



Ó  
B  
U  
D  
A  
I

E  
G  
Y  
E  
T  
E  
M



# **MECHANIKA I. (Statika)**

## **Igénybevételek**

### **1.3.1 Lecke. Egyenes tartók igénybevételei**



## **CÉLKITŰZÉS**

Ennek a fejezetnek a megértésével lehetőség nyílik az egyenes tengelyű tartók igénybevételeinek meghatározására, illetve igénybevételi függvény értékek számítására és ábrázolására az igénybevételi ábrák alkalmazásával.

## **KAPCSOLÓDÓ IRODALOM**

Mechanika I. (Statika) elektronikus jegyzet 12., 13., és 14. fejezet.

## **Felhasznált irodalom**

[1] Kósa Csaba: Nyugvó rendszerek mechanikája. Példatár és útmutató, Budapest, 2009



# MOTIVÁCIÓ

A tananyag elsajátítása segítséget nyújt az egyenes tartók különböző igénybevételeinek meghatározására. Megismerhetik az igénybevételi függvény felírásának szabályait és az igénybevételi ábrák szerkesztésének módját. Rámutatunk az igénybevételi ábrák közötti összefüggésekre is ebben a fejezetben.

A leggyakrabban alkalmazott kéttámaszú és befogott tartószerkezetek mellett bemutatásra kerül olyan összetett szerkezet is, mint például a Gerber-tartó, mely főleg hídszerkezetek esetében használatos.

Kulcsszavak: igénybevétel, igénybevételi ábrák, igénybevételi függvények, Gerber-tartó



# ELMÉLETI ÁTTEKINTÉS

A tartószerkezeteink vizsgálata során meghatározott reakcióerők ismeretében lehetőség nyílik arra, hogy meghatározzuk a merev test egyes keresztmetszeteit terhelő belső erőket, az *igénybevételeket*.

Az igénybevétel okozza a testek deformációját és esetleges tönkremenetelét is.

A továbbiakban csak statikailag határozott, egyenes tengelyű rudakból kialakított tartószerkezetekkel foglalkozunk. Statikailag határozott megtámasztású az a tartószerkezet, melyre a felírható független statikai egyenletek száma ( $s$ ) megegyezik az ismeretlenek számával ( $k$ ). Síkbeli tartószerkezetek esetében  $s=k=3$ , míg térbeli tartóknál  $s=k=6$ .



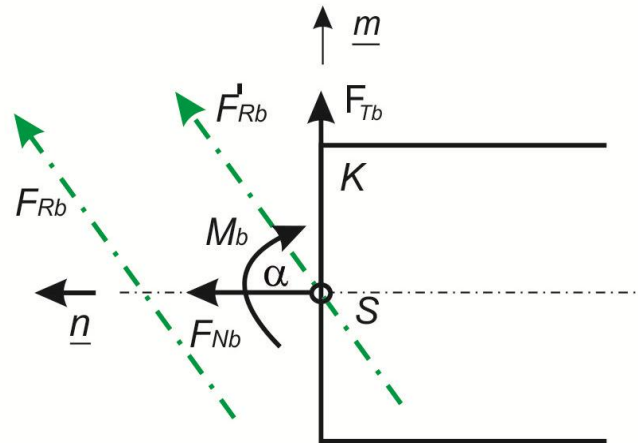
Változó sűrűségű tárgy esetében – amikor a térfogatelemek tömegei különbözőek – a térfogatelemeire ható súlyerők is eltérőek, *súlyerőrendszer* alkotnak.

Ugyanakkor a súlyerők okozta gyorsulás változatlan.

A gravitációs gyorsulásvektor ( $\underline{g}$ ) mindig a Föld középpontja felé mutat, abszolút értéke egy adott helyen állandó. Magyarországon – s a  $45^\circ$  szélességi körön – ez az érték  $9,81 \text{ m/s}^2$ . Vizsgált szerkezeteink a tér igen kis részére terjednek ki, így a gravitációs gyorsulásvektor jó közelítéssel, mindig önmagával párhuzamosan vesszük fel, lefelé irányuló vektorként értelmezzük.



Az igénybevételeket úgy vizsgáljuk, hogy a tartót képzeletben kettévágjuk a vizsgált keresztmetszetben, majd az erre a keresztmetszetre ható bal oldali erők eredőjének meghatározása a feladatunk.



Az ábrán látható a jobb oldali tartórész az átvágási keresztmetszettel és az igénybevételt jelentő bal oldali erők eredőjével. Az eredőt redukáljuk a „K” keresztmetszet súlypontjára (S), majd bontsuk fel egy a keresztmetszet normálvektorával párhuzamos ( $F_N$ ), és egy arra merőleges ( $F_T$ ) tangenciális összetevőre.



## AZ IGÉNYBEVÉTELEK FAJTÁI:

### **1., *Húzó vagy nyomó igénybevétel***

a vizsgált keresztmetszettől balra levő erők eredőjének (normális irányú) összetevője.

$$F_N = \underline{F}_{Rb} \cdot \underline{n} = |\underline{F}_{Rb}| \cdot \cos \alpha = \sum_{i=1}^n |\underline{F}_{bi}| \cdot \cos \alpha$$

Pozitív az előjele, ha a keresztmetszettől el mutat, tehát húzza azt. Negatív, ha nyomó az igénybevétel.

### **2., *Nyíró (tangenciális) igénybevétel***

a vizsgált keresztmetszettől balra levő erők eredőjének a tengelyre merőleges, azaz a keresztmetszet síkjába eső összetevője.

$$F_T = \underline{F}_{Rb} \cdot \underline{m} = |\underline{F}_{Rb}| \cdot \sin \alpha = \sum_{i=1}^n |\underline{F}_{bi}| \cdot \sin \alpha$$



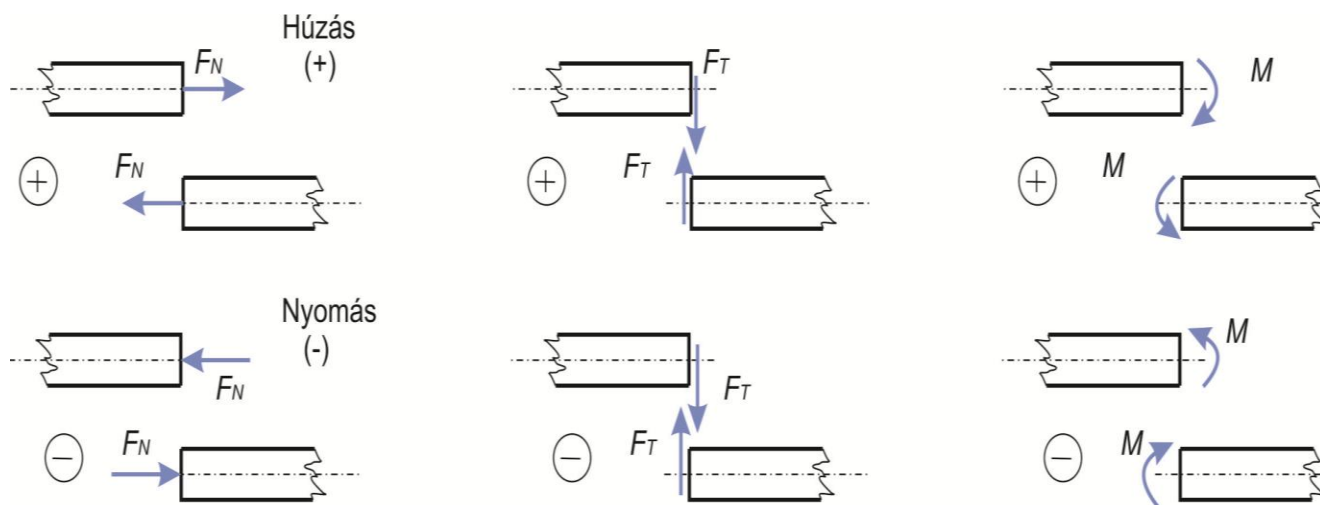
### 3., Hajlító igénybevétel

a vizsgált keresztmetszettől balra levő erők eredőjének nyomatéka a keresztmetszet hajlítási tengelyére.

$$M = |\underline{r}_{Rb} \times \underline{F}_{Rb}| = M_b = \sum_{(b)} M_i$$

Pozitív az előjele, ha az óramutató járásával ellentétesen forgat.

Az előjel szabályt foglalja össze a következő ábra.







