6. Általános síkbeli erőrendszer

6.1. Általános síkbeli erőrendszer eredője

Ha az erők hatásvonalai egyéb megkötés nélkül közös síkban helyezkednek el, *általános síkbeli erőrendszer*ről beszélünk. Tárgyalásunk során a koordináta rendszer xy síkját – célszerűen – az erőkkel közös síkban vesszük fel.
A vektortétel alapján az erőket az origóba redukálhatjuk:

$$(F_1, F_2, F_3, \dots, F_n) \doteq (F_R, M_{0R}), \tag{6.1.}$$

ahol az eredő erő és a redukált nyomaték az alábbiak szerint fejezhető ki. Az eredő erő:

$$\underline{F}_R = \sum_{i=1}^{n} \underline{F}_i = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} F_{ix} \\ \sum_{i=1}^{n} F_{iy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{Rx} \\ F_{Ry} \end{bmatrix}. \tag{6.2.}$$

A vektoregyenlet két skaláregyenletre bontható, melyek az eredő erő vetületeit adják meg:

$$F_{Rx} = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = \sum_{i=1}^{n} \left|\underline{F}_i\right| \cdot \cos\alpha_i, \tag{6.3.}$$

$$F_{Ry} = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = \sum_{i=1}^{n} \left|\underline{F}_i\right| \cdot \sin\alpha_i, \tag{6.4.}$$

ahol α az erők hatásvonalának x tengellyel bezárt szöge.
Az összetevőkből az eredő erő nagysága és hajlásszöge is meghatározható:

$$\left|\underline{F}_R\right| = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2}, \tag{6.5.}$$

$$\tan\alpha_R = \frac{F_{Ry}}{F_{Rx}}. \tag{6.6.}$$

A redukált nyomaték:

$$\begin{aligned} \underline{M}_{0R} &= \sum_{i=1}^{n} \underline{M}_{0i} = \sum_{i=1}^{n} \underline{r}_i \times \underline{F}_i = \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ x_i & y_i & 0 \\ F_{xi} & F_{yi} & 0 \end{vmatrix} = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(x_i \cdot F_{yi} - y_i \cdot F_{xi}\right) \cdot \underline{k} = \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_{0i} \cdot F_{yi} \cdot \underline{k} = \sum_{i=1}^{n} -y_{0i} \cdot F_{xi} \cdot \underline{k}, \end{aligned} \tag{6.7.}$$

ahol x_{0i} az i-edik erő hatásvonalának metszéspontja az x-tengellyel, illetve y_{0i} az i-edik erő hatásvonalának metszéspontja az y-tengellyel. Mivel xy sík a vizsgált erőrendszer síkja, $\underline{k}$ egységvektor által meghatározott z irány pedig erre merőleges, a vizsgált síkra nézve: $\underline{M}_{0i}$ vektorok mindig merőlegesek.

Az eredő háromféle lehet:
- egyensúly van, ha

$$\underline{F}_R = \underline{0} \text{ és } \underline{M}_{0R} = \underline{0}, \tag{6.8.}$$

- eredő erőpár van, ha

$$\underline{F}_R = \underline{0} \text{ és } \underline{M}_{0R} \neq \underline{0}, \tag{6.9.}$$

- eredő erő van, ha

$$\underline{F}_R \neq \underline{0}, \tag{6.10.}$$

Az eredő erő helye a nyomatéki tétel segítségével meghatározható:

$$x_{0R} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{0i} \cdot F_{iy}}{F_{Ry}}, \tag{6.11.}$$

ahol x_{0R} az eredő x tengellyel való metszéspontját határozza meg.

Általános síkbeli erőrendszer esetében az eredő három ismeretlen komponens meghatározását követeli meg, melyhez három egyenlet felírása szükséges. A meghatározandó komponensek a következők:

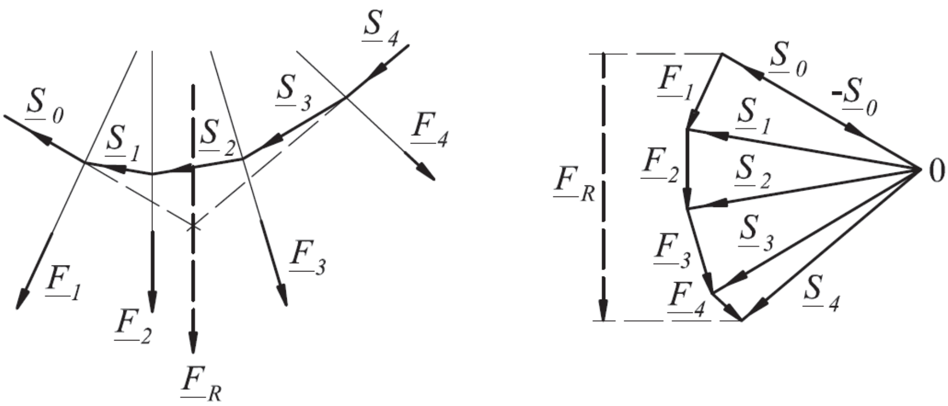
$$\left|\underline{F}_R\right|, \alpha_R, x_{0R}, \tag{6.12.}$$

vagy

$$F_{Rx}, F_{Ry}, x_{0R}. \tag{6.13.}$$

A feladat elvégezhető két vetületi egyenlet és egy nyomatéki egyenlet felírásával, ahogy ez az előbbiekben felírásra került, vagy két nyomatéki és egy vetületi egyenlet segítségével, esetenként három nyomatéki egyenlettel.

