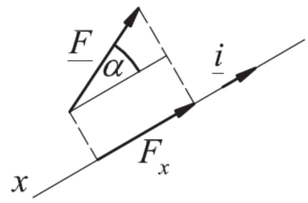
4. Az erő megadása, a nyomaték definíciója

4.1. Az erő megadása

Az erő megadásához, és az erőkkel végzett műveletekhez használhatjuk az erő, mint vektor vetületeit és komponenseit. Az erő kötött vektor, ezért támadáspontját vagy a hatásvonala egy pontját is meg kell adni.
Adott egy $\underline{F}$ erővektor és egy vele közös síkban lévő tetszőleges x tengely, mely tengelyen felveszünk: egy az $\underline{F}$ erővektor irányába mutató $|\underline{i}| = 1$ egységvektort. Az $\underline{F}$ erővektor x tengelyre vonatkozó merőleges vetületét (4.1. ábra) az egységvektorral való skalárszorzat adja,

$$F_x = \underline{F} \cdot \underline{i} = |\underline{F}| \cos \alpha, \tag{4.1.}$$

ahol α az $\underline{F}$ és $\underline{i}$ vektorok által bezárt szög.



4.1. ábra

Derékszögű koordináta rendszerben ábrázolva, ha az α szög nem más, mint az $\underline{F}$ erővektor x tengely pozitív irányával bezárt szöge, akkor a $\cos \alpha$ megadja a vetület előjelét is, mely pozitív, ha az x tengely pozitív irányába mutat.

Értelmezhető az $\underline{F}$ erővektor x irányú komponense, mint vektor, az alábbiak szerint:

$$\underline{F_x} = F_x \cdot \underline{i} = (\underline{F} \cdot \underline{i}) \cdot \underline{i}. \tag{4.2.}$$

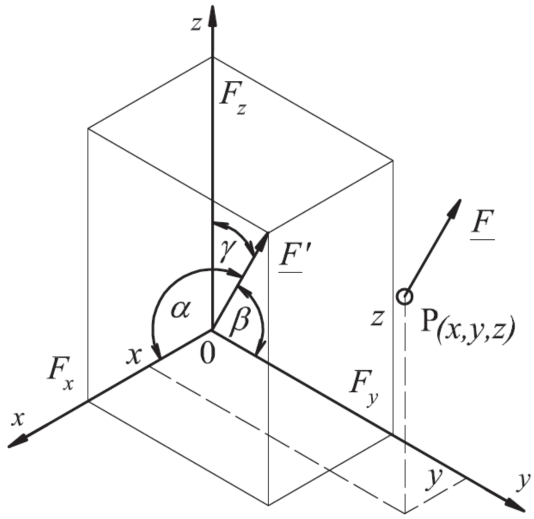
Az általános helyzetű erő megadásához 6 skalár adat szükséges (4.2. ábra):

$$F_x, F_y, F_z, x, y, z, \tag{4.3.}$$

azaz az erővektor három vetülete és a támadáspont három koordinátája.
A *(4.1.)* analógiájára az erővektor másik két vetülete az alábbiakban írható fel:

$$F_y = \underline{F} \cdot \underline{j} = |\underline{F}| \cos \beta, \tag{4.4.}$$

$$F_z = \underline{F} \cdot \underline{k} = |\underline{F}| \cos \gamma. \tag{4.5.}$$



4.2. ábra

Az erővektor vetületeinek ismeretében az erő nagysága (abszolút értéke) és a tengelyekhez viszonyított hajlásszögei is számíthatók:

$$|\underline{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}, \tag{4.6.}$$

$$\cos\alpha = \frac{F_x}{|\underline{F}|}, \cos\beta = \frac{F_y}{|\underline{F}|}, \cos\gamma = \frac{F_z}{|\underline{F}|}. \tag{4.7.}$$

A szögek nem függetlenek egymástól, mivel:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \tag{4.8.}$$

A 6 skalár adat megadható vektoros formában is:

$$\underline{F} = F_x\underline{i} + F_y\underline{j} + F_z\underline{k} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix}, \tag{4.9.}$$

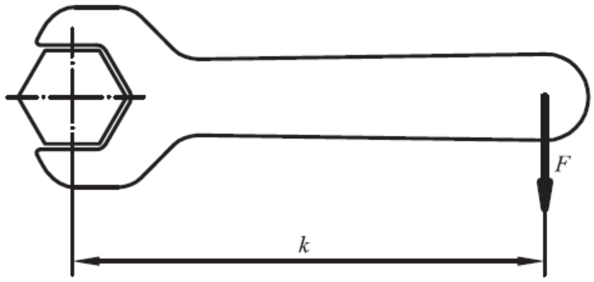
és

$$\underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \tag{4.10.}$$

Síkbeli erőrendszereknél minden erő azonos síkban helyezkedik el, így értelemszerűen a vektorok két dimenziósak lesznek. Ez esetben tehát a síkbeli erő megadása négy adattal lehetséges.