Az igénybevételt a tartó valamennyi keresztmetszetében meg kell határoznunk, hogy igénybevételi függvényeket készíthessünk. Legegyszerűbben úgy fogalmazható meg, - egyenes tengelyű tartót feltételezve- hogy a tartószerkezet keresztmetszeteinek helyét megmutató „ $z$ ” független változóhoz hozzá kell rendelni egy igénybevételfajtát a  $0 \leq z \leq l$  tartományban. Így három igénybevételi függvényt kapunk, az alábbi alakban:

$$F_N = F_N(z)$$

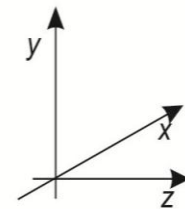
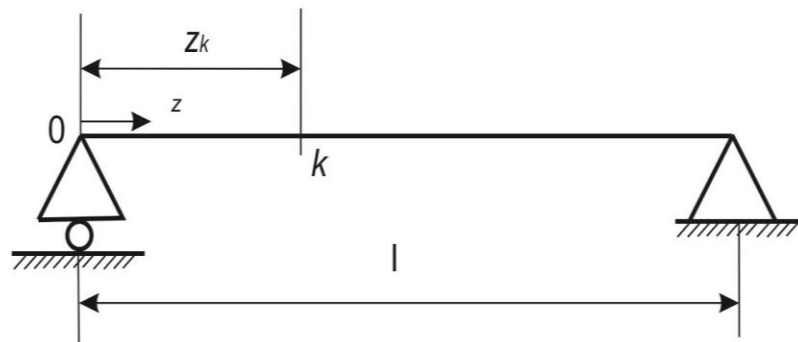
$$F_T = F_T(z)$$

$$M = M(z)$$



Az igénybevételek meghatározásához a koordináta-rendszert úgy illesztjük, hogy a tartó keresztmetszetének síkja az „xy” sík legyen, míg hossz tengelye a „z” tengellyel legyen megegyező.

Az igénybevételi ábra olyan ábra, melynek minden egyes ordinátája megmutatja, hogy a felette levő keresztmetszetben mekkora a baloldali erők eredőjének  $[F_{Rb}; M_{Rb}]_k$  vektorkettőse.

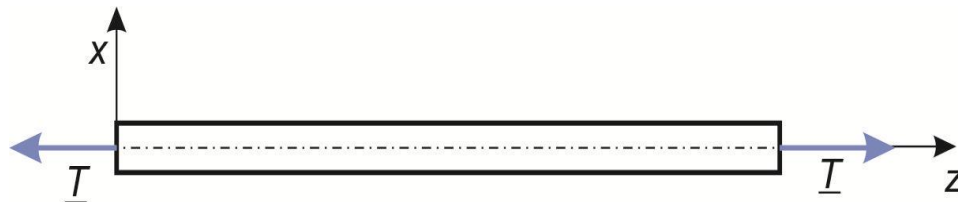




## 4., Csavaró igénybevétel

Ahol a nyomaték a tengely hosszirányával egybeeső tengelye (z) körül lép fel ott a keresztmetszetet csavarja, azaz **csavaró igénybevétel**t okoz.

$$T = T(z)$$



Előjelét a következő összefüggés adja:

$$M_{zb} = \underline{M}_{Rb} \cdot \underline{k} = T$$



# STATIKAILAG HATÁROZOTT TÖBBTÁMASZÚ TARTÓ (GERBER-TARTÓ)

A Gerber-tartók egyenes tengelyű rudakból állnak, melyeket sorban egymást követően csuklókkal kapcsolnak össze, és támaszokkal a környezethez rögzítik az így kialakított szerkezetet.

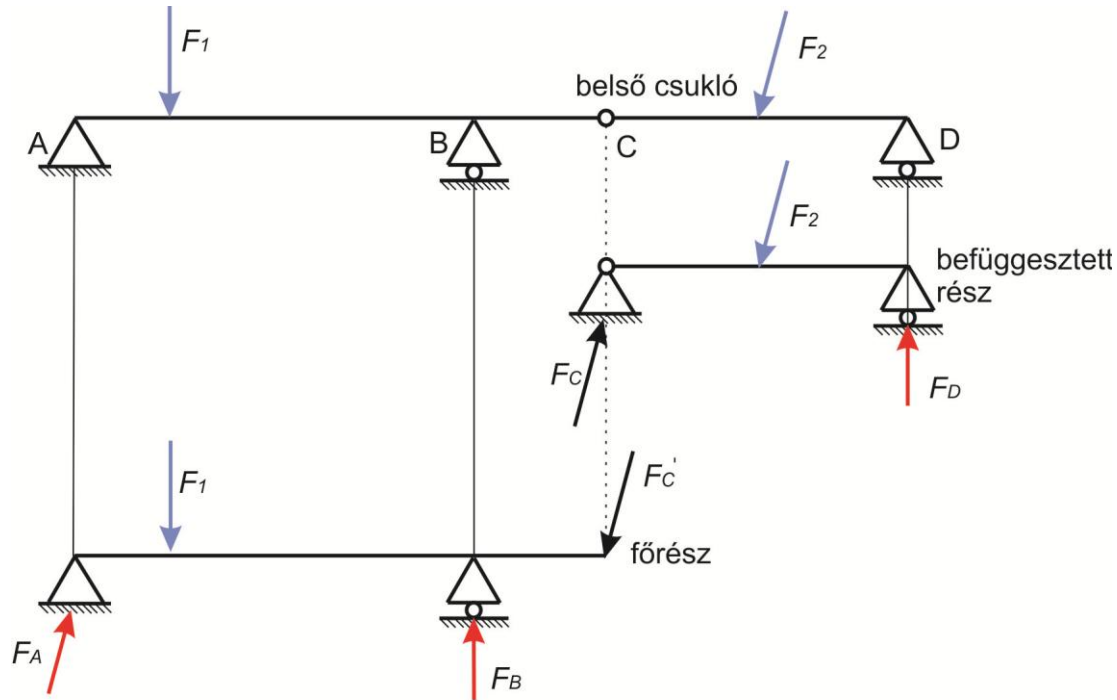
A szerkezetet kéttámaszú tartókra lehet bontani:

- **fő rész:** önmagában is megáll
- **befüggesztett rész:** önmagukban nem állnak meg, csak a tartó más részeire, vagy az alátámasztásra és a tartó más részeire támaszkodva állnak meg

A fent említett részeket belső csuklók kötik egymáshoz.



A Gerber-tartó jellegzetes felépítése - valamint felbontása főrésze és befüggesztett részre - látható a következő ábrán.

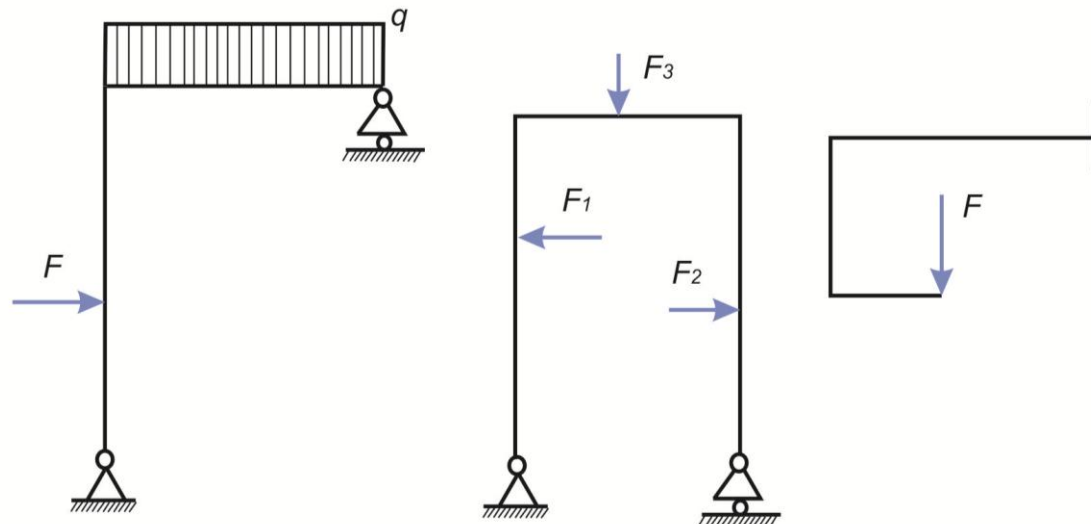


Fontos szabály, hogy az erőjáték vizsgálatát mindig a befüggesztett tartóval kell kezdeni!