Az eredő helye és nagysága a párhuzamos erőkből álló erőrendszerekhez hasonlóan szerkesztéssel is meghatározható (6.1. ábra). Az eredő nagyságát és irányát a vektorábrából, a helyét a kötélsokszög felhasználásával határozhatjuk meg.



6.1. ábra. Általános síkbeli erőrendszer eredőjének szerkesztése

6.2. Egy erő felbontása három adott hatásvonalú síkbeli összetevőre

Gyakori feladat, hogy adott erőt fel kell bontani három ismert hatásvonalú komponensre.
Adott a síkban $\underline{F}$ erő és három hatásvonal, melynek egységvektorai: $\underline{e}_1, \underline{e}_2$ és $\underline{e}_3$. Az erőt felbontjuk $\underline{F}_1, \underline{F}_2$ és $\underline{F}_3$ komponensekre oly módon, hogy

$$(F) \doteq (F_1, F_2, F_3) \qquad (6.14.)$$

egyenértékűség fennálljon. A feladatra leggyakrabban alkalmazott szerkesztő eljárás *Culmann* (1821-1881), míg a számító eljárás *Ritter* (1847-1906) nevéhez fűződik.
A szerkesztő eljárást a következőképpen végezhetjük el. A négy hatásvonalból (az adott erő hatásvonala és a három ismert hatásvonal) kettőt-kettőt metszésre hozunk. A metszéspontokat összekötjük (szaggatott vonal), a kapott irány kijelöli a culmann segédegyenest.
A szerkesztő eljárás a III. alaptételre vezethető vissza. Léptékhelyesen felvesszük az adott erőt, majd kezdő illetve végpontjába a culmann egyenessel és az erő és a segédegyenes által háromszöget alkotó egyik ismert hatásvonallal párhuzamosokat húzunk. A culmann egyenes immáron egy léptékhelyes segéderőt mutat, melynek kezdő illetve végpontjába párhuzamosokat húzunk a másik két ismert hatásvonallal.
Amennyiben a feladatunk az $\underline{F}$ erő *helyettesítés*e a három adott irányú erővel (6.2. ábra):

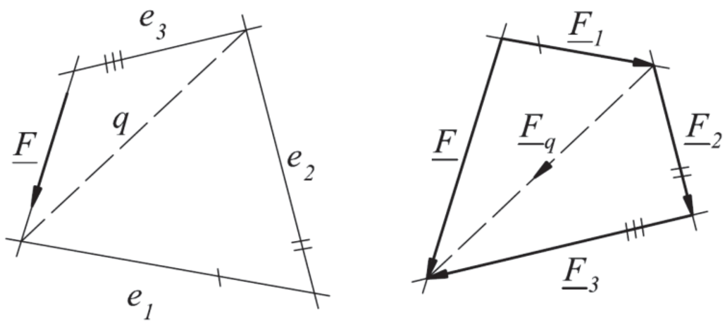
$$\underline{F} = \underline{F}_1 + \underline{F}_q \qquad (6.15.)$$

és

$$\underline{F}_q = \underline{F}_2 + \underline{F}_3, \qquad (6.16.)$$

azaz

$$\underline{F} = \underline{F}_1 + \underline{F}_q = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \underline{F}_3. \qquad (6.17.)$$



6.2. ábra. Helyettesítés Culmann-féle szerkesztő eljárással

A vektorháromszögek nyílfolyamai a következőképpen alakulnak: az eredetileg ismert erőt felbontottuk két összetevőre, egy ismert hatásvonal és a culmann egyenes irányába eső komponensekre. A felbontás során kapott vektorháromszög nyílfolyama az ismert erőre nézve ütköző. A másik két erőkomponens az $\underline{F}_q$ erő felbontása, az így keletkezett vektorháromszög nyílfolyama az $\underline{F}_q$ erőre nézve szintén ütköző.

Amennyiben a feladatunk az $\underline{F}$ erő *egyensúlyozása* a három adott irányú erővel (6.3. ábra):

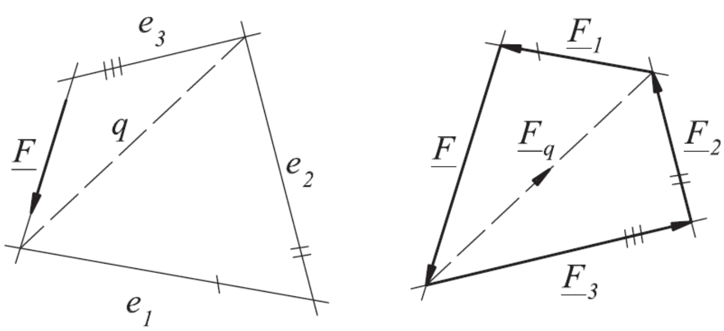
$$\underline{F}_1 + \underline{F}_q + \underline{F} = \underline{0} \qquad (6.18.)$$

és

$$\underline{F}_q = \underline{F}_2 + \underline{F}_3, \qquad (6.19.)$$

azaz

$$\underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \underline{F}_3 + \underline{F} = \underline{0}. \qquad (6.20.)$$



6.3. ábra. Kiegyensúlyozás Culmann-féle szerkesztő eljárással

Ez esetben az eredetileg ismert erőt kiegyensúlyoztuk az egyik ismert hatásvonal és a culmann egyenes irányába eső komponensekkel, a vektorháromszög nyílfolyama zárt. A másik két erőkomponens az $\underline{F}_q$ erő felbontása, a keletkező vektorháromszög nyílfolyama az $\underline{F}_q$ erőre nézve ütköző.

