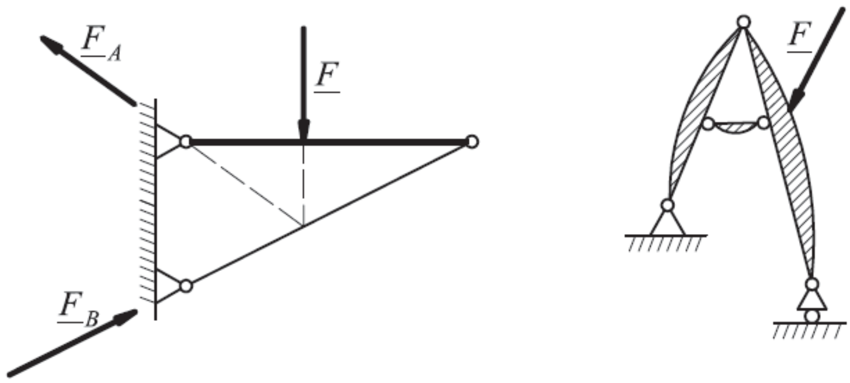
9. Csuklós szerkezetek; részekre bontás és a szuperpozíció elve

9.1. A síkbeli csuklós szerkezetek

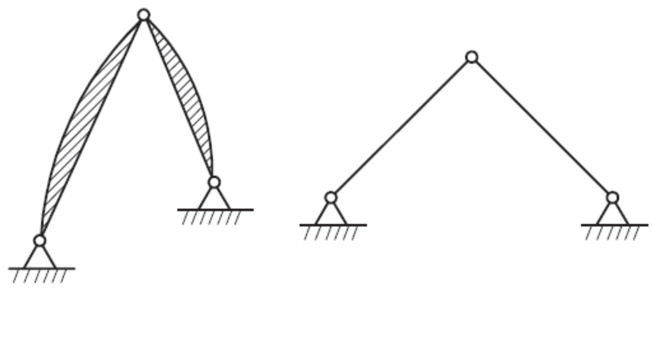
A műszaki gyakorlatban gyakran találkozunk szerkezetekkel, melyek elemei egymáshoz csuklókkal, a környezethez (merev aljzathoz) pedig kényszerekkel kapcsolódnak (9.1. ábra). A későbbiekben tárgyalt rácsos tartók és szerkezetek is hasonlóak. Jelen esetben a statikailag határozott csuklós szerkezeteket tárgyaljuk, azonban nem teszünk kikötést arra vonatkozóan, hogy az erők a csuklópontokban, vagy csak a rudakon, vagy akár mindkét helyen hatnak-e, azaz a terheléseket bárhol működtethetjük. A csuklós szerkezetek jellemzője, hogy hálózatuk egyszerű és viszonylag kevés merev testből állnak. Statikailag határozottságuk feltétele, hogy merevségüket a lehető legkevesebb kapcsolóelemmel biztosítsuk.
A feladat minden esetben a támaszerők (külső reakcióerők) és a merev testek kapcsolódásánál ébredő belső reakcióerők meghatározása.
Statikai vizsgálatunk alapvetése, hogy az egész szerkezet egyensúlyban van. Ahogy a 3.2 fejezetben már a statika IV. alaptétele kapcsán tárgyaltuk, a szerkezet egyensúlya esetén, annak minden egyes része külön-külön is egyensúlyban van. Ez az ***elkülönítés elve***. Az elkülönítéskor érdemes olyan elemek együttesét elkülöníteni, amire legalább három erő hat. Az elkülönítésekkor kapott megoldásokat később egymásra halmozzuk (szuperponáljuk), ami pedig a ***szuperpozíció elve***.