## NYITOTT KERETSZERKEZETEK

Az olyan egyenes tengelyű vagy görbetengelyű rudakból álló tartószerkezetet, amelyben a rudak találkozásánál létrejövő csomópontok sarokmerevek, keretszerkezetnek nevezzük. A **sarokmerevség** azt jelenti, hogy a rúdvégek, amelyek a csomópontban találkoznak, külső erő vagy más egyéb hatás következtében egyformán mozdulnak el.



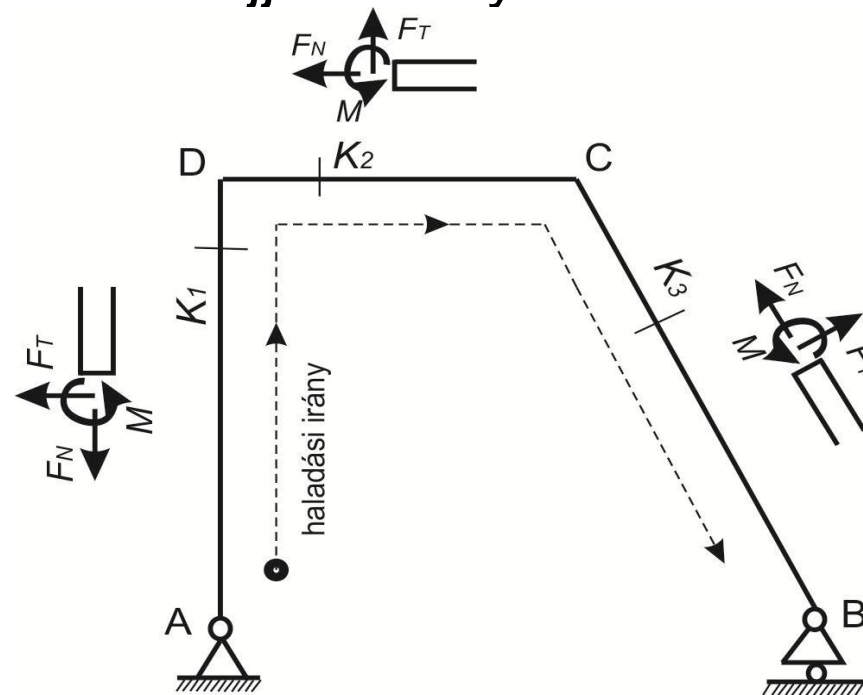


A törttengelyű tartóknál a tartón felveszünk egy kezdőpontot és egy haladási irányt (ajánlatos az óramutató járásával megegyező irányt felvenni haladási irányként). Ezt követően bármely keresztmetszetben az igénybevételeket úgy határozhatjuk meg, hogy a vizsgált helyen a tartót képzeletben kettévágjuk, és a haladási irányba eső oldal mindig a „jobb” oldal. Értelemszerűen az ezzel ellentétes oldal pedig a „bal” oldal.

A sarokmerevség következtében végtelen közel a sarokponthoz a balra és jobbra kijelölt, és egymással szöget bezáró keresztmetszetekben az igénybevételnek azonosnak kell lennie. (Kivétel e szabály alól, ha itt koncentrált erő vagy nyomaték hat a tartóra!)



A nyitott keretszerkezet  $K_1$  keresztmetszetben a „bal” oldal úgy értelmezhető, hogy a keresztmetszet alatt található, míg a jobb a keresztmetszet felett. A  $K_2$  keresztmetszetben a már ismertek szerint - a kéttámaszú tartóhoz hasonlóan - helyezkedik el a „bal” és a „jobb” oldal. A  $K_3$  keresztmetszetben pedig a „bal” oldal felül van, míg a „jobb” oldal lejjebb helyezkedik el.







# ÖSSZEFÜGGÉSEK AZ IGÉNYBEVÉTELI ÁBRÁK KÖZÖTT

Az igénybevételi ábrák vizsgálatakor, közöttük az alábbi összefüggéseket figyelhetjük meg.

A nyomaték igénybevételi függvénynek ( $M(z)$ ) a  $z$  szerinti deriváltja megegyezik az  $F_T$  ellentettjével:

$$\frac{dM}{dz} = -F_T$$

A nyomatéki ábra  $z$  szerinti deriváltjával tehát a nyíróerő ábrához jutunk, majd azt újra  $z$  szerint deriválva a megoszló terhelést kapjuk eredményül.

$$\frac{d^2M}{dz^2} = -\frac{dF_T}{dz} = q$$



Koncentrált erő esetén a nyíróerő ábra vonalvezetése vízszintes („z”-től független) az erők hatásvonalán eltolódással, míg a hozzá tartozó nyomatéki ábra ferde („z” első fokú) egyenes alakú az erők hatásvonalán töréspontokkal.

Az az egyenletesen megoszló terhelés nyíró igénybevételi ábrája mindig ferde egyenes („z” elsőfokú) a terhelés teljes hosszán, míg nyomatéki ábrája másodrendű („z” másodfokú) parabola függvény. Amennyiben nem egyenletes a megoszló a teher, akkor a nyíróerő ábra másodrendű függvénnel és a nyomatéki ábra harmadrendű függvénnel írható le.



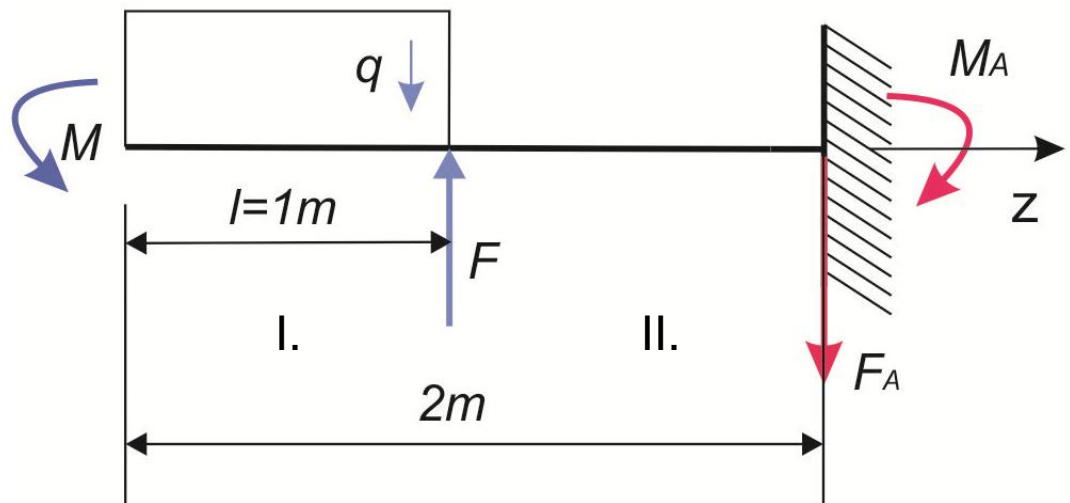
## Az összefüggéseket táblázatba foglalva:

| Terhelés                       |       | Terhelés<br>függvény    | Nyíróerő<br>függvény    | Nyomatéki<br>függvény    |
|--------------------------------|-------|-------------------------|-------------------------|--------------------------|
| Koncentrált nyomaték           | M     | -2 fokú<br>(pont)       | -1 fokú<br>(ugrás)      | 0-ad fokú<br>(konstans)  |
| Koncentrált erő                | F     | -1 fokú<br>(ugrás)      | 0-ad fokú<br>(konstans) | elsőfokú<br>(egyenes)    |
| Egyenletesen megoszló terhelés | q     | 0-ad fokú<br>(konstans) | elsőfokú<br>(egyenes)   | másodfokú<br>(parabola)  |
| Lineárisan megoszló terhelés   | $q_0$ | elsőfokú<br>(egyenes)   | másodfokú<br>(parabola) | harmadfokú<br>(parabola) |

# 1. MINTAPÉLDA

Határozzuk meg az ábrán látható befogott tartó igénybevételeit függvények felírásával és egyszerű felrajzolás módszerével.

$q = 4 \text{ kN/m}$ ,  $M = 5 \text{ kNm}$ ,  $F = 7 \text{ kN}$ ,  $l = 1 \text{ m}$ ,  $F_A = 3 \text{ kN}$ ,  
 $M_A = 4 \text{ kNm}$



Felbontjuk I. és II. 2 részre a tartót z irányba.



