ÓBUDAI EGYETEM

MECHANIKA I. (Statika)

Erőrendszerek statikája

1.1.2 Lecke. Síkbeli erőrendszerek

BÁNKI

CÉLKITŰZÉS

Ez a lecke bemutatja a **közös metszéspontú**, a **párhuzamos hatásvonalú** és az **általános síkbeli erőrendszer eredőjé**nek meghatározását szerkesz-téssel és számítással.

KAPCSOLÓDÓ IRODALOM

Mechanika I. (Statika) elektronikus jegyzet 5., 6. fejezet.

Felhasznált irodalom

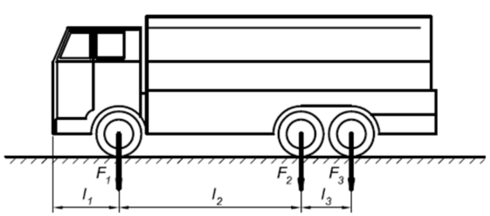
[1] Alfred Böge, Walter Schlemmer: Mechanikai és szilárdságtani feladatgyűjtemény, B+V Lap és Könyvkiadó, Budapest, 1993.

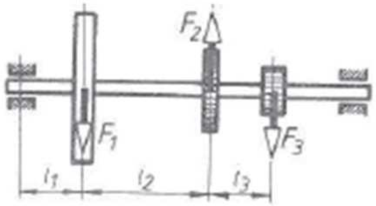
[2] Kósa Csaba: Nyugvó rendszerek mechanikája. Példatár és útmutató, Budapest, 2009

[3] Gelencsér Endre: Statika példatár, Gödöllő, 2006

MOTIVÁCIÓ

A gyakorlatban gyakran olyan feladatokkal találkozunk, ahol az erővektorok közös síkban találhatóak, illetve érdemes megjegyezni, hogy a térbeli erőrendszerekkel kapcsolatos problémák jó része is visszavezethető síkbeli feladatra, legyen szó egy autó tengely-terheléseinek vagy akár egy fogaskerékhajtás tengelyét terhelő erők kiszámításának problémájáról.





E tananyag elsajátítása révén képesek lehetünk az erőrendszerek eredőjének és az eredő hatásvonalának meghatározására. Az erőrendszer origóba történő redukálásával megtanuljuk az eredő vektorkettős kiszámításának módját.

ELMÉLETI ÁTTEKINTÉS

A **közös metszéspontú** (közös pontban metsződő) **erők eredője** egyetlen erő, melynek hatásvonala a közös metszésponton halad át. Az eredő erő nagysága az erők vektoriális összege:

$$\underline{F}_R = \sum_{i=1}^{n} \underline{F}_i$$

$$(F_1, F_2, F_3, \dots, F_n) \doteq (F_R).$$

Mivel mindegyik erő átmegy a közös „O” metszéspronton, arra nyomatékuk nincs:

$$\underline{M}_{0R} = \underline{0}$$

A számító eljárásban az erővektor koordinátás alakjából indulunk ki:

$$F_{ix} = \underline{F_i} \cdot \underline{i};\ F_{iy} = \underline{F_i} \cdot \underline{j},$$

az eredő erővektor pedig a következőképpen alakul:

$$\underline{F_R} = \begin{bmatrix} F_{Rx} \\ F_{Ry} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \underline{F_i} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} F_{ix} \\ \sum_{i=1}^{n} F_{iy} \end{bmatrix}.$$

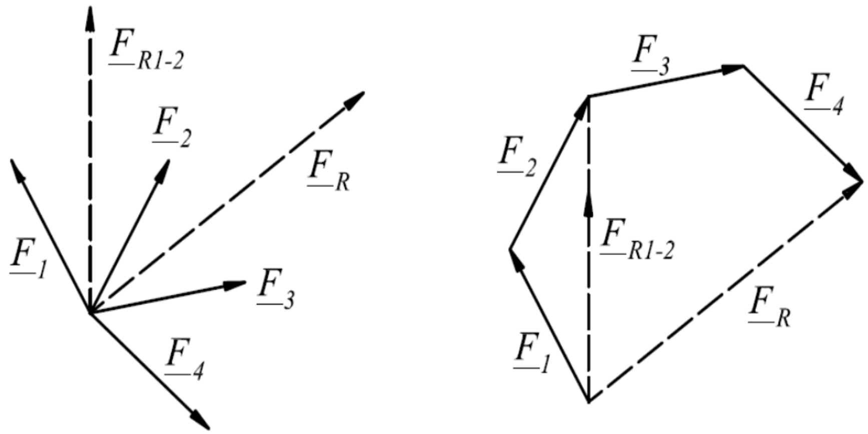
A vetületekből az eredő erővektor nagysága és hajlásszöge is számítható:

$$\left|\underline{F_R}\right| = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2}, \qquad tg\ \alpha_R = \frac{F_{Ry}}{F_{Rx}},$$

az egyensúly szükséges feltétele:

$$F_{Rx} = F_{Ry} = 0.$$

A szerkesztő eljárás visszavezethető két erő összegzésére. Adott (F_1, F_2, F_3, F_4) közös metszéspontú erőrendszer, melynek keressük az eredőjét. Először meghatározzuk az első két erő eredőjét:



majd ehhez hozzáadjuk F_3 erőt, és így tovább. Végül kapjuk F_R eredőt, mely szintén a közös metszésponton halad át.

Párhuzamos erőkből álló erőrendszer során úgy választjuk meg a koordináta rendszert, hogy az erők az xy síkba esnek, illetve az erők hatásvonalai párhuzamosak az y tengellyel.

A vektortétel alapján az erőrendszert redukálhatjuk az origóba:

$$(F_1, F_2, F_3, \dots, F_n) \doteq (F_R, M_{0R}),$$

ahol

$$\underline{F}_R = \sum_{i=1}^{n} \underline{F}_i \text{ és } \underline{M}_{0R} = \sum_{i=1}^{n} \underline{r}_i \times \underline{F}_i.$$

A koordinátarendszer célszerű megválasztása miatt az erő nagyságára írható:

$$F_R = \sum_{i=1}^{n} F_i\,,$$

ami $\underline{j}$ irányú, a nyomaték nagysága pedig:

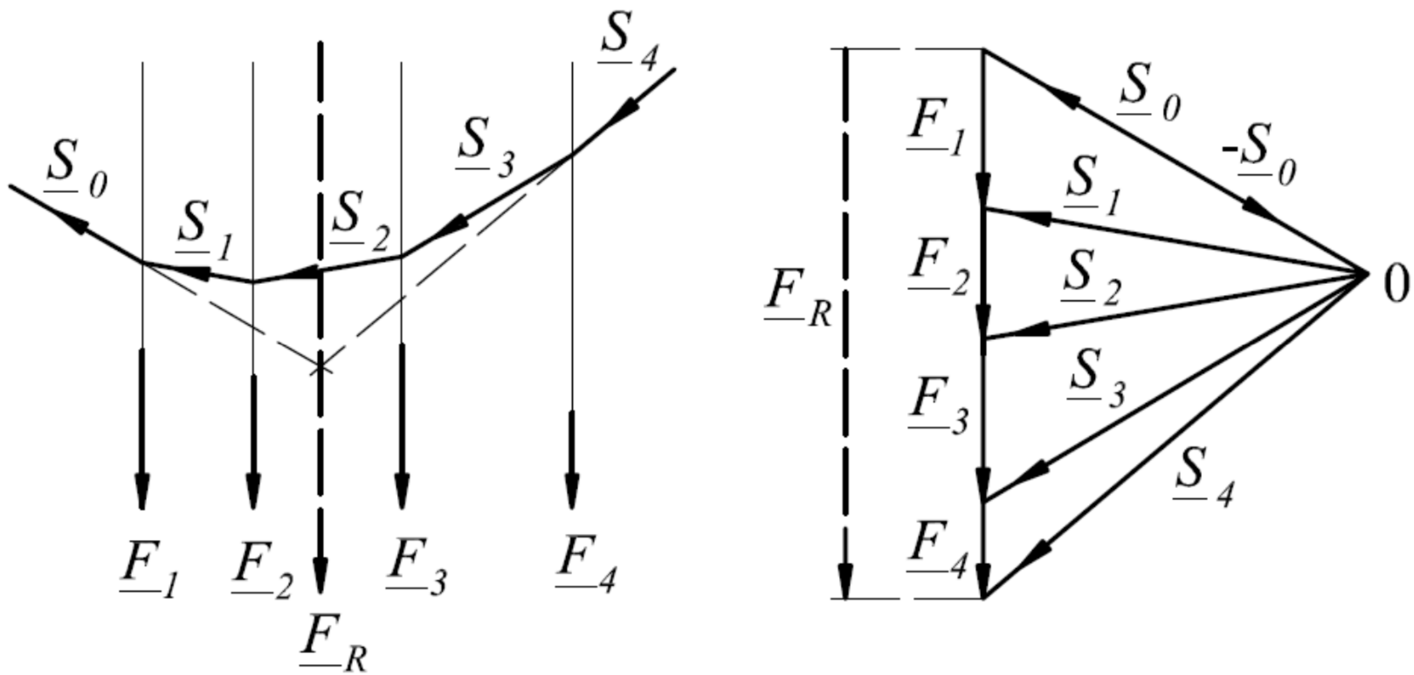
$$M_{0R} = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot F_i = x_R \cdot F_R.$$

Az eredő erő helye a nyomatéki tétel segítségével meghatározható:

$$x_R = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot F_i}{F_R}$$

ahol x_R az eredő x tengellyel való metszéspontját határozza meg.

