MECHANIKA I.
(Statika)

Erőrendszerek statikája

1.1.3 Lecke. Általános térbeli erőrendszer

ÓBUDAI EGYETEM
BÁNKI

CÉLKITŰZÉS

Ez a lecke bemutatja az **általános síkbeli erőrendszer eredőjé**nek meghatározását.

KAPCSOLÓDÓ IRODALOM

Mechanika I. (Statika) elektronikus jegyzet 7. fejezet.

Felhasznált irodalom

[1] Dietmar Gross, Werner Hauger, Jörg Schröder, Wolfgang A. Wall, Nimal Rajapakse: Engineering Mechanics 1, Springer Dordrecht Heidelberg New York London, 2009, 2013

[2] Kósa Csaba: Nyugvó rendszerek mechanikája. Példatár és útmutató, Budapest, 2009

[3] Gelencsér Endre: Statika példatár, Gödöllő, 2006

MOTIVÁCIÓ

Bár a gyakorlatban a térbeli erőrendszerekkel kapcsolatos problémák jó része visszavezethető síkbeli feladatra, jelen fejezetben az ettől eltérőkkel, illetve a feladatok közvetlen megoldásával foglalkozunk.

Célunk továbbra is az, hogy a mechanikai probléma feltárása után, – az eredeti szerkezet elhagyásával, egy alkalmasan megválasztott koordináta-rendszer-ben, – egy egyszerű elméleti feladatot kelljen meg-oldanunk.

E tananyag elsajátítása révén képesek lehetünk az általános térbeli erőrendszerek eredőjének meghatározására, az erőrendszer origóba történő redukálásával megtanuljuk az eredő vektorkettős kiszámításának módját.

ELMÉLETI ÁTTEKINTÉS

Jelen leckében az **általános térbeli erőrendszerek**et tárgyaljuk, ahol az erők hatásvonalai nincsenek közös síkban, hatásvonalaik állása szerint lehetnek közös metszéspontúak, párhuzamosak, vagy kitérőek is.

Egy tetszőleges, n erőből álló erőrendszerre felírható:

$$(F_1, F_2, F_3, \dots, F_n) \doteq (F_R, M_{0R}),$$

ahol

$$\underline{F_R} = \sum_{i=1}^{n} \underline{F_i} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} F_{ix} \\ \sum_{i=1}^{n} F_{iy} \\ \sum_{i=1}^{n} F_{iz} \end{bmatrix}$$

és

$$\underline{M}_{0R} = \sum_{i=1}^{n} \underline{M}_{0i} = \sum_{i=1}^{n} \underline{r_i} \times \underline{F_i} = \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ x_i & y_i & z_i \\ F_{xi} & F_{yi} & F_{zi} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} \left(y_i \cdot F_{zi} - z_i \cdot F_{yi}\right) \cdot \underline{i} \\ \sum_{i=1}^{n} (x_i \cdot F_{zi} - z_i \cdot F_{xi}) \quad \cdot \left(-\underline{j}\right) \\ \sum_{i=1}^{n} \left(x_i \cdot F_{yi} - y_i \cdot F_{xi}\right) \cdot \underline{k} \end{bmatrix}.$$