Igénybevételi egyenletek a I. szakaszra felírva:

$$0 \leq z \leq 1 \text{ m}$$

Nyíró igénybevételi függvények:

$$F_{T(z)} = - qz$$

$$F_{T(z=0)} = 0 \text{ kN}$$

$$F_{T(z=1\text{m})} = - 4 \text{ kN/m} \cdot 1 \text{ m} = - 4 \text{ kN}$$

Hajlító igénybevételi függvények:

$$M_{(z)} = M + - qz^2/2$$

$$M_{(z=0)} = 5 \text{ kNm}$$

$$M_{(z=1\text{m})} = 5 \text{ kNm} + 4 \text{ kN/m} \cdot (1 \text{ m})^2/2 = 7 \text{ kNm}$$



Igénybevételi egyenletek a II. szakaszra felírva:

$$1\text{m} \leq z \leq 2\text{m}$$

Nyíró igénybevételi függvények:

$$F_{T(z)} = -qz + F$$

$$F_{T(z=1)} = -4\text{kN/m} \cdot 1\text{m} + 7\text{kN} = 3\text{ kN}$$

$$F_{T(z=2\text{m})} = -4\text{kN/m} \cdot 1\text{m} + 7\text{kN} = 3\text{ kN}$$

Hajlító igénybevételi függvények:

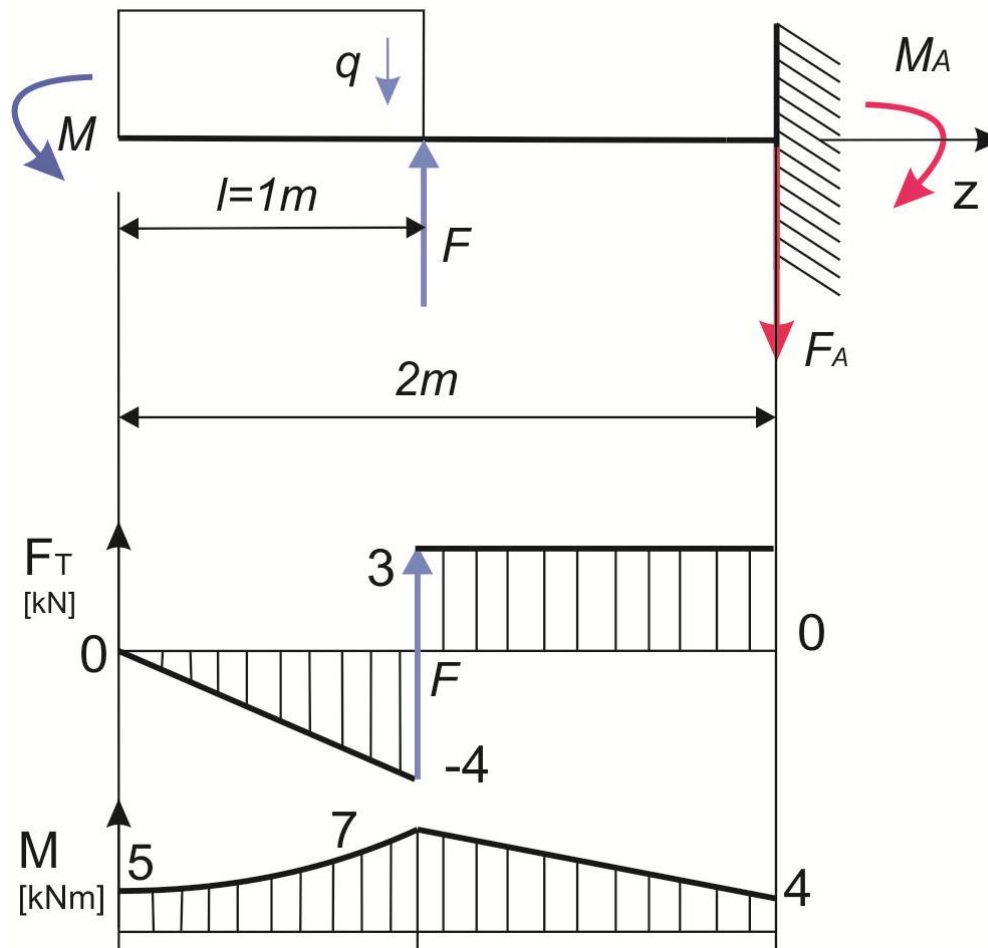
$$M_{(z)} = M + q \cdot 1\text{m} \cdot (z - 0,5\text{m}) - F(z - 1\text{m})$$

$$M_{(z=1\text{m})} = 7\text{ kNm}$$

$$M_{(z=2\text{m})} = 4\text{ kNm}$$



# Az igénybevételi függvény eredményeinek ábrázolása





## Az igénybevételi függvény rajzos megoldása

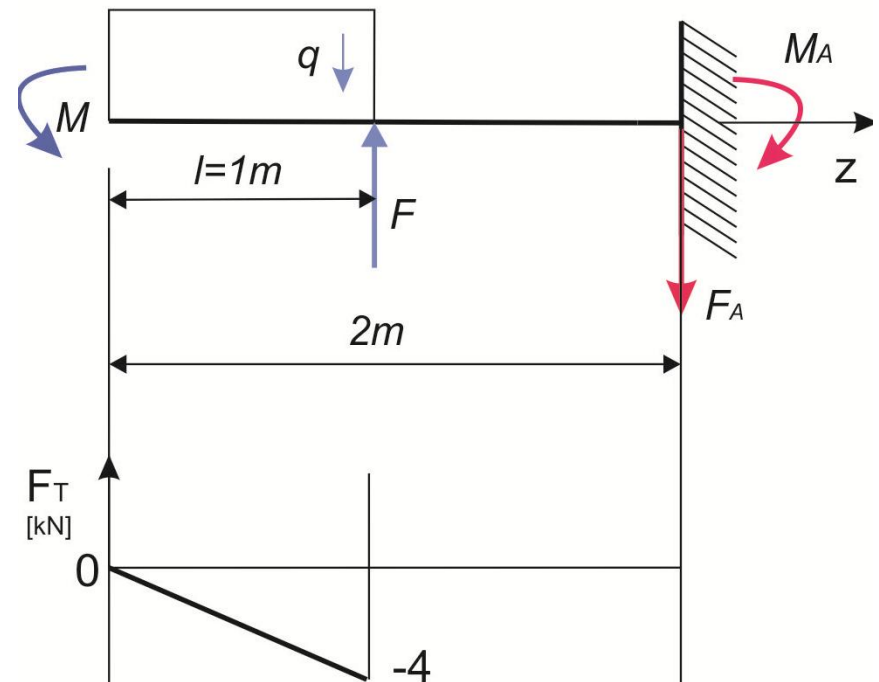
A nyíró igénybevételi ábrát balról jobbra haladva a tartót érő erők irányának és nagyságának megfelelően rajzoljuk meg.

A 0 pontból (origóból)

kiindulva eljutunk a

$-4\text{kN/m} \cdot 1\text{m} = -4\text{kN}$ -ig.

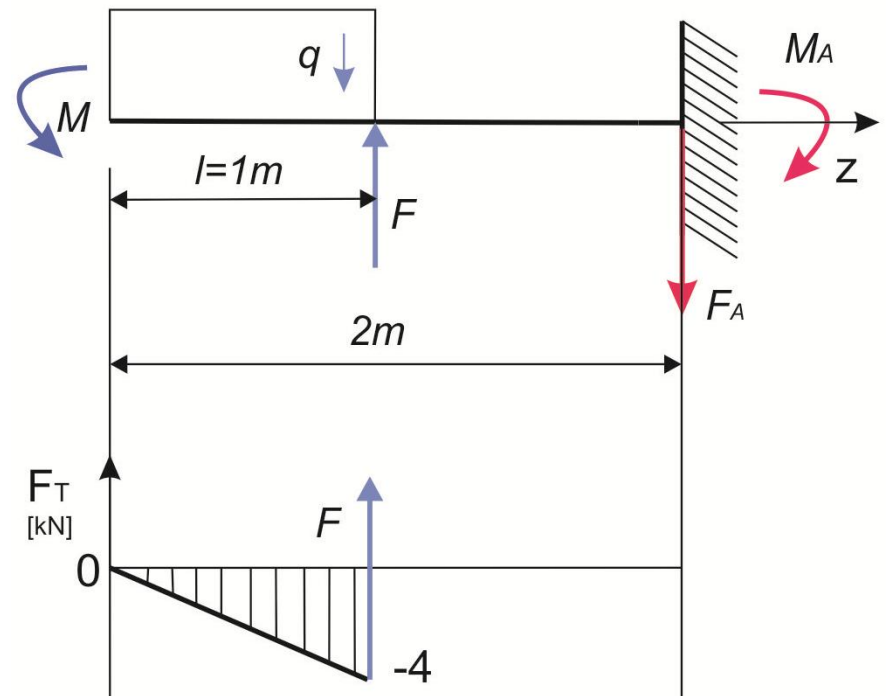
A függvény képe ezen a szakaszon egy egyenes, mert a távolságtól egyenesen arányosan nő negatív irányba a megoszló terhelésből adódó nyíróerő értéke.





