5. Síkbeli erőrendszerek

5.1. Közös metszéspontú síkbeli erőrendszerek

Közös metszéspontú két erő eredője a közös metszésponton megy át (III. alaptétel alapján), nagysága megegyezik az erők vektori összegével, azaz létezik egy eredő, mely egyenértékű a két erőből álló, közös metszéspontú erőrendszerrel:

$$(F_1, F_2) \doteq (F_R) \tag{5.1.}$$

továbbá

$$\underline{F_1} + \underline{F_2} = \underline{F_R}. \tag{5.2.}$$

E tétel általánosítható, hiszen két erő eredőjéhez tetszőleges számú, síkbeli, közös metszéspontú erőt hozzá lehet adni. Általánosságban tehát felírható:

$$(F_1, F_2, F_3, \dots, F_n) \doteq (F_R) \tag{5.3.}$$

amelyre igaz, hogy

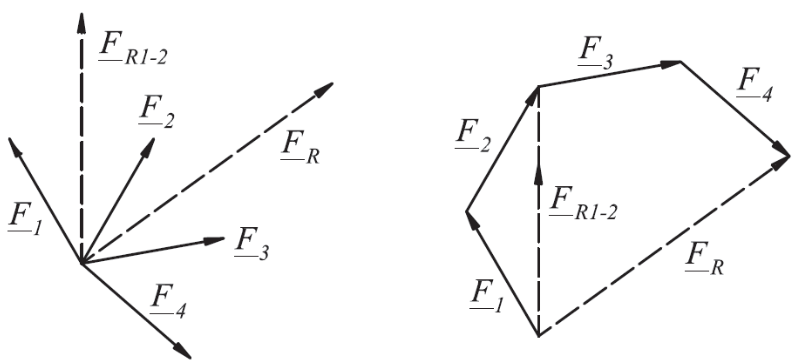
$$\underline{F_R} = \sum_{i=1}^{n} \underline{F_i} \tag{5.4.}$$

Mivel mindegyik erő átmegy a közös „O”metszésponton, arra nyomatékuk nincs:

$$\underline{M_{0R}} = \underline{0} \tag{5.5.}$$

A szerkesztő eljárás visszavezethető két erő összegzésére. Adott (F_1, F_2, F_3, F_4) közös metszéspontú erőrendszer, melynek keressük az eredőjét. Először meghatározzuk az első két erő eredőjét:

$$\underline{F_1} + \underline{F_2} = \underline{F_{R1-2}}, \tag{5.6.}$$



5.1. ábra. Erők összegzése

majd ehhez hozzáadjuk F_3 erőt, és így tovább (5.1. ábra). Végül kapjuk F_R eredőt, mely szintén a közös metszésponton halad át.
A számító eljárásban az erővektor koordinátás alakjából indulunk ki,

$$F_{ix} = \underline{F_i} \cdot \underline{i};\, F_{iy} = \underline{F_i} \cdot \underline{j}. \tag{5.7.}$$

Az eredő erővektor pedig a következőképpen alakul:

$$\underline{F_R} = \begin{bmatrix} F_{Rx} \\ F_{Ry} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \underline{F_i} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} F_{ix} \\ \sum_{i=1}^{n} F_{iy} \end{bmatrix}, \tag{5.8.}$$

az egyensúly szükséges feltétele pedig:

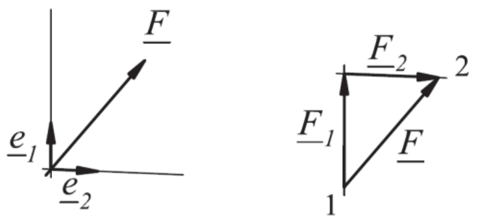
$$F_{Rx} = F_{Ry} = 0. \tag{5.9.}$$

5.2. Egy erő felbontása két adott hatásvonalú összetevőre

A feladat nem más, mint a III. alaptételben tárgyalt eredő meghatározásának fordítottja. Közös metszéspontú két erő mindig egyértelműen összegezhető egy eredővé, azonban az összetevőkre bontás sokféleképpen elvégezhető.

$$\underline{F} = \underline{F'}_1 + \underline{F'}_2 = \underline{F''}_1 + \underline{F''}_2 = \ldots \tag{5.10.}$$

A fenti egyenletet folytatva minden $\underline{F'}_1$ és $\underline{F'}_2$ erőre igaz, hogy eredőjük $\underline{F}$. Ha a két összetevő irányát megadjuk, a felbontás egyértelművé válik. Szükséges feltétel, hogy a két hatásvonal és az erő egy síkba essen.
A szerkesztés a következőképpen végezhető el. A léptékhelyesen felmért $\underline{F}$ erővektor kezdőpontjából az 1-es, végpontjából a 2-es iránnyal húzunk párhuzamos egyeneseket (5.2. ábra). A két egyenes metszéspontja jelöli ki a két összetevő nagyságát, értelmük az $\underline{F}$ erővektorral nyílütköztetéses.