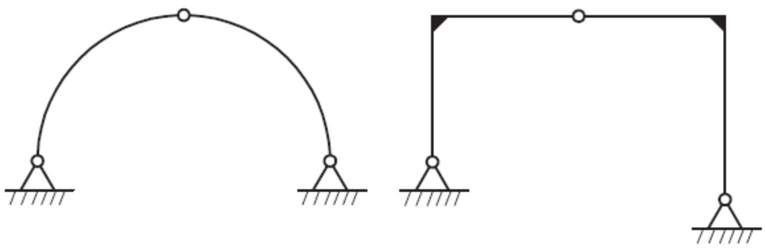


9.1. ábra. Síkbeli csuklós szerkezetek

9.2. A háromcsuklós tartó

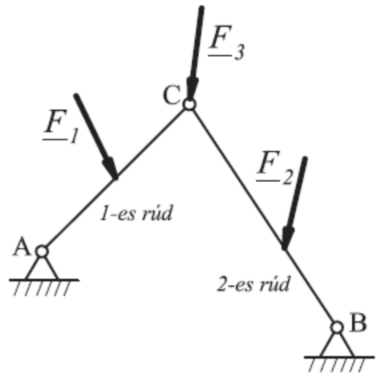
A háromcsuklós tartó nem más, mint két tetszőleges alakú merev testből álló szerkezet, melyben a testek egymáshoz és az állványhoz (környezethez) is síkbeli csuklókkal kapcsolódnak. Amennyiben a csuklók nem esnek egy egyenesbe, a szerkezet statikailag határozott.
A csuklók általában az összekapcsolt merev testek végpontjában vannak. Az összekapcsolt merev testek lehetnek egyenes tengelyű vagy síkgörbe rudak (ív), de lehetnek síkbeli keretek (háromcsuklós keret) is. Az 9.2. ábrán láthatunk példákat.





9.2. ábra. Háromcsuklós tartó tetszőleges merev testekből, egyenes tengelyű rúdból, ív, háromcsuklós keret

A háromcsuklós szerkezetek szerkesztéssel és számítással is megoldhatók, az alábbiakban a (9.3. ábra) szuperpozícióra alapozott szerkesztési eljárás kapcsán tekintjük át a megoldás elvét.

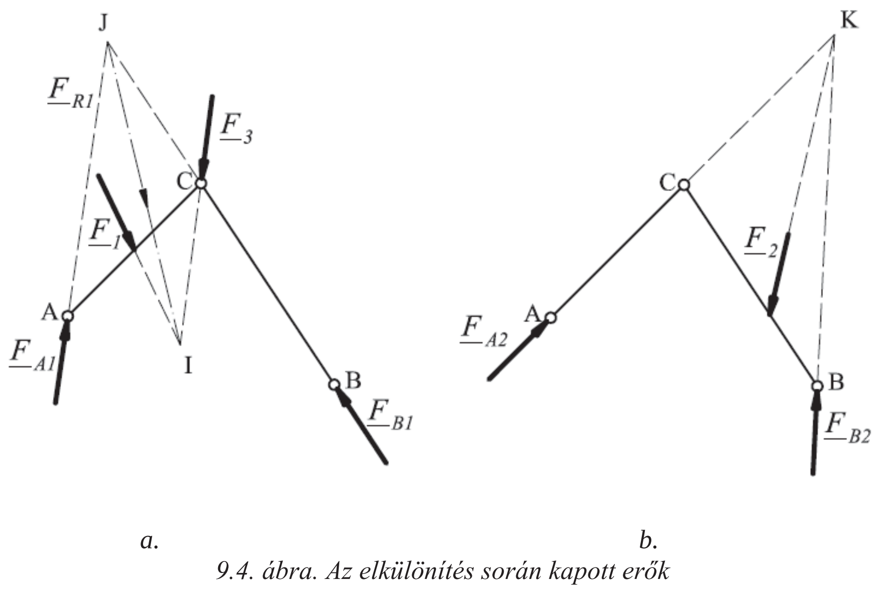


9.3. ábra. Háromcsuklós tartó

Ahogy korábban említettük a feladat a támaszerők (F_A, F_B), és a csuklóban keletkező (F_{C1}, F_{C2}) erők meghatározása. A négy ismeretlen erő két-két vetülete összesen nyolc ismeretlent jelent. A tartóra ható külső erők egyensúlya az alábbiakban írható:

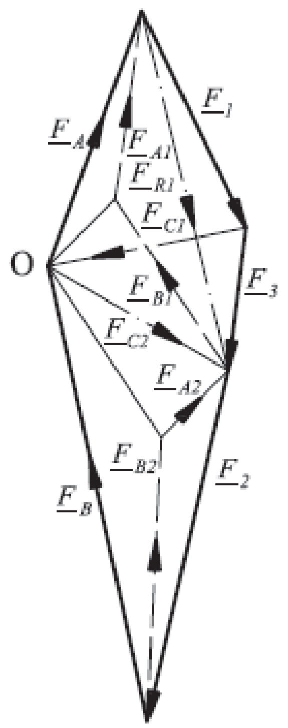
$$(F_A, F_1, F_2, F_3, F_B) \doteq 0. \qquad (9.1.)$$

