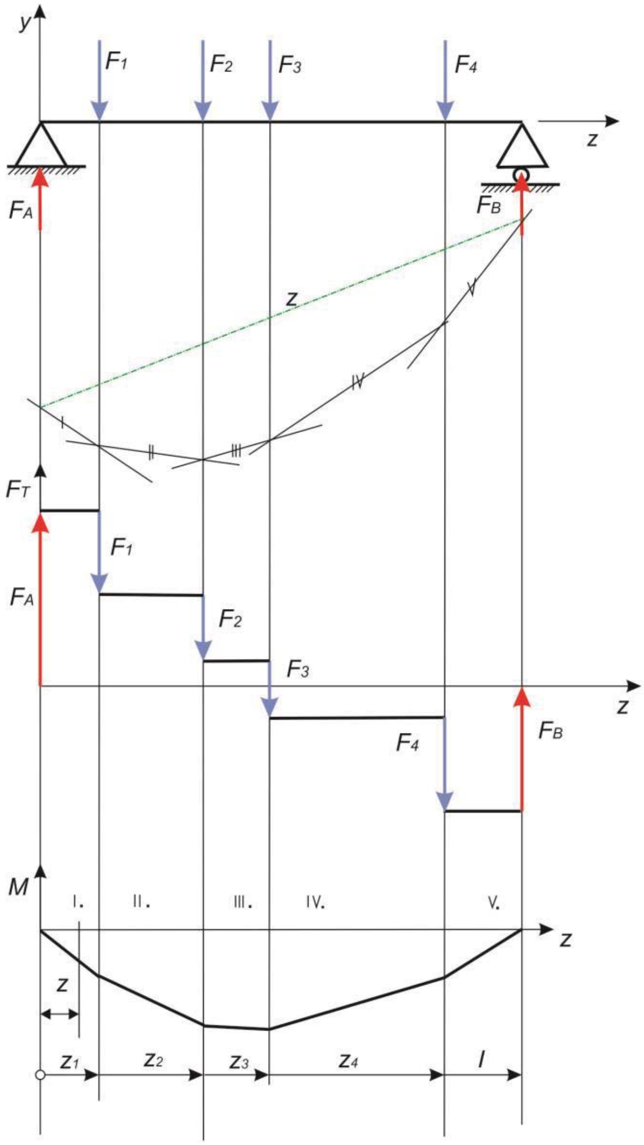
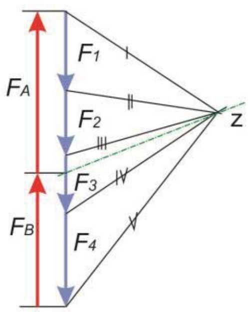
14. Egyenes rúd (koncentrált és megoszló erőkkel terhelt kéttámaszú és befogott tartók) igénybevételi függvényei és ábrái.

A *11.* fejezetben bemutattuk a kéttámaszú és a befogott tartók támaszaiban keletkező reakcióerők számítását mind koncentrált, mind megoszló terhelés esetében. A *12.* fejezetben pedig az igénybevételi függvények felírását és az igénybevételi ábrák rajzolását tárgyaltuk.

E megszerzett tudás birtokában most írjuk fel a *14.1 ábrán* látható koncentrált erőkkel terhelt kéttámaszú tartó nyíró és nyomatéki igénybevételi függvényeit, majd készítsük el igénybevételi ábráit. A reakcióerők meghatározásának ismertetése a *11.* fejezetben már megtörtént.