A számító eljárás lényege, hogy a hatásvonalak metszéspontjaira felírjuk a nyomatéktételt.
Két erőrendszer egyenértékű, ha eredő erővektoruk és a tér bármely pontjára számított eredő nyomatékvektoruk azonos.

Amennyiben a feladatunk
- helyettesítés:
Adott $\underline{F}, \underline{e}$ és $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ mellett keressük $\underline{F}_1, \underline{F}_2, \underline{F}_3$-at úgy, hogy

$$(F)' \doteq (F_1, F_2, F_3)'' \qquad (6.21.)$$

Az ismeretlen erők hatásvonalainak P_{12}, P_{23}, P_{13} metszéspontjaiba az xy síkra merőleges tengelyre írunk fel nyomatéki egyenleteket. Az egyenletekből az ismeretlen erők meghatározhatók.

$$\underline{M}_{P_{12}}{}' = \underline{M}_{P_{12}}{}'' \quad \rightrightarrows \quad \underline{F}_3 = \ldots \qquad (6.22.)$$

$$\underline{M}_{P_{23}}{}' = \underline{M}_{P_{23}}{}'' \quad \rightrightarrows \quad \underline{F}_1 = \ldots \qquad (6.23.)$$

$$\underline{M}_{P_{13}}{}' = \underline{M}_{P_{13}}{}'' \quad \rightrightarrows \quad \underline{F}_2 = \ldots \qquad (6.24.)$$

- egyensúlyozás:
Adott $\underline{F}, \underline{e}$ és $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ mellett keressük $\underline{F}_1, \underline{F}_2, \underline{F}_3$-at úgy, hogy

$$(F, F_1, F_2, F_3)' \doteq (0)'' \qquad (6.25.)$$

Az ismeretlen erők hatásvonalainak P_{12}, P_{23}, P_{13} metszéspontjaiba az xy síkra merőleges tengelyre írunk fel nyomatéki egyenleteket. Az egyenletekből az ismeretlen erők meghatározhatók.

$$\underline{M}_{P_{12}} = \underline{0} \quad \rightrightarrows \quad \underline{F}_3 = \ldots \qquad (6.26.)$$

$$\underline{M}_{P_{23}} = \underline{0} \quad \rightrightarrows \quad \underline{F}_1 = \ldots \qquad (6.27.)$$

$$\underline{M}_{P_{13}} = \underline{0} \quad \rightrightarrows \quad \underline{F}_2 = \ldots \qquad (6.28.)$$

PÉLDÁK ÉS FELADATOK

6.1. PÉLDA

Határozzuk meg szerkesztéssel és számítással az 6.4. ábrán látható, síkbeli erőrendszer eredőjének helyét, irányát és nagyságát.
Adott az erők nagysága, hatásvonalaik adott tengellyel bezárt szöge és a támadáspontjukba mutató helyvektor, továbbá egy koncentrált nyomaték.

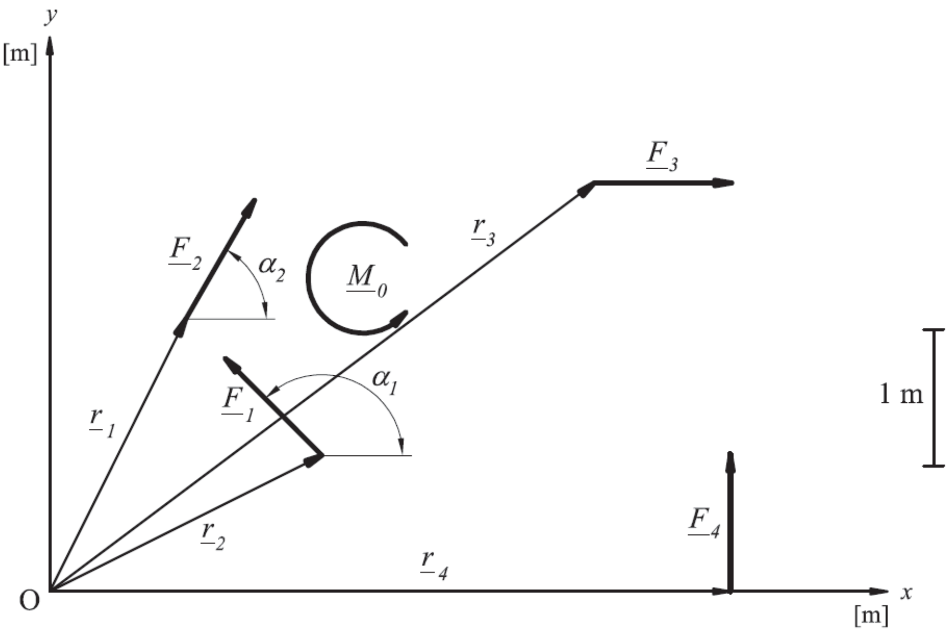
$$F_1 = 495\ \mathrm{N}, r_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\ \mathrm{m}, \alpha_1 = 135°,$$

$$F_2 = 550\ \mathrm{N}, r_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\ \mathrm{m}, \alpha_2 = 60°,$$

$$F_3 = 600\ \mathrm{N}, r_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}\ \mathrm{m}, \alpha_3 = 0°,$$

$$F_4 = 390\ \mathrm{N}, r_4 = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}\ \mathrm{m}, \alpha_4 = 90°,$$