A szuperpozíció elve alapján először az egyik, majd a másik rudat tesszük terheletlenné. Így a terheletlen rudakban csak rúdirányú erők ébrednek. Az egyik, illetve a másik esetben keletkezett rész-támaszerőket összegezve kapjuk a teljes támaszerőket. Az elkülönítés során a C csuklóban ható erőt az egyik esetben kell csak figyelembe venni, jelen esetben az 1-es rúdnál.



a. *b.*

9.4. ábra. Az elkülönítés során kapott erők



9.5. ábra. A vektorábra

A 9.4.a. ábra alapján felírható:

$$(F_{A1}, F_{B1}, F_1, F_3) \doteq 0. \tag{9.2.}$$

Az F_1, F_3, F_2 külső erők ismeretében, a rájuk vonatkozó vektorábra léptékhelyesen megrajzolható (9.5. ábra). A vektorábrában F_1, F_3 eredőjét F_{R1}-et jelöljük meg:

$$(F_1, F_3) \doteq F_{R1}\,. \tag{9.3.}$$

F_{R1} hatásvonala a 9.5. vektorábrából ismert, mely hatásvonal átmegy 9.4.a. ábra I pontján, mely nem más, mint F_1, F_3 erők hatásvonalainak metszéspontja. A terheletlen 2-es rúddal előállt tartó egyensúlyára írható:

$$(F_{R1}, F_{A1}, F_{B1}) \doteq 0. \tag{9.4.}$$

F_{B1} csakis rúdirányú lehet, mivel a 2-es rudat ez esetben nem terheli erő, így az egyensúlyi feltétel alapján a (9.4) csakis közös metszéspontú erőrendszer lehet. A közös metszéspont a J (9.4.a. ábra). A most már ismert rész-reakcióerők (F_{A1}, F_{B1}) hatásvonalait a vektorábrába rajzolhatjuk.
Második lépésben elhagyjuk F_1, F_3 erőket, így az 1-es rúd válik terheletlenné, F_2-t F_{A2}, F_{B2} erőkkel kell egyensúlyoznunk (9.4.b. ábra):

$$(F_2, F_{A2}, F_{B2}) \doteq 0. \tag{9.5.}$$

A három erő egyensúlyából következik, hogy közös metszéspontúak, s mivel az 1-es rudat nem terheli erő, F_{A2} csak rúdirányú lehet. A közös metszéspont a 9.4.b. ábrában feltüntetett K pont lesz. Az immáron ismert rész-reakcióerők (F_{A2}, F_{B2}) hatásvonalaival párhuzamost húzunk a vektorábrába, ahonnan nagyságukat is megkapjuk.

A vektorábrában (9.5. ábra) a rész-reakcióerők összegzésével jutunk a reakcióerőkhöz:

$$(F_{A1}, F_{A2}) \doteq F_A, \tag{9.6.}$$

$$F_{A1} + F_{A2} = F_A, \tag{9.7.}$$

$$(F_{B1}, F_{B2}) \doteq F_{B,} \tag{9.8.}$$

$$F_{B1} + F_{B2} = F_B. \tag{9.9.}$$

A C csuklóban ébredő csuklóerők maghatározását kell még elvégezni. Az elkülönítés elve alapján, az egyes részek önállóan is egyensúlyban vannak, tehát az 1-es rúdra:

$$(F_A, F_1, F_{C1}) \doteq 0, \tag{9.10.}$$

illetve a 2-es rúdra írható:

$$(F_B, F_2, F_{C2}) \doteq 0. \tag{9.11.}$$

A C csukló egyensúlyára pedig írható:

$$(F_3, F'_{C1}, F'_{C2}) \doteq 0, \tag{9.12.}$$

ahol F'_{C1}, F'_{C2} erők F_{C1}, F_{C2} ellenerői.