14.1 ábra. Kéttámaszú tartó nyíró és hajlító igénybevételi ábrája

Az ábrán balról jobbra haladva az I.-V. jelölt szakaszokra vonatkozó igénybevételek meghatározása, igénybevételi függvények:

I. $\quad 0 \leq z < z_1 \quad F_T(z) = F_A \quad ;$ *(14.1.)*

$$M(z) = -z \cdot F_A \tag{14.2.}$$

II. $z_1 \le z < z_2$ $\quad F_T(z) = F_A - F_1 \quad ;$ (14.3.)

$$M(z) = -z \cdot F_A + (z - z_1) \cdot F_1 \tag{14.4.}$$

III. $z_2 \le z < z_3$ $\quad F_T(z) = F_A - F_1 - F_2 \quad ;$ (14.5.)

$$M(z) = -z \cdot F_A + (z - z_1) \cdot F_1 + (z - z_2) \cdot F_2 \tag{14.6.}$$

IV. $z_3 \le z < z_4$ $\quad F_T(z) = F_A - F_1 - F_2 - F_3$ (14.7.)

$$M(z) = -z \cdot F_A + (z - z_1) \cdot F_1 + (z - z_2) \cdot F_2 + (z - z_3) \cdot F_3 \tag{14.8.}$$

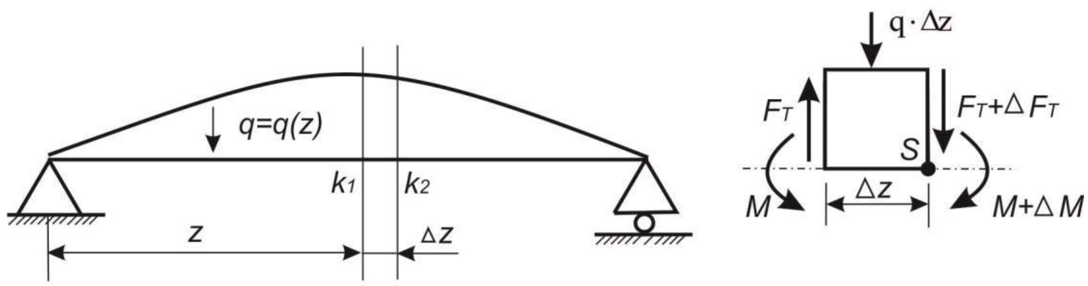
V. $z_4 \le z < z_5$ $\quad F_T(z) = F_A - F_1 - F_2 - F_3 - F_4 = -F_B$ (14.9.)

$$M(z) = -z \cdot F_A + \sum_{i=1}^{n} (z - z_i) \cdot F_i = -(l - z) \cdot F_B \tag{14.10.}$$

Ha figyelmesen megnézzük a fenti függvényeket, azt tapasztaljuk, hogy a nyomatéki igénybevétel függvénye és a nyíró igénybevételi függvény között kapcsolat áll fönn. Még pedig az, hogy az M(z) z szerinti deriváltja megegyezik az F_T ellentettjével:

$$\frac{dM}{dz} = -F_T \tag{14.11.}$$

Megoszló terhelés esetén az eljárás ugyan az, mint a koncentrált erőknél, de a nyíróerő és a nyomatéki igénybevételi ábra alakja attól eltérő. Vizsgáljuk meg a *14.2a. ábra* szerinti megoszló erőrendszerrel terhelt kéttámaszú tartószerkezet igénybevételeit!



a. *b.*

14.2 ábra. Megoszló erővel terhelt kéttámaszú tartó keresztmetszetének igénybevétele

A tartó Δz hosszúságú kis részére ható igénybevételeket a *14.2.b.ábra* mutatja. A szakaszon belül a $q=q_{(z)}$ terhelést állandónak tekintjük.

Az *„S”* pontra írjuk fel az elemi rúdrész nyomatéki egyensúlyi egyenletét:

$$-M+\left(M+\Delta M\right)+F_T\cdot\Delta z-q\cdot\Delta z\cdot\frac{\Delta z}{2}=0 \qquad (14.12.)$$

Az egyenletet rendezve majd Δz-vel elosztva kapjuk:

$$\frac{\Delta M}{\Delta z}=-F_T+\frac{q\cdot\Delta z}{2} \qquad (14.13.)$$

$$\Delta z\rightarrow 0 \text{ esetén} \quad \lim\frac{\Delta M}{\Delta z}=\frac{dM}{dz}=-F_T \qquad (14.14.)$$