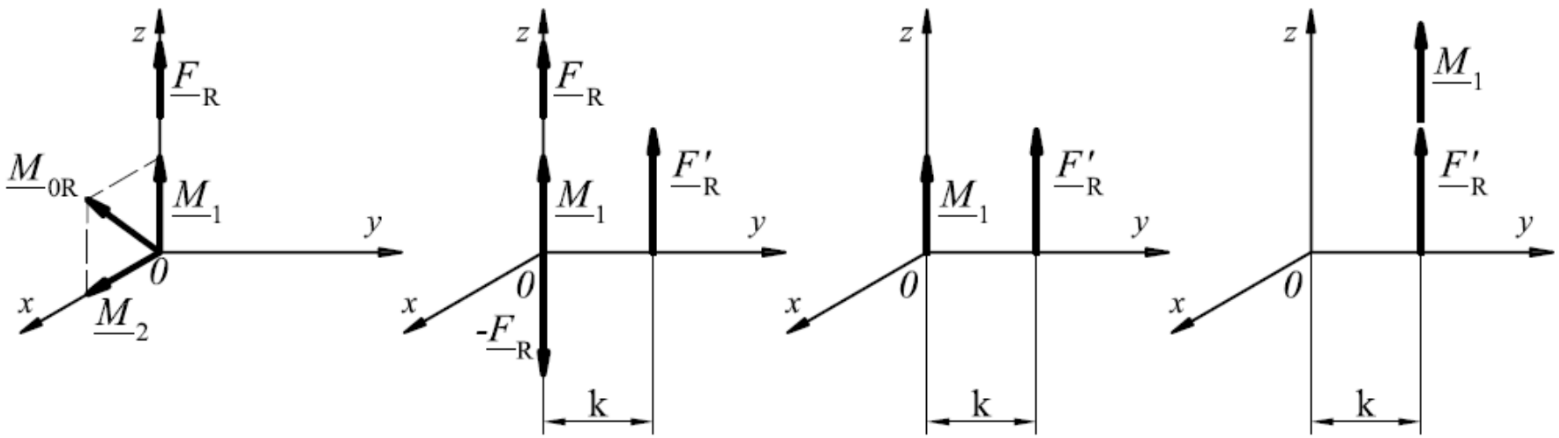
Az általános térbeli erőrendszer egyik speciális esete, amikor

$$\underline{F}_R \neq \underline{0} \text{ és } \underline{M}_{0R} \neq \underline{0},$$

és a két vektorösszetevő nem merőleges egymásra, azaz skaláris szorzatuk:

$$\underline{F}_R \cdot \underline{M}_{0R} \neq \underline{0}.$$

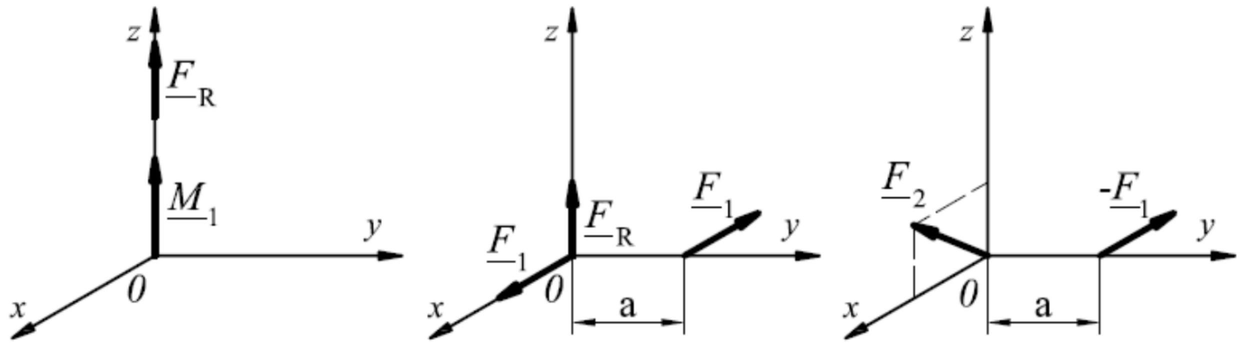
Ebben az esetben az erőrendszer nem helyettesíthető egyetlen erővel. Az egyszerűsítések után kapott erőrendszert **erőcsavar**nak, hatásvonalát pedig **centrális egyenes**nek nevezzük.



A centrális egyenes helyét kijelölő vektor:

$$\underline{k}_c = \frac{\underline{F}_R{}' \times \underline{M}_{0R}}{\left|\underline{F}_R{}'\right|^2}.$$

Megjegyezzük, hogy egy erőcsavar két kitérő hatásvonalú erővé alakítható át, de mivel az alábbi ábrán jelölt a távolság tetszőleges, az átalakítási módok száma végtelen.