$$M_0 = 468\ \mathrm{Nm}.$$

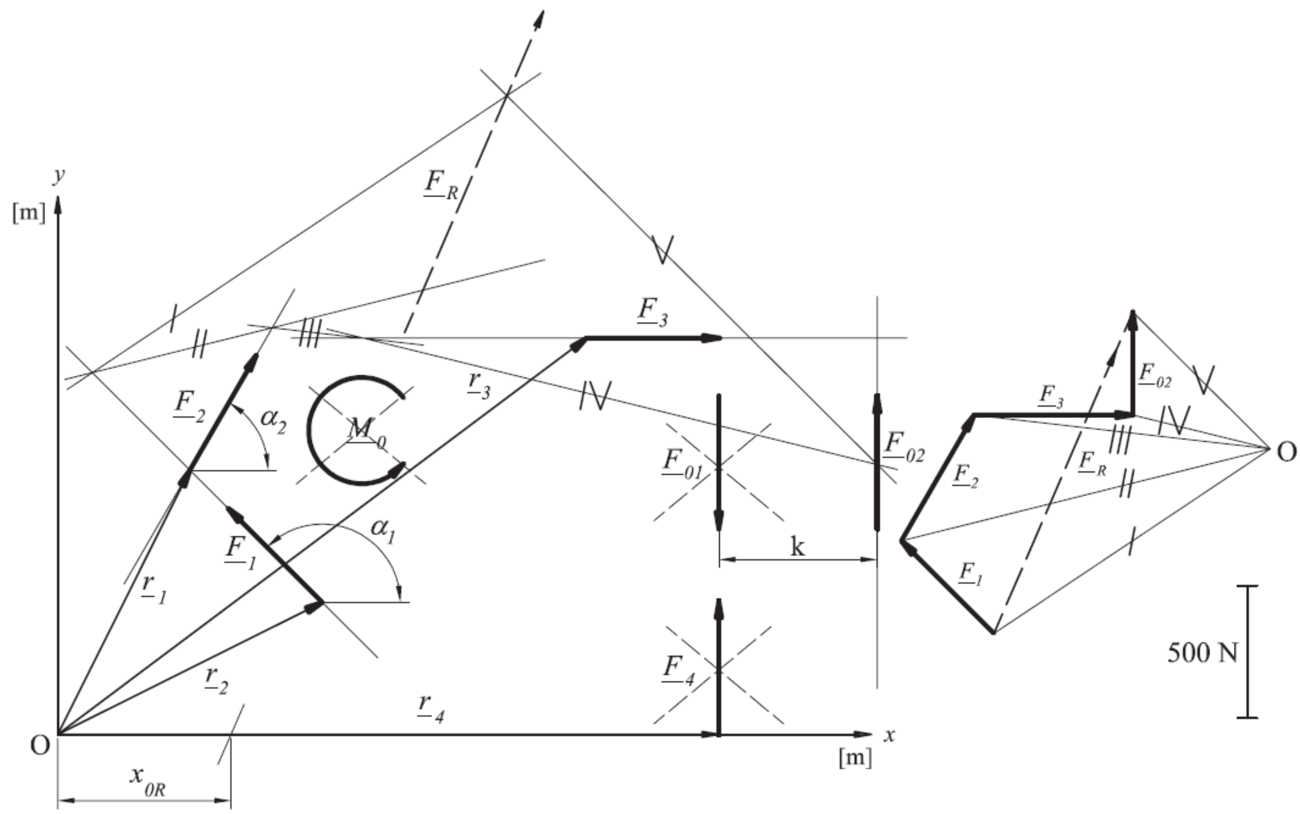


6.4. ábra

Először szerkesztéssel oldjuk meg a feladatot. A vektorsokszög szerkesztéshez ki kell váltanunk a koncentrált nyomatékot, amit erőpárral helyettesíthetünk. Célszerűen úgy vesszük fel az erőpárt, hogy az egyik tagja ($\underline{F}_{01}$) éppen ellenereje legyen valamelyik meglévő erőnek, jelen esetben $\underline{F}_4$-nek. Így $\underline{F}_4$ és $\underline{F}_{01}$ kiejtik egymást. $\underline{F}_{01}$ és $\underline{F}_{02}$ egymáshoz képesti távolságához kis számítást kell beiktatnunk:

$$k = \frac{M_0}{F_{01}} = \frac{468\ \mathrm{Nm}}{390\ \mathrm{N}} = 1{,}2\ \mathrm{m}.$$

Az erőpár ábrába történő rajzolásakor figyelni kell arra, hogy a forgató hatás iránya megegyezzen az eredeti koncentrált nyomaték elfordító hatás irányával. (Gyakorlatilag $\underline{F}_4$ és $\underline{M}_0$ nyomatékát írtuk fel az origóra, majd $\underline{M}_0$ kiküszöbölésével az új helyzetű $\underline{F}_4$, mostantól $\underline{F}_{02}$ nyomatéka megegyezik a korábban az origóra felírt nyomaték összeggel.)
A maradék erőkből megrajzoljuk az erők vektorsokszögét, a megválasztott léptéknek megfelelően (6.5.b. ábra). Az eredő erővektor az első vektor kezdőpontja és az utolsó vektor végpontja között helyezkedik el, nyílütköztetéssel. A lépték segítségével az eredő meghatározható.
Ezután következik a kötélábra szerkesztése az 5.1 példának megfelelően. Felveszünk egy O póluspontot, majd ezt összekötjük az erők kezdő- illetve végpontjával, és beszámozzuk őket az alábbiak szerint. Az első erő kezdőpontjából húzott kötéloldal az I-es. Az első erő végpontja, illetve a második erő kezdőpontjából húzott kötéloldal a II-es jelet kapja, és így tovább. A kötéloldalakkal párhuzamosokat húzunk az eredeti ábrába (6.5.a. ábra) oly módon, hogy az első erő hatásvonalát metszük az I-es és II-es kötéloldallal, majd a második erő hatásvonalát metsző II-es kötéloldali metszéspontba párhuzamost húzunk a III-as kötéloldallal és így tovább. Végül az utolsó kötéloldalt metszésre hozzuk az I-es kötéloldallal, a metszéspont kijelöli az eredő erő hatásvonalának helyét.