Az elemi rész nyíróerő egyensúlyi egyenlete:

$$\Delta F_T=-q\cdot\Delta z \qquad \text{átalakítva} \qquad (14.15.)$$

$$\frac{\Delta F_T}{\Delta z}=-q \qquad (14.16.)$$

$$\Delta z\rightarrow 0 \text{ esetén} \quad \lim\frac{\Delta F_T}{\Delta z}=\frac{dF_T}{dz}=-q \qquad (14.17.)$$

A két differenciálegyenletből következik, hogy:

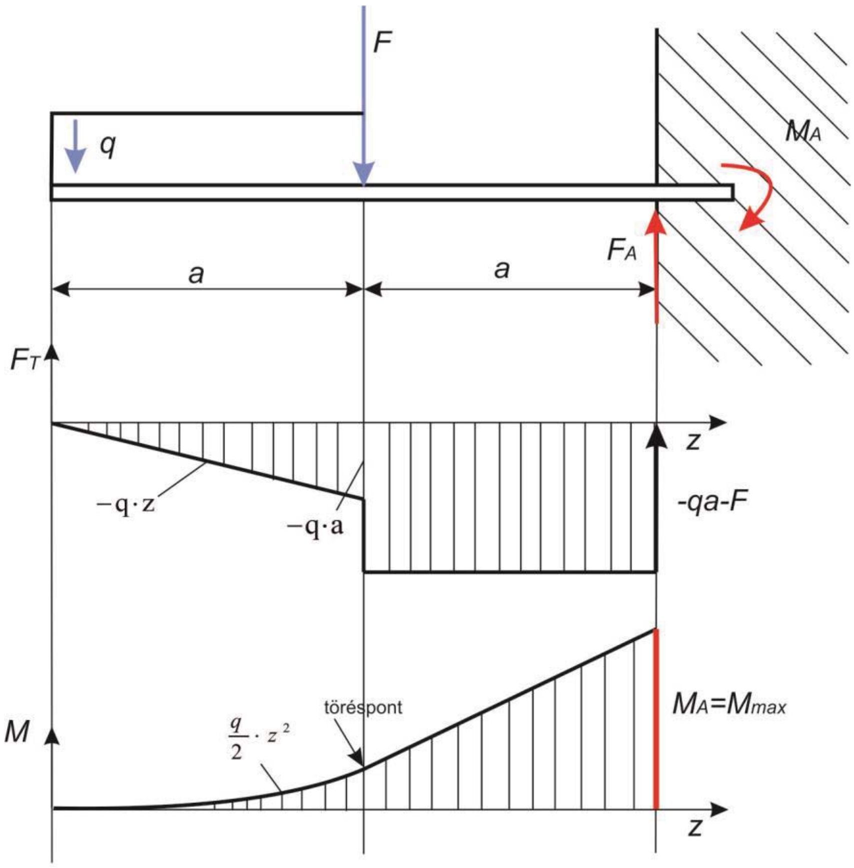
$$\frac{d^2M}{dz^2}=-\frac{dF_T}{dz}=q \qquad (14.18.)$$

A fenti egyenletből látható, hogy a nyomatéki ábra *z* szerinti deriváltjával a nyíróerő ábrához jutunk, majd azt újra z szerint deriválva a megoszló terhelést kapjuk eredményül.

Az eredmény segítséget nyújt a szerkesztéshez.

A befogott tartó igénybevételi függvényének meghatározásához és az igénybevételi ábráinak megrajzolásához nézzük a következő példát.

Határozzuk meg a *14.3. ábrán* látható vegyes terhelésű, jobb oldalán befogott tartószerkezet igénybevételi függvényeit és rajzoljuk meg igénybevételi ábráit!



14.3 ábra. Befogott vegyes terhelésű tartó igénybevételi ábrái

Először meghatározzuk a támaszban ébredő reakcióerőt és reakció nyomatékot.

$$F_A = F + q \cdot a(\uparrow) \tag{14.19.}$$

$$M_A = F \cdot a + \frac{3}{2} \cdot q \cdot a^2 \tag{14.20.}$$

Ezután írjuk fel az igénybevételi függvényeket a tartón balról-jobbra haladva.