A szerkesztési eljárásban a kötélsokszög (kötélábra) szerkesztést alkalmazzuk, ahol az elrendezési ábrán hosszléptéket, az erők vektorábrájában erőléptéket kell használni.



Általános síkbeli erőrendszerről beszélünk, ha az erők hatásvonalai egyéb megkötés nélkül közös síkban helyezkednek el. A koordináta rendszer xy síkját – célszerűen – az erőkkel közös síkban vesszük fel. A vektortétel alapján az erőket az origóba redukálhatjuk:

$$(F_1, F_2, F_3, \dots, F_n) \doteq (F_R, M_{0R}),$$

ahol az eredő erő:

$$\underline{F}_R = \sum_{i=1}^{n} \underline{F}_i = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} F_{ix} \\ \sum_{i=1}^{n} F_{iy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{Rx} \\ F_{Ry} \end{bmatrix},$$

mely két skaláregyenletre bontható:

$$F_{Rx} = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = \sum_{i=1}^{n} \left|\underline{F_i}\right| \cdot \cos\alpha_i \,,$$

$$F_{Ry} = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = \sum_{i=1}^{n} \left|\underline{F_i}\right| \cdot \sin\alpha_i \,.$$

A redukált nyomaték:

$$\underline{M}_{0R} = \sum_{i=1}^{n} \underline{M}_{0i} = \sum_{i=1}^{n} \underline{r_i} \times \underline{F_i} = \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ x_i & y_i & 0 \\ F_{xi} & F_{yi} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(x_i \cdot F_{yi} - y_i \cdot F_{xi}\right) \cdot \underline{k} =$$

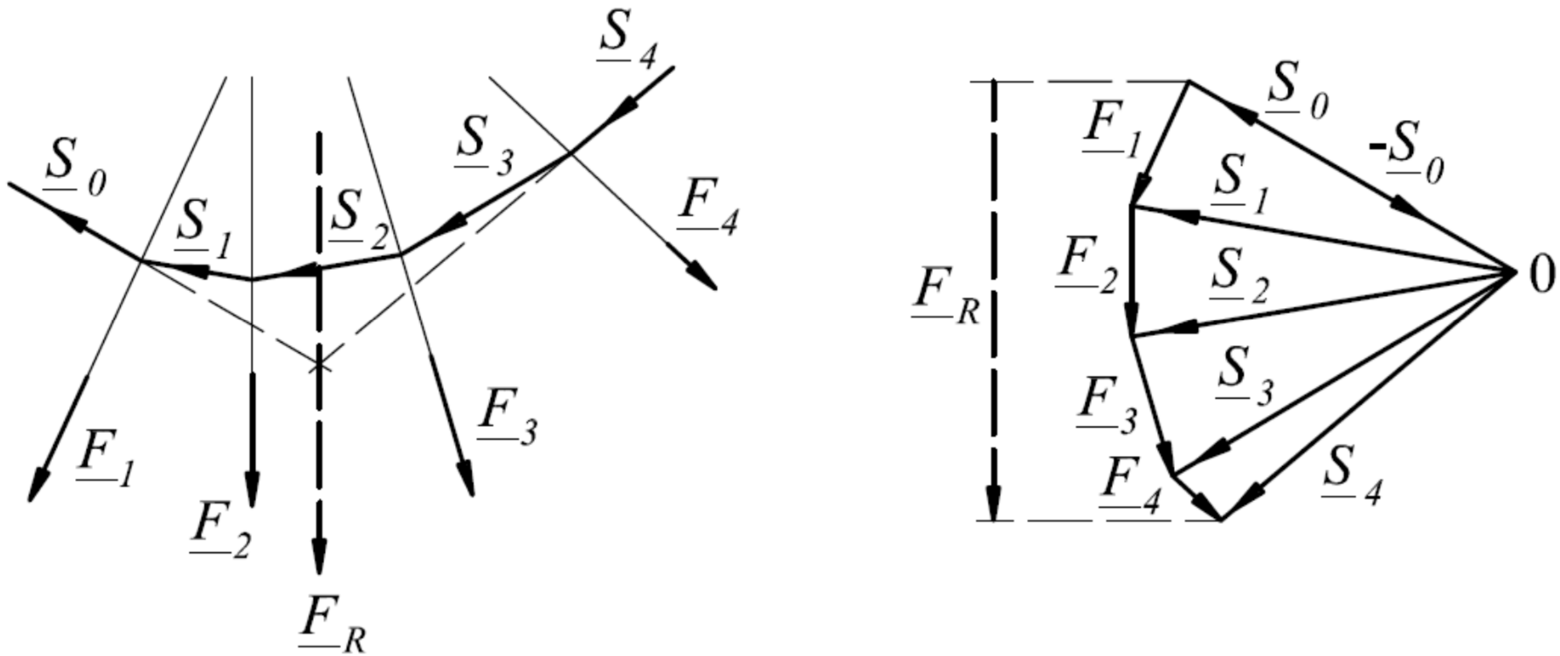
$$= \sum_{i=1}^{n} x_{0i} \cdot F_{yi} \cdot \underline{k} = \sum_{i=1}^{n} -y_{0i} \cdot F_{xi} \cdot \underline{k}.$$

Az eredő erő helye a nyomatéki tétel segítségével meghatározható:

$$x_{0R} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i \cdot F_{yi} - y_i \cdot F_{xi}\right)}{F_{Ry}},$$

ahol x_{0R} az eredő x tengellyel való metszéspontját határozza meg.

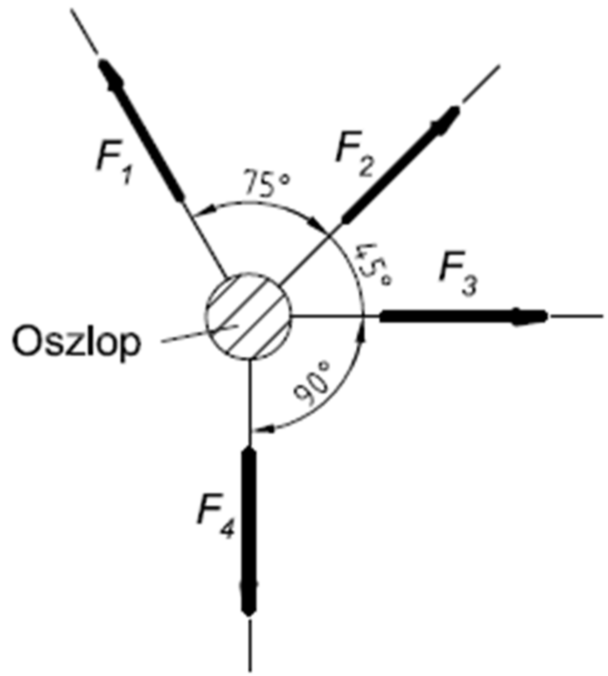
Az eredő helye és nagysága a párhuzamos erőkből álló erőrendszerekhez hasonlóan szerkesztéssel is meghatározható. Az eredő nagyságát és irányát a vektorábrából, a helyét a kötélsokszög felhasználásával határozhatjuk meg.



A mintafeladatok megoldása előtt érdemes megjegyezni, hogy a feladatok egy megfelelően megválasztott koordinátarendszer felvétele után, tisztán mechanikai, „elméleti” feladattá egyszerűsödnek.

1. MINTAPÉLDA

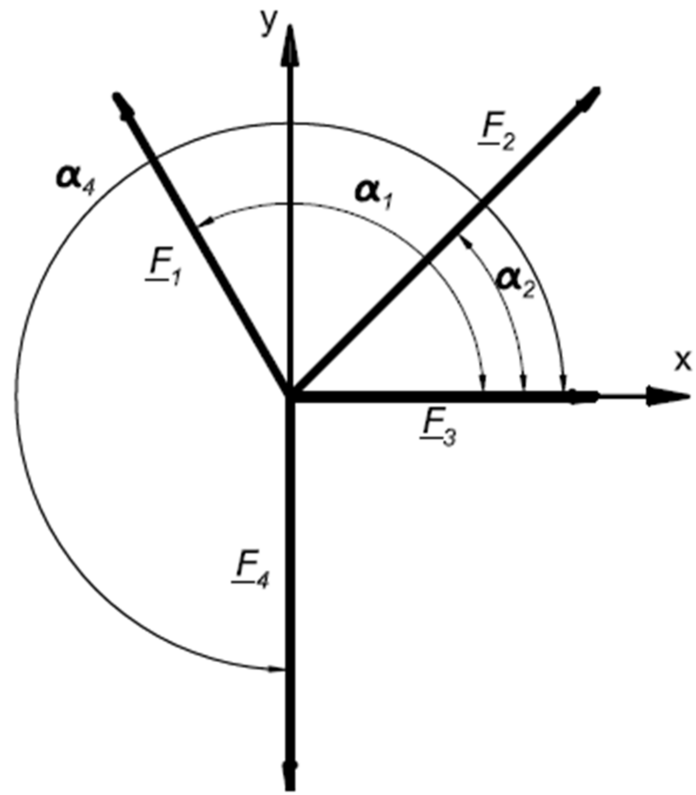
Az ábrán (metszetben) látható telefonoszlopot vízszintesen 4 huzal húzza F_1, F_2, F_3, F_4 erővel. Keressük az erők eredőjét és az eredő irányszögét. Oldjuk meg a feladatot számítással és szerkesztéssel!



Adatok: $F_1 = 400\ N, F_2 = 500, F_3 = 350\ N, F_4 = 450\ N.$

Megoldás

Adott tehát négy, közös metszéspontú erő egy xy koordinátarendszerben, melynek keressük az eredőjét és az eredő hajlásszögét.