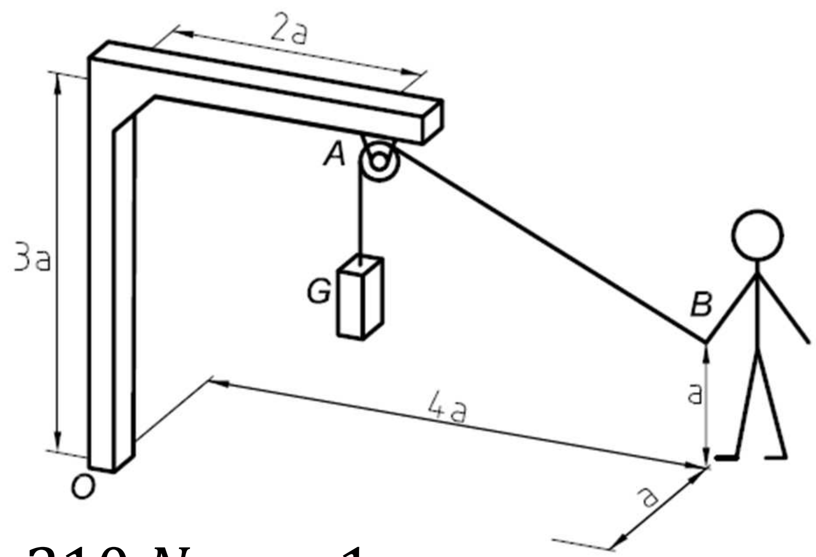


Az így kapott két erő tovább már nem egyszerűsíthető, a két kitérő erőt **erőkereszt**nek nevezzük.

1. MINTAPÉLDA

Az ábrán látható elrendezésben egy G súlyú test függ egy csigán átvetett (A pont) kötélen. A kötelet a B pontban tartja egy ember, az elhanyagolható átmérőjű csiga és a kötél ideális (súrlódásmentes, elhanyagolható tömegű).

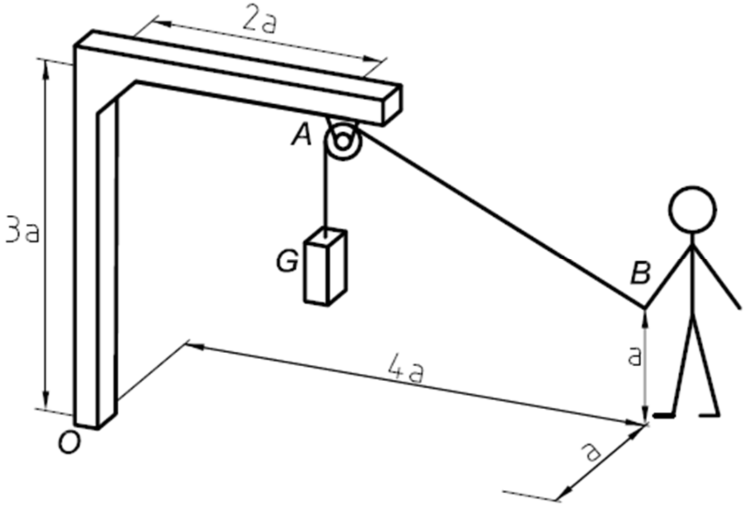
Határozzuk meg a csigára ható, kötél által kifejtett erők eredőjét és nyomatékát az O pontra!

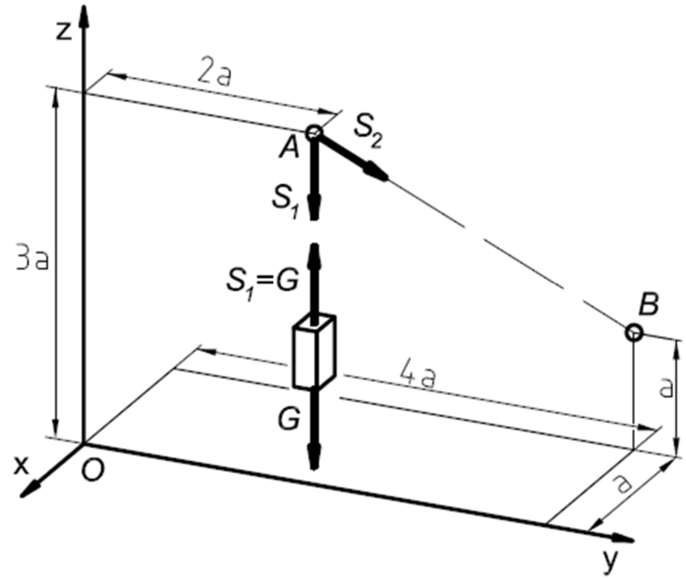


Adatok: $G = 210\ N, a = 1\ m$.