a. *b.*

6.5. ábra

A szerkesztés eredményei mérés alapján:

$$F_R = 1{,}3\ \text{kN},\ \ \alpha_R = 67°.$$

Számítással a következőképp oldható meg a feladat. A (6.2.) egyenlet alapján:

$$\underline{F}_R = \sum_{i=1}^{02} \underline{F}_i = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{02} F_{ix} \\ \sum_{i=1}^{02} F_{iy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{02} |\underline{F}_i| \cdot \cos\alpha_i \\ \sum_{i=1}^{02} |\underline{F}_i| \cdot \sin\alpha_i \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 495\ \text{N} \cdot \cos 135° + 550\ \text{N} \cdot \cos 60° + 600\ \text{N} + 0\ \text{N} \\ 495\ \text{N} \cdot \sin 135° + 550\ \text{N} \cdot \sin 60° + 0\ \text{N} + 390\ \text{N} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -350{,}02\ \text{N} + 275{,}00\ \text{N} + 600\ \text{N} + 0\ \text{N} \\ 350{,}02\ \text{N} + 476{,}31\ \text{N} + 0\ \text{N} + 390\ \text{N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 524{,}98\ \text{N} \\ 1216{,}33\ \text{N} \end{bmatrix}.$$

Az eredő nagysága és hajlásszöge:

$$|\underline{F}_R| = \sqrt{(524{,}98\ \text{N})^2 + (1216{,}33\ \text{N})^2} = 1324{,}79\ \text{N},$$

$$\alpha_R = arctan\frac{F_{Ry}}{F_{Rx}} = arctan\frac{1216{,}33\ \text{N}}{524{,}98\ \text{N}} = 66{,}7°.$$

A felfelé mutató erőket pozitív, a lefelé mutatókat negatív előjellel vesszük figyelembe. Az eredő helyének meghatározásához szükség van nyomatékösszegre. A (6.7.) egyenlet alapján:

$$\underline{M}_1 = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ -350{,}02 & 350{,}02 & 0 \end{vmatrix} \text{Nm} = 1050{,}05 \text{ Nm},$$

$$\underline{M}_2 = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 275{,}00 & 476{,}31 & 0 \end{vmatrix} \text{Nm} = -73{,}69 \text{ Nm},$$

$$\underline{M}_3 = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 4 & 3 & 0 \\ 600{,}00 & 0 & 0 \end{vmatrix} \text{Nm} = -1800{,}00 \text{ Nm},$$

$$\underline{M}_4 = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 390{,}00 & 0 \end{vmatrix} \text{Nm} = 1950{,}00 \text{ Nm},$$

$$\underline{M}_{0R} = \underline{M}_0 + \sum_{i=1}^{4} \underline{M}_{0i} = \underline{M}_0 + \sum_{i=1}^{4} \underline{r}_i \times \underline{F}_i$$

Az egyenlet mindkét oldalát skalárisan megszorzunk a *z* tengely irányába mutató $\underline{k}$ egységvektorral:

$$M_{0R} = 468 \text{ Nm} + 1050{,}05 \text{ Nm} - 73{,}69 \text{ Nm} - 1800{,}00 \text{ Nm} + 1950{,}00 \text{ Nm} =$$

$$= 1594{,}37 \text{ Nm}.$$

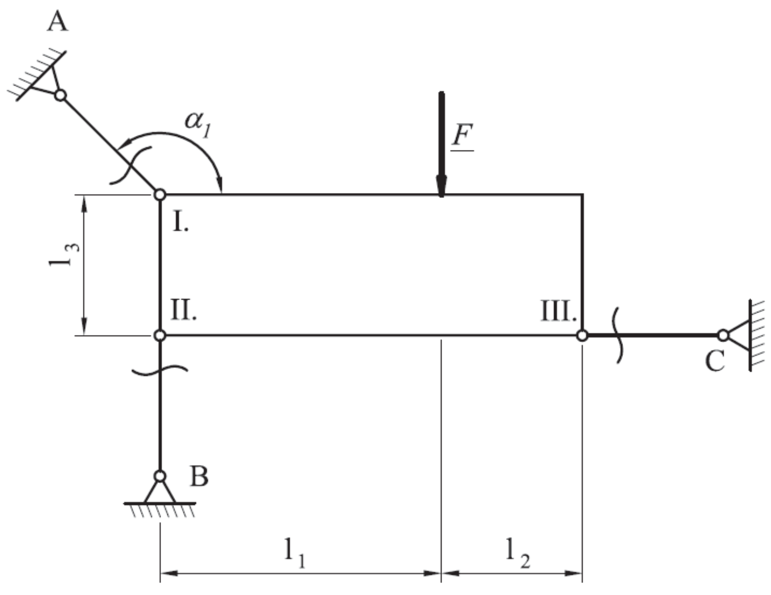
A nyomatékot pozitívnak tekintjük, amennyiben az óramutató járásával ellentétesen forgat.