I. $0 \le z \le a$ $\quad F_T(z) = -q \cdot z$ *(14.21.)*

$$M(z) = \frac{q}{2} \cdot z^2 \tag{14.22.}$$

II. $a \le z \le 2a$ $\quad F_T(z) = -q \cdot a - F$ *(14.23.)*

$$M(z) = q \cdot a \cdot \left(z - \frac{a}{2}\right) + F \cdot (z - a) \tag{14.24.}$$

Az igénybevételi ábrák megrajzolásánál a töréspontokon mindig ki kell számítani az értékeket, és meg kell határozni a maximális igénybevételt is. A nyíróerő ábra megrajzolását ajánlott úgy végezni, hogy balról jobbra haladva előjel helyesen rajzoljuk fel az erőket a hatásvonaluknak megfelelően. Végül a jobb oldali támaszerő előjelhelyes értékét kell kapnunk. A nyomatéki és nyíróerő függvény közti kapcsolatból (*14.11. ábra*) következik, hogy ahol a nyíróerő ábra előjelet vált (metszi a 0 tengelyt), ott a nyomatéki ábrán szélsőérték várható.

A *14.11.* egyenletből következik, hogy koncentrált erő esetén a nyíróerő ábra vonalvezetése vízszintes („z”-től független) az erők hatásvonalán eltolódással, míg a hozzátartozó nyomatéki ábra ferde („z” első fokú) egyenes alakú az erők hatásvonalán töréspontokkal.

A *14.18.* egyenlet alapján az egyenletesen megoszló terhelés nyíró igénybevételi ábrája mindig ferde egyenes („z”elsőfokú) a terhelés teljes hosszán, míg nyomatéki ábrája másodrendű („z” másodfokú) parabola függvény. Amennyiben nem egyenletes a megoszló a teher, akkor a nyíróerő ábra másodrendű függvénnyel és a nyomatéki ábra harmadrendű függvénnyel írható le.

Az előzőek alapján megállapítható: ha a terhelés egyenletesen megoszló erőrendszer, azaz konstans függvény, akkor ehhez elsőfokú nyíróerő függvény tartozik, és a nyomatéki igénybevételi függvénye másodfokú. Ha a terhelés lineárisan megoszló erőrendszer, azaz elsőfokú, akkor ehhez másodfokú nyíróerő függvény tartozik, és a nyomatéki igénybevételi függvénye pedig harmadfokú.