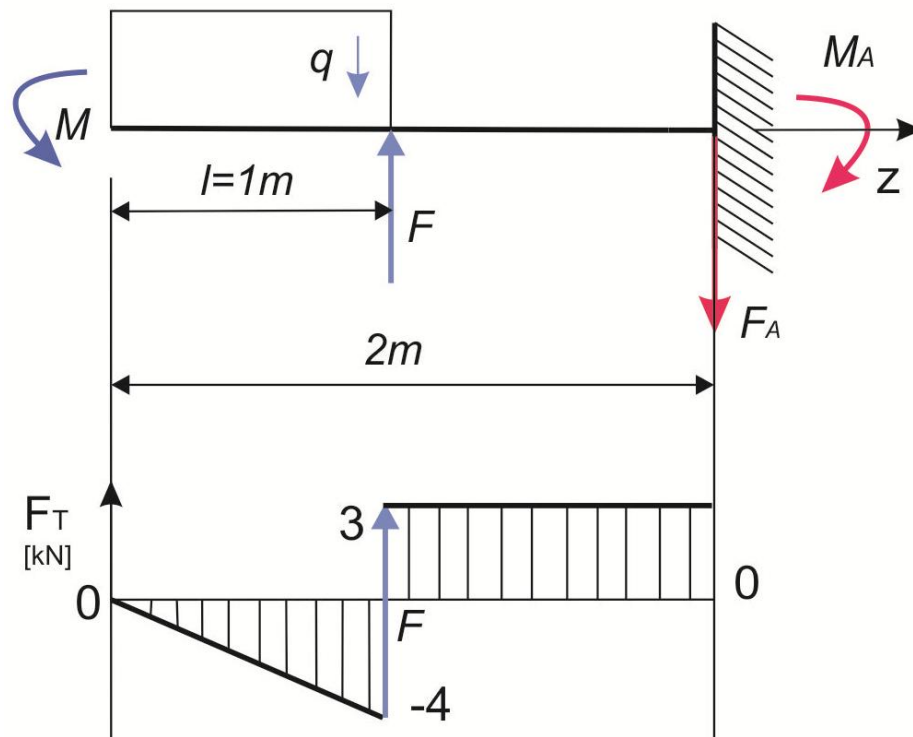


Ezt követően felmérjük az 1m-nél található  $F=7\text{kN}$  nagyságú koncentrált erőt, ami ugrást eredményez a függvény képében. Így jutunk el a  $-4\text{kN}$ -tól a  $3\text{kN}$  értékig.





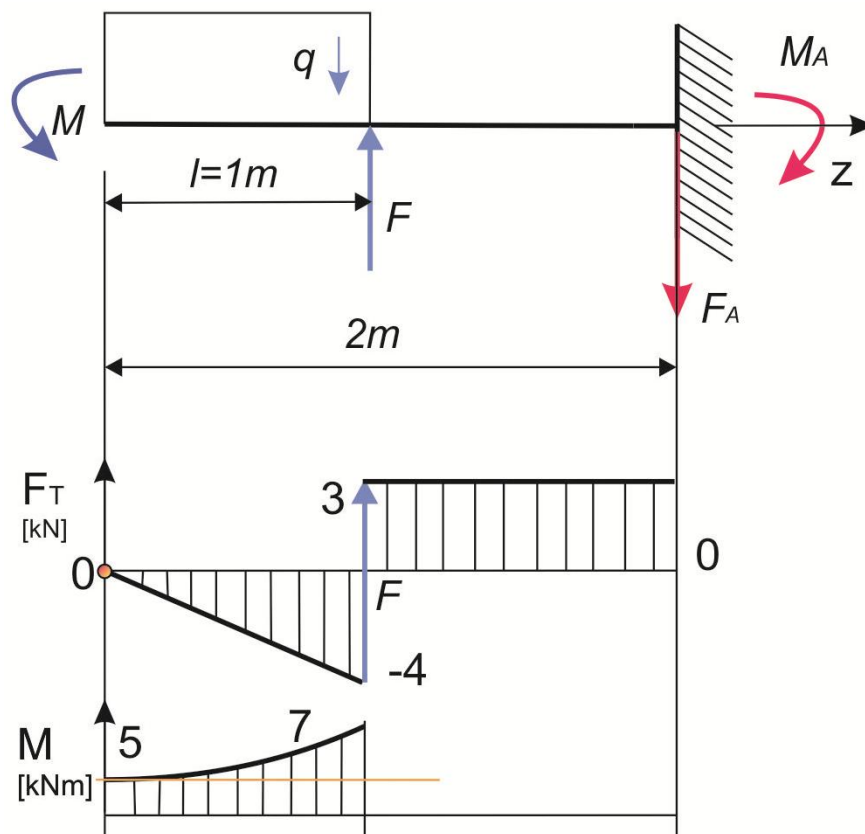
Az 1m-től 3 kN értékről indulva konstans a nyíróerő függvény a II. szakaszon, mert a terhelés ebben a részben nem változik. A függvény csak a 2m-nél zár be 0 értékre az  $F_A = -3\text{kN}$  értéknek megfelelően a reakció erő irányával megegyezően negatív irányba felmérve.





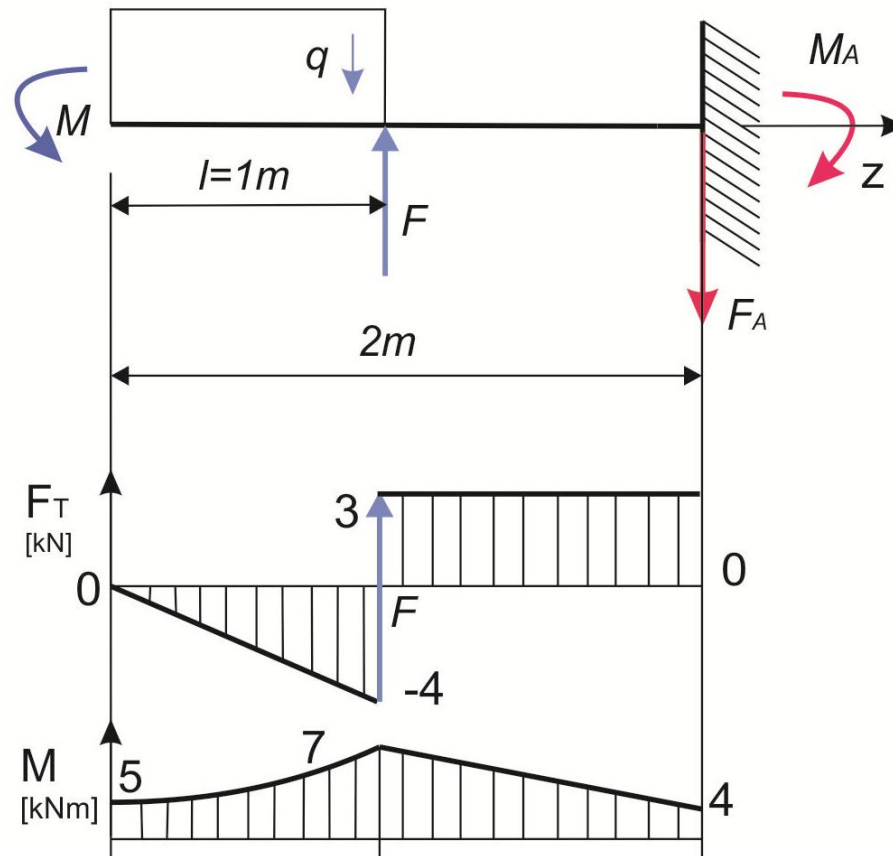
A nyomatéki ábra a koncentrált nyomatéknak megfelelően  $M=5$  kNm-ről indul. Ez a érték növekszik a felette levő nyíróerő függvény területének értékével  $1\text{m} \cdot 4 \text{ kN} = 4 \text{ kNm}$ -nal, ami a  $7 \text{ kNm}$ -t eredményezi.

A I. szakaszban a függvény képe másodfokú parabola, mert a felette levő nyíróerő ábra elsőfokú. Érintő pontja ott van, ahol a nyíróerő függvény metszi a  $z$  tengelyt. Jelen esetben ez a  $0$  pontnál van.





