Általános térbeli erőrendszerek. Erőcsavar.

Vektortétel:

$$\underline{F}_R = \sum_{i=1}^{n} \underline{F}_i$$

Nyomatéktétel:

$$\underline{M}_{0R} = \sum_{i=1}^{n} \underline{M}_{0i} = \sum_{i=1}^{n} \underline{r}_i \times \underline{F}_i$$

Redukált vektorkettős: $\left[\underline{F}_R \; ; \; \underline{M}_{0R}\right]_0$

Általános esetben: $\underline{F}_R \cdot \underline{M}_{0R} \neq 0$ ez felel meg az erőcsavarnak.

Lehet ezt az esetet tovább egyszerűsíteni?

Egy tetszőleges nagyságú, de $\underline{M}_2$ irányú vektor például a következő: $\underline{F}_R \times (\underline{M}_{0R} \times \underline{F}_R)$

A kifejtési tétel alkalmazása: $[\underline{a} \times (\underline{a} \times \underline{b}) = (\underline{a} \cdot \underline{b}) \cdot \underline{a} - a^2 \cdot \underline{b}]$

$$\underline{F}_R \times (\underline{M}_{0R} \times \underline{F}_R) = -\underline{F}_R \times (\underline{F}_R \times \underline{M}_{0R}) = (\underline{F}_R \cdot \underline{F}_R) \cdot \underline{M}_{0R} - (\underline{F}_R \cdot \underline{M}_{0R}) \cdot \underline{F}_R$$

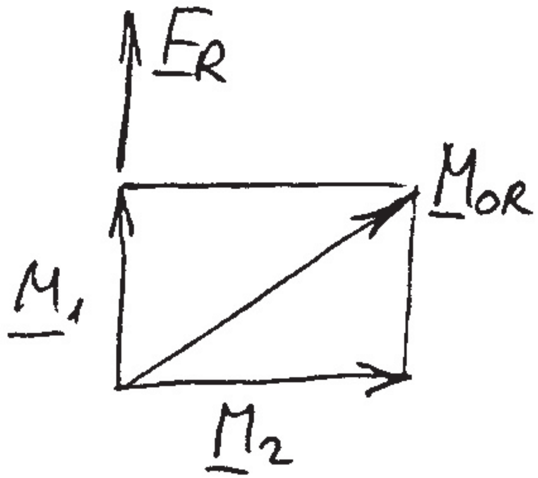
Az egyenlet elejét és végét átrendezve és elosztva F_R^2 –tel:

$$\underline{M}_{0R} = \frac{1}{F_R^2} (\underline{F}_R \cdot \underline{M}_{0R}) \cdot \underline{F}_R + \frac{1}{F_R^2} [\underline{F}_R \times (\underline{M}_{0R} \times \underline{F}_R)]$$

amiből:

$$\underline{M}_1 = \frac{1}{F_R^2} (\underline{F}_R \cdot \underline{M}_{0R}) \cdot \underline{F}_R$$

$$\underline{M}_2 = \frac{1}{F_R^2} [\underline{F}_R \times (\underline{M}_{0R} \times \underline{F}_R)]$$



$$\underline{k}_c \times \underline{F}_R = \underline{M}_2 \qquad / \, \underline{F}_R \times$$

$$\underline{F}_R \times \left(\underline{k}_c \times \underline{F}_R\right) = \underline{F}_R \times \underline{M}_i$$

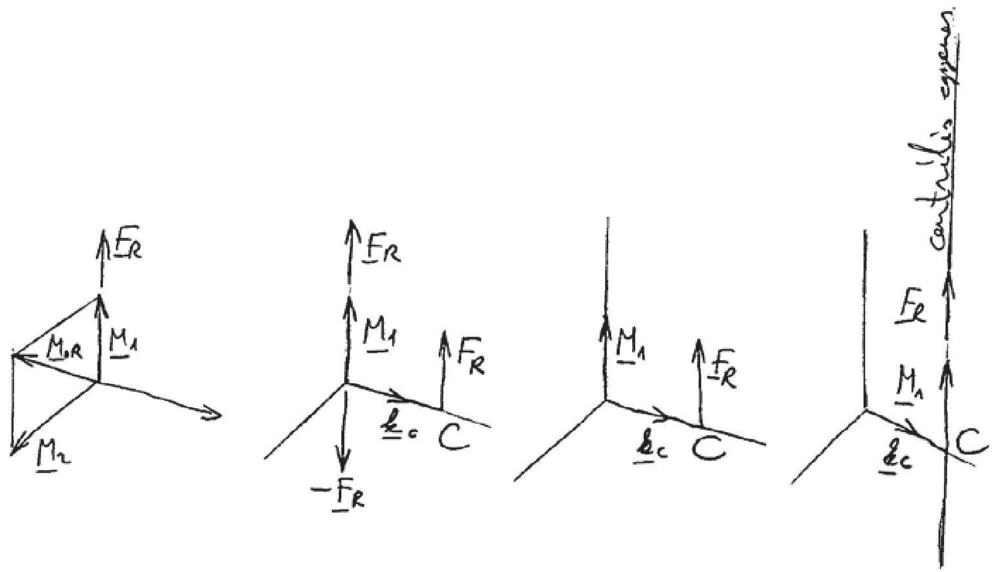
$$-\underline{F}_R \times \left(\underline{F}_R \times \underline{k}_c\right) = \underline{F}_R \times \underline{M}_2$$