A feladat megoldása során használt szögeket az x tengelyhez képest olvassuk le, így az előjelhelyes eredményt is az xy koordinátarendszerben fogjuk megkapni.

A feladat megoldása számítással:

Az eredő erő:

$$\underline{F}_R = \begin{bmatrix} F_{Rx} \\ F_{Ry} \end{bmatrix}$$

A vektort skaláregyenletekre felbontva kapjuk az eredő x és y irányú komponenseit:

$$F_{Rx} = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = \sum_{i=1}^{n} \left|\underline{F}_i\right| \cdot \cos\alpha_i =$$

$$= F_1 \cdot \cos\alpha_1 + F_2 \cdot \cos\alpha_2 + F_3 \cdot \cos\alpha_3 + F_4 \cdot \cos\alpha_4$$

$$= 400\ N \cdot \cos 120° + 500\ N \cdot \cos 45° + 350\ N \cdot \cos 0° +$$

$$+450\ N \cdot \cos 270° = -200\ N + 354\ N + 350\ N + 0\ N =$$

$$= 504\ N$$

$$F_{Ry} = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = \sum_{i=1}^{n} \left|\underline{F}_i\right| \cdot \sin\alpha_i =$$

$$= F_1 \cdot \sin\alpha_1 + F_2 \cdot \sin\alpha_2 + F_3 \cdot \sin\alpha_3 + F_4 \cdot \sin\alpha_4 =$$

$$= 400\ N \cdot \sin 120° + 500\ N \cdot \sin 45° + 350\ N \cdot \sin 0° +$$

$$+450\ N \cdot \sin 270° = 346\ N + 354\ N + 0\ N - 450\ N =$$

$$= 250\ N$$

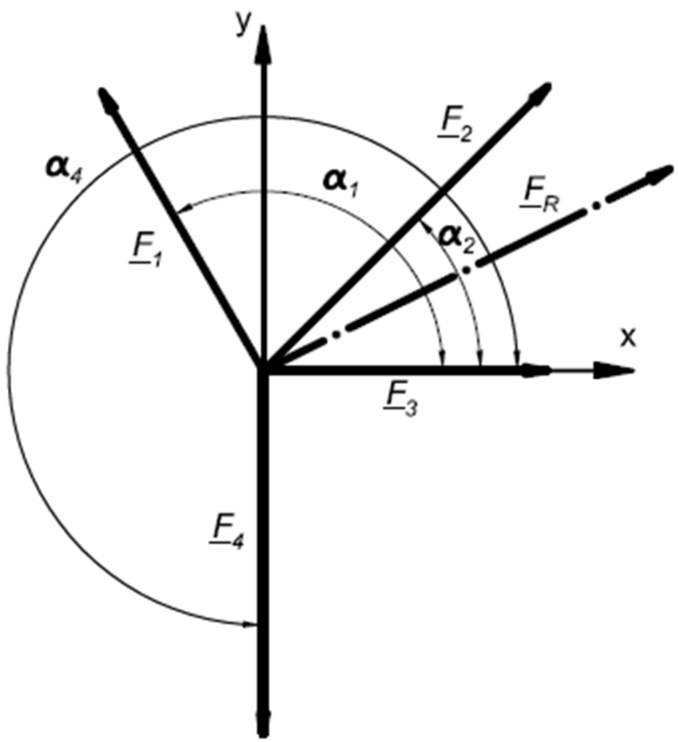
Az eredő erő nagysága és hajlásszöge:

$$\left|\underline{F}_R\right| = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2} = \sqrt{(504\ N\ )^2 + (250\ N\ )^2} = 562\ N$$

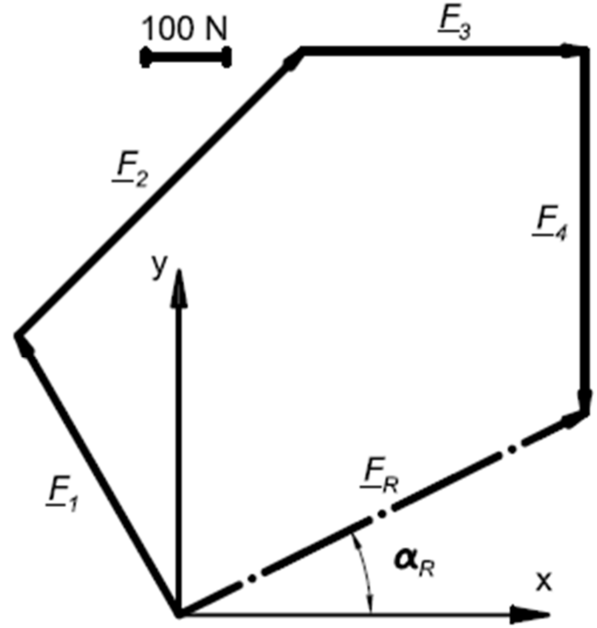
$$\alpha_R = arctg\frac{F_{Ry}}{F_{Rx}} = arctg\frac{250\ N}{504\ N} = 26{,}4°$$

A feladat megoldása szerkesztéssel:

szerkezetábra:



erőábra:



Mivel a közös metszéspontú erőrendszer eredője is keresztülmegy a metszésponton, az eredő helye egyértelműen meghatározott. Az eredő nagysága és iránya az erőábrában (vektorsokszög) kerül megszerkesztésre. Erőléptéket felvéve és alkalmazva, az erőket nyílfolytonosan összegezzük, majd a kezdő és végpontot összekötve (ütköző nyílértelemmel) kapjuk az eredő erőt. Nagyságát és hajlásszögét léptékhelyesen leolvashatjuk a vektorábrából.

Az erő nagysága az erőlépték alapján és hajlásszöge:

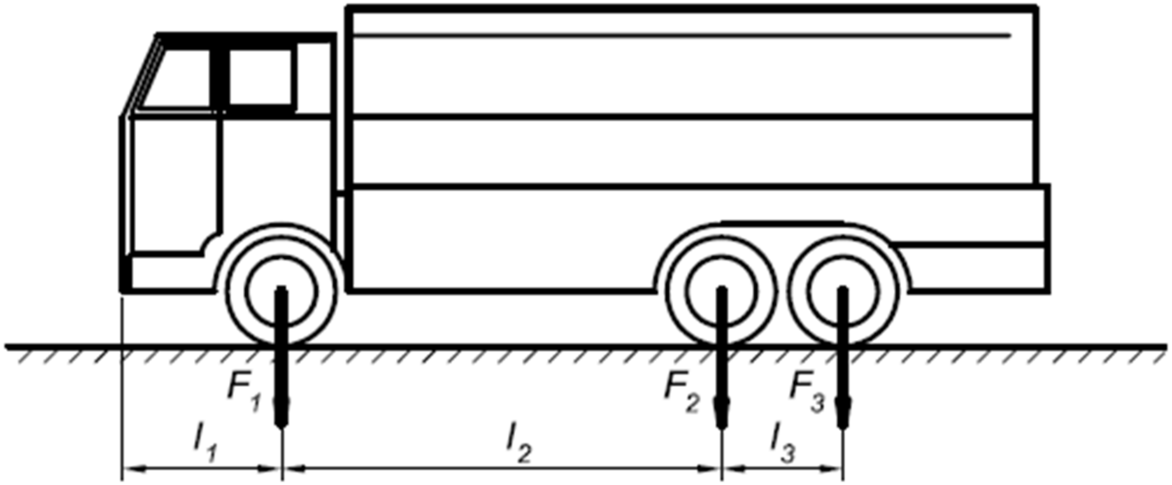
$$F \cong 560\ N,\ \alpha_R = 26°.$$

Válasz/értékelés

A feladat megoldása során kerestük a telefonoszlopot terhelő huzalok eredő erejét. A megoldás az erők koordinátarendszerben való feltüntetése, majd összegzése volt, melyet számítással és szerkesztéssel is megoldottunk.

2. MINTAPÉLDA

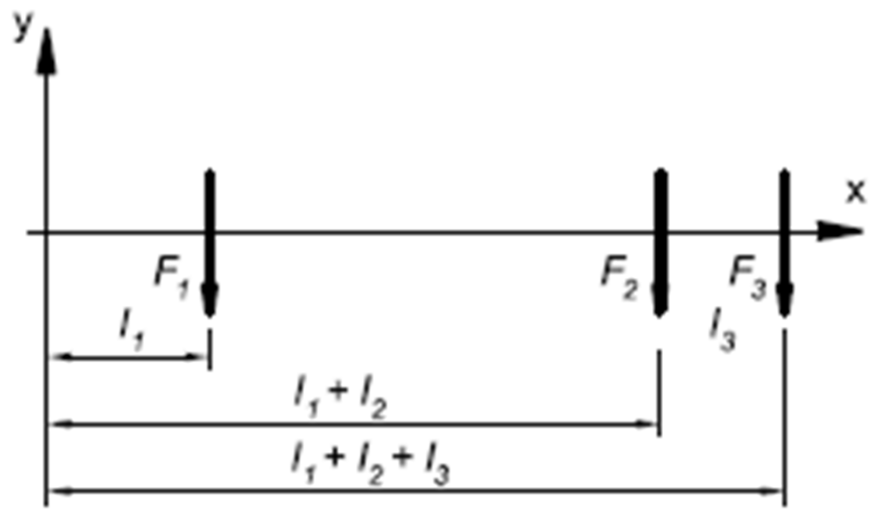
A teherautó tengelyterhelése F_1, F_2 és F_3. Az l_1, l_2, l_3 távolságok ismeretében határozzuk meg az összsúlyt (eredő erőt) illetve hatásvonalának helyét a teherautó elejéhez képest. Oldjuk meg a feladatot számítással és szerkesztéssel!