A következőkben az eredő x tengellyel való metszéspontját határozzuk meg:

$$x_{0R} = \frac{M_{0R}}{F_{Ry}} = \frac{1594{,}37 \text{ Nm}}{1216{,}33 \text{ N}} = 1{,}31 \text{ m}.$$

6.2. PÉLDA

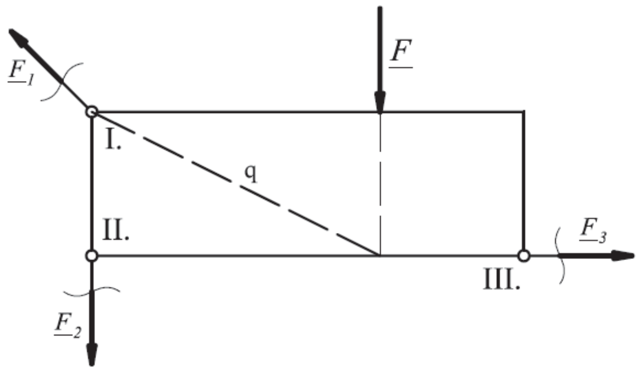
A 6.6. ábrán $\underline{F}$ külső erővel terhelt, három rúddal rögzített merev test látható. A rudak síkbeli csuklóval kapcsolódnak a környezethez. Határozzuk meg a rudakban ébredő reakcióerőket!



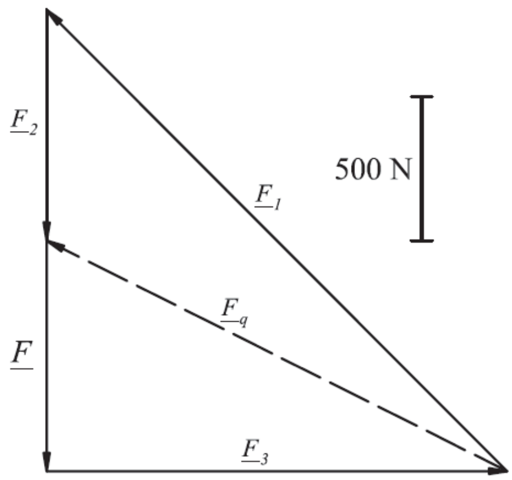
6.6. ábra

$$F = 800\ N, l_1 = 2\ \mathrm{m}, l_2 = 1\ \mathrm{m}, l_3 = 1\ \mathrm{m}, \alpha_1 = 135°\ .$$

A feladat megoldására alkalmazható szerkesztő eljárás a *Culmann*-módszer, a feladatot a 6.2. fejezet alapján oldjuk meg. A szerkezet nyugalomban van, és amennyiben élünk az elkülönítés elvével, az elkülönített merev test is nyugalomban kell, hogy maradjon (6.7.a. ábra).



a.



b.

6.7. ábra

A merev testet rögzítő rudakat elvágtuk, de az általuk kifejtett erőket továbbra is működtetni kell. Tehát az erők egyensúlyi erőrendszert alkotnak, tehát írható:

$$(F, F_1, F_2, F_3) \doteq 0.$$

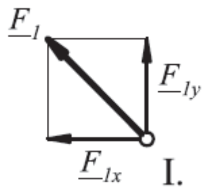
$\underline{F}$ és $\underline{F}_3$,illetve $\underline{F}_1$ és $\underline{F}_2$ erők hatásvonalait páronként metszésre hozzuk, majd az összekötött metszéspontok hatásvonalán segéderőt működtetünk. A 6.2. fejezetben leírtaknak megfelelően megrajzoljuk a vektorábrát, ügyelve a nyilak irányára. A feladat kiegyensúlyozás, tehát az erők nyílfolytonos zárt vektorsokszöget alkotnak (6.7.b. ábra). Az ábrából az erők nagysága a lépték segítségével meghatározható.

A számításhoz Ritter módszerét használjuk szintén a 6.2. fejezet alapján, azaz nyomatéki egyensúlyi egyenleteket írunk fel az ismeretlen erők hatásvonalainak metszéspontjaiba. A metszésponton áthaladó erőknek az adott pontra a nyomatéka triviálisan zérus, ezért célszerűen úgy írjuk fel az egyenleteket, hogy mindig egy ismeretlen és legalább egy ismert erő szerepeljen bennük. Az erővektorokat a 6.7.a. ábrában feltételezett irányoknak megfelelően pozitívnak tekintjük. (Feltételezzük, hogy a rudakban húzóerő lép fel, azaz húzottak.)

$$\underline{M}_{I.} = \underline{0} = \underline{F}_3 \cdot l_3 - \underline{F} \cdot l_1 \quad \rightrightarrows$$

$$\underline{F}_3 = \frac{\underline{F} \cdot l_1}{l_3} = \frac{800\ \mathrm{N} \cdot 2\ \mathrm{m}}{1\ \mathrm{m}} = 1600\ \mathrm{N}.$$

A II-es pontra történő nyomatéki egyenlet felírásakor $\underline{\mathrm{F}}_1$ –t többféle módon is meghatározhatjuk. Vagy kiszámítjuk a karját a II-es pontra, ami $\underline{\mathrm{F}}_1$ hatásonalának merőleges távolsága a II-es ponttól, vagy felbontjuk $\underline{\mathrm{F}}_1$ –t x és y irányú összetevőkre, majd az összetevő és a hajlásszög ismeretében határozzuk meg a keresett erőt. Most ez utóbbi megoldást alkalmazzuk, az erő felbontása látható a 6.8. ábrán. A felbontás után $\underline{\mathrm{F}}_{1y}$ –nak nincs nyomatéka a II-es pontra.