$$\underline{F}_R^{\,2} \cdot \underline{k}_c - \left(\underline{F}_R \cdot \underline{k}_c\right) \cdot \underline{F}_R = \underline{F}_R \times \underline{M}_2$$

$$\downarrow$$

$$\underline{F}_R \perp \underline{k}_c \rightarrow 0$$

$$\underline{k}_c = \frac{\underline{F}_R \times \underline{M}_2}{F_R^{\,2}}$$



Mivel $\underline{F}_R \times \underline{M}_1 = \underline{0}$ ezért azt hozzáadhatom a számlálóhoz:

$$\underline{k}_c = \frac{\underline{F}_R \times \underline{M}_1 + \underline{F}_R \times \underline{M}_2}{F_R^{\,2}} = \frac{\underline{F}_R \times \left(\underline{M}_1 + \underline{M}_2\right)}{F_R^{\,2}} = \frac{\underline{F}_R \times \underline{M}_{0R}}{F_R^{\,2}}$$

tehát

$$\underline{k}_c = \frac{1}{F_R^{\,2}} \left(\underline{F}_R \times \underline{M}_{0R}\right)$$

a centrális egyenes helyét kijelölő vektor.

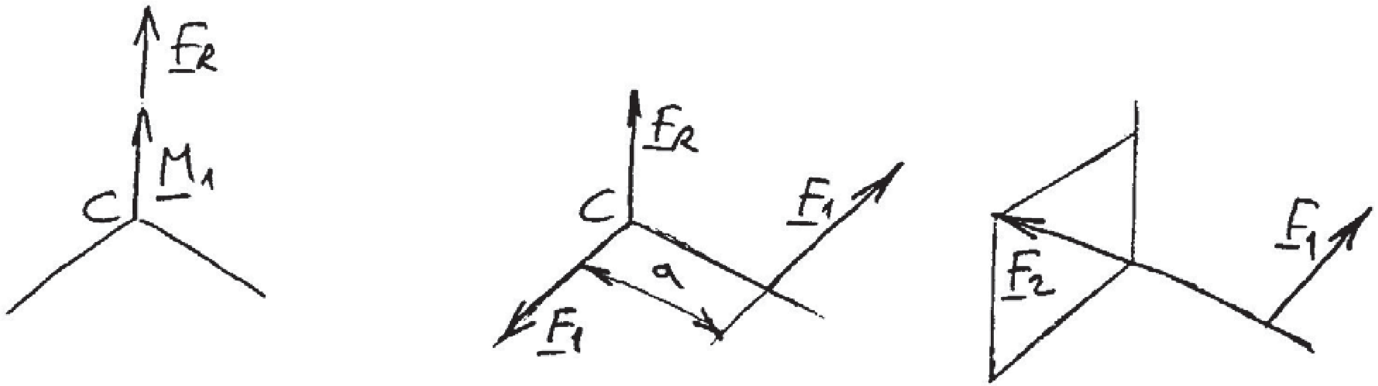
Eredmény:

$$\left[\underline{F}_R, \underline{M}_{0R}\right]_0 = \left[\underline{F}_R, \underline{M}_1\right]_c$$

ahol c pont helyét kijelöli $\underline{k}_c$, és

$$\underline{M}_1 = \frac{1}{F_R^{\,2}}\left(\underline{F}_R \cdot \underline{M}_{0R}\right) \cdot \underline{F}_R$$

Ez a nyomaték tovább bontható:



Az „a” tetszőleges, tehát végtelen sokféleképpen alakítható át két kitérő hatásvonalú erővé az erőcsavar.