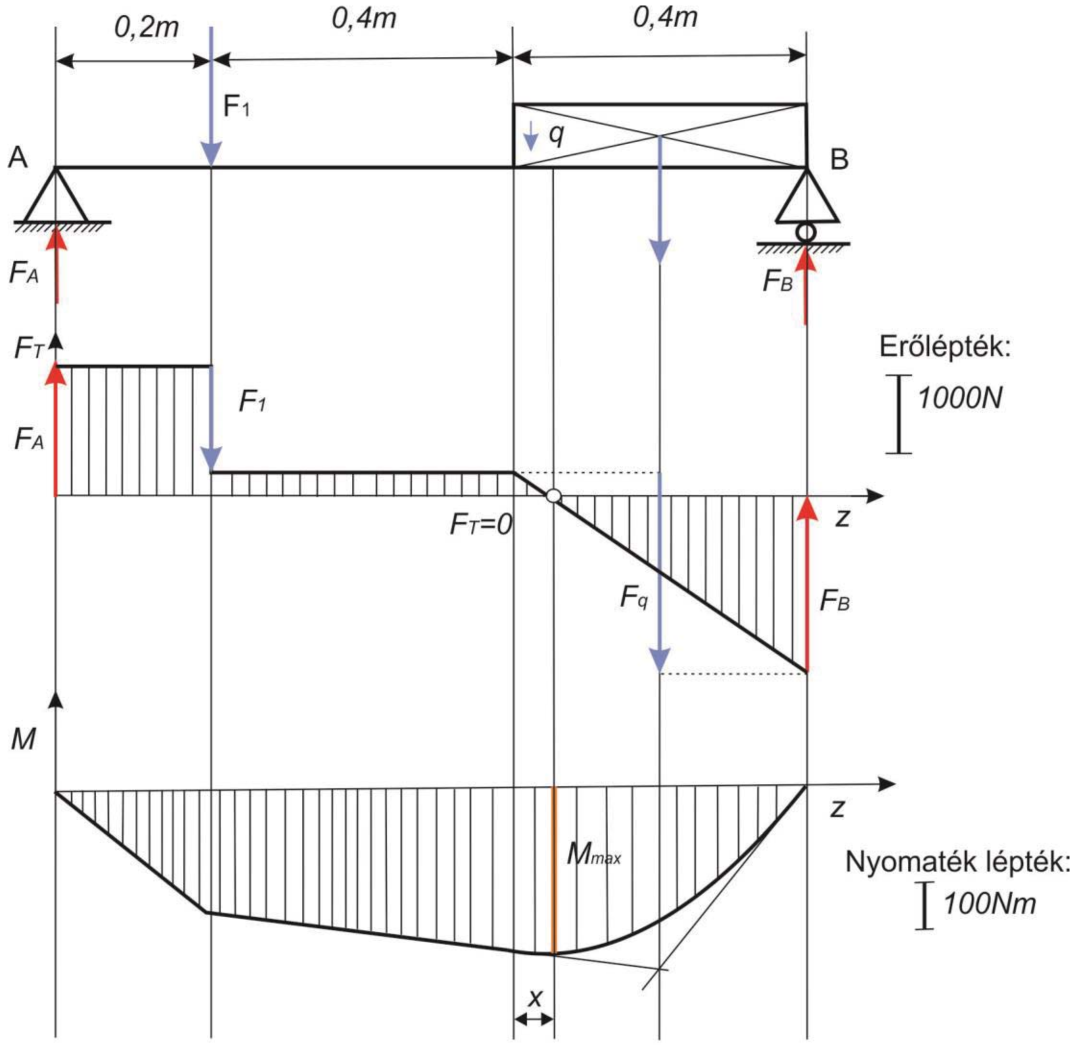
Hasonló okfejtéssel meghatározhatjuk koncentrált erő és koncentrált nyomaték esetére is a terhelési, nyíróerő és a nyomatéki függvények fokszámát (lásd a mellékelt táblázatot).

Terhelés		Terhelés függvény	Nyíróerő függvény	Nyomatéki függvény
Koncentrált nyomaték	M	-2 fokú (pont)	-1 fokú (ugrás)	0-ad fokú (konstans)
Koncentrált erő	F	-1 fokú (ugrás)	0-ad fokú (konstans)	elsőfokú (egyenes)
Egyenletesen megoszló terhelés	q	0-ad fokú (konstans)	elsőfokú (egyenes)	másodfokú (parabola)
Lineárisan megoszló terhelés	q_0	elsőfokú (egyenes)	másodfokú (parabola)	harmadfokú (parabola)

14.4 táblázat A terhelés és a függvények kapcsolata

14.1. PÉLDA

A maximális nyomatéki igénybevétel helyének és mértékének meghatározásához használjunk fel egy a 11. fejezetben már elkezdett példát! F_1*=1500N, q=7500 N/m*



14.4. ábra Vegyes terhelésű kéttámaszú tartó maximális nyomatéki helyének és értékének meghatározása

Korábbi számítások alapján:

$$F_A = 1800N(\uparrow) \text{ és } F_B = 2700N(\uparrow)$$

A nyomaték nagysága z= 0,2m-nél:

$$M_{z(0,2m)} = -F_A \cdot 0,2m = -1800N \cdot 0,2m = -360Nm$$

A nyomaték nagysága z= 0,6m-nél:

$$M_{z(0,6m)} = -F_A \cdot 0,6m + F1 \cdot 0,4m = -1800N \cdot 0,6m + 1500N \cdot 0,4m =$$

$$= -1080Nm + 600Nm = -480Nm$$

A nyíróerő igénybevételi ábrán látható, hogy a megoszló terhelés alatt (x távolságra) vált előjelet a nyíróerő függvény értéke. Mivel előtte máshol nem metszi az ábra az alaptengelyt, így az x helyen levő keresztmetszet helyétől balra elhelyezkedő erők algebrai összege zérus.