4.2. Az erő forgató hatása, a nyomaték

A merev testekre ható erőrendszernek elmozdító és elfordító hatása is van. Amikor egy hatlapfejű csavart meghúzunk, a villáskulcsra ható erő elfordító hatást vált ki (4.3. ábra). Az erő elfordító (forgató) hatása egyenesen arányos az erő nagyságával és a forgásponttól mért távolságával, hatását az erő forgatónyomatékával mérjük.



4.3. ábra

A forgatónyomaték vektor mennyiség, melynek nagysága megegyezik az erő és a merőleges kar távolságának szorzatával. A forgatónyomaték vektor a következő alakban írható fel:

$$\underline{M}_0 = \underline{r} \times \underline{F}. \tag{4.11.}$$

A forgatónyomaték meghatározásához tehát - a vektoriális szorzat tulajdonsága ismeretében - elegendő az erővektor és a hatásvonalának bármely pontjához tartozó helyvektor ismerete. A nyomatékvektor hatásvonala merőleges az erővektoron és a helyvektorán átfektetett síkra, értelme a jobbcsavarnak megfelelő. A nyomatékvektort szemből nézve az erő forgató hatását az óramutató járásával ellentétesnek látjuk, melyet megegyezés szerint pozitívnak tekintünk.

A forgatónyomaték abszolút értéke:

$$\left|\underline{M}_0\right| = \left|\underline{r}_{0P}\right| \cdot \left|\underline{F}\right| \cdot \sin\alpha = k \cdot \left|\underline{F}\right|. \tag{4.12.}$$

A nyomatékvektor megadása koordinátákkal a harmadrendű determináns kifejtéseként állítható elő:

$$\underline{M}_0 = \underline{r} \times \underline{F} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \tag{4.13.}$$

$$= \underline{i}\left(y \cdot F_z - z \cdot F_y\right) - \underline{j}(x \cdot F_z - z \cdot F_x) + \underline{k}\left(x \cdot F_y - y \cdot F_x\right) =$$

$$= M_{0x} \cdot \underline{i} + M_{0y} \cdot \underline{j} + M_{0z} \cdot \underline{k} = \underline{M}_{0x} + \underline{M}_{0y} + \underline{M}_{0z},$$

ahol $\underline{M}_{0x}$, $\underline{M}_{0y}$, $\underline{M}_{0z}$ a nyomatékvektor tengelyirányú összetevői.
xy síkban működő síkbeli erő esetén $z = 0$ és $F_z = 0$, így a nyomatékvektor a következőképpen alakul:

$$\underline{M}_0 = \underline{r} \times \underline{F} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ x & y & 0 \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix} = \tag{4.14.}$$

$$= \underline{k}\left(x \cdot F_y - y \cdot F_x\right) = M_{0z} \cdot \underline{k} = \underline{M}_{0z}.$$

Síkbeli erő esetén tehát a nyomatékvektor merőleges az erő síkjára, nagysága pedig megegyezik az erő komponenseinek nyomatékösszegével:

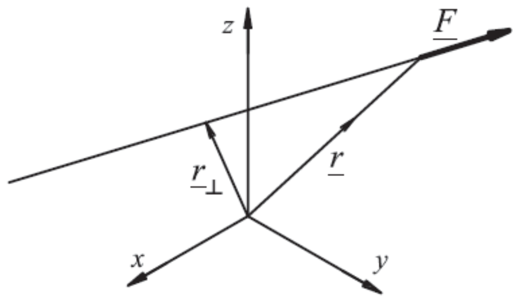
$$M_0 = M_{0z} = x \cdot F_y - y \cdot F_x = x_0 \cdot F_y,,(4.1.) \tag{4.15.}$$

ahol x_0 a tengelymetszék.