Megoldás

Első lépésben vegyünk fel egy alkalmasan megválasztott koordináta-rendszert, melynek kezdőpontja O.





Bontsuk elemeire a szerkezetet és vázoljuk fel az ébredő erőket. A szerkezet elhagyásával és az erők felrajzolásával láthatjuk, hogy gyakorlatilag S_1 és S_2 erők nyomatékát keressük az O pontra.

Egyensúlyt feltételezve igaz, hogy:

$$S_1 = G,$$

és a súrlódás elhanyagolása miatt S_1 és S_2 nagysága is egyenlő:

$$G = S_1 = S_2 = 210\ N$$

A nyomaték meghatározásához írjuk fel az erőket és a támadáspontjukba mutató helyvektorokat koordinátás alakban.

A koordináta-rendszerből kiolvasható:

$$\underline{S}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -210 \end{bmatrix} N, \underline{r}_{OA} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} m.$$

$\underline{S}_2$ felírásához szükség van az A pontból B pontba mutató egységvektor meghatározására.

$\underline{r}_{AB}$ -t kiolvashatjuk a koordináta-rendszerből, vagy felírhatjuk:

$$\underline{r}_{AB} = \underline{r}_{OB} - \underline{r}_{OA} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} m - \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} m = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} m.$$

$\underline{e}_2$ az $\underline{r}_{AB}$ egységvektora:

$$|\underline{r}_{AB}| = \sqrt{{\underline{r}_{AB}}_x^{\,2} + {\underline{r}_{AB}}_y^{\,2} + {\underline{r}_{AB}}_z^{\,2}} =$$

$$= \sqrt{(-1m)^2 + (2m)^2 + (-2m)^2} = 3\,m,$$

$$\underline{e}_2 = \frac{\underline{r}_{AB}}{|\underline{r}_{AB}|} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

$\underline{S}_2$ meghatározása:

$$\underline{S}_2 = S_2 \cdot \underline{e}_2 = 210\ N \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -70 \\ 140 \\ -140 \end{bmatrix} N.$$

Most már az erők és helyvektoraik ismeretében az origóra számított nyomatékok felírhatók:

$$\underline{M}_1 = \underline{r}_{OA} \times \underline{S}_1 = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -210 \end{vmatrix} Nm = \begin{bmatrix} -420 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} Nm,$$

$$\underline{M}_2 = \underline{r}_{OA} \times \underline{S}_2 = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & 2 & 3 \\ -70 & 140 & -140 \end{vmatrix} Nm = \begin{bmatrix} -700 \\ -210 \\ 140 \end{bmatrix} Nm,$$

$$\underline{M}_O = \underline{M}_1 + \underline{M}_2 = \begin{bmatrix} -420 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} Nm + \begin{bmatrix} -700 \\ -210 \\ 140 \end{bmatrix} Nm =$$

$$= \begin{bmatrix} -1120 \\ -210 \\ 140 \end{bmatrix} Nm,$$

$$\left|\underline{M}_O\right| = 1148{,}09\ Nm.$$

Az $\underline{S}_1$ és $\underline{S}_2$ erők eredőjének meghatározása:

$$\underline{S}_R = \underline{S}_1 + \underline{S}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -210 \end{bmatrix} N + \begin{bmatrix} -70 \\ 140 \\ -140 \end{bmatrix} N = \begin{bmatrix} -70 \\ 140 \\ -350 \end{bmatrix} N,$$