6.8. ábra

$$\underline{M}_{II.} = \underline{0} = \underline{F}_{1x} \cdot l_3 - \underline{F} \cdot l_1 \quad \rightrightarrows$$

$$\underline{F}_{1x} = \frac{\underline{F} \cdot l_1}{l_3} = \frac{800\ \mathrm{N} \cdot 2\ \mathrm{m}}{1\ \mathrm{m}} = 1600\ \mathrm{N},$$

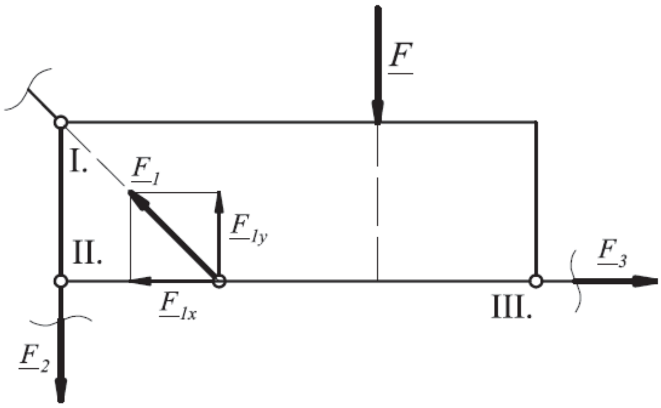
$$\underline{F}_1 = \frac{\underline{F}_{1x}}{\cos\ 45°} = \frac{1600\ \mathrm{N}}{0{,}71} = 2262{,}74\ \mathrm{N}.$$

Most már csak $\underline{\mathrm{F}}_2$ erőt kell meghatároznunk, amire szintén több lehetőségünk is van. Felírhatunk vetületi egyensúlyi egyenletet, vagy újabb nyomatéki egyenletet is. Írjunk fel nyomatéki egyensúlyi egyenletet a III-as pontra! Ez esetben $\underline{\mathrm{F}}_1$ erő merőleges távolságát kellene meghatároznunk, vagy élünk azzal a lehetőséggel, hogy az erő, mint kötött vektor a hatásvonalán eltolható. Toljuk el $\underline{\mathrm{F}}_1$-t a hatásvonalán a II-es és III-as pontokat összekötő szakaszra (6.9. ábra), majd bontsuk fel x és y irányú összetevőkre. A nyomatéki egyenletben most $\underline{F}_{1x}$-el nem kell számolnunk.

$$\underline{F}_{1y} = \underline{F}_1 \cdot \sin\alpha_1 = 2262{,}74\ \mathrm{N} \cdot \sin 135° = 1600\ \mathrm{N}.$$

$$\underline{M}_{III.} = \underline{0} = \underline{F} \cdot l_2 + \underline{F}_2 \cdot (l_1 + l_2) - \underline{F}_{1y} \cdot (l_1 + l_2 - l_3) \quad \rightrightarrows$$

$$\underline{F}_2 = \frac{\underline{F}_{1y} \cdot l_2 - \underline{F} \cdot l_2}{l_1 + l_2} = \frac{1600\ \mathrm{N} \cdot (2 + 1 - 1)\ \mathrm{m} - 800\ \mathrm{N} \cdot 1\ \mathrm{m}}{2\ \mathrm{m} + 1\ \mathrm{m}} = 800\ \mathrm{N}.$$



6.9. ábra

Számításainkat ellenőrizhetjük a vetületi egyensúlyi egyenletekkel:

$$\underline{F_x} = \underline{F_3} - \underline{F_{1x}} = 1600\ \mathrm{N}\ - 1600\ \mathrm{N} = 0$$

$$\underline{F_y} = \underline{F_{1y}} - \underline{F} - \underline{F_2} = 1600\ \mathrm{N}\ - 800\ \mathrm{N} - 800\ \mathrm{N} = 0$$

Tehát a számításaink helyesek.
Megjegyezzük, hogy a feladatnak általános esetben, ha egyik keresett reakcióerő hatásvonala sem párhuzamos az eredővel, vagy egy másik iránnyal három független megoldása létezik. Esetünkben csak kettő, mivel az egyik rúdirány párhuzamos az eredővel. A Culmann szerkesztés másik megoldását itt nem ismertettük. A Ritter számítás is általános esetben három független - a főpontra felírt - nyomatéki egyensúlyi egyenletet eredményez, most csak kettőt.

6.3. FELADAT

Határozza meg szerkesztéssel és számítással az 6.10. ábrán látható, síkbeli erőrendszer eredőjének helyét, irányát és nagyságát.
Adott az erők nagysága, hatásvonalaik x tengellyel bezárt szöge és a támadáspontjukba mutató helyvektor, továbbá egy koncentrált nyomaték.