A nyomatéki ábra a II.- es szakaszban lineáris, mert a nyíróerő képe konstans. A nyomatéki ábra értéke a  $z=2\text{m}$ -nél meg kell, hogy egyezzen a reakciónyomaték  $M_A = 4 \text{ kNm}$  értékkel.

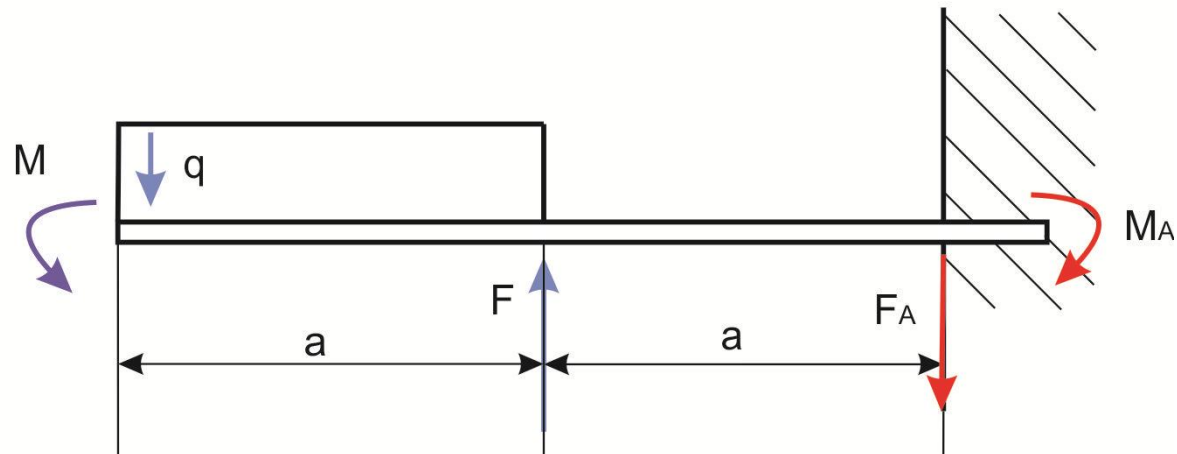




## 1. FELADAT

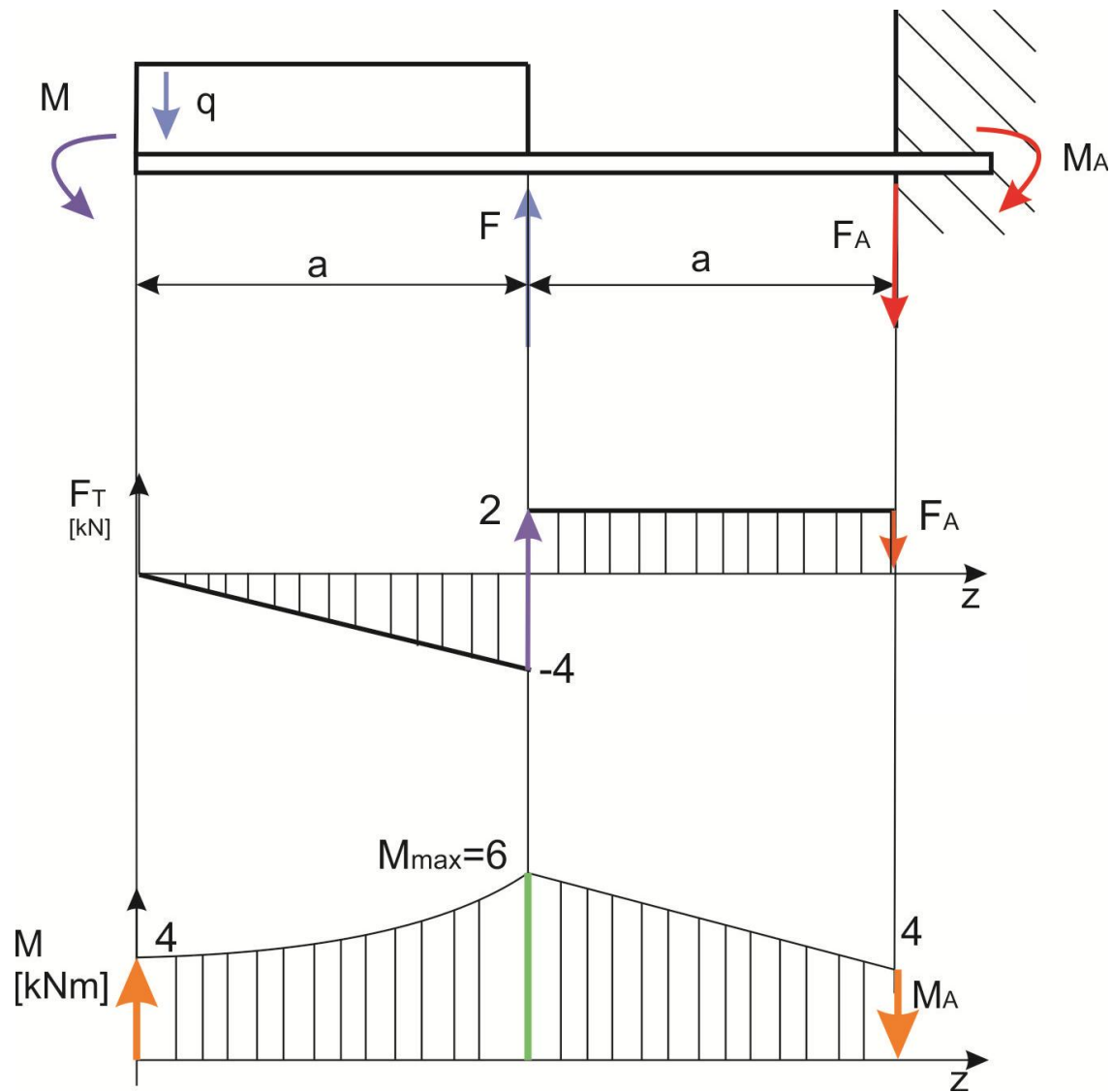
Határozzuk meg az ábrán látható befogott tartó igénybevételeit függvények felírásával és egyszerű felrajzolás módszerével.

$q = 4 \text{ kN/m}$ ,  $M = 4 \text{ kNm}$ ,  $F = 6 \text{ kN}$ ,  $a = 1 \text{ m}$ ,  $F_A = 2 \text{ kN}$ ,  
 $M_A = 4 \text{ kNm}$