$$\left|\underline{S}_R\right| = 383{,}41\ N.$$

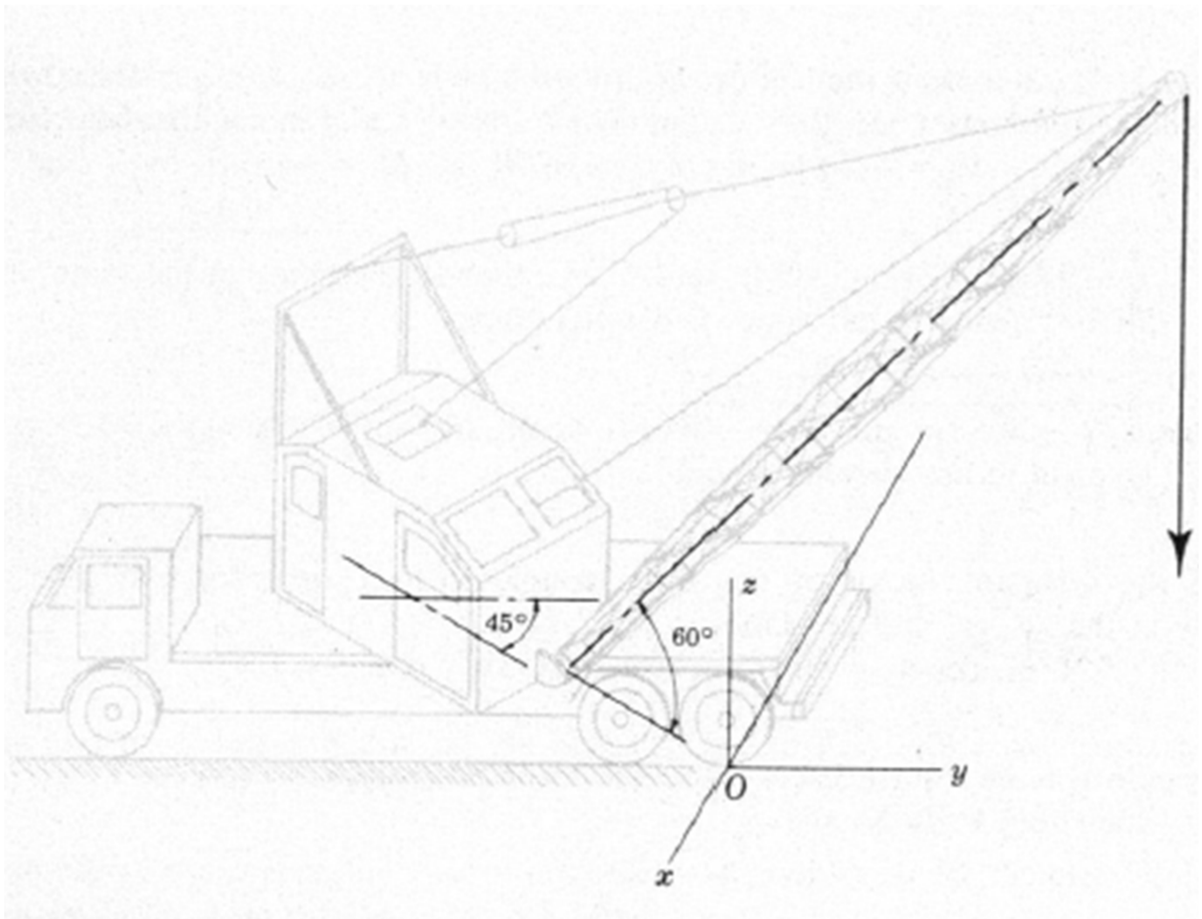
Válasz/értékelés

A feladat megoldása során kerestük a csigára ható, kötél által kifejtett erők eredőjét és nyomatékát az 0 pontra. A feladat egyszerűsítése, és egy megfelelő koordináta-rendszer felvétele után meghatároztuk az erőket és a támadáspontjaikba mutató helyvektorokat. Koordinátás alakjuk ismeretében az eredő erő és nyomaték az 0 pontra könnyedén számítható volt.

2. MINTAPÉLDA

Az ábrán látható elrendezésben egy gémes autódaru látható. A gém forgatható és billenthető. A koordináta-rendszer origója a teherautó bal oldali leghátsó kerék és a talaj találkozásánál található. Az x tengely párhuzamos a gépkocsi tengelyével, az y tengely a hossziránnyal. A z tengely függőlegesen helyezkedik el. A daru forgatható része $90\,cm$-rel a talaj felett található. A forgórészen a gém alsó pontja $1{,}8\,m$-re van a forgó kabin közepétől. A kabin középpontja a gépkocsi hossztengelyén, a leghátsó tengelytől $4{,}5\,m$-re található. A $15\,m$-es gém $60°$-os szöget zár be a vízszintessel, a forgatható rész $45°$-ban van elfordítva a hossztengelyhez képest. A gépkocsi szélessége $2{,}4\,m$. Mekkora a nyomatéka az origóra a $18\,\mathrm{kN}$-os terhelésnek?