Egy erő felbontása három adott hatásvonalú térbeli összetevőre

Feltétel: $\underline{e}_1 \cdot \underline{e}_2 \cdot \underline{e}_3 \neq 0$, azaz a három egységvektor nem esik egy síkba.

$$\underline{F} = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \underline{F}_3 = F_1 \cdot \underline{e}_1 + F_2 \cdot \underline{e}_2 + F_3 \cdot \underline{e}_3$$

Mindkét oldalt beszorozzuk $\underline{e}_2 \times \underline{e}_3$ -mal:

$$\underline{F}(\underline{e}_2 \times \underline{e}_3) = F_1 \cdot (\underline{e}_1\ \underline{e}_2\ \underline{e}_3) + F_2 \cdot (\underline{e}_2\ \underline{e}_2\ \underline{e}_3) + F_3 \cdot (\underline{e}_3\ \underline{e}_2\ \underline{e}_3)$$

Mivel $\underline{e}_2\ \underline{e}_2\ \underline{e}_3 = \underline{e}_3\ \underline{e}_2\ \underline{e}_3 = 0$, ezért

$$F_1 = \frac{\underline{F} \cdot (\underline{e}_2 \times \underline{e}_3)}{\underline{e}_1\ \underline{e}_2\ \underline{e}_3}$$

és

$$F_2 = \frac{\underline{F} \cdot (\underline{e}_3 \times \underline{e}_1)}{\underline{e}_1\ \underline{e}_2\ \underline{e}_3}; \qquad F_3 = \frac{\underline{F} \cdot (\underline{e}_1 \times \underline{e}_2)}{\underline{e}_1\ \underline{e}_2\ \underline{e}_3}$$

Folytonosan megoszló erőrendszerek

$$\underline{q} = -q_0 \cdot \underline{k}$$

q_0- az egységnyi drót súlya

$$\underline{q} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \underline{F}}{\Delta s} = \frac{d\underline{F}}{ds}$$

$\underline{q}$- a megoszló erőrendszer intenzitás vektora

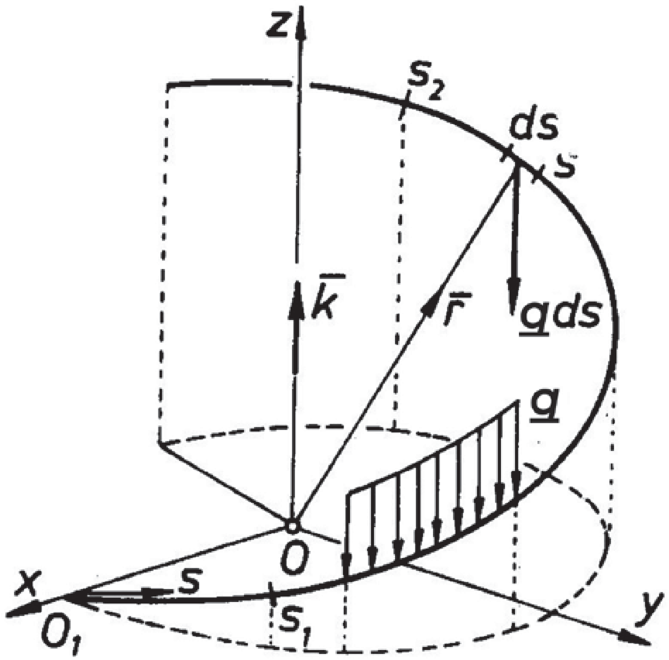
$$d\underline{F} = \underline{q} \cdot ds$$