A bemutatott megoldás (szuperpozíció elve) mellett a feladat szerkesztés útján a csuklóra redukálás elvével, illetve számítás útján is meghatározható. Érdemes még megemlíteni, hogy speciális esetekben a számító eljárás lényegesen leegyszerűsödik:

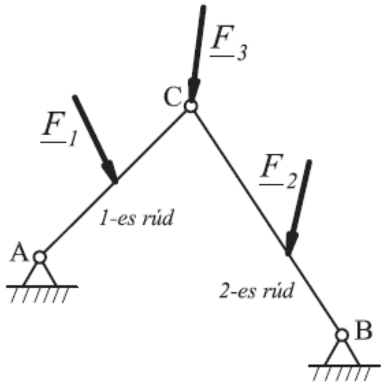
- amennyiben a tartó síkbeli csuklói azonos magasságban vannak, a meghatározandó F_{Ay}, illetve F_{By} ismeretlen reakcióerő komponensek közvetlenül számíthatók.
- ha a C csuklón nincs külső terhelés, az ébredő csuklóerők nagysága megegyezik, irányuk ellentétes.
- ha a tartónak függőleges szimmetriatengelye van, a reakcióerők is szimmetrikusak.

A számítás elve röviden összefoglalva a következő. A háromcsuklós tartó három vektor, vagy hat skalár ismeretlent tartalmaz. Ezek meghatározásához célszerűen felírható a teljes szerkezetre a koordináta tengelyek irányában két vetületi egyensúlyi egyenletet. Ezt követően a szerkezetet alkotó egyik merev testre, a belső kényszert jelentő csuklóra (C csukló) egy nyomatéki egyensúlyi egyenlet, majd a másik merev testre, ugyanarra a belső kényszert jelentő csuklóra (C csukló) egy nyomatéki egyensúlyi egyenlet felírása szükséges. Az így nyert négy független egyenletből a támasztó erők skalár összetevői már meghatározhatóak. A két merev testet összekötő csuklóban fellépő erő két összetevőjét bármelyik merev test vetületi egyensúlyi egyenleteiből nyerjük. Itt szükséges rögzíteni, hogy a csuklóerő összetevői melyik merev test egyensúlyát biztosítják, ugyanis a csuklóerő belső erő.

PÉLDÁK ÉS FELADATOK

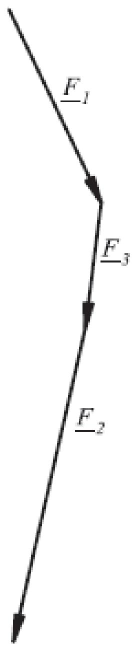
9.1. PÉLDA

Határozzuk meg szerkesztéssel a 9.6. ábrán látható háromcsuklós szerkezet kényszereiben ébredő támaszerőket a csuklóra redukálás elvével!



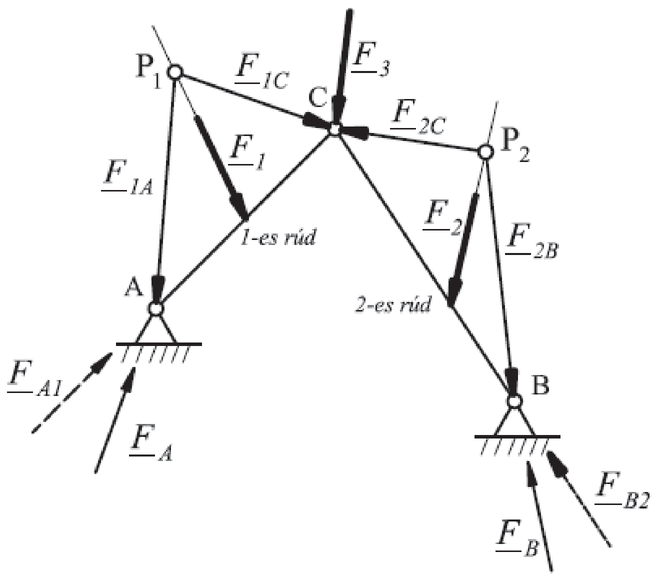
9.6. ábra. Háromcsuklós tartó

Első lépésben megrajzoljuk a vektorábrát F_1, F_3, F_2 erők előbbi sorrendjében (9.7. ábra).