5.2. ábra. Egy erő felbontása két adott hatásvonalú összetevőre

A számító eljárás során az 1-es és 2-es hatásvonalakhoz tartozó egységvektorok $(\underline{e_1}, \underline{e_2})$ x és y irányú vetületeit használjuk fel:

$$\underline{F} = \underline{F_1} + \underline{F_2} = F_1 \cdot \underline{e_1} + F_2 \cdot \underline{e_2} \tag{5.11.}$$

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \cdot e_{1x} \\ F_1 \cdot e_{1y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_2 \cdot e_{2x} \\ F_2 \cdot e_{2y} \end{bmatrix}. \tag{5.12.}$$

5.3. Párhuzamos erőkből álló erőrendszer eredője

Gyakori feladat a közös síkban lévő párhuzamos erőkből álló erőrendszer, így külön is tárgyaljuk. A feladat során úgy választjuk meg a koordináta rendszert, hogy az erők az xy síkba esnek, illetve az erők hatásvonalai párhuzamosak az y tengellyel.
A vektortétel alapján az erőrendszert redukálhatjuk az origóba

$$(F_1, F_2, F_3, \dots, F_n) \doteq (F_R, M_{0R}), \tag{5.13.}$$

ahol

$$\underline{F_R} = \sum_{i=1}^{n} \underline{F_i} \tag{5.14.}$$

és

$$\underline{M_{0R}} = \sum_{i=1}^{n} \underline{r_i} \times \underline{F_i}. \tag{5.15.}$$

A koordinátarendszer célszerű megválasztása miatt az erő nagyságára írható:

$$F_R = \sum_{i=1}^{n} F_i, \tag{5.16.}$$

ami $\underline{j}$ irányú, a nyomaték nagysága pedig:

$$M_{0R} = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot F_i = x_R \cdot F_R. \tag{5.17.}$$

Az eredő háromféle lehet:
- egyensúly van, ha

$$\underline{F_R} = \underline{0} \text{ és } \underline{M_{0R}} = \underline{0}, \tag{5.18.}$$

- eredő erőpár van, ha

$$\underline{F_R} = \underline{0} \text{ és } \underline{M_{0R}} \neq \underline{0}, \tag{5.19.}$$

- eredő erő van, ha

$$\underline{F_R} \neq \underline{0}, \tag{5.20.}$$

Az eredő erő helye a nyomatéki tétel segítségével meghatározható:

$$x_R = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot F_i}{F_R} \tag{5.21.}$$

ahol x_R az eredő x tengellyel való metszéspontját határozza meg.

Párhuzamos síkbeli erőrendszer esetében az eredő két ismeretlen komponens meghatározását követeli meg, melyhez két egyenlet felírása szükséges. A meghatározandó komponensek a következők:

$$F_R, x_R. \tag{5.22.}$$

A feladat elvégezhető egy vetületi egyenlet és egy nyomatéki egyenlet felírásával, ahogy ez az előbbiekben felírásra került.

Az eredő helye és nagysága szerkesztéssel is meghatározható (5.3. ábra). Párhuzamos n számú erő esetén felírhatjuk:

$$(F_1, F_2, F_3, \dots, F_n) \doteq (F_R). \qquad (5.23.)$$

Vegyünk fel egy tetszőleges $\underline{S}_0$ segéderőt és annak ellentettjét ($-\underline{S}_0$). Mivel

$$(S_0, -S_0) \doteq (0), \qquad (5.24.)$$

így az eredeti erőrendszerhez hozzáadhatjuk annak megváltozása nélkül:

$$(S_0, F_1, F_2, F_3, \dots, F_n, -S_0) \doteq (F_R). \qquad (5.25.)$$

Az erőket kettesével összegezve kapjuk:

$$(S_0, F_1) \doteq (S_1) \qquad (5.26.)$$

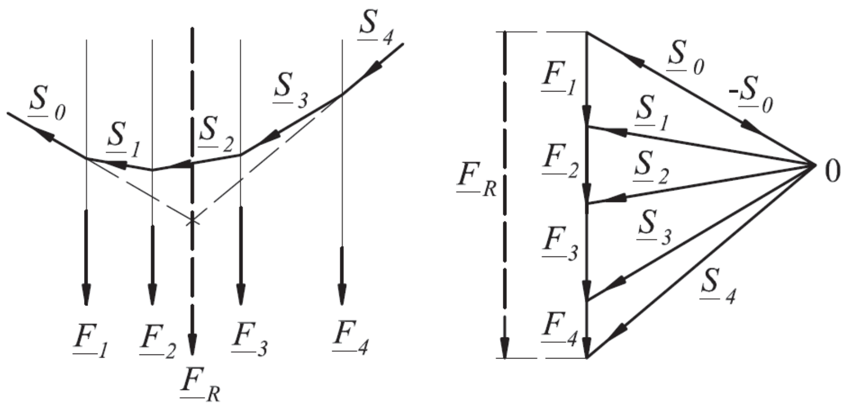
$$(S_1, F_2) \doteq (S_0, F_1, F_2) \doteq (S_2) \qquad (5.27.)$$

