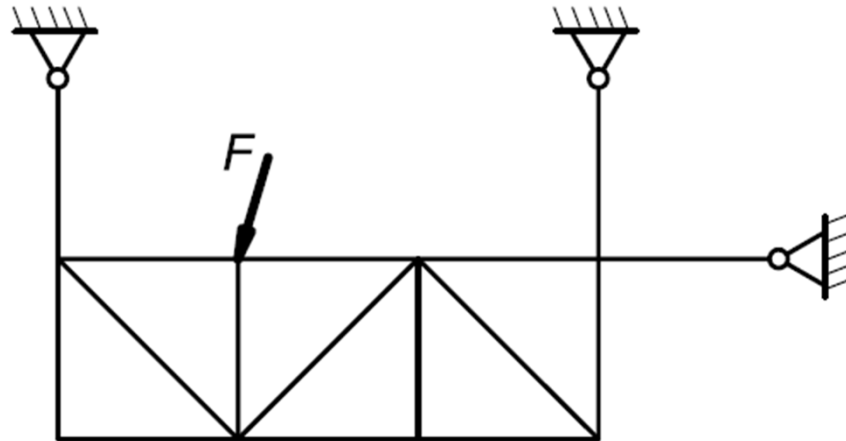
$$2c = r + k_k \rightarrow 2 \cdot 5 = 7 + 3$$

Megj.: a meghatározás során a jobb oldali kényszert egyrudas megtámasztásnak tekintjük.



6. FELADAT

Vizsgáljuk meg a szerkezet statikai határozottságát!



Végeredmény:

A szerkezetre a statikai határozottság szükséges feltétele teljesül, és:

- belsőleg határozott,
- külsőleg határozott.

$$2c = r + k_k \rightarrow 2 \cdot 8 = 13 + 3$$