Adatok: $F_1 = 50\,kN, F_2 = F_3 = 52\,\mathrm{k}N,$
$l_1 = 1{,}7\,m, l_2 = 4{,}7\,m, l_3 = 1{,}3\,m.$

Megoldás

A feladat megoldását a szerkezet elhagyásával és egy alkalmasan megválasztott koordinátarendszer felrajzolásával kezdjük. Az y tengelyt célszerűen az autó elejéhez „rögzítjük”, az erők távolságát pedig a későbbi számítások miatt az origóhoz képest jelöljük.



A feladatban adott tehát egy F_1, F_2 és F_3 **párhuzamos erőkből álló erőrendszer**, keressük az eredő erőt, azaz az eredő erővektor helyét és nagyságát.

A feladat megoldása számítással:

Az erők a párhuzamos erőrendszer – és a jelen koordinátarendszer irányítottsága miatt - csak $\underline{j}$ irányú komponenseket tartalmaznak, így az eredő erő nagysága:

$$F_R = \sum_{i=1}^{n} F_i = 50\ kN + 52\ kN + 52\ kN = 154\ kN$$

Az eredő helye:

$$x_R = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot F_i}{F_R} =$$

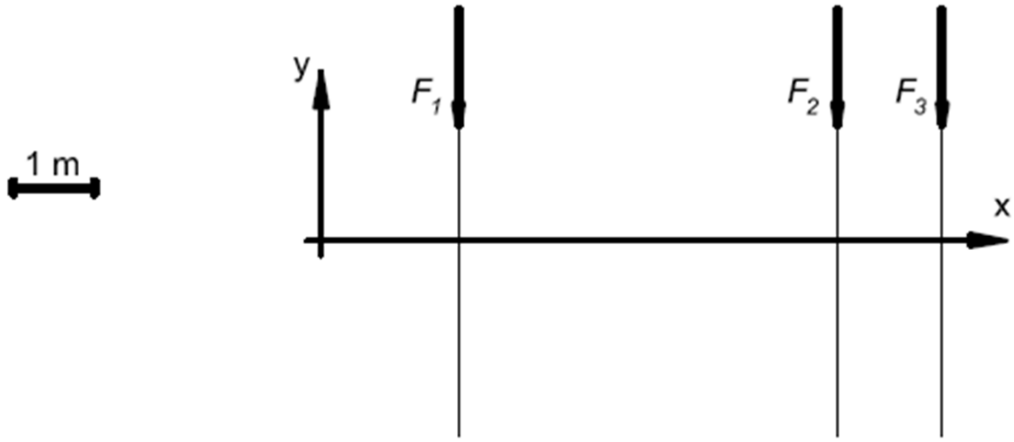
$$= \frac{(l_1 \cdot F_1) + \left((l_1 + l_2) \cdot F_2\right) + \left((l_1 + l_2 + l_3) \cdot F_3\right)}{F_R} =$$

$$= \frac{(1{,}7\ m \cdot 50\ kN) + (6{,}4\ m \cdot 52\ kN) + (7{,}7\ m \cdot 52\ kN)}{154\ kN} =$$

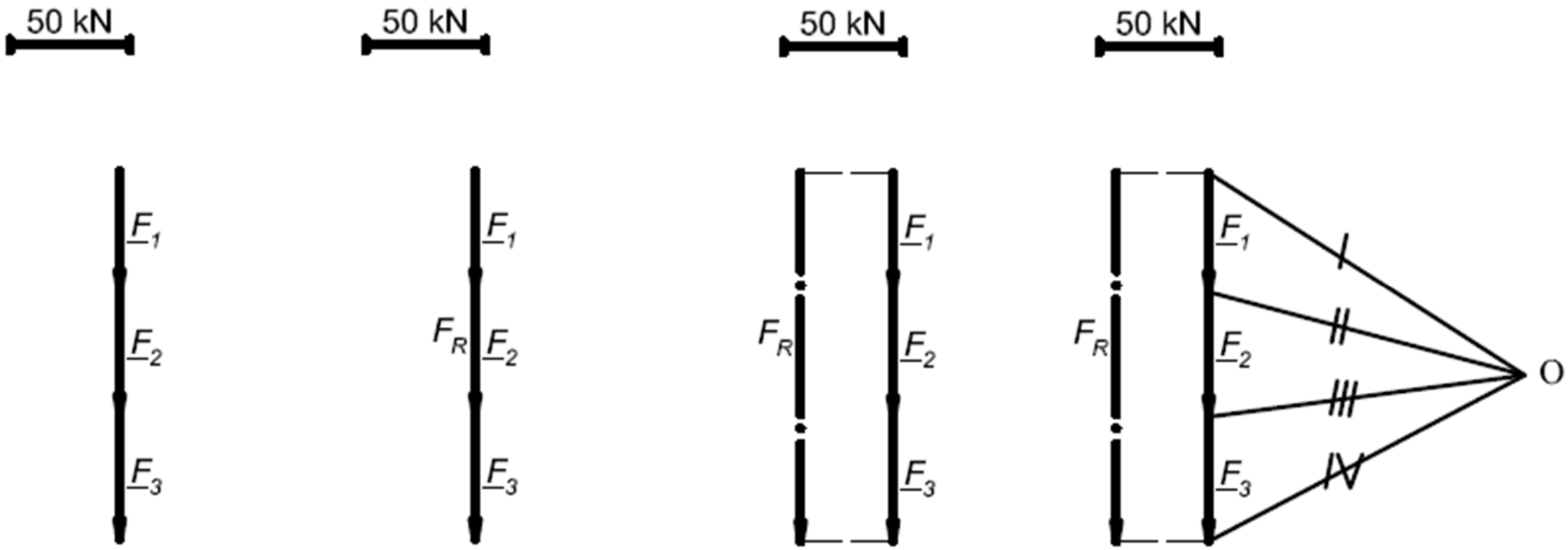
$$= 5{,}3\ m$$

A feladat megoldása szerkesztéssel:

Első lépésben egy hosszlépték alkalmazása mellett megrajzoljuk az erők szerkezetábráját:



Ezután megszerkesztjük az erők vektorsokszögét a megválasztott erőléptéknek megfelelően.
Az első erővektor kezdőpontját összekötjük az utolsó erővektor végpontjával, így kapjuk az eredő erővektort, a vektorábra nyílfolyama az eredőre nézve ütköző. A lépték segítségével az eredő meghatározható. Jelen feladatban az erők egy vonalba esnek, így a könnyebb értelmezhetőség érdekében az eredőt kissé eltolva is megrajzoljuk.
Ezután következik a kötélábra szerkesztése. Felveszünk egy O póluspontot, majd ezt összekötjük az erők kezdő- illetve végpontjával, és beszámozzuk őket az ábra szerint. Az első erő kezdőpontjából húzott kötéloldal az I-es. Az első erő végpontja, illetve a második erő kezdőpontjából húzott kötéloldal a II-es jelet kapja, és így tovább.

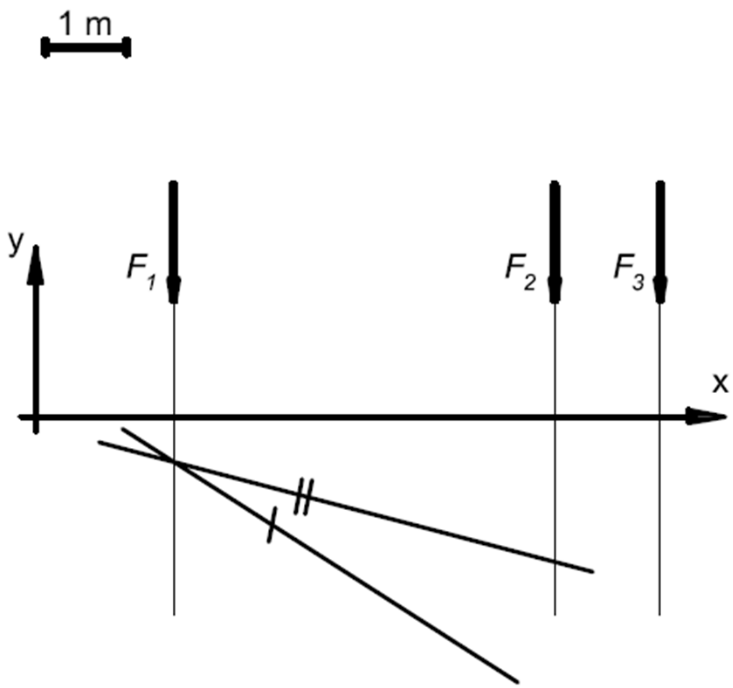


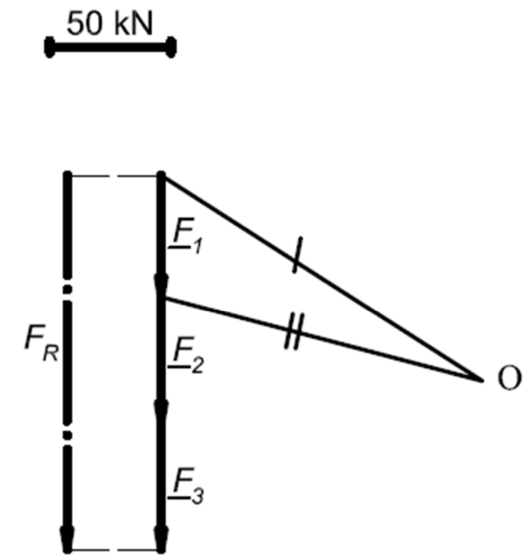
A szerkesztés eredménye a lépték használatával, mérés alapján:

$$F_R = 154\ kN$$

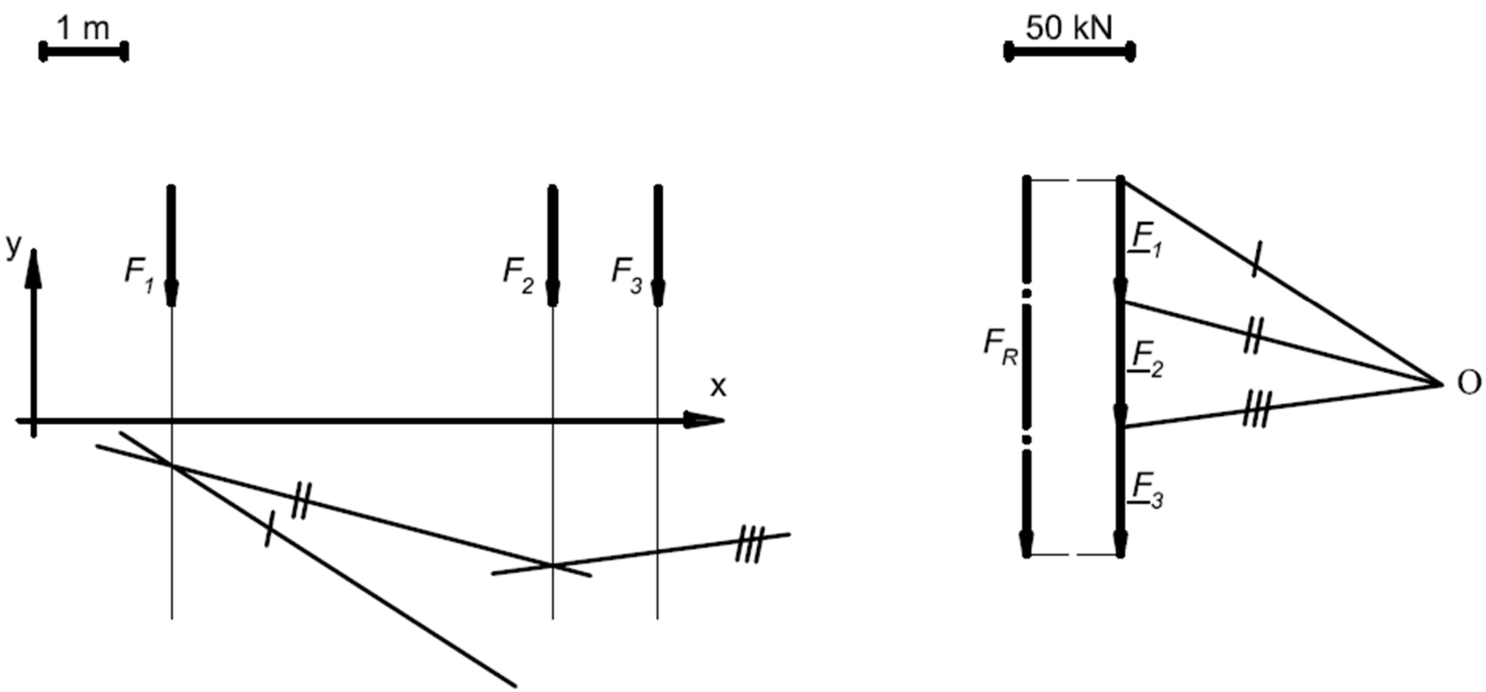
A kötéloldalakkal párhuzamosokat húzunk a szerkezeti ábrába oly módon, hogy az első erő hatásvonalát metszük az I-es és II-es kötéloldallal.
Majd a második erő hatásvonalát metsző II-es kötéloldali metszéspontba párhuzamost húzunk a III-as kötéloldallal és így tovább. Végül az utolsó kötéloldalt metszésre hozzuk az I-es kötéloldallal, a metszéspont kijelöli az eredő erő hatásvonalának helyét.

A kötéloldalakkal párhuzamosokat húzunk a szerkezeti ábrába oly módon, hogy az első erő hatásvonalát metszük az I-es és II-es kötéloldallal.

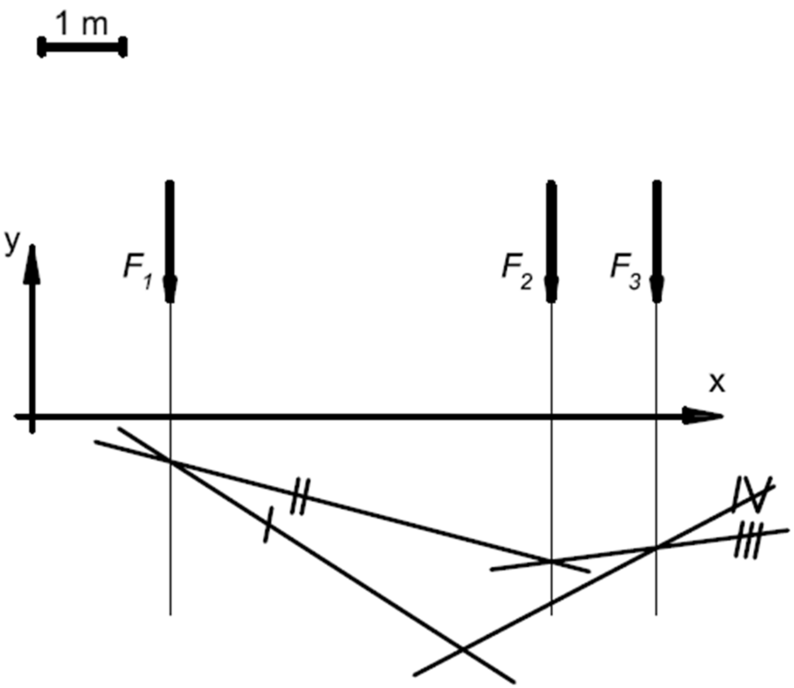


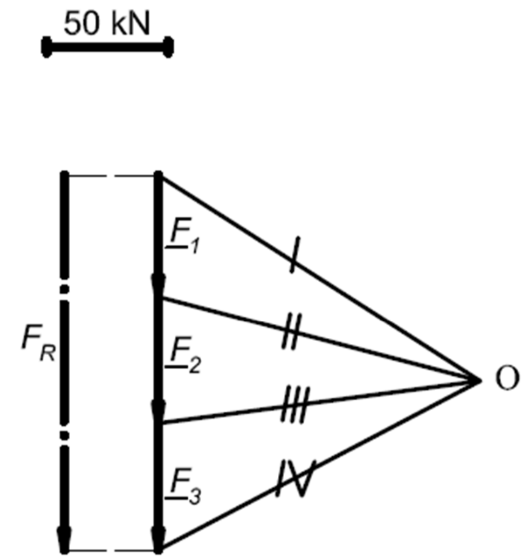


Majd a második erő hatásvonalát metsző II-es kötéloldali metszéspontba párhuzamost húzunk a III-as kötéloldallal,



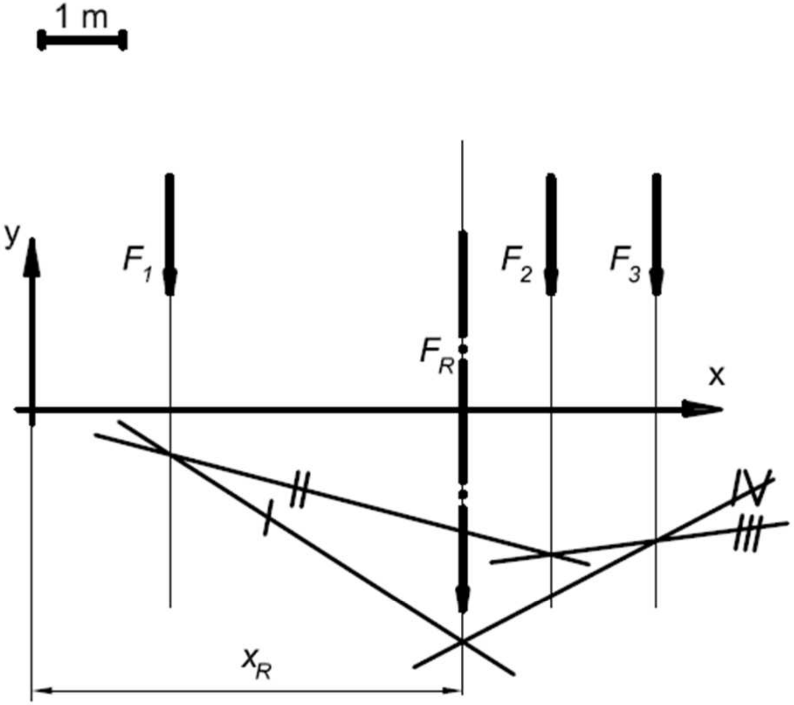
és így tovább. Végül az utolsó kötéloldalt metszésre hozzuk az I-es kötéloldallal,

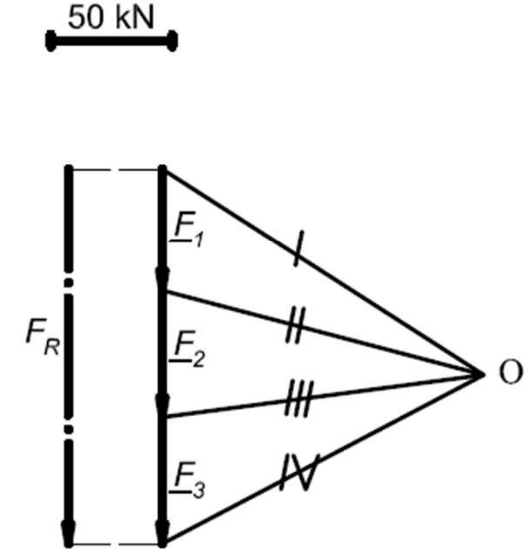




a metszéspont kijelöli az eredő erő hatásvonalának helyét.
Az eredő erővektor helye a szerkesztés eredményei, mérés alapján:

$$x_R = 5{,}3\ m$$





Válasz/értékelés

A feladat megoldása során kerestük a teherautó összsúlyát és a terhelés eredőjének helyét.
A feladatot számítással és szerkesztéssel is megoldottunk, a szerkesztés során az erők helyét koordináta rendszerben ábrázoltuk, vektorábrában összegeztük, majd kötélsokszög szerkesztés során megkerestük a vektorábrában kapott eredő helyét. A szerkesztés során kapott eredményeket méréssel állapítottuk meg a feladatban felvett léptékek felhasználásával.