$$\Delta\underline{F} = \underline{q} \cdot \Delta s$$

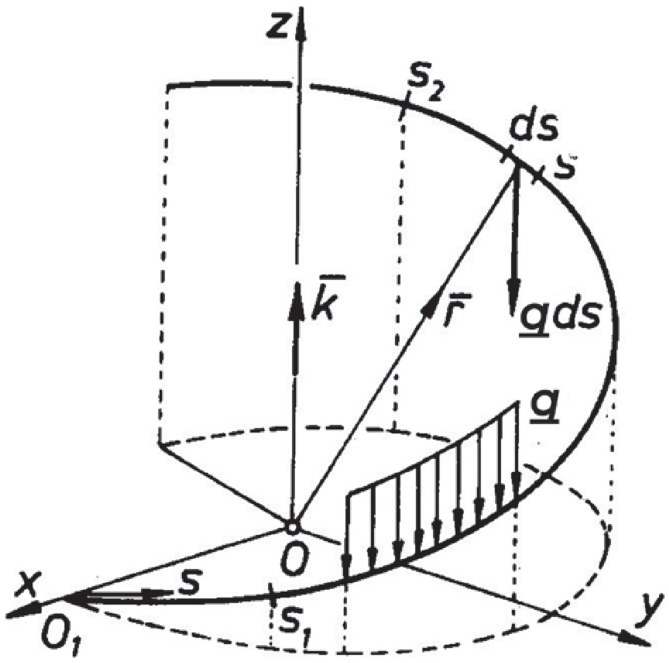
$$\sum_{i=1}^{n} \Delta\underline{F} = \sum_{i=1}^{n} \underline{q} \cdot \Delta s$$

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ (\Delta F \to 0)}} \sum_{i=1}^{n} \Delta\underline{F} = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\Delta s \to 0)}} \sum_{i=1}^{n} \underline{q} \cdot \Delta s$$

$$\int dF = \int q \cdot ds$$



A megoszló erőrendszer eredője:



$$\underline{F}_R = \int_{(s)} \underline{q} \cdot ds = -q_0 \cdot \underline{k} \int_{s_1}^{s_2} ds = -q_0 \cdot (s_2 - s_1) \cdot \underline{k}$$

$$\underline{M}_{0R} = \int_{(s)} \underline{r} \times \underline{q}\, ds = -q_0 \left(\int_{s_1}^{s_2} \underline{r} \cdot ds \right) \times \underline{k} = -q_0\, \underline{S}_0 \times \underline{k}$$

ahol $\underline{S}_0$ csak geometriai tényezőktől függ.

Neve: a vonaldarab origóra számított elsőrendű vagy statikai nyomatéka.

Az erőközéppont helyvektora

$$\underline{M}_{0R} = \underline{r}_K \times \underline{F}_R$$

$$-q_0 \int \underline{r}\, ds \times \underline{k} = \underline{r}_K \times \left(-q_0 \cdot \underline{k} \int ds \right)$$

Ez csak akkor teljesül, ha

$$\int \underline{r} \cdot ds = \underline{r}_K \cdot \int ds$$

ahonnan

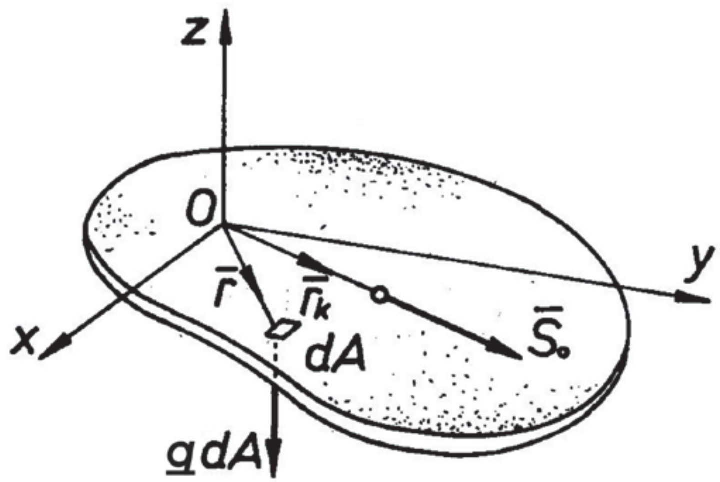
$$\underline{r}_K = \frac{\int\limits_{(s)} \underline{r} \cdot ds}{\int\limits_{(s)} ds} = \frac{\underline{S}_0}{(s_2 - s_1)}$$

Síkidomon egyenletesen megoszló párhuzamos erőrendszer eredőjének meghatározása:

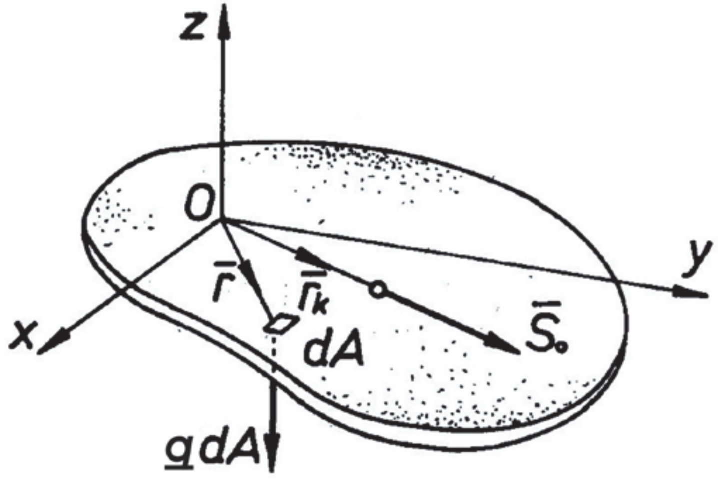
$$\underline{q} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{d\,\underline{F}}{dA}$$