4.2.1. Az erő karjának meghatározása

Adott $\underline{F}$ erővektor és az origóból az erő hatásvonalának tetszőleges pontjába mutató $\underline{r}$ helyvektor (4.4. ábra). Az origóba számított $\underline{M}_0$ nyomatékvektor esetén az erő karja:

$$k = \left|\underline{r_\perp}\right| \tag{4.16.}$$



4.4. ábra

Mivel az erő (merev testek esetén) hatásvonalán tetszőlegesen eltolható, írhatjuk:

$$\underline{M}_0 = \underline{r} \times \underline{F} = \underline{r_\perp} \times \underline{F} = -\underline{F} \times \underline{r_\perp} \tag{4.17.}$$

Az egyenletet átrendezve kapjuk:

$$\underline{M}_0 + \underline{F} \times \underline{r_\perp} = \underline{0} \tag{4.18.}$$

Szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát vektoriálisan balról $\underline{F}$-el.

$$\underline{F} \times \underline{M}_0 + \underline{F} \times \left(\underline{F} \times \underline{r_\perp}\right) = \underline{0} \tag{4.19.}$$

$$\underline{F} \times \underline{M}_0 + \left(\underline{F} \cdot \underline{r_\perp}\right) \cdot \underline{F} - F^2 \cdot \underline{r_\perp} = \underline{0}$$

$\left(\underline{F} \cdot \underline{r_\perp}\right) \cdot \underline{F} = \underline{0}$, mivel $\underline{F} \perp \underline{r_\perp}$ és $\cos 90° = 0$, így az egyenlet egyszerűsítés és átrendezés után a következő alakra hozható:

$$\underline{r_\perp} = \frac{\underline{F} \times \underline{M}_0}{F^2} \tag{4.20.}$$

Síkbeli erőrendszer esetén $\underline{F} \perp \underline{M}_0$ és $\sin 90° = 1$, tehát írható:

$$M_0 = M_{0z} = x \cdot F_y - y \cdot F_x = x_0 \cdot F_y = \pm k \cdot \left|\underline{F}\right| \tag{4.21.}$$

Ha ismerjük az erővektor nyomatékát egy tetszőleges A pontra, akkor a nyomatékot ismert helyű B pontra is ki tudjuk számolni (4.5. ábra):

$$\underline{r}_A = \underline{r}_{AB} + \underline{r}_B, \tag{4.22.}$$

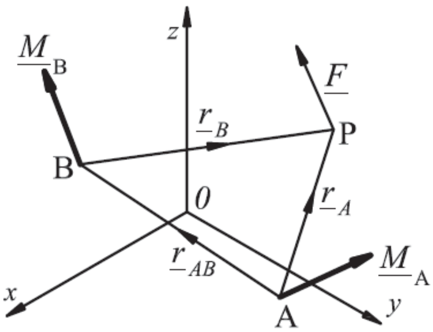
$$\underline{M}_A = \underline{r}_A \times \underline{F} = \left(\underline{r}_{AB} + \underline{r}_B\right) \times \underline{F} = \underline{r}_{AB} \times \underline{F} + \underline{r}_B \times \underline{F}. \tag{4.23.}$$

Mivel

$$\underline{r}_B \times \underline{F} = \underline{M}_B, \tag{4.24.}$$

így:

$$\underline{M}_B = \underline{M}_A - \underline{r}_{AB} \times \underline{F}. \tag{4.25.}$$



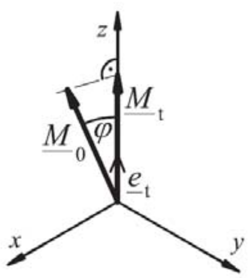
4.5. ábra

4.3. A tengelyre számított nyomaték

A nyomatékot az eddigiekben úgy értelmeztük, hogy az erő hatásvonalán és az O ponton átfektethető síkban eredményez forgató hatást az O pont körül. A nyomaték forgástengelye átmegy az O ponton és merőleges a forgás síkjára, tehát a nyomatékvektor hatásvonala egybeesik a forgástengellyel.
Előfordulhat azonban olyan eset is, amikor a forgató erő nincs a forgás síkjában, azaz az előbbiek alapján a forgatónyomaték-vektor hatásvonala nem esik egybe a forgástengellyel (4.6. ábra). Ez esetben a forgató hatást a forgatónyomaték-vektor tengely irányú összetevője fejezi ki:

$$M_t = \underline{e}_t \cdot \underline{M}_0 = \underline{e}_t \cdot \left(\underline{r} \times \underline{F}\right) \tag{4.26.}$$