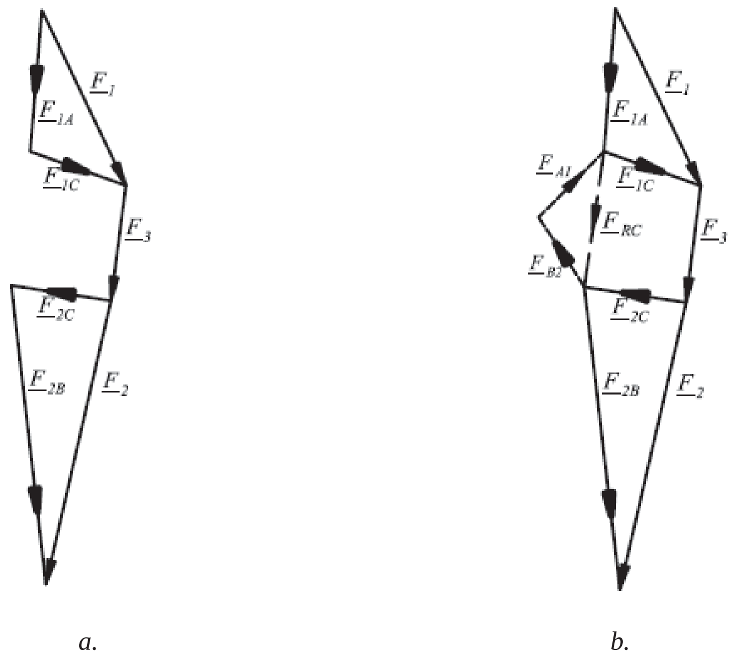


9.7. ábra. külső erők vektorábrája

Ezután felveszünk F_1 hatásvonalán P_1, illetve F_2 hatásvonalán P_2 tetszőleges pontokat. Bontsuk fel az erőket a felvett pontokból A és C, illetve C és B pontokon átmenő összetevőkre (9.8. ábra)! Ezen összetevők (F_{1C}, F_{1A} és F_{2C}, F_{2B}) iránya a vektorábrába rajzolva a nagyságukat is meghatározza (9.9.a. ábra). A rudakat így tehermentesítettük, bennük már csak rúdirányú ébredhet.
Ezután C csukló egyensúlyának vizsgálata következik. A C csuklóra ható külső erők eredője:



9.8. ábra



9.9. ábra

$$F_{RC} \doteq (F_{1C}, F_3, F_{2C}),$$

az egyensúlyi egyenlet pedig a következő alakban írható:

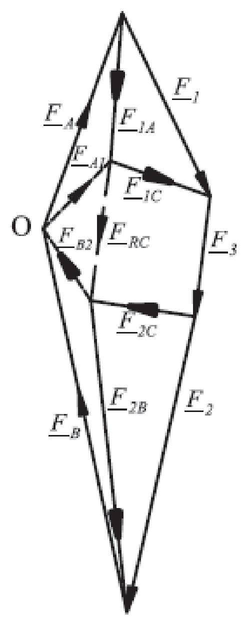
$$(F_{RC}, F_{A1}, F_{B2}) \doteq 0,$$

ahol F_{A1} és F_{B2} a reakcióerők rúdirányú összetevői. Mivel irányuk ismert, a vektorábrába rajzolva (9.9.b. ábra) nagyságuk is meghatározható.
A, illetve B csukló elkülönítve is egyensúlyban van, tehát írható:

$$(F_A, F_{1A}, -F_{A1}) \doteq 0,$$

$$(F_B, F_{2B}, -F_{B2}) \doteq 0.$$

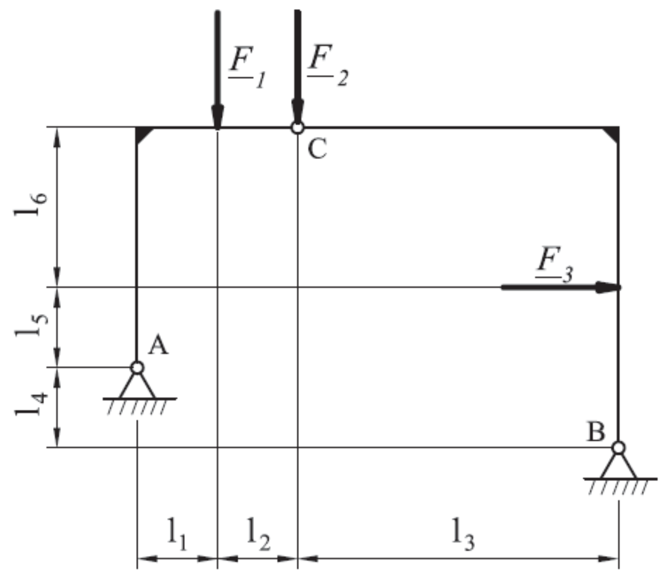
A szerkesztés a 9.10. ábrán látható.