3. MINTAPÉLDA

A fenékcsappantyúra G súlyerő, F_1 és súrlódásmentes csigán átvetett idealizált kötélen keresztül F_2 erő hat. Az erők hatásvonalainak távolsága l_1, l_2 és l_3, a kötél hajlásszöge α.

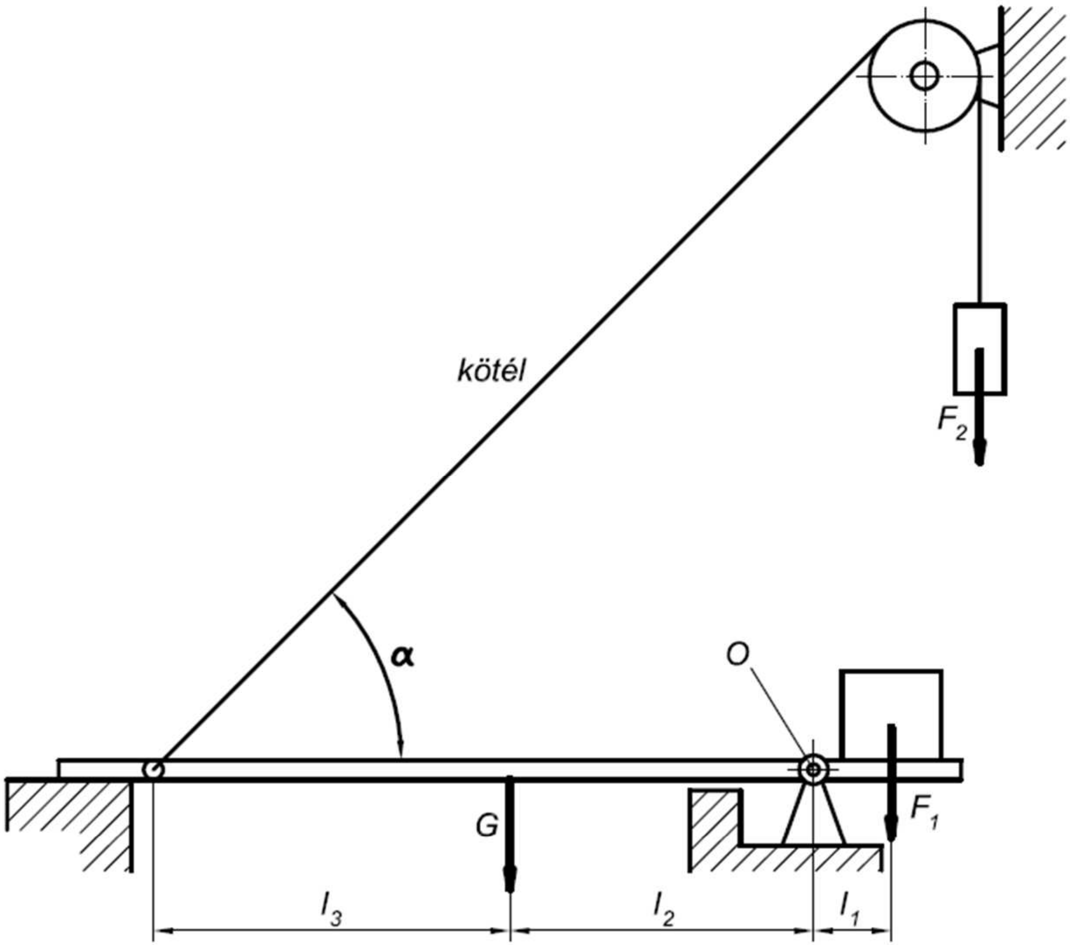
Keressük

- az eredő nagyságát,
- az eredő hajlásszögét a vízszinteshez képest, illetve
- az eredő hatásvonalának távolságát az O ponthoz viszonyítva.

Oldjuk meg a feladatot számítással és szerkesztéssel!

Adatok: $G = 2\ kN, F_1 = 1{,}5\ kN, F_2 = 0{,}5\ \mathrm{k}N,$

$l_1 = 0{,}2\ m, l_2 = 0{,}8\ m, l_3 = 0{,}9\ m, \alpha = 45°.$

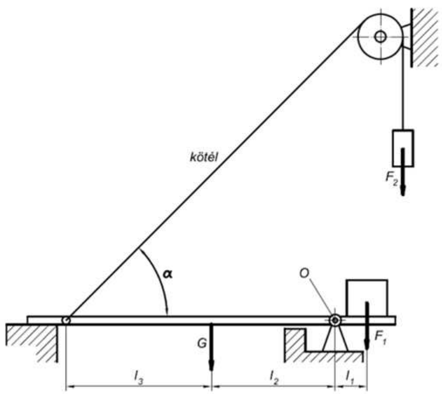

kötél
F_2
α
O
G
F_1
l_3
l_2
l_1

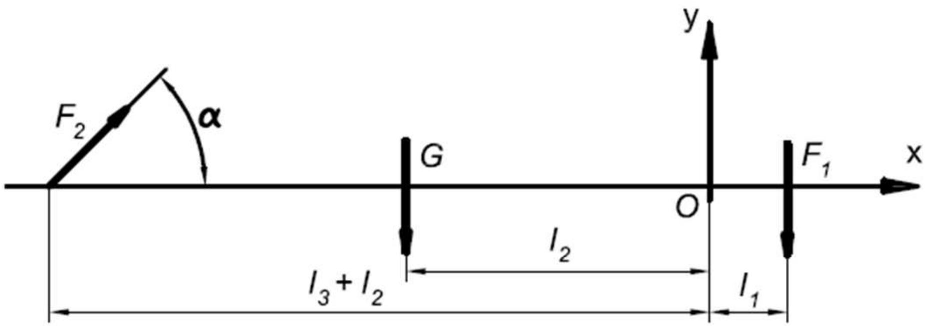
Megoldás

A feladat megoldását ismét a szerkezet elhagyásával és egy alkalmasan megválasztott koordinátarendszer felvételével kezdjük.
A feladat felrajzolásakor figyelembe vesszük, hogy a kötél végén felfüggesztett F_2 súlyerő hatására a kötélben F_2 erő ébred.

Ne felejtsük, az erők a hatásvonalaikon eltolhatók és tetszőlegesen felbonthatók összetevőkre.

Így a feladat tehát egy G, F_1 és F_2 **általános síkbeli erőrendszer**. Keressük az eredő erőt, az eredő hajlásszögét és hatásvonalának távolságát az „O” ponthoz viszonyítva. Írjuk fel az eredő vektorkettőst is!


kötél
F_2
α
O
G
F_1
l_3
l_2
l_1


y
F_2
α
G
F_1
x
O
l_2
$l_3 + l_2$
l_1

A feladat megoldása számítással:

Az eredő erővektort számíthatjuk skaláregyenletekre bontva vagy vektoros formában is. Most ez utóbbit választjuk.

Írjuk fel előjelhelyesen a feladatban szereplő erőket és a támadáspontjukba mutató helyvektorokat vektoros alakban: x, y, z térbeli koordinátarendszernek megfelelően! (Bár a feladat síkbeli, szükség van a z koordinátákra is. A feladat során hamarosan belátjuk, hogy az origóra történő redukálás során keletkező nyomatékvektor z irányú, azaz merőleges a feladatban szereplő erők síkjára.)

Az eredő erő számítása:

$$\underline{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} kN, \underline{r}_g = \begin{bmatrix} -0{,}8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mathrm{m}$$

$$\underline{F}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1{,}5 \\ 0 \end{bmatrix} kN, \underline{r}_1 = \begin{bmatrix} 0{,}2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mathrm{m}$$

$$\underline{F}_2 = \begin{bmatrix} 0{,}5 \cdot \cos 45° \\ 0{,}5 \cdot \sin 45° \\ 0 \end{bmatrix} kN = \begin{bmatrix} 0{,}35 \\ 0{,}35 \\ 0 \end{bmatrix} kN, \underline{r}_2 = \begin{bmatrix} -1{,}7 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mathrm{m}$$

$$\underline{F}_R = \underline{G} + \underline{F}_1 + \underline{F}_2 =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} kN + \begin{bmatrix} 0 \\ -1{,}5 \\ 0 \end{bmatrix} kN + \begin{bmatrix} 0{,}35 \\ 0{,}35 \\ 0 \end{bmatrix} kN = \begin{bmatrix} 0{,}35 \\ -3{,}15 \\ 0 \end{bmatrix} kN$$

$$\left|\underline{F}_R\right| = \sqrt{(0{,}35\ kN)^2 + (-3{,}15\ kN)^2} = 3{,}17\ kN$$

Az eredő hajlásszöge:

$$\alpha_R = arctg\,\frac{F_{Ry}}{F_{Rx}} = arctg\,\frac{-3{,}15\ kN}{0{,}35\ kN} = -83{,}6°$$