$$\underline{M}_t = \underline{M}_0 \cdot \cos\varphi \tag{4.27.}$$



4.6. ábra. Tengelyre számított nyomaték

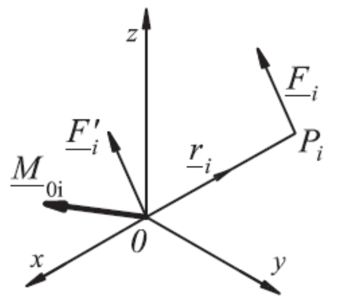
A *(4.13.)* egyenletben szereplő tengelyirányú összetevőket másként fogalmazva *tengelyre vonatkoztatott nyomaték*oknak is nevezzük. Egy tetszőleges pontra számított nyomatékvektor felírható a ponton átmenő három egymásra kölcsönösen merőleges tengelyekre számított nyomatékok vektorainak összegeként is.

Az előbbi megállapításokat összegezve írhatjuk: az **erő nyomatéka zérus** a hatásvonalán lévő bármely pontra, a hatásvonalán átmenő tengelyre és a hatásvonalával párhuzamos tengelyre.

4.4. Az erőrendszer elemei, redukálása, a vektorkettős bevezetése, az erőrendszer osztályozása a vektorkettős alapján

Ha egy erőrendszert másik erőrendszerrel kívánunk helyettesíteni, a legegyszerűbb lehetőséget az ***eredő erőrendszer*** jelenti.

*Redukálás*nak nevezzük azt a műveletet, amikor tetszőlegesen szétszórt erőket egy pontba (pl. „O”-ba) áthelyezzük, és ott összegezzük őket, előállítva így az adott ponthoz kötött legfeljebb két vektorból álló $\left[\underline{F'}_i; \underline{M}_{0i}\right]$ erőrendszert. A redukálás tehát nem más, mint egy erőrendszer egyszerűbb erőrendszerrel való helyettesítése, mely végtelen sokféleképpen elvégezhető (4.7. ábra).



4.7. ábra. Erőrendszer origóba redukálása

A vektortétel alapján, a redukált erő meghatározásával kapjuk:

$$\underline{F}_R = \sum_{i=1}^{n} \underline{F}_i \tag{4.28.}$$

A nyomatéktétel alapján:

$$\underline{M}_{0R} = \sum_{i=1}^{n} \underline{M}_{0i} = \sum_{i=1}^{n} \left(\underline{r}_i \times \underline{F}_i\right) \tag{4.29.}$$

Az így kapott két vektorból álló legegyszerűbb vektorrendszert *redukált vektorkettős*nek nevezzük:

$$\left[\underline{F}_R; \underline{M}_{0R}\right]_0. \tag{4.30.}$$

Az erőrendszerek az eredő vektorkettős alapján osztályozhatóak. A legáltalánosabb eset, ha az eredő erő és az eredő nyomaték szorzata nem zérus. Ez esetben erőcsavarról beszélünk:

$$\underline{F}_R \cdot \underline{M}_{0R} \neq 0, \tag{4.31.}$$

azaz

$$\underline{F}_R \neq \underline{0} \tag{4.32.}$$

és

$$\underline{M}_{0R} \neq \underline{0} \tag{4.33.}$$

Ha az eredő erő és az eredő nyomaték szorzata zérus, a következő eseteket különböztetjük meg:

$$\underline{F}_R \cdot \underline{M}_{0R} = 0 \tag{4.34.}$$

- ha $\underline{F}_R \neq \underline{0}$ és $\underline{M}_{0R} \neq \underline{0}$, egy erő (ha a két vektor merőleges egymásra)

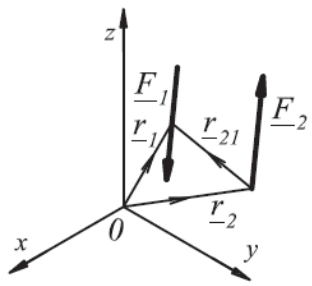
- ha $\underline{F}_R \neq \underline{0}$ és $\underline{M}_{0R} = \underline{0}$, egy erő

- ha $\underline{F}_R = \underline{0}$ és $\underline{M}_{0R} \neq \underline{0}$, egy erőpár

- ha $\underline{F}_R = \underline{0}$ és $\underline{M}_{0R} = \underline{0}$, egyensúlyi erőrendszer

4.5. A koncentrált erőpár fogalma

Merev testre ható síkbeli két erő egymáshoz való viszonya a hatásvonalaik szempontjából 3 féle lehet. Hatásvonalaik lehetnek közös metszéspontúak, párhuzamosak azonos, illetve ellentétes értelemmel.



