

### 3. Az ideális kényszerek

A merev test ( $r_i = \text{áll.}$ ) mozgási lehetősége a térben:

x, y, z irányú haladás

x, y, z tengely körüli forgás, összesen 6.

A merev test szabadságfoka  $s=6$ .

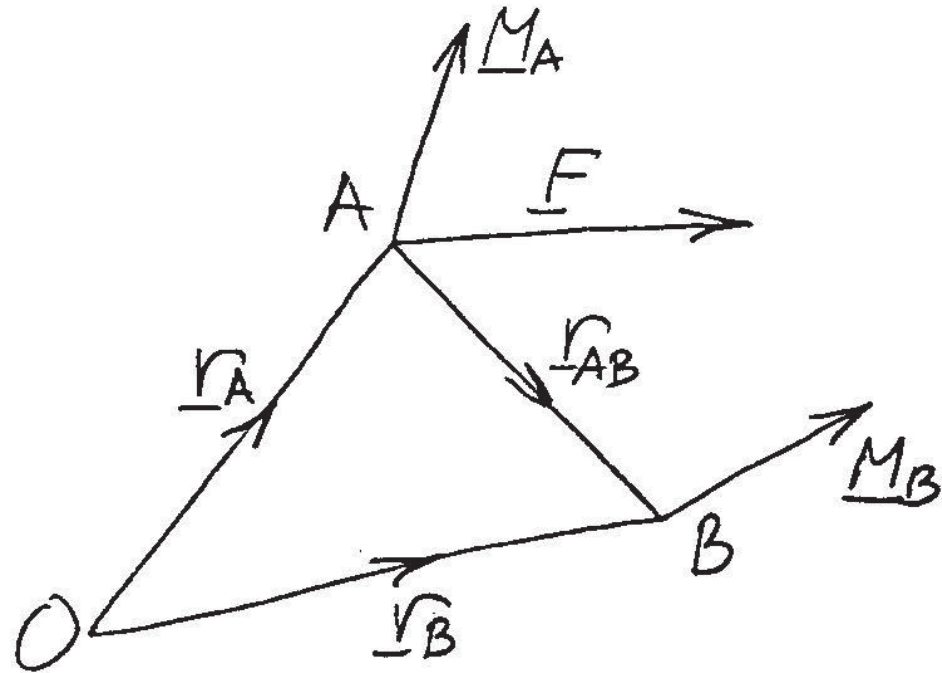
A statikában a test nyugalomban van; ezt kötöttséggel, kényszerrel ( $k$ ) érjük el. ( $k=6$ )

$k < s = 6$  akkor a test mozogni tud, vagy labilis nyugalomban lehet.

$k = s = 6$  test nyugalomban van, statikailag határozott szerkezet.

$k > s = 6$  a test nyugalomban van, statikailag határozatlan.

Ha ismerjük az erővektor  
nyomatékát egy tetszőleges  
A pontra, akkor B ismert  
helyű pontra is ki tudjuk  
számolni:



$$\underline{r}_A = \underline{r}_B - \underline{r}_{AB}$$

$$\underline{M}_A = \underline{r}_A \times \underline{F} = (\underline{r}_B - \underline{r}_{AB}) \times \underline{F} = \underline{r}_B \times \underline{F} - \underline{r}_{AB} \times \underline{F}$$

Mivel  $\underline{r}_B \times \underline{F} = \underline{M}_B$  ezért adódik:

$$\underline{M}_B = \underline{M}_A + \underline{r}_{AB} \times \underline{F}$$

Ezzel:

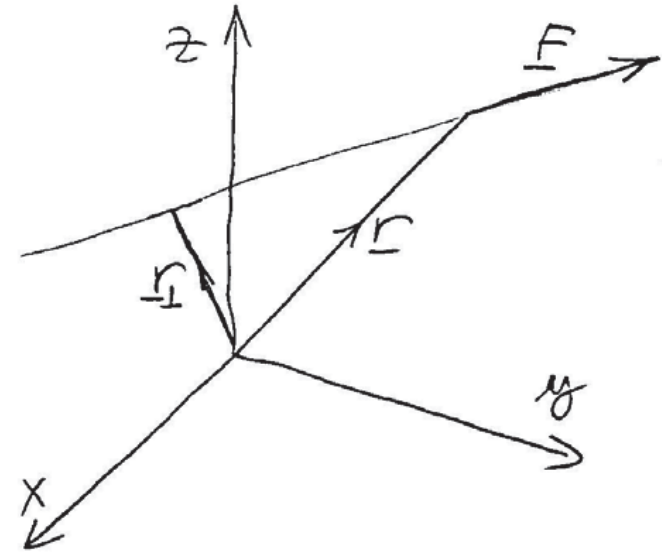
$$-F^2 \underline{\mathbf{r}}_{\perp} + \underline{\mathbf{F}} \times \underline{\mathbf{M}}_0 = 0$$

$$\underline{\mathbf{r}}_{\perp} = \frac{\underline{\mathbf{F}} \times \underline{\mathbf{M}}_0}{F^2}$$