9.10. ábra

9.2. PÉLDA

Határozzuk meg a 9.11. ábrán látható háromcsuklós keresztszerkezet reakcióerőit és a C csuklóban működő erő összetevőit. A feladatot számítással oldjuk meg!



9.11. ábra

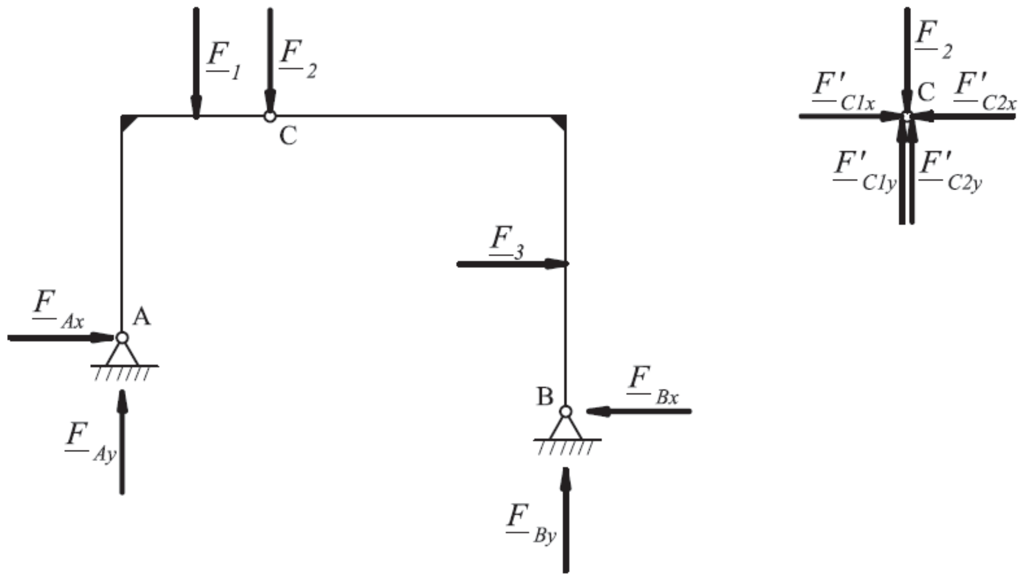
Adatok:

$$F_1 = 350 \text{ N}, F_2 = 520 \text{ N}, F_3 = 280 \text{ N},$$

$$l_1 = 0{,}5 \text{ m}, l_2 = 0{,}5 \text{ m}, l_3 = 2 \text{ m},$$

$$l_4 = 0{,}5 \text{ m}, l_5 = 0{,}5 \text{ m}, l_6 = 1 \text{ m}.$$

A 9.12. ábrán berajzoltuk a feltételezett reakcióerőket, és külön megrajzoltuk a C csuklóra ható, feltételezett erőket. A C csuklóra rajzolt erők ellenzettjei hatnak a keretre.



9.12. ábra

Az egész keretre nyugalmat feltételezve írható:

$$(F_1, F_2, F_3, F_A, F_B) \doteq 0.$$

A feladat megoldásához nyomatéki egyenleteket írunk fel, majd meghatározzuk az ismeretleneket.

$$M_A = F_{By} \cdot (l_1 + l_2 + l_3) - F_{Bx} \cdot l_4 - F_3 \cdot l_5 - F_1 \cdot l_1 - F_2 \cdot (l_1 + l_2) = 0$$

$$F_{By} \cdot 3 \text{ m} - F_{Bx} \cdot 0{,}5 \text{ m} - 280 \text{ N} \cdot 0{,}5 \text{ m} - 350 \text{ N} \cdot 0{,}5 \text{ m} - 520 \text{ N} \cdot 1 \text{ m} = 0$$

$$F_{By} \cdot 3 \text{ m} - F_{Bx} \cdot 0{,}5 \text{ m} = 835 \text{ Nm},$$

$$M_B = F_1 \cdot (l_2 + l_3) + F_2 \cdot l_3 - F_{Ax} \cdot l_4 - F_{Ay} \cdot (l_1 + l_2 + l_3) - F_3 \cdot (l_4 + l_5) = 0$$

$$350 \text{ N} \cdot 2{,}5 \text{ m} + 520 \text{ N} \cdot 2 \text{ m} - F_{Ax} \cdot 0{,}5 \text{ m} - F_{Ay} \cdot 3 \text{ m} - 280 \text{ N} \cdot 1 \text{ m} = 0$$

$$F_{Ay} \cdot 3 \text{ m} + F_{Ax} \cdot 0{,}5 \text{ m} = 1635 \text{ Nm}.$$

Ezután a C csuklópontra írjunk fel nyomatéki egyenleteket, először a bal, majd a jobb oldali keretrészre!