4.8. ábra. Koncentrált erőpár

Ha két erő azonos nagyságú, ellentétes értelmű, hatásvonalaik párhuzamosak, ***erőpár***ról beszélünk (4.8. ábra). Az erőpár nyomatéka a tér minden pontjára azonos. Az erőpár vektorkettőse:

$$[\underline{0}; \underline{M}_0]_0 \tag{4.35.}$$

Mivel:

$$\underline{F}_1 = -\underline{F}_2 \tag{4.36.}$$

$$\underline{F}_R = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 = \underline{F}_1 - \underline{F}_1 = \underline{0} \tag{4.37.}$$

A 4.8. ábra alapján:

$$\underline{M}_{0R} = \underline{r}_1 \times \underline{F}_1 + \underline{r}_2 \times \underline{F}_2 = \underline{r}_1 \times \underline{F}_1 - \underline{r}_2 \times \underline{F}_1 = \tag{4.38.}$$

$$= (\underline{r}_1 - \underline{r}_2) \times \underline{F}_1 = \underline{r}_{21} \times \underline{F}_1 = \underline{M}_0$$

Az erőpár nem helyettesíthető egyetlen erővel, eredője önmaga. Az erőpár mindig egyenértékűen helyettesíthető egy nyomatékvektorral, amely az erőpár síkjára merőleges, nagysága:

$$\left|\underline{M}_0\right| = \left|\underline{r}_{21}\right| \cdot \left|\underline{F}_1\right| \cdot \sin\alpha = k \cdot \left|\underline{F}_1\right|, \qquad (4.39.)$$

Az erőpárt helyettesítő nyomatékvektor szabad vektorként értelmezhető, azaz a tér tetszőleges pontjára áthelyezhető. Az erőpár síkjában csak a forgató hatás érvényesül, amit a forgatónyomaték előjeles nagyságával fejezhetünk ki, melyet (megegyezés alapján) pozitívnak tekintünk, ha az óramutató járásával ellentétesen forgat. Különböző erőpárok nyomatékvektorainak eredője a nyomatékvektorok összegeként állítható elő:

$$\underline{M}_R = \underline{M}_1 + \underline{M}_2 + \cdots + \underline{M}_n = \sum_{i=1}^{n} \underline{M}_i \qquad (4.40.)$$

Az eredő nyomatékvektor pedig egy eredő erőpárral helyettesíthető.

PÉLDÁK ÉS FELADATOK

4.1. PÉLDA

Adott egy $\left|\underline{F}\right| = 450\ \mathrm{N}$ *nagyságú erő a P támadáspontjába mutató* $\underline{r}$ *helyvektorral* ($\underline{r} = [10; 12; 13]\ \mathrm{m}$). *Az erő a derékszögű koordináta rendszerben mindhárom tengely mentén pozitív irányba mutat, tehát az első térnyolcadban van. Ismert az erő* x *és* y *tengellyel bezárt szöge* ($\alpha = 70{,}0°, \beta = 52{,}8°$). *Határozzuk meg az erő z tengellyel bezárt szögét* (γ), *az erő vetületeit* (F_x, F_y, F_z), *valamint az origóra számított nyomatékát* ($\underline{M}_0$)*!*

Derékszögű koordináta rendszerben igaz az alábbi összefüggés:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

melyből a γ szög meghatározható:

$$\gamma = \arccos\left(\sqrt{1 - (\cos^2\alpha + \cos^2\beta)}\right) =$$

$$= \arccos\left(\sqrt{1 - (\cos^2 70{,}0° + \cos^2 52{,}8°)}\right) =$$

$$= \arccos\left(\sqrt{1 - (0{,}3420^2 + 0{,}6046^2)}\right) =$$

$$= \arccos\left(\sqrt{1 - (0{,}1170 + 0{,}3655)}\right) =$$

$$= \arccos\left(\sqrt{0{,}5175}\right) = \arccos(0{,}7194) = 44°.$$

Az erő tengelyre eső vetületei a (4.1.), (4.4.), (4.5.) egyenletek alapján a következők:

$$F_x = \left|\underline{F}\right| \cos\alpha = 450\ \mathrm{N} \cdot 0{,}3420 = 153{,}91\ \mathrm{N},$$

$$F_y = |\underline{F}| \cos\beta = 450 \text{ N} \cdot 0{,}6046 = 272{,}07 \text{ N},$$

$$F_z = |\underline{F}| \cos\gamma = 450 \text{ N} \cdot 0{,}7194 = 323{,}71 \text{ N}.$$