Az eredő hatásvonalának origótól mért távolságához meg kell határozni a *redukált nyomatékvektor*t, melyet a hely- és erővektorok vektoriális szorzatának összege ad:

$$\underline{M}_{0R} = \sum_{i=1}^{n} \underline{M}_{0i} = \sum_{i=1}^{n} \underline{r}_i \times \underline{F}_i = \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ x_i & y_i & 0 \\ F_{xi} & F_{yi} & 0 \end{vmatrix}$$

$$\underline{M}_G = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -0{,}8 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} kNm = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1{,}6 \end{bmatrix} kNm$$

$$\underline{M}_1 = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0{,}2 & 0 & 0 \\ 0 & -1{,}5 & 0 \end{vmatrix} kNm = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0{,}3 \end{bmatrix} kNm$$

$$\underline{M}_2 = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -1{,}7 & 0 & 0 \\ 0{,}35 & 0{,}35 & 0 \end{vmatrix} kNm = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0{,}6 \end{bmatrix} kNm$$

$$\underline{M}_{OR} = \underline{M}_G + \underline{M}_1 + \underline{M}_2 =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1{,}6 \end{bmatrix} kNm + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0{,}3 \end{bmatrix} kNm + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0{,}6 \end{bmatrix} kNm = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0{,}7 \end{bmatrix} kNm$$

Az egyenlet mindkét oldalát skalárisan megszorozzuk a z tengely irányába mutató $\underline{k}$ egységvektorral:

$$M_{0R} = 0{,}7\ kNm$$

Az eredő hatásvonalának távolsága az x tengely mentén az origótól (x tengelymetszék):

$$x_{0R} = \frac{M_{0R}}{F_{Ry}} = \frac{0{,}7\ kNm}{-3{,}15\ kN} = -0{,}22\ m$$

A feladat megoldása szerkesztéssel:

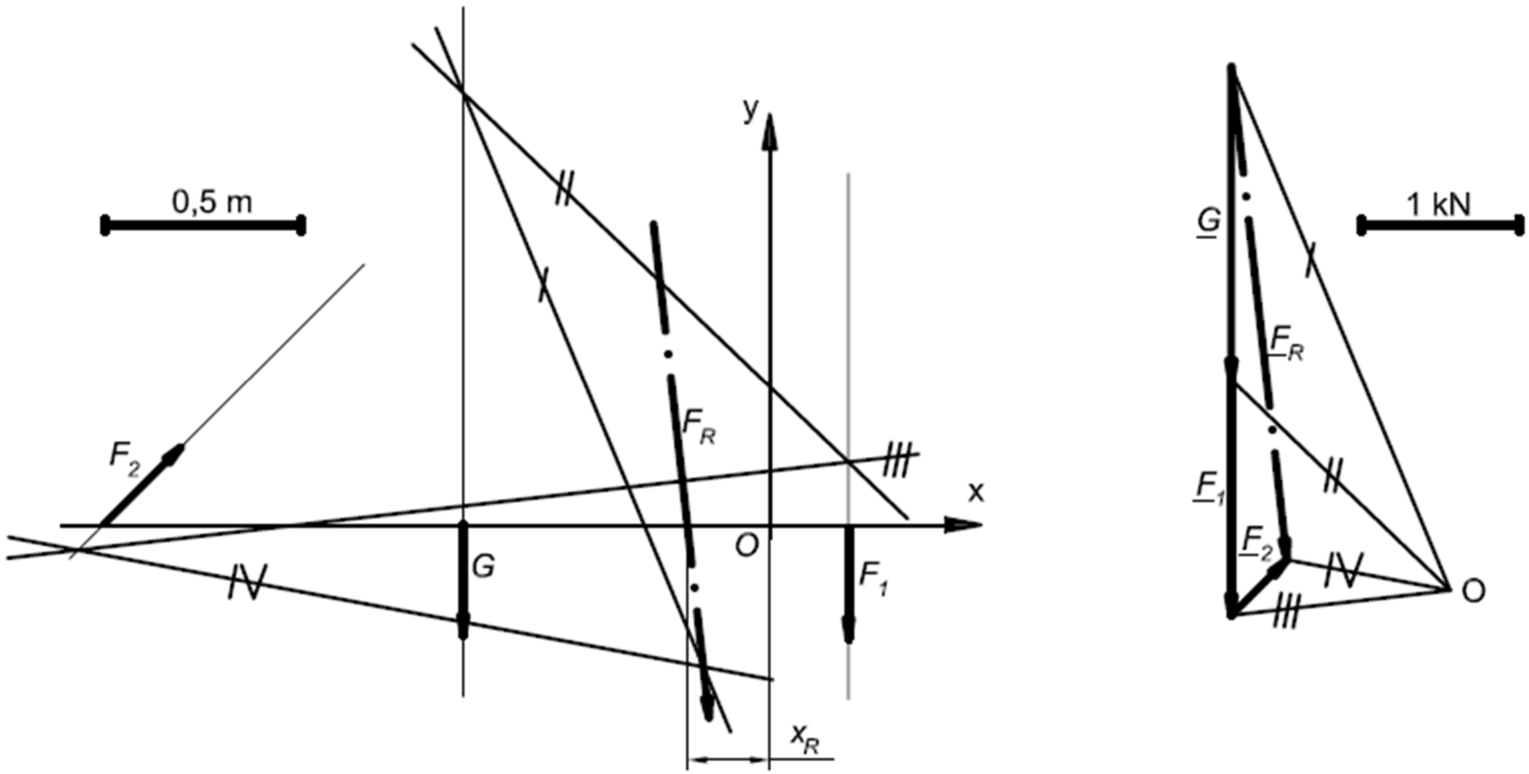
(A szerkesztés analóg a párhuzamos erőrendszerek mintapéldájával.)
Első lépésben egy hosszlépték alkalmazása mellett megrajzoljuk az erők szerkezetábráját.
Ezután megszerkesztjük az erők vektorsokszögét a megválasztott erőléptéknek megfelelően. Az első erővektor kezdőpontját összekötjük az utolsó erővektor végpontjával, így kapjuk az eredő erővektort, a vektorábra nyílfolyama az eredőre nézve ütköző.
A lépték segítségével az eredő meghatározható.

Ezután következik a kötélábra szerkesztése. Felveszünk egy O póluspontot, majd ezt összekötjük az erők kezdő- illetve végpontjával, és beszámozzuk őket az ábra szerint. Az első erő kezdőpontjából húzott kötéloldal az I-es. Az első erő végpontja, illetve a

második erő kezdőpontjából húzott kötéloldal a II-es jelet kapja, és így tovább. A kötéloldalakkal párhuzamosokat húzunk a szerkezeti ábrába oly módon, hogy az első erő hatásvonalát metszük az I-es és II-es kötéloldallal. (Az erővektorok hatásvonalát érdemes meghosszabbítani.)
Majd a második erő hatásvonalát metsző II-es kötéloldali metszéspontba párhuzamost húzunk a III-as kötéloldallal és így tovább. Végül az utolsó kötéloldalt metszésre hozzuk az I-es kötéloldallal, a metszéspont kijelöli az eredő erő hatásvonalának helyét.

A szerkesztés eredménye a léptékek használatával, mérés alapján:

$$F_R = 3{,}2\ kN, x_{0R} = -0{,}2\ m$$



Válasz/értékelés

A feladat megoldása során kerestük a fenékcsappantyúra ható erőrendszer eredőjét és hatásvonalát.

A feladatot számítással és szerkesztéssel is megoldottunk.

A számító eljárás során kapott eredő erő és eredő nyomatékvektor az erőrendszer origóba redukált vektorkettősét adják $\left[\underline{F}_R; \underline{M}_{0R}\right]_0$.

A szerkesztés során az erők helyét koordináta rendszerben ábrázoltuk, vektorábrában összegeztük, majd kötélsokszög szerkesztés során megkerestük a vektorábrában kapott eredő helyét. A szerkesztés során kapott eredményeket méréssel állapítottuk meg a feladatban felvett léptékek felhasználásával.

1. FELADAT

Adott egy F_1, F_2, F_3, F_4 erőkből álló közös támadáspontú erőrendszer. Az erők irányszögei α_1, α_2, $\alpha_3$és α_4.

Határozzuk meg az eredő erőt és az eredő erő irányszögét!

Adatok: $F_1 = 22\ N, F_2 = 15\ N, F_3 = 30\ N, F_4 = 25\ N,$
$\alpha_1 = 15°, \alpha_2 = 60°, \alpha_3 = 145°, \alpha_4 = 210°$.

Végeredmények: $F_R = 29{,}2\ N, \alpha_R = 126{,}76°$.

2. FELADAT

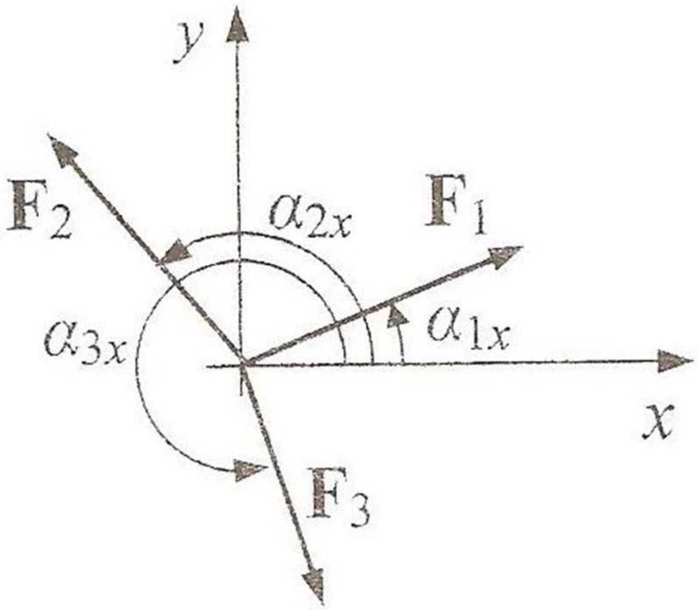
Adott egy $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6$ erőkből álló közös támadáspontú erőrendszer. Az erők irányszögei α_1, α_2, α_3, α_4, α_5 és α_6.
Határozzuk meg az eredő erőt és az eredő erő irányszögét!