$$M_{Cb} = F_{Ax} \cdot (l_5 + l_6) - F_{Ay} \cdot (l_1 + l_2) + F_1 \cdot l_2 = 0$$

$$F_{Ax} \cdot 1{,}5 \text{ m} - F_{Ay} \cdot 1 \text{ m} + 350 \text{ N} \cdot 0{,}5 \text{ m} = 0$$

$$F_{Ay} \cdot 1\ \mathrm{m} - F_{Ax} \cdot 1{,}5\ \mathrm{m} = 175\ \mathrm{Nm},$$

$$M_{Cj} = F_{By} \cdot l_3 - F_{Bx} \cdot (l_4 + l_5 + l_6) + F_3 \cdot l_6 = 0$$
$$F_{By} \cdot 2\ \mathrm{m} - F_{Bx} \cdot 2\ \mathrm{m} + 280\ \mathrm{N} \cdot 1\ \mathrm{m} = 0$$

$$F_{Bx} \cdot 2\ \mathrm{m} - F_{By} \cdot 2\ \mathrm{m} = 280\ \mathrm{Nm}.$$

A B pontra, illetve a C pontra balról felírt nyomatéki egyenletekből F_{Ax} és F_{Ay} meghatározható:

$$F_{Ax} = 222\ \mathrm{N},$$

$$F_{Ay} = 508\ \mathrm{N}.$$

Az A pontra, illetve a C pontra jobbról felírt nyomatéki egyenletekből F_{Bx} és F_{By} meghatározható:

$$F_{Bx} = 502\ \mathrm{N},$$

$$F_{By} = 362\ \mathrm{N}.$$

Ellenőrzésképpen írjunk fel vetületi egyensúlyi egyenleteket:

$$\sum F_{ix} = F_{Ax} + F_3 - F_{Bx} = 0$$

$$222\ \mathrm{N} + 280\ \mathrm{N} - 502\ \mathrm{N} = 0$$

$$\sum F_{iy} = F_{Ay} + F_{By} - F_1 - F_2 = 0$$

$$508\ \mathrm{N} + 362\ \mathrm{N} - 350\ \mathrm{N} - 520\ \mathrm{N} = 0$$

Tehát a számításaink helyesek.

A C csuklóban ébredő, tartóra ható erő meghatározásához szintén vetületi egyensúlyi egyenleteket írhatunk fel, először a bal oldali tartórészre:

$$\sum F_{ixb} = F_{Ax} - F_{C1x} = 0$$

$$F_{C1x} = 222\ \mathrm{N}$$

$$\sum F_{iyb} = F_{Ay} - F_1 - F_{C1y} = 0$$

$$F_{C1y} = 508\ \mathrm{N} - 350\ \mathrm{N} = 158\ \mathrm{N}.$$

Hasonlóképpen a jobb oldali tartórészre:

$$\sum F_{ixj} = F_{C2x} + F_3 - F_{Bx} = 0$$

$$F_{C2x} = 502\ \mathrm{N} - 280\ \mathrm{N} = 222\ \mathrm{N}$$

$$\sum F_{iyj} = F_{By} - F_{C2y} = 0$$

$$F_{C2y} = 362\ \text{N}.$$

Ellenőrzésképpen írjunk fel a C csuklóra is vetületi egyensúlyi egyenleteket! Korábban megállapítottuk, hogy a keretre ható erők ellenzettjei hatnak a csuklóra, tehát írhatjuk:

$$\sum F_{ixC} = F'_{C1x} - F'_{C2x} = 0$$

$$222\ \text{N} - 222\ \text{N} = 0$$

$$\sum F_{iyC} = F'_{C1y} + F'_{C2y} - F_2 = 0$$

$$158\ \text{N} + 362\text{N} - 520\ \text{N} = 0$$

Tehát a számításaink helyesek.