2. MINTAPÉLDA



Adatok: $F = 18\ kN,$

$távolságok\ \text{és}\ szögek\ az\ \text{ábra}\ \text{és}\ a\ le\text{í}r\text{á}s\ szerint.$

Megoldás

Első lépésben meg kell határozni a gém felső pontját, (a terhelő erő támadáspontja). A támadáspont ismeretében ismert az adott koordináta-rendszerben az erő helyvektora. A terhelés nagysága és iránya alapján meghatározzuk az erővektort. A helyvektor és az erővektor vektoriális szorzata adja az erőrendszer nyomatékát az adott koordináta-rendszerben.

A feladat leírása és az ábra alapján az erő támadáspontjának meghatározása:

$$\underline{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -1{,}2 + 1{,}8 \cdot \sin 45° + (15 \cdot \cos 60°) \cdot \sin 45° \\ -4{,}5 + 1{,}8 \cdot \cos 45° + (15 \cdot \cos 60°) \cdot \cos 45° \\ 0{,}9 + 15 \cdot \sin 45° \end{bmatrix} m =$$

$$= \begin{bmatrix} 5,38 \\ 2,08 \\ 13,89 \end{bmatrix} m.$$

Az erővektor:

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -18 \end{bmatrix} kN$$

Az origóra számított nyomatékvektor:

$$\underline{M} = \underline{r} \times \underline{F} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 5,38 & 2,08 & 13,89 \\ 0 & 0 & -18 \end{vmatrix} kNm =$$

$$= \begin{bmatrix} -37,37 \\ 96,77 \\ 0 \end{bmatrix} kNm$$

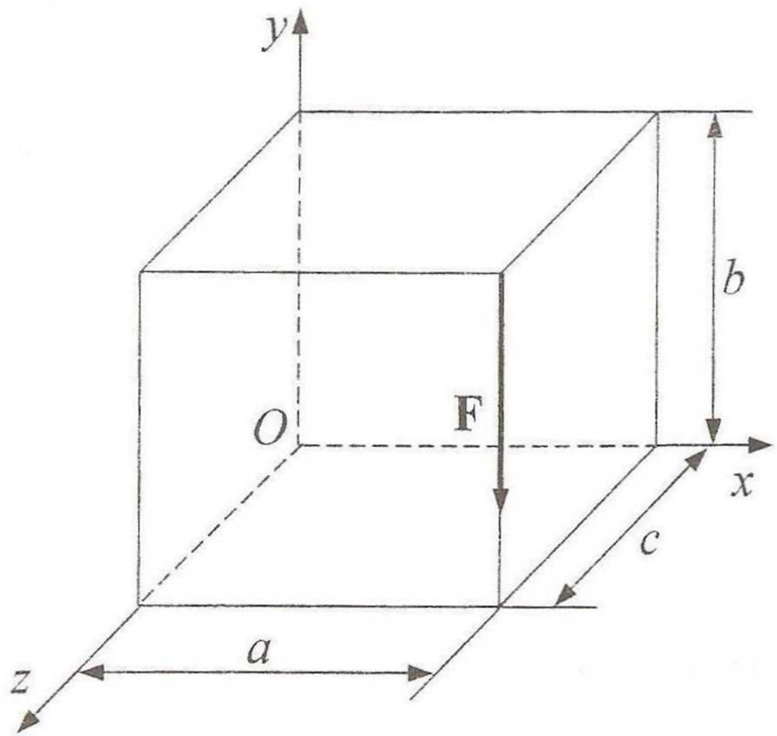
Válasz/értékelés

A feladat megoldása során kerestük az autódarut terhelő erő nyomatékát a feladatban adott koordináta-rendszerben.
A feladat szövegében szereplő távolságok értelmezése alapján meghatároztuk az erő támadáspontját, majd az erő és a helyvektor koordinátás alakjának ismeretében meghatároztuk az origóra számított nyomatékvektort.

1. FELADAT

Az ábrán látható hasábot éle mentén F koncentrált erő terheli.

Határozzuk meg az erő nyomatékát az origóra!