Adatok: $F_1 = 75\ N, F_2 = 125\ N, F_3 = 95\ N, F_4 = 150\ N,$
$F_5 = 170\ N,\ F_6 = 115\ N,$
$\alpha_1 = 27°, \alpha_2 = 72°, \alpha_3 = 127°, \alpha_4 = 214°,$
$\alpha_5 = 270°, \alpha_6 = 331°.$

Végeredmények: $F_R = 84{,}46\ N, \alpha_R = 286{,}9°.$

3. FELADAT

Az ábrán látható elrendezésben egyensúlyi erőrendszer terhel egy anyagi pontot.
Határozzuk meg F_3 erő nagyságát és az x tengellyel bezárt szögét!



Adatok: $F_1 = 40\ kN$, $\alpha_{1x} = 43°$, $F_2 = 46\ kN$, $\alpha_{2x} = 152°$

Végeredmények: $F_3 = 50{,}18\ kN, \alpha_{3x} = 283{,}09°$.

4. FELADAT

Adott F_1, F_2 párhuzamos hatásvonalú, azonos nyílértelmű erő, egymástól l távolságra.
Határozzuk meg az eredő erőt és az eredő erő F_2 erő hatásvonalától való l_0 távolságát!

Adatok: $F_1 = 5\ N, F_2 = 11{,}5\ N, l = 18\ cm$.

Végeredmények: $F_R = 16{,}5\ N, l_0 = 5{,}46\ cm$.

5. FELADAT

Adott F_1, F_2 párhuzamos hatásvonalú, ellentétes nyílértelmű erő, egymástól l távolságra. F_1 az y tengely irányába pozitívan, F_2 negatívan hat.

Határozzuk meg

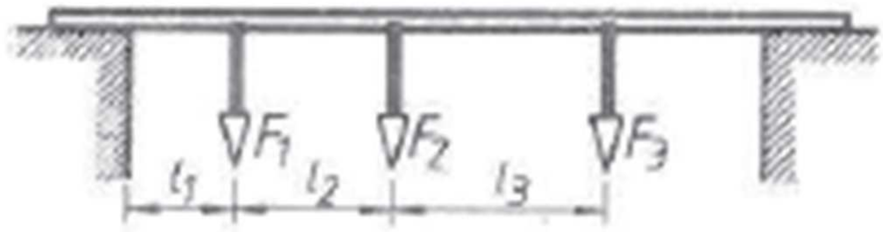
- az eredő erőt,
- az eredő erő F_1 erő hatásvonalától való l_0 távolságát,
- az eredő erő nyílértelmét!

Adatok: $F_1 = 180\ N, F_2 = 240\ N, l = 780\ \mathrm{mm}$.

Végeredmények: $F_R = 60\ N, l_0 = 3{,}12\ m,$
$negatív\ irányba$.

6. FELADAT

Az ábrán látható pallóra F_1, F_2, F_3 párhuzamos hatásvonalú erőrendszer hat l_1, l_2, l_3 távolságban.



Határozzuk meg

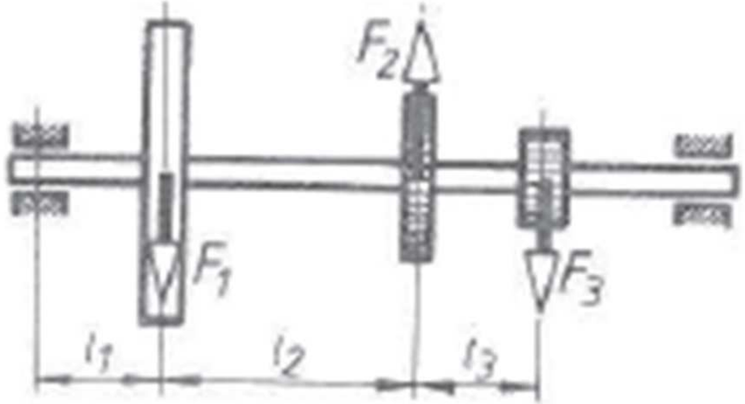
- az eredő erőt,
- az eredő erő hatásvonalának távolságát a palló bal oldali alátámasztási pontjától!

Adatok: $F_1 = 800\ N, F_2 = 1{,}1\ kN, F_3 = 1{,}2\ kN,$
$l_1 = 1\ m, l_2 = 1{,}5\ m, l_3 = 2\ m.$

Végeredmények: $F_R = 3{,}1\ kN, l_R = 2{,}89\ m.$

7. FELADAT

Az ábrán látható tengelyre F_1, F_2, F_3 párhuzamos hatásvonalú erőrendszer hat l_1, l_2, l_3 távolságban.



Határozzuk meg

- az eredő erő nagyságát és értelmét,
- az eredő erő hatásvonalának távolságát a bal oldali alátámasztás középpontjától!

Adatok: $F_1 = 500\ N, F_2 = 800\ N, F_3 = 2{,}1\ kN,$

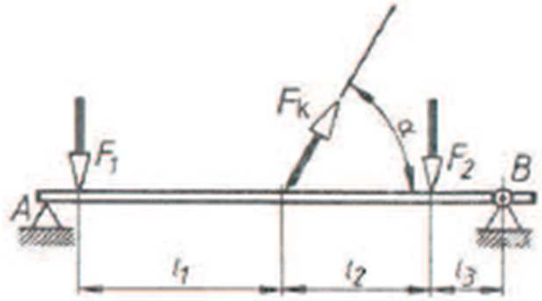
$l_1 = 150\ mm, l_2 = 300\ mm, l_3 = 150\ \ mm$

Végeredmények: $F_R = 1{,}8\ kN, lefelé\ hat,$

$l_R = 0{,}542\ m$.

8. FELADAT

Az ábrán látható tartóra F_1, F_2 párhuzamos hatásvonalú erők hatnak. Közöttük egy kötél F_K erővel α hajlásszög alatt húzza a tartót felfelé. A távolságok: l_1, l_2, l_3.



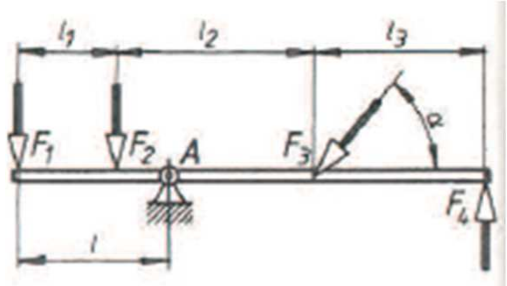
Határozzuk meg
- az eredő erőt,
- az eredő erő hatásvonalának hajlásszögét a függőleges irányhoz képest,
- az eredő erő hatásvonalának távolságát a „B" alátámasztási ponttól!

Adatok: $F_1 = 30\ kN, F_2 = 20\ kN, F_K = 25\ kN, \alpha = 60°$
$l_1 = 2\ m, l_2 = 1{,}5\ m, l_3 = 0{,}7\ m.$

Végeredmények: $F_R = 30{,}98\ kN, \alpha_R = -23{,}79°,$
$x_{0R} = 2{,}98\ m$.

9. FELADAT

Az ábrán látható kétkarú emelőre F_1, F_2, F_3, F_4 erő hat. Távolságuk: l_1, l_2, l_3 és adott F_3 hajlásszöge α.



Mekkora reakcióerő ébred az „A” pontban, illetve a a hatásvonala mekkora szöget zár be az emelővel?
Milyen távolságban kell lennie az F_1 erőnek az „A” ponttól, hogy az emelő egyensúlyban legyen?
(Megj.: Az „A” pontban a négy erő ellenereje hat.)

Adatok: $F_1 = 300\ N, F_2 = 200\ N, F_3 = 500\ N,$
$F_4 = 100\ N, \alpha = 50°, l_1 = 2\ m, l_2 = 4\ m, l_3 = 3{,}5\ m.$
Végeredmények: $F_A = 846{,}4\ N, \alpha_A = 67{,}68°,$
$l = 2{,}23\ m$**.**

10. FELADAT

Adott az ábrán látható F_1, F_2, F_3, F_4 erőkből és egy M_0 koncentrált nyomatékból álló általános síkbeli erőrendszer.

Adott az erők és a koncentrált nyomaték nagysága, az erők hatásvonalainak x tengellyel bezárt szöge és az erők támadáspontjába mutató helyvektor.

Határozzuk meg szerkesztéssel és számítással az erőrendszer eredőjének helyét, irányát és nagyságát!

Adatok: $F_1 = 365\ \mathrm{N}, r_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\ \mathrm{m}, \alpha_1 = 120°,$

$F_2 = 471\ \mathrm{N}, r_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\ \mathrm{m}, \alpha_2 = 75°,$

$F_3 = 550\ \mathrm{N}, r_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}\ \mathrm{m}, \alpha_3 = 0°,$

$F_4 = 390\ \mathrm{N}, r_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}\ \mathrm{m}, \alpha_4 = 90°, M_0 = 312\ \mathrm{Nm}.$

Végeredmények: $F_R = 1259{,}98\,kN, \alpha_R = 67{,}14°,$
$x_{0R} = 1{,}07\,m$
$M_{0R} = 1247{,}84$ Nm.