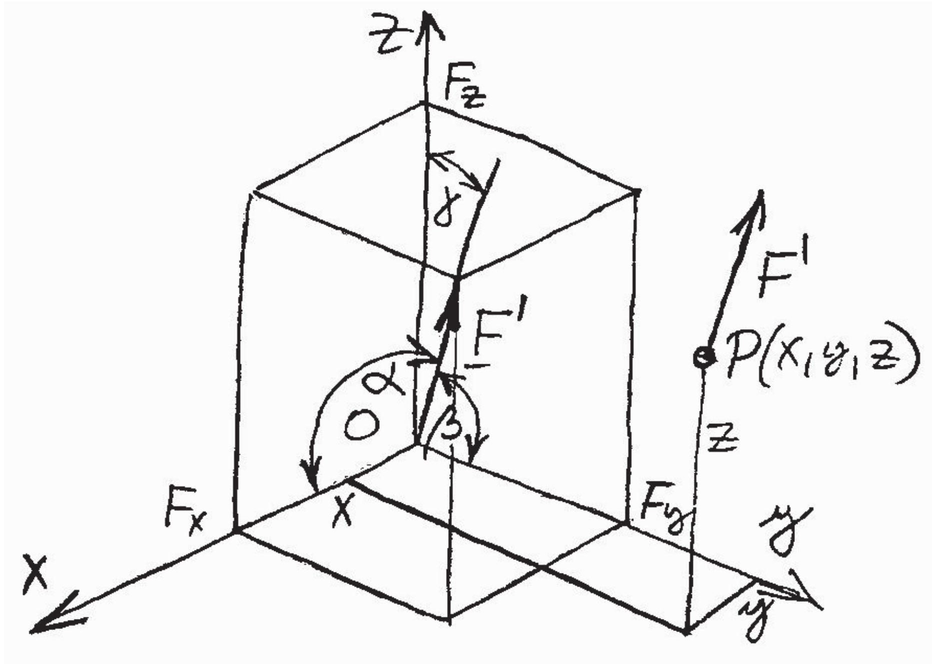
1. Az erő megadása

Az erő kötött vektor, ezért a P támadáspontját (vagy a hatásvonala egy pontját) is meg kell adni.

Az általános helyzetű erő megadásához 6 skalár adat kell:

$$F_x\,,\ F_y\,,\ F_z\,,\ x,\ y,\ z$$



A vetületek meghatározása:

$$F_x = \underline{F} \cdot \underline{i} = |\underline{F}| \cos\alpha$$

$$F_y = \underline{F} \cdot \underline{j} = |\underline{F}| \cos\beta$$

$$F_z = \underline{F} \cdot \underline{k} = |\underline{F}| \cos\gamma$$

Az erő x irányú összetevőjének meghatározása:

$$\underline{F}_x = F_x \cdot \underline{i} = (\underline{F} \cdot \underline{i}) \cdot \underline{i}$$

Az erő nagysága (abszolút értéke):

$$|\underline{F}| = \sqrt{F_x^{\,2} + F_y^{\,2} + F_z^{\,2}}$$

A tengelyekkel bezárt szögek:

$$\cos\alpha = \frac{F_x}{|\underline{F}|}; \qquad \cos\beta = \frac{F_y}{|\underline{F}|}; \qquad \cos\gamma = \frac{F_z}{|\underline{F}|}$$

(A szögek nem függetlenek egymástól, mert tudjuk, hogy $cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1$)

Vektoros megadási mód:

$$\underline{F} = F_x\,\underline{i} + F_y\,\underline{j} + F_z\,\underline{k} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \underline{r} = x\underline{i} + y\,\underline{j} + z\underline{k} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Síkbeli erőrendszernél minden erő azonos síkban van.

Értelemszerűen a vektorok ekkor két dimenziósak lesznek.

Síkbeli erők által bezárt szög a skaláris szorzásból származtatható:

$$\cos\alpha_{12} = \frac{\underline{F}_1 \cdot \underline{F}_2}{\left|\underline{F}_1\right| \cdot \left|\underline{F}_2\right|}$$

Példa:

$$\underline{F}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \mathrm{N}; \quad \underline{F}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \mathrm{N}$$

$$\left|\underline{F}_1\right| = \sqrt{13}; \qquad \left|\underline{F}_2\right| = \sqrt{5}$$

$$\underline{F}_1 \cdot \underline{F}_2 = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 7$$

$$\cos\alpha_{12} = \frac{7}{\sqrt{13 \cdot 5}} = 0{,}868$$

$$\alpha_{12} = 29{,}75^\circ$$

2. Az erő forgató hatása

Az erő forgató hatását a forgatónyomatékkal mérjük.

Az erőt, mint kötött vektort az erővektorral és a nyomatékvektorral adjuk meg, pl. az origóra: $\left[\underline{F};\ \underline{M}_0\right]_0$

A nyomatékvektor: $\underline{M}_0 = \underline{r} \times \underline{F}$

Megadási módja:

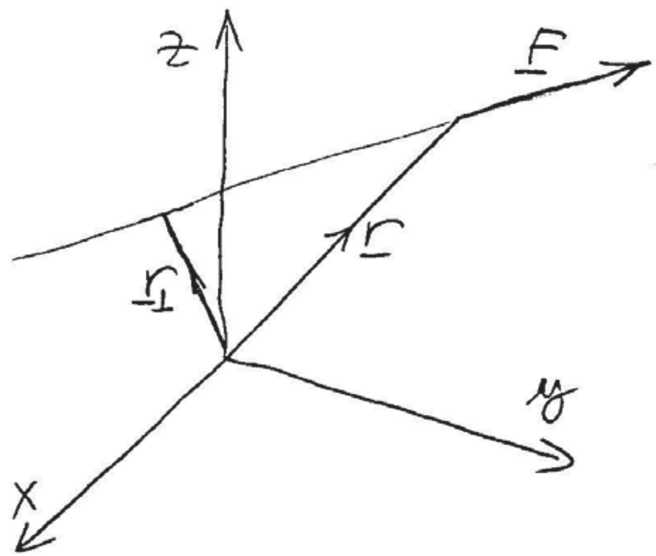
$$\underline{M}_0 = \underline{r} \times \underline{F} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \underline{i}\left(y \cdot F_z - z \cdot F_y\right) - \underline{j}\left(x \cdot F_z - z \cdot F_x\right) + \underline{k}\left(x \cdot F_y - y \cdot F_x\right)$$

Síkbeli erőrendszernél:
$z=0$ és $F_z=0$, ezért:

$$\underline{M}_0 = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ x & y & 0 \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix} = \underline{k}\left(x \cdot F_y - y \cdot F_x\right)$$

Síkbeli erőknél a nyomatékvektor az erők síkjára merőleges.

<u>Az erő karjának meghatározása</u> az origótól, ha ismert az [$\underline{F}$; $\underline{M}_0$]$_0$ vektorkettős:



$$\underline{M}_0 = \underline{r} \times \underline{F} = \underline{r}_\perp \times \underline{F} = -\underline{F} \times \underline{r}_\perp$$

$$\underline{F} \times \underline{r}_\perp + \underline{M}_0 = \underline{0} \qquad / \underline{F} \times$$

$$\underline{F} \times (\underline{F} \times \underline{r}_\perp) + \underline{F} \times \underline{M}_0 = \underline{0}$$

$$\underline{F} \times (\underline{F} \times \underline{r}_\perp) = (\underline{F} \cdot \underline{r}_\perp) \cdot \underline{F} - F^2 \underline{r}_\perp$$

$\underline{F} \cdot \underline{r}_\perp = 0$, mert $\underline{F} \perp \underline{r}_\perp$ és cos90°=0

Ezzel:

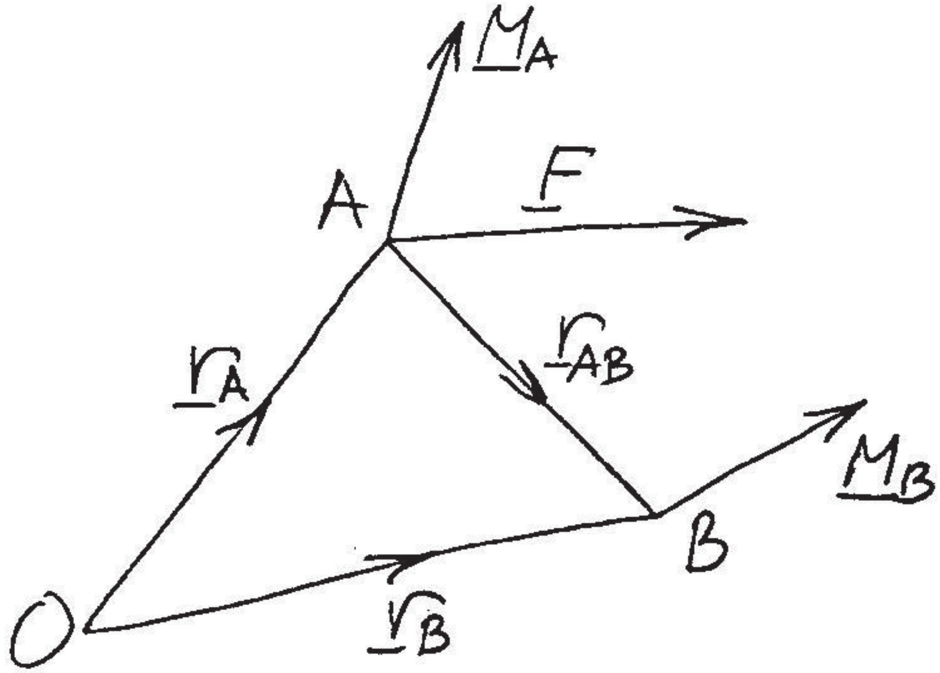
$$-F^2 \underline{r}_\perp + \underline{F} \times \underline{M}_0 = 0$$

$$\underline{r}_\perp = \frac{\underline{F} \times \underline{M}_0}{F^2}$$

Síkbeli erőknél $\underline{F} \perp \underline{M}_0$ ezért $\left| \underline{F} \times \underline{M}_0 \right| = F \cdot M_0$ tehát

$$\underline{r}_\perp = \frac{\underline{F} \times \underline{M}_0}{F^2}$$

Ha ismerjük az erővektor nyomatékát egy tetszőleges A pontra, akkor B ismert helyű pontra is ki tudjuk számolni:



$$\underline{r}_A = \underline{r}_B - \underline{r}_{AB}$$

$$\underline{M}_A = \underline{r}_A \times \underline{F} = \left(\underline{r}_B - \underline{r}_{AB}\right) \times \underline{F} = \underline{r}_B \times \underline{F} - \underline{r}_{AB} \times \underline{F}$$

Mivel $\underline{r}_B \times \underline{F} = \underline{M}_B$ ezért adódik:

$$\underline{M}_B = \underline{M}_A + \underline{r}_{AB} \times \underline{F}$$