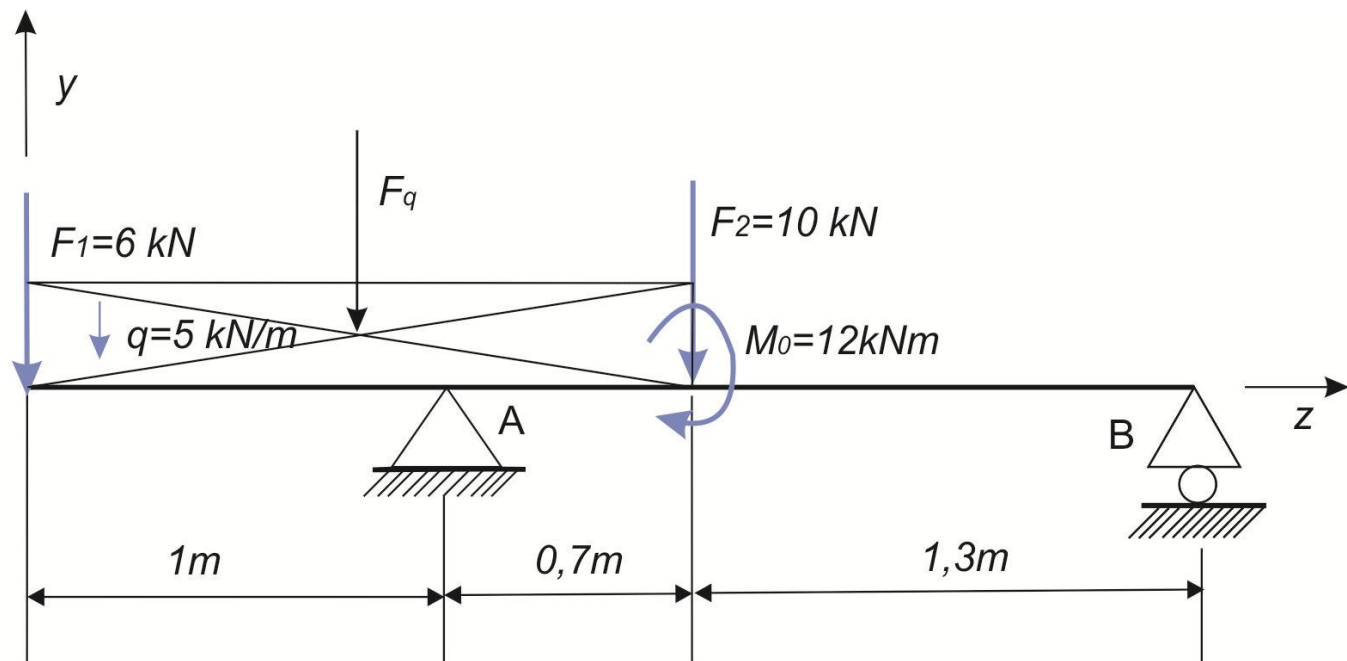
## A feladat megoldása

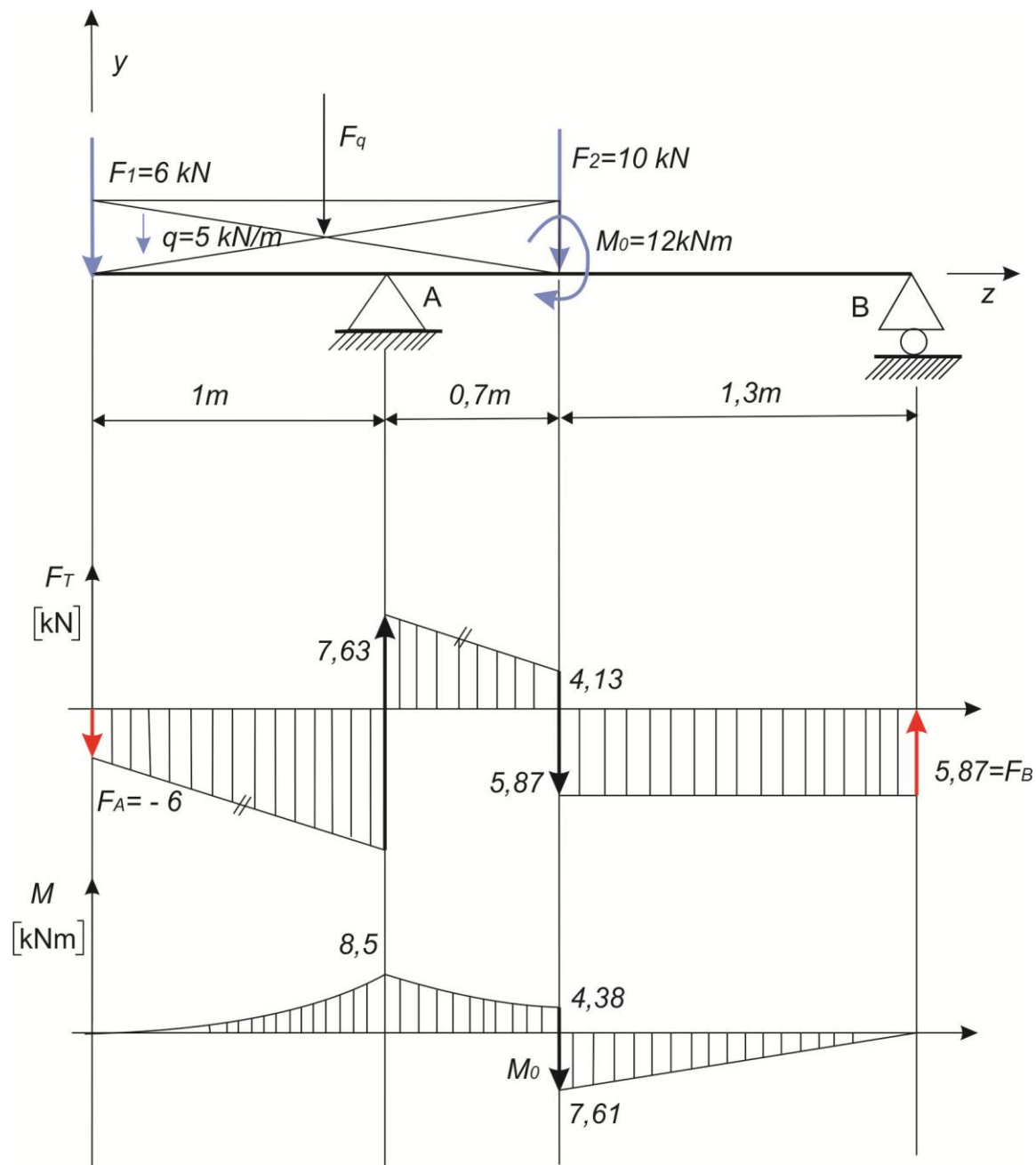




## 2. FELADAT

Határozzuk meg az ábrán látható befogott tartó igénybevételeit függvények felírásával!