Síkbeli erőknél  $\underline{\mathbf{F}} \perp \underline{\mathbf{M}}_0$  ezért  $|\underline{\mathbf{F}} \times \underline{\mathbf{M}}_0| = F \cdot M_0$  tehát

$$\underline{\mathbf{r}}_{\perp} = \frac{\underline{\mathbf{F}} \times \underline{\mathbf{M}}_0}{F^2}$$

Az erő karjának meghatározása az origótól, ha ismert az  $[\underline{F}; \underline{M}_0]_0$  vektorkettős:



$$\underline{M}_0 = \underline{r} \times \underline{F} = \underline{r}_\perp \times \underline{F} = -\underline{F} \times \underline{r}_\perp$$

$$\underline{F} \times \underline{r}_\perp + \underline{M}_0 = \underline{0} \quad / \underline{F} \times$$

$$\underline{F} \times (\underline{F} \times \underline{r}_\perp) + \underline{F} \times \underline{M}_0 = \underline{0}$$

$$\underline{F} \times (\underline{F} \times \underline{r}_\perp) = (\underline{F} \cdot \underline{r}_\perp) \cdot \underline{F} - F^2 \underline{r}_\perp$$

$$\underline{F} \cdot \underline{r}_\perp = 0, \text{ mert } \underline{F} \perp \underline{r}_\perp \text{ és } \cos 90^\circ = 0$$

## 2. Az erő forgató hatása

Az erő forgató hatását a forgatónyomatékkal mérjük.

Az erőt, mint kötött vektort az erővektorral és a nyomatékvektorral adjuk meg, pl. az origóra:  $[\underline{F}; \underline{M}_0]_0$

A nyomatékvektor:  $\underline{M}_0 = \underline{r} \times \underline{F}$

Megadási módja:

$$\underline{M}_0 = \underline{r} \times \underline{F} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \underline{i}(y \cdot F_z - z \cdot F_y) - \underline{j}(x \cdot F_z - z \cdot F_x) + \underline{k}(x \cdot F_y - y \cdot F_x)$$

Síkbeli erőrendszernél:

$z=0$  és  $F_z=0$ , ezért:

$$\underline{M}_0 = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ x & y & 0 \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix} = \underline{k}(x \cdot F_y - y \cdot F_x)$$

***Síkbeli erőknél a nyomatékvektor az erők síkjára merőleges.***

Síkbeli erők által bezárt szög a skaláris szorzásból származtatható:

$$\cos \alpha_{12} = \frac{\underline{F}_1 \cdot \underline{F}_2}{|\underline{F}_1| \cdot |\underline{F}_2|}$$

*Példa:*

$$\underline{F}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \text{N}; \quad \underline{F}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{N}$$

$$|\underline{F}_1| = \sqrt{13}; \quad |\underline{F}_2| = \sqrt{5}$$

$$\underline{F}_1 \cdot \underline{F}_2 = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 7$$

$$\cos \alpha_{12} = \frac{7}{\sqrt{13 \cdot 5}} = 0,868$$

$$\alpha_{12} = 29,75^\circ$$

A tengelyekkel bezárt szögek:

$$\cos \alpha = \frac{F_x}{|\underline{F}|}; \quad \cos \beta = \frac{F_y}{|\underline{F}|}; \quad \cos \gamma = \frac{F_z}{|\underline{F}|}$$

(A szögek nem függetlenek egymástól, mert tudjuk, hogy  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ )

Vektoros megadási mód:

$$\underline{F} = F_x \underline{i} + F_y \underline{j} + F_z \underline{k} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \underline{r} = x \underline{i} + y \underline{j} + z \underline{k} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Síkbeli erőrendszernél minden erő azonos síkban van.

Értelemszerűen a vektorok ekkor két dimenziósak lesznek.