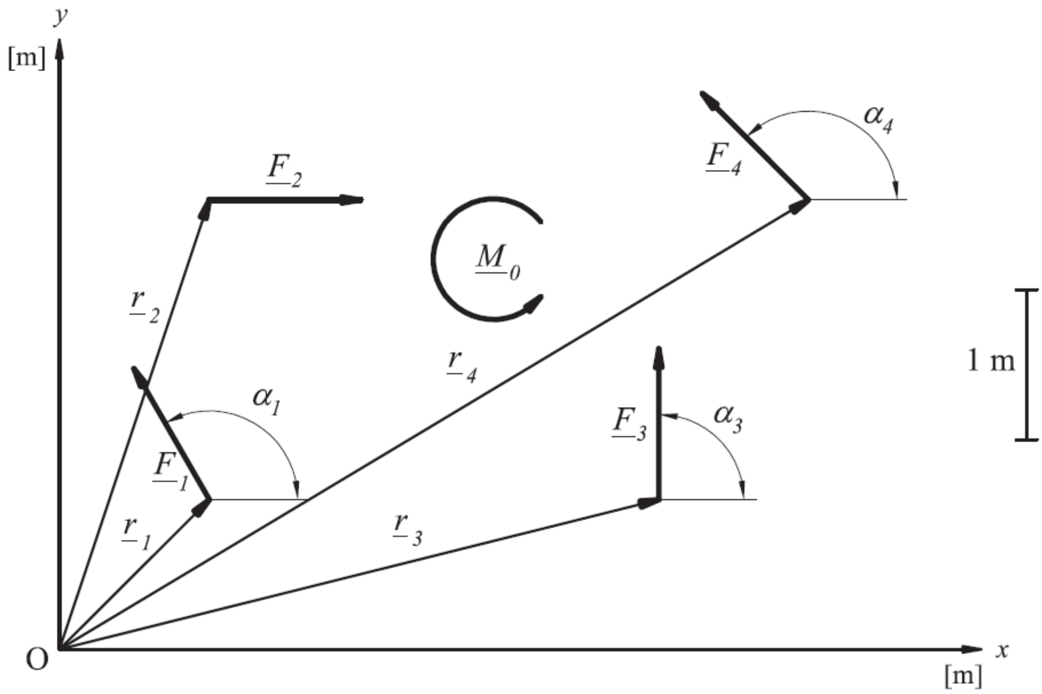
$$F_1 = 310\ \mathrm{N}, r_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\ \mathrm{m}, \alpha_1 = 120°,$$

$$F_2 = 850\ \mathrm{N}, r_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}\ \mathrm{m}, \alpha_2 = 0°,$$

$$F_3 = 360\ \mathrm{N}, r_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}\ \mathrm{m}, \alpha_3 = 90°,$$

$$F_4 = 450\ \mathrm{N}, r_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}\ \mathrm{m}, \alpha_4 = 135°,$$

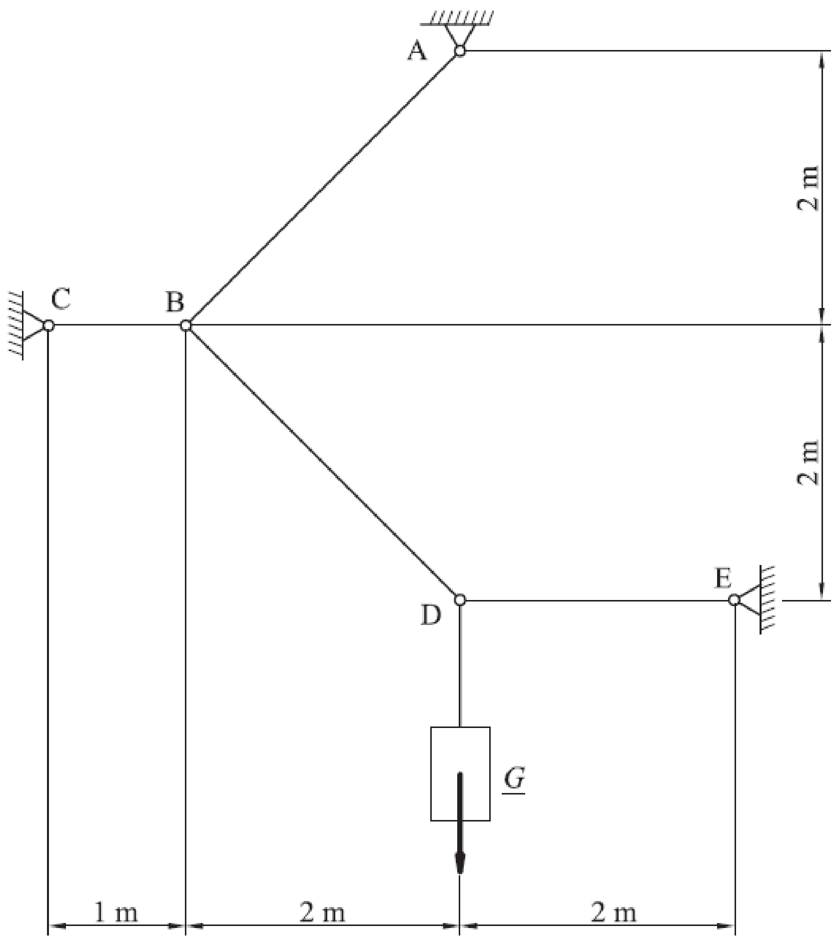
$$M_0 = 345\ \mathrm{Nm}.$$



6.10. ábra

6.4. FELADAT

A 6.11. ábrán kötélszerkezet látható, melyet $G = 800\,\mathrm{N}$ súlyú külső erő terhel. Határozza meg szerkesztéssel és számítással a kényszerekben ébredő erőket!



6.11. ábra