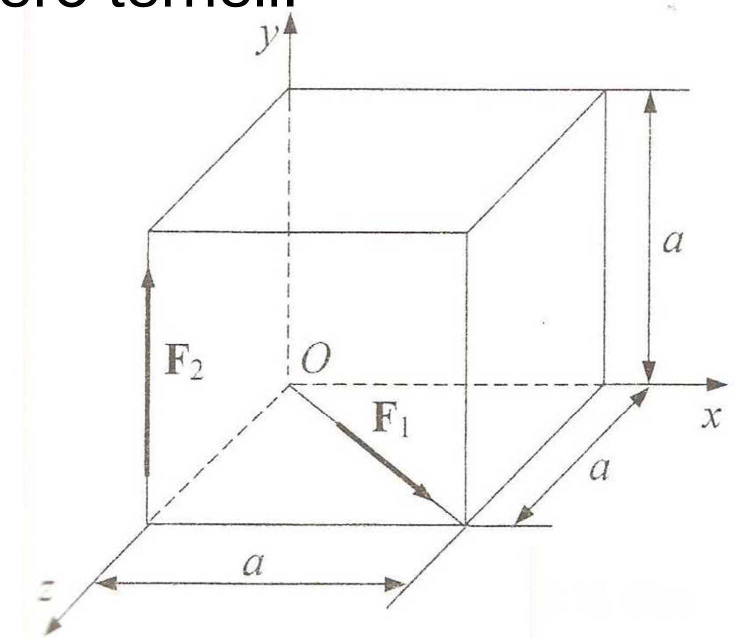


Adatok: $F = 100\ N, a = 6\ m, b = 4\ m,\ c = 4\ m$.

Végeredmények: $\underline{M}_0 = \begin{bmatrix} 400 \\ 0 \\ -600 \end{bmatrix} Nm, \left|\underline{M}_0\right| = 721{,}11\ Nm$.

2. FELADAT

Az ábrán látható kockát éle és lapátlója mentén mentén F_1 és F_2 koncentrált erő terheli. Redukáljuk az erőrendszert az origóba és határozzuk meg a redukált nyomatékvektor eredő erő irányába eső vetületének nagyságát!



Adatok: $F_1 = 300\ N, F_2 = 200\ N, a = 4\ m$.

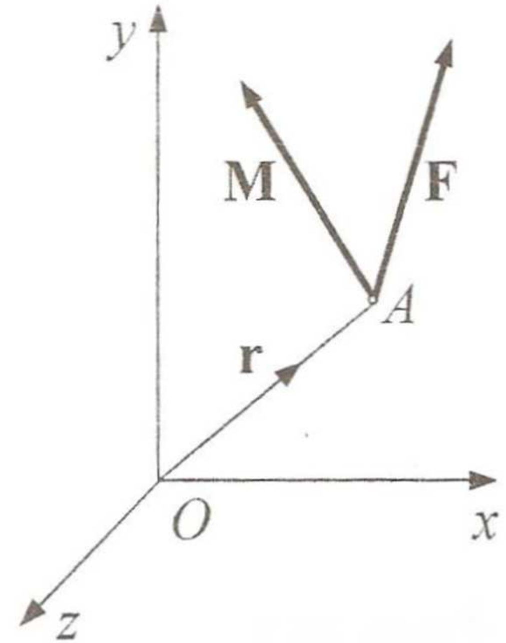
Végeredmények: $\underline{M}_{0R} = \begin{bmatrix} -800 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} Nm, \underline{F}_R = \begin{bmatrix} 212{,}13 \\ 200 \\ 212{,}13 \end{bmatrix} N,$

$$\left|\underline{F}_R\right| = 360{,}56\ N, \left|\underline{M}_e\right| = -470{,}68\ Nm.$$

3. FELADAT

Az ábrán látható koordináta rendszer A pontjában F koncentrált erő és M koncentrált nyomaték találhatóak.

Redukáljuk az erőrend-szert az origóba!



Adatok: $\underline{r} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} m, \underline{F} = \begin{bmatrix} 600 \\ 800 \\ 200 \end{bmatrix} N.$

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} 3000 \\ -2500 \\ 1400 \end{bmatrix} Nm$$

Végeredmények: $\underline{F}_R = \begin{bmatrix} 600 \\ 800 \\ 200 \end{bmatrix} N, \underline{M}_{0R} = \begin{bmatrix} -2400 \\ 1500 \\ 1600 \end{bmatrix} Nm.$

4. FELADAT

Redukáljuk az alábbi térbeli erőrendszert az origóba!