Az origóra számított nyomatékvektor a (4.13.) egyenlet alapján a következőképpen írható:

$$\underline{M}_0 = \underline{r} \times \underline{F} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 10 \text{ m} & 12 \text{ m} & 13 \text{ m} \\ 153{,}91 \text{ N} & 272{,}07 \text{ N} & 323{,}71 \text{ N} \end{vmatrix} =$$

$$= \underline{i}(12 \text{ m} \cdot 323{,}71 \text{ N} - 13 \text{ m} \cdot 272{,}07 \text{ N}) -$$

$$-\underline{j}(10 \text{ m} \cdot 323{,}71 \text{ N} - 13 \text{ m} \cdot 153{,}91 \text{ N}) +$$

$$+\underline{k}(10 \text{ m} \cdot 272{,}07 \text{ N} - 12 \text{ m} \cdot 153{,}91 \text{ N}) =$$

$$= \underline{M}_{0x} + \underline{M}_{0y} + \underline{M}_{0z} = 347{,}65 \text{ Nm} - 1236{,}31 \text{ Nm} + 873{,}79 \text{ Nm}.$$

A nyomatékvektor nagysága:

$$|\underline{M}_0| = \sqrt{{M_{0x}}^2 + {M_{0y}}^2 + {M_{0z}}^2} = 1553{,}33 \text{ Nm}.$$

A nyomatékvektor tengelyekkel bezárt szögei a (4.7.) egyenlet analógiájára:

$$\alpha_M = \arccos\left(\frac{M_{0x}}{|\underline{M}_0|}\right) = \arccos\left(\frac{347{,}65 \text{ Nm}}{1553{,}33 \text{ Nm}}\right) = 77{,}07°,$$

$$\beta_M = \arccos\left(\frac{M_{0y}}{|\underline{M}_0|}\right) = \arccos\left(\frac{-1236{,}31 \text{ Nm}}{1553{,}33 \text{ Nm}}\right) = 142{,}74°,$$

$$\gamma_M = \arccos\left(\frac{M_{0z}}{|\underline{M}_0|}\right) = \arccos\left(\frac{873{,}79 \text{ Nm}}{1553{,}33 \text{ Nm}}\right) = 55{,}77°.$$

4.2. FELADAT

Derékszögű koordináta rendszerben adott három erővektor (F_1, F_2, F_3) *a támadáspontjukba mutató helyvektorokkal* (r_1, r_2, r_3). *Redukálja az erővektorokat az origóba, azaz határozza meg az eredő erő* $(\underline{F_R})$ *és az eredő nyomaték* $(\underline{M}_{OR})$ *vektorát. Határozza meg az eredő vektorok nagyságát is* $(|\underline{F_R}|, |\underline{M}_{0R}|)$*!*

$$\underline{F_1} = \begin{bmatrix} 100 \\ 120 \\ 135 \end{bmatrix} \text{N}, \underline{F_2} = \begin{bmatrix} 55 \\ 65 \\ 70 \end{bmatrix} \text{N}, \underline{F_3} = \begin{bmatrix} 110 \\ 130 \\ 145 \end{bmatrix} \text{N},$$

$$\underline{r_1} = \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ 8 \end{bmatrix} \text{m}, \underline{r_2} = \begin{bmatrix} 10 \\ 12 \\ -21 \end{bmatrix} \text{m}, \underline{r_3} = \begin{bmatrix} -13 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix} \text{m}.$$

4.3. FELADAT

Adott egy $\left|\underline{F}\right| = 860\ \mathrm{N}$ *nagyságú erő a* P *támadáspontjába mutató* $\underline{r}$ *helyvektorral* ($\underline{r} = [5; 8; 9]\ \mathrm{m}$). *Az erő a derékszögű koordináta rendszerben mindhárom tengely mentén pozitív irányba mutat, ismert az erő* y *és* z *tengellyel bezárt szöge* ($\beta = 52{,}0°, \gamma = 48{,}31°$). *Határozza meg az erő* x *tengellyel bezárt szögét* (α), *az erő vetületeit* (F_x, F_y, F_z), *valamint az origóra számított nyomatékát* ($\underline{M}_0$)*!*