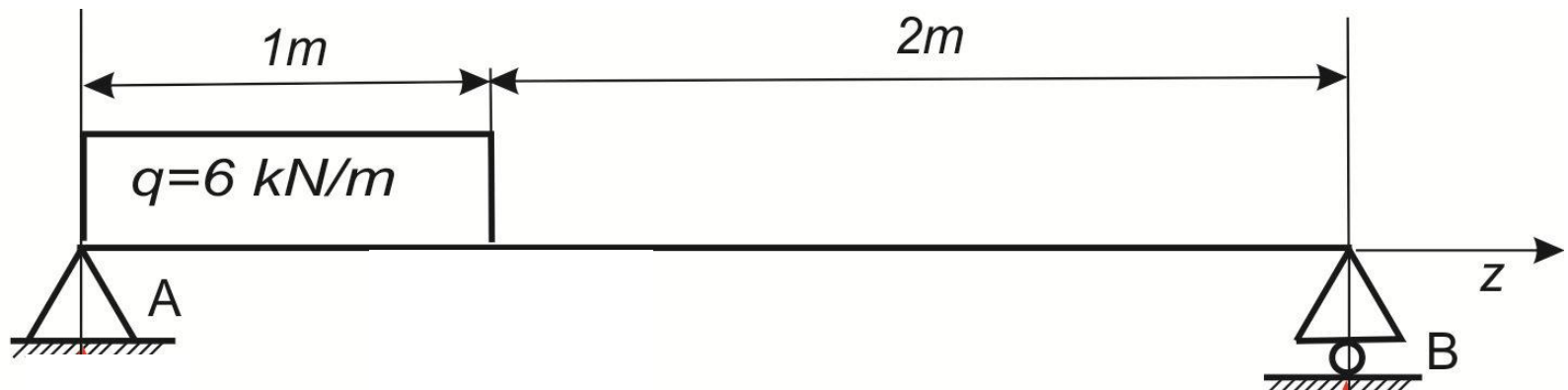






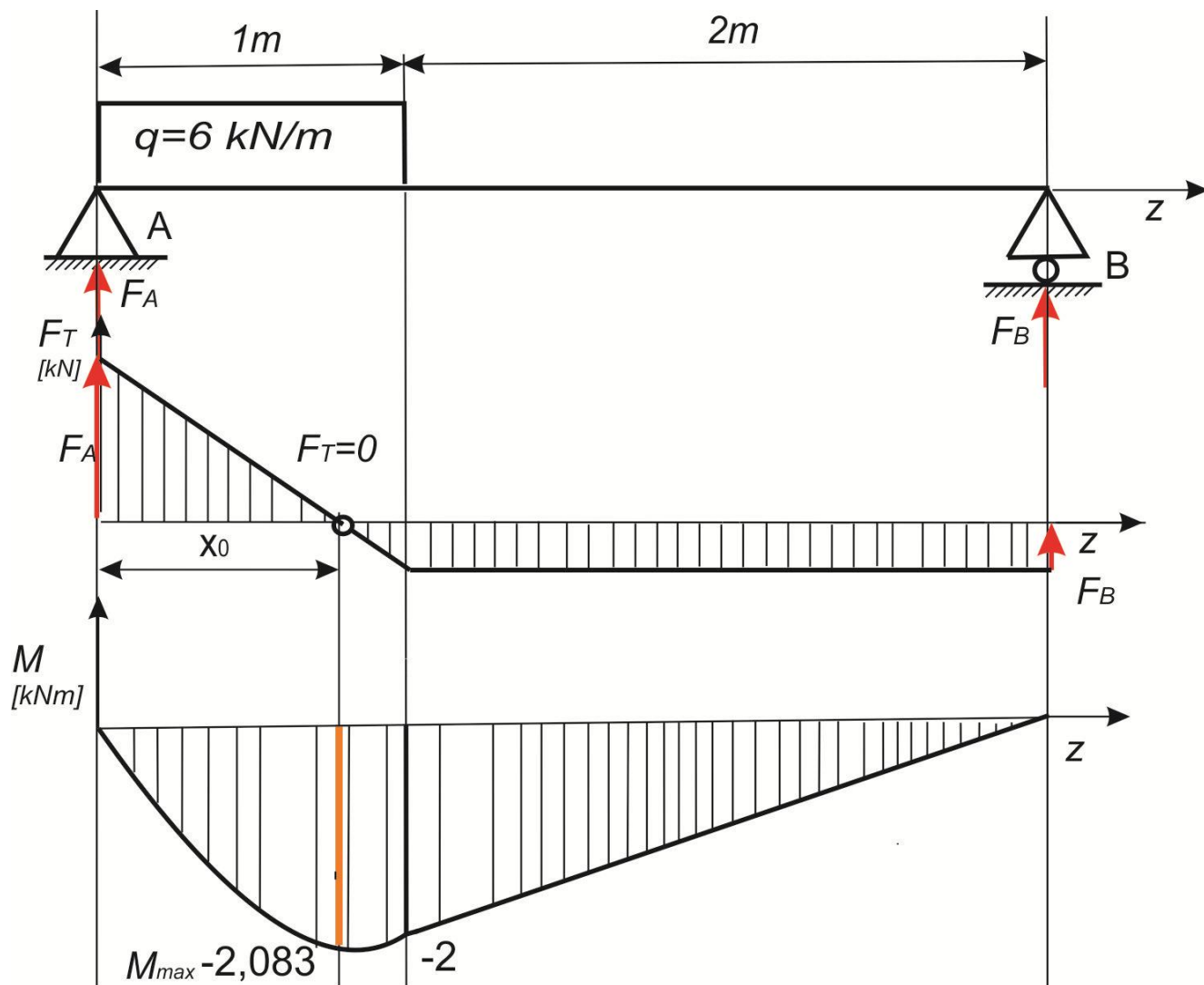
### 3. FELADAT

Határozzuk meg az ábrán látható befogott tartó igénybevételeit függvények felírásával.





# Megoldás:

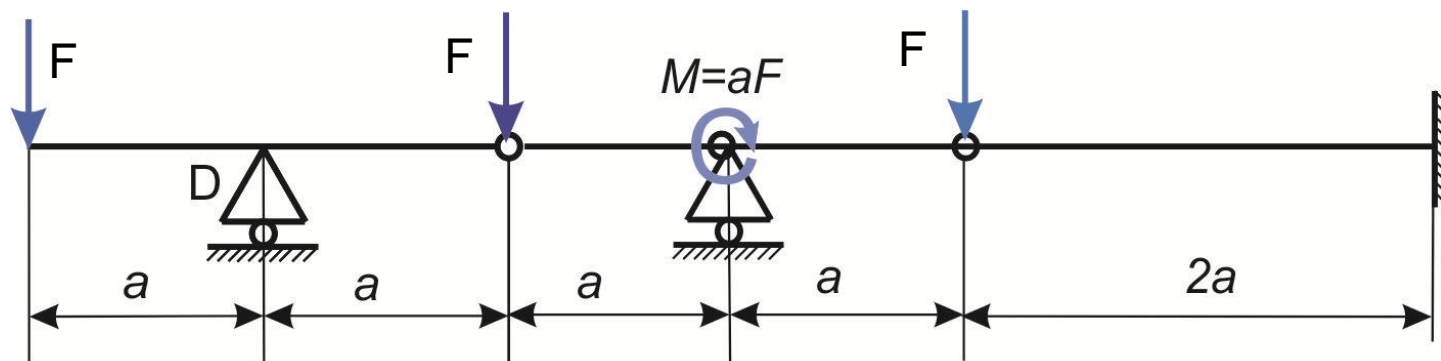




## 4. FELADAT

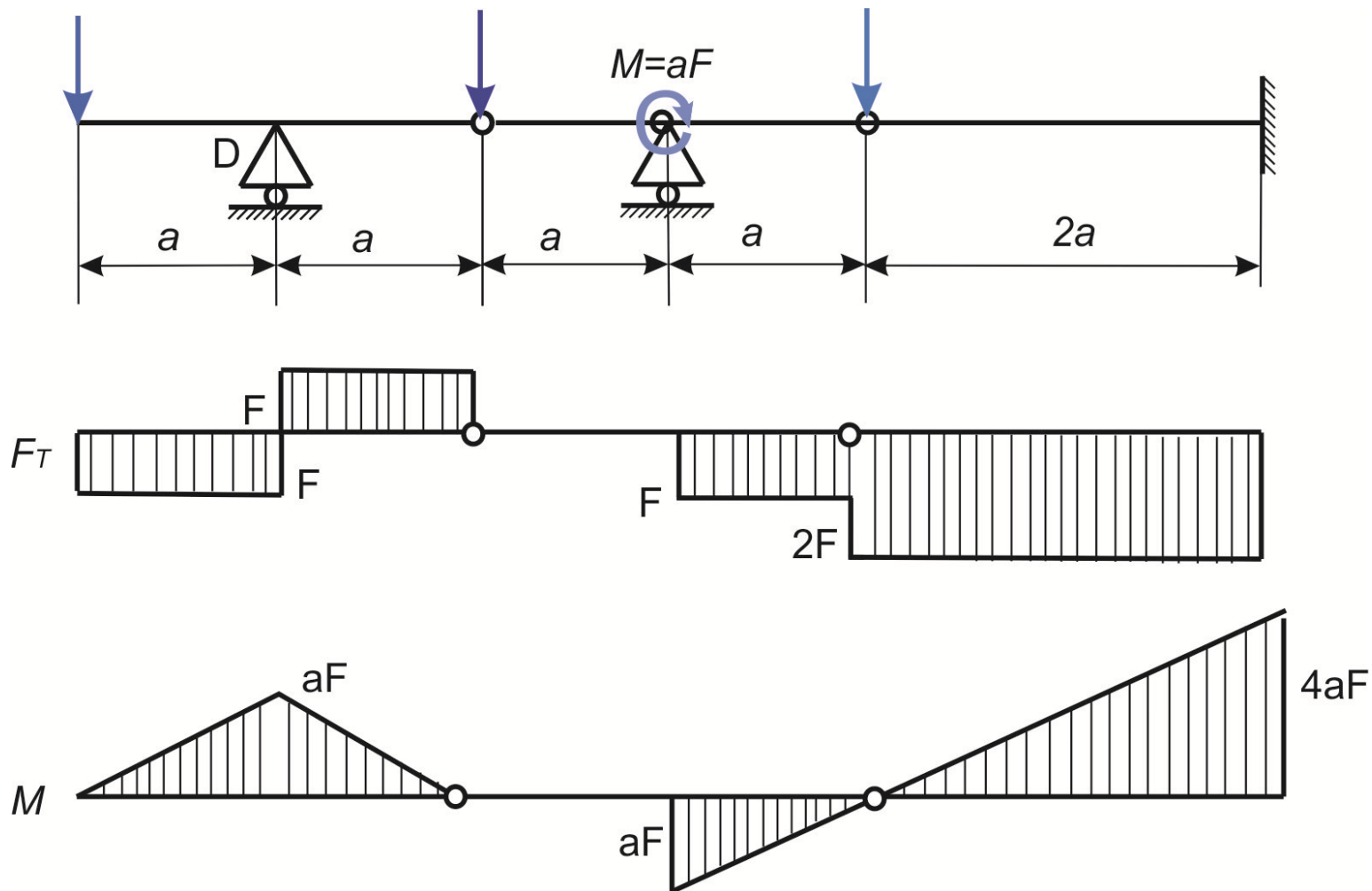
Gerber tartó igénybevételének meghatározása

Határozzuk, szerkesszük meg az ábrán látható gerber tartó nyíró és nyomatéki ábráit!





Megoldás:





Ó  
B  
U  
D  
A  
I

E  
G  
Y  
E  
T  
E  
M



# ÖSSZEGZÉS

A tananyag megértésével lehetőség nyílik az egyenes tartók igénybevételeinek meghatározására.

Gyakoroltuk - konkrét számpéldákon bemutatva - az igénybevételi függvény értékek számítását és ábrázolását. Függvénykapcsolatokra mutattunk rá az különböző igénybevételi ábrák között, de ismertettük a területszámítás elvén alapuló megoldást is.

A gyakorláshoz több gyakorló feladatot is figyelmükbe ajánlottunk.