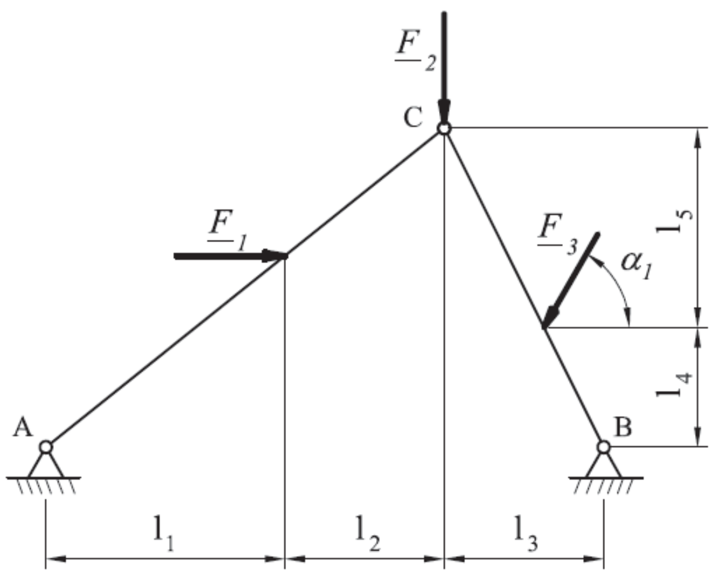
9.3. FELADAT

Határozza meg szerkesztéssel és számítással a 9.13. ábrán látható háromcsuklós szerkezet kényszereiben ébredő támaszerőket!
Adatok:

$$F_1 = 420\ \text{N}, F_2 = 390\ \text{N}, F_3 = 300\ \text{N}$$

$$l_1 = 1{,}5\ \text{m}, l_2 = 1\ \text{m}, l_3 = 1\ \text{m}, l_4 = 0{,}75\ \text{m}, l_5 = 1{,}25\ \text{m}$$

$$\alpha_1 = 60°$$



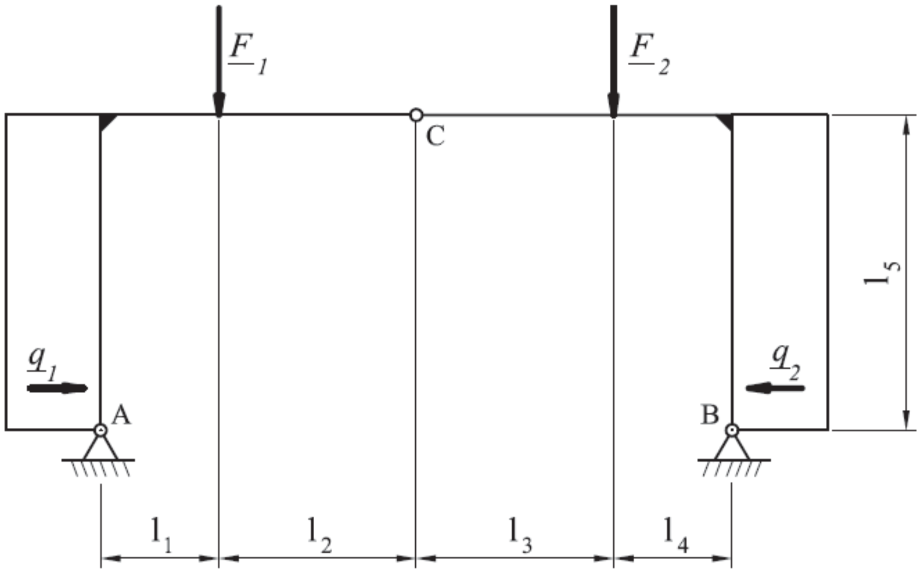
9.13. ábra

9.4. FELADAT

Határozza meg szerkesztéssel és számítással a 9.14. ábrán látható, koncentrált erőkkel és megoszló terheléssekkel terhelt háromcsuklós keret kényszereiben ébredő támaszerőket!
Adatok:

$F_1 = F_2 = 680\ \mathrm{N},\ q_1 = q_2 = 210\ \mathrm{N/m},$

$l_1 = l_4 = 0{,}75\ \mathrm{m}, l_2 = l_3 = 1{,}25\ \mathrm{m}, l_5 = 2\ \mathrm{m}.$



9.14. ábra