$$F_T = F_A - F_1 - q \cdot x = 0$$

$$F_T = 1800N - 1500N - 7500\frac{N}{m} \cdot xm = 0$$

$$x = \frac{300N}{7500\frac{N}{m}} = 0{,}04m$$

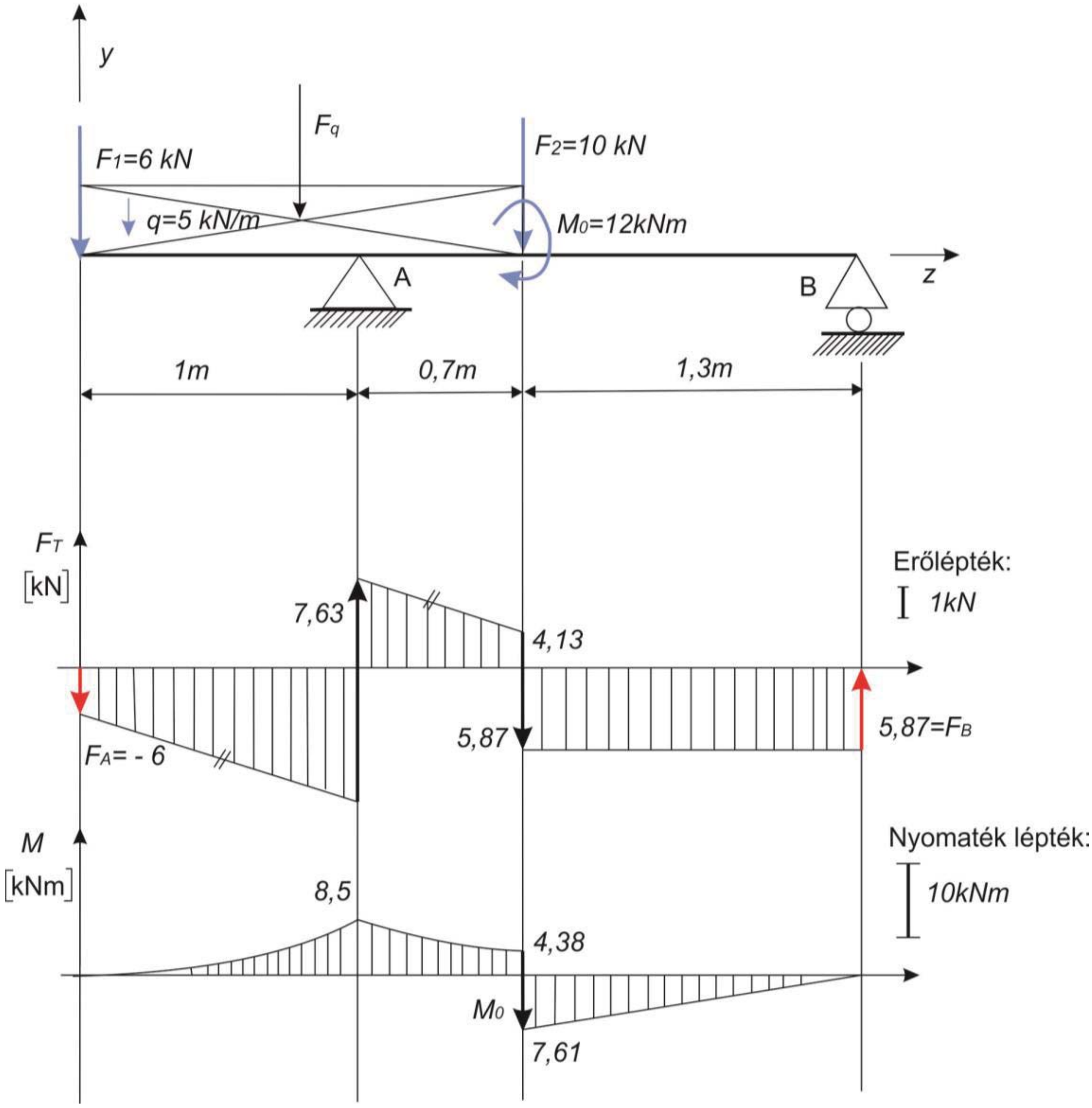
A tartószerkezet maximális nyomatéki igénybevétele ezen a helyen lép fel, értéke:

$$M_{z=0{,}04m} M_{\max} = -F_A \cdot (0{,}6 + x) + F_1 \cdot (0{,}4 + x) + q \cdot \frac{x^2}{2} = \text{-486Nm}$$

Mivel itt a nyomatéki függvény szélső értékéről van szó, az ehhez a ponthoz tartotó érintő vízszintes.

14.2. PÉLDA

Végezzük el számítással az ábrán látható tartó statikai vizsgálatát az alábbiak szerint:
a., Határozzuk meg a reakciókat számítással!
b., Írjuk fel a nyomatéki és nyíró erő függvényeket, valamint határozzuk meg a jellegzetes pontok nyomatéki és nyíróerő értékeit!
c., Határozzuk meg a legnagyobb nyomaték helyét és nagyságát számítással!
d., Rajzoljuk meg a nyomatéki és nyíróerő léptékhelyes igénybevételi ábráit!



14.5. ábra

A megoszló terhelésből adódó koncentrált erő nagysága:

$$F_q = 1{,}7m \cdot q = 1{,}7m \cdot 5kN / m = 8kNm$$

helye, a megoszló terhelés súlypontjában van.

a., reakcióerők meghatározása, a statikai alapegyenletek segítségével:

$\sum M_A = 0$
$\sum M_B = 0$
$\sum F_{iy} = 0$ (ellenőrző egyenlet)

$\sum M_A = 0 = -F_1 \cdot 1m - F_q \cdot 0{,}15m + F_2 \cdot 0{,}7m + M_0 - F_B \cdot 2m$
$F_B = 5{,}86 kN$

$\sum M_B = 0 = -F_2 \cdot 1{,}3m - F_q \cdot 2{,}15m + F_1 \cdot 3m - M_0 - F_A \cdot 2m$
$F_A = 18{,}63kN$

$\sum F_{iy} = 0 = F_1 + F_q + F_2 - F_A - F_B$, tehát a reakcióerőkre helyes értékeket kaptunk.

b., Nyíróerő és nyomatéki egyenletek:

I. $0 \le z \le 1m$

Nyíróerő egyenlet és a tartományon belüli szélső értékei:

$$F_{T(z)} = -F_1 - z \cdot q$$
$F_{T(z=o)} = -6kN$
$F_{T(z=1m)} = -11kN$

Nyomatéki egyenlet és a tartományon belüli szélső értékei:

$$M_{(z)} = F_1 \cdot z + q \cdot z \cdot \frac{z}{2}$$
$$M_{(z=0)} = 0kNm$$
$$M_{(z=1m)} = 8{,}65kNm$$

II. $1m \le z \le 1{,}7m$

Nyíróerő egyenlet és a tartományon belüli szélső értékei:

$$F_{T(z)} = -F_1 - z \cdot q + F_A$$
$F_{T(z=1m)} = 7{,}63kN$
$F_{T(z=1{,}7m)} = 4{,}13kN$

Nyomatéki egyenlet és a tartományon belüli szélső értékei:

$$M_{(z)} = F_1 \cdot z + q \cdot z \cdot \frac{z}{2} - F_A \cdot (z - 1m)$$
$$M_{(z=1m)} = 8{,}5kNm$$
$$M_{(z=1{,}7m)} = 4{,}38kNm$$

III. $1{,}7m \le z \le 3m$

Nyíróerő egyenlet és a tartományon belüli szélső értékei:

$$F_{T(z)} = -F_1 - 1{,}7m \cdot q + F_A - F_2$$
$F_{T(z=1{,}7m)} = -5{,}87kN$
$F_{T(z=3m)} = -5{,}87kN$