$$\underline{F}_R = \int\limits_{(A)} \underline{q} \cdot dA = -q \cdot \underline{k} \int\limits_{(A)} dA =$$

$$= -q \cdot A \cdot \underline{k}$$



$$\underline{M}_{0R} = \int_{(A)} \underline{r} \times \underline{q}\, dA = -q \left(\int_{(A)} \underline{r} \cdot dA \right) \times \underline{k} = -q\ \underline{S}_0 \times \underline{k}$$



Az erőközéppont helyvektora:

$$\underline{r}_K = \frac{\int_{(A)} \underline{r} \cdot dA}{\int_{(A)} dA} = \frac{\underline{S}_0}{A}$$

ahol $\underline{S}_0$ a felület „O" pontra számított elsőrendű nyomatéka.

A „V" térfogaton egyenletesen megoszló párhuzamos erőrendszer eredőjének meghatározása:

$$\underline{q} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \underline{F}}{\Delta V} = \frac{d\underline{F}}{dV}$$

$$\underline{F}_R = \int\limits_{(V)} \underline{q} \cdot dV = \underline{e}\left(\int\limits_{(V)} q_0 \cdot dV \right) = q_0 \int\limits_{(V)} dV \cdot \underline{e}$$

$$\underline{M}_{0R} = \int\limits_{(V)} \underline{r} \times \underline{q}\, dV = \int\limits_{(V)} \underline{r} \times q_0\, \underline{e}\, dV = q_0 \left(\int\limits_{(V)} \underline{r} \cdot dV \right) \times \underline{e} =$$

$$= q_0\, \underline{S}_0 \times \underline{e}$$

ahol $\underline{S}_0$ a dV térfogatelemekből álló skalárrendszer statikai nyomatékvektora.

Az erőközéppont helyvektora:

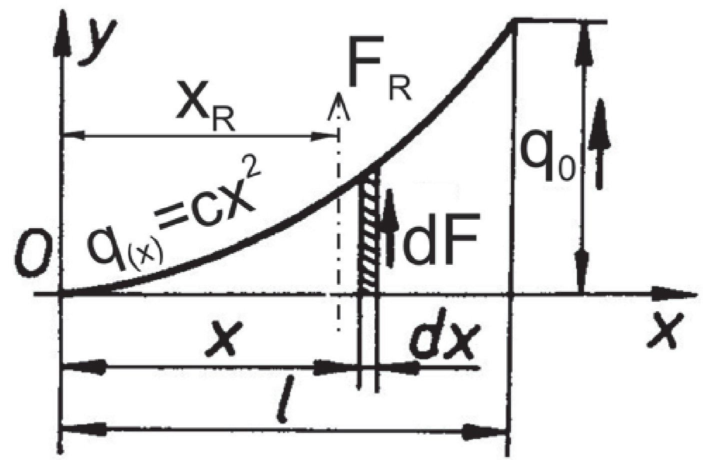
$$\underline{r}_K = \frac{\int\limits_{(V)} \underline{r} \cdot dV}{\int\limits_{(V)} dV} = \frac{\underline{S}_0}{V}$$

Pl.

$$q_{(x)} = \frac{q_0}{l^2} \cdot x^2$$

$$F_R = \int_0^l q_{(x)} \cdot dx = \int_0^l \frac{q_0}{l^2} \cdot x^2 \cdot dx = \frac{q_0}{l^2} \int_0^l x^2 \cdot dx =$$

$$= \frac{q_0}{l^2} \cdot \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^l = \frac{1}{3} \cdot q_0 \cdot l$$



Az eredő helye:

$$x_R = \frac{\int_0^l x \cdot q_{(x)} \cdot dx}{F_R} = \frac{\int_0^l \frac{q_0}{l^2} \cdot x^3 \cdot dx}{\frac{q_0 \cdot l}{3}} = \frac{3}{l^3} \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^l = \frac{3}{4} \cdot l$$