Adatok: $\underline{F}_1 = \begin{bmatrix} -23 \\ 16 \\ 28 \end{bmatrix} N, \underline{F}_2 = \begin{bmatrix} 14 \\ 43 \\ -21 \end{bmatrix} N, \underline{F}_3 = \begin{bmatrix} 9 \\ 11 \\ 19 \end{bmatrix} N,$

$\underline{M} = \begin{bmatrix} 111 \\ 0 \\ 216 \end{bmatrix} Nm,$

$\underline{r}_1 = \begin{bmatrix} 15 \\ 23 \\ 11 \end{bmatrix} m, \underline{r}_2 = \begin{bmatrix} 8 \\ 24 \\ -34 \end{bmatrix} m, \underline{r}_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ -21 \\ -9 \end{bmatrix} m.$

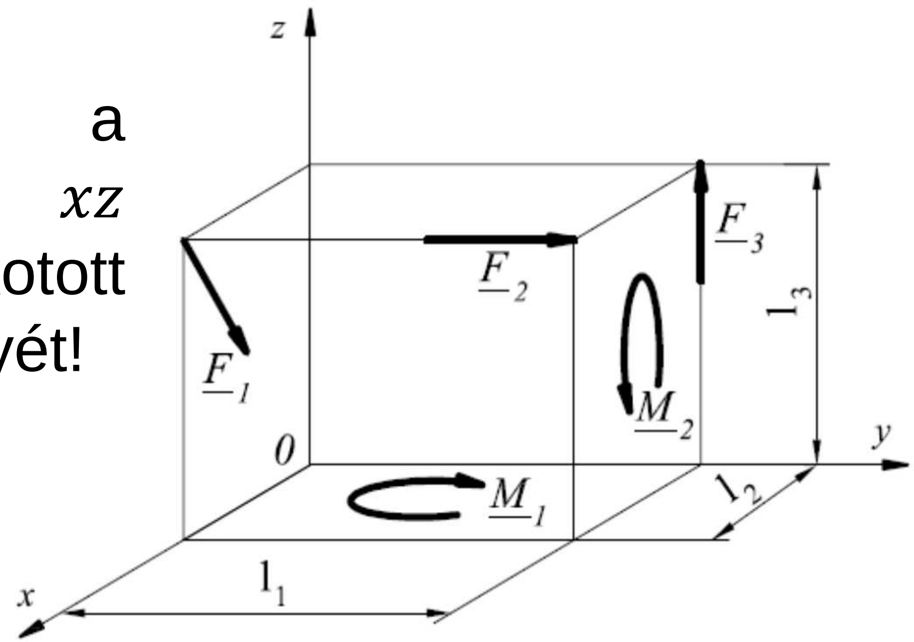
Végeredmények: $\underline{F}_R = \begin{bmatrix} 0 \\ 70 \\ 26 \end{bmatrix} N, |\underline{F}_R| = 74{,}67\ N,$

$\underline{M}_{0R} = \begin{bmatrix} 1237 \\ -1176 \\ 1248 \end{bmatrix} Nm, |\underline{M}_{OR}| = 2114{,}39\ Nm.$

5. FELADAT

Redukáljuk az ábrán látható téglatestre ható erőrendszert az origóba! Határozzuk meg az erőrendszer eredőjét!

Határozzuk meg a centrális egyenes xz síkkal alkotott metszéspontjának helyét!



Adatok: $F_1 = 3 \cdot \sqrt{2}$ kN, $F_2 = 6$ kN, $F_3 = 4{,}5$ kN,
$M_1 = 8$ kNm, $M_2 = 4$ kNm,
$l_1 = 6$ m, $l_2 = 4$ m, $l_3 = 4$ m.

Végeredmények: $\underline{F}_R = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ 1{,}5 \end{bmatrix} kN, \ |\underline{F}_R| = 6{,}87\ kN,$

$$\underline{M}_{0R} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 16 \end{bmatrix} kNm, |\underline{M}_{OR}| = 16{,}76\ kNm,$$

$$x = 2{,}46\ \mathrm{m}, z = -0{,}91\ \mathrm{m}.$$