Nyomatéki egyenlet és a tartományon belüli szélső értékei:

$$M_{(z)} = F_1 \cdot z + q \cdot 1{,}7m \cdot (z - 0{,}85m) - F_A \cdot (z - 1m) + F_2 \cdot (z - 1{,}7m) - M$$
$$M_{(z=1,7m)} = -7{,}616 kNm$$
$$M_{(z=3m)} = 0 kNm$$

c., A maximális nyomaték

helyének meghatározása:

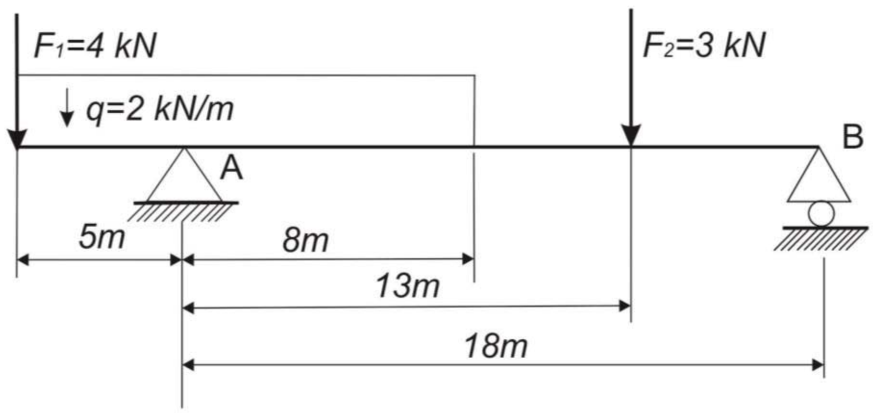
z=1m

nagysága:

M_{hmax}*=8,5 kNm*

14.3. FELADAT

Végezzük el szerkesztéssel és számítással az ábrán látható tartó statikai vizsgálatát az alábbiak szerint:
a., Határozzuk meg a reakciókat számítással!
b., Írjuk fel a nyomatéki és nyíró erő függvényeket, valamint határozzuk meg a jellegzetes pontok nyomatéki és nyíróerő értékeit!
c., Határozzuk meg a legnagyobb nyomaték helyét és nagyságát számítással!
d., Rajzoljuk meg a nyomatéki és nyíróerő léptékhelyes igénybevételi ábráit!

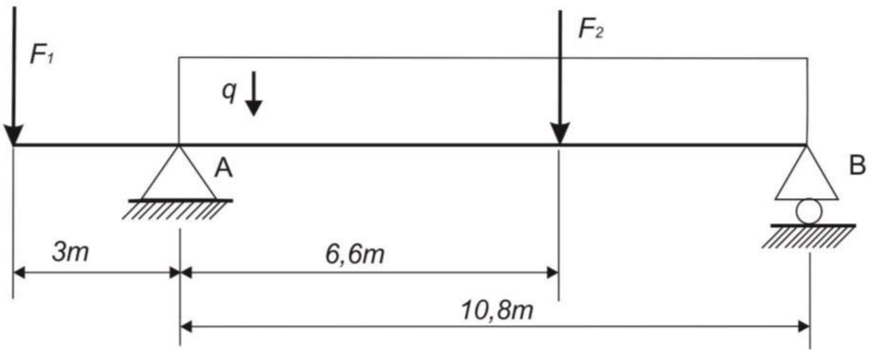


14.6. ábra

14.4. FELADAT

Végezzük el szerkesztéssel és számítással az ábrán látható tartó statikai vizsgálatát az alábbiak szerint:
a., Határozzuk meg a reakciókat számítással!
b., Írjuk fel a nyomatéki és nyíró erő függvényeket, valamint határozzuk meg a jellegzetes pontok nyomatéki és nyíróerő értékeit!
c., Határozzuk meg a legnagyobb nyomaték helyét és nagyságát számítással!
d., Rajzoljuk meg a nyomatéki és nyíróerő léptékhelyes igénybevételi ábráit!

$F1=5kN$, $F2=2kN$, $q=2kN/m$



14.7. ábra