$$(S_2, F_3) \doteq (S_0, F_1, F_2, F_3) \doteq (S_2) \qquad (5.28.)$$

$$\vdots$$

$$(S_{n-1}, F_n) \doteq (S_n) \qquad (5.29.)$$

$$(S_n, -S_0) \doteq (F_R) \qquad (5.30.)$$



5.3. ábra. Párhuzamos erőkből álló erőrendszer eredőjének szerkesztése

A szerkesztés során az elrendezési ábrán hosszléptéket, az erők vektorábrájában erőléptéket kell alkalmazni. Az 5.3. ábrán $n = 4$ erő esetén rajzoltuk meg a vektorsokszöget, melyet a rész-eredők szerkesztésével szükséges kezdeni. Az erőrendszer eredőjét a $(S_4, -S_0) \doteq (F_R)$ összetétel adja. Az elrendezési ábrán $\underline{S}_4$ és $-\underline{S}_0$ hatásvonalának meghosszabbításával kapjuk azt a közös metszéspontot, melyen $\underline{F}_R$ hatásvonala is átmegy. Ez a metszéspont a sokszög záródási pontja.

Az elrendezési ábrát kötélsokszög-szerkesztésnek nevezzük, mivel található olyan képzelt kötél, mely a megszerkesztett alakot venné fel. A segéderők hatásvonalait kötéloldalaknak, az erők vektorábráján az „O” pontot pedig a kötélsokszög pólusának nevezzük.

5.4. Egyenes mentén megoszló párhuzamos erőrendszer eredője

A testek kölcsönhatásaként jelentkező erőket az eddigiek során egy pontban ható, koncentrált erőként jellemeztük. A valóságban azonban két test kölcsönhatása mindig valamilyen véges nagyságú felület mentén valósul meg.
Ha például egy talicska kereke a vízszintes talajra támaszkodik, a gumiabroncs sosem egy pontban, hanem egy kis felület mentén érintkezik a talajjal. A felület nagysága nyilván függ a talicskában lévő anyag tömegétől. Ez esetben felület mentén megoszló terhelésről beszélünk, melynek átlagos értéke:

$$q_K = \frac{F}{A}, \tag{5.31.}$$

ahol F a teljes terhelés, A pedig a terület nagysága.
Mértékegysége:

$$[q_K] = \frac{N}{m^2}.$$

Egyenes mentén megoszló terhelésnek tekinthető a felület vagy térfogat mentén megoszló erők síkbeli metszete. Ha egy testre végtelen sok, relatív kicsi, egymáshoz nagyon közel elhelyezkedő párhuzamos hatásvonalú erő hat, az erőrendszert folytonosan megoszló erőrendszernek hívjuk. Az erőrendszer Δ szakaszán, az erők összege:

$$\Delta\underline{F_Q},$$

melyből a kiválasztott szakasz hosszának hányadosával a megoszló teher nagysága, az átlagos fajlagos erő számítható:

$$\underline{q}_K = \frac{\Delta\underline{F_Q}}{\Delta z}. \tag{5.32.}$$

Amennyiben vesszük Δz határértékét, a fajlagos erő, vagy másképp a fajlagos teherhez jutunk, melynek számértéke a teherintenzitás, azaz a megoszló teher erőssége:

$$\underline{\mathrm{q}} = \lim_{\Delta z \to 0} \underline{\mathrm{q}}_n = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta\underline{F_Q}}{\Delta z} = \frac{\mathrm{d}\underline{F_Q}}{\mathrm{d}z}, \tag{5.33.}$$

mértékegysége [N/m].

A fajlagos terhelés megadható a fajlagos terhelés diagramjával, vagy a z koordináta függvényeként:

$$\underline{q} = q(z). \tag{5.34.}$$

Valamely dz szakaszon működő elemi erő a következő alakban írható fel:

$$d\underline{F_Q} = \underline{q}(z)dz. \tag{5.35.}$$

A megoszló erőrendszer eredője a $d\underline{F_Q}$ elemi erők összegeként írható fel (5.4. ábra):

$$\underline{F}_Q = \int_0^l d\underline{F}_Q = \int_0^l \underline{q}(z)dz\,. \tag{5.36.}$$

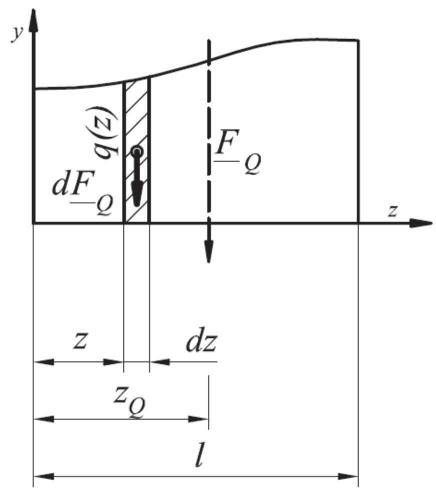
Az eredő helyének meghatározásához a nyomatéki tételt használjuk, felírjuk az erők nyomatékát O pontra:

$$\underline{M}_{(0)} = z_Q\underline{F}_Q = \int_0^l zd\underline{F}_Q = \int_0^l z\underline{q}(z)dz\,, \tag{5.37.}$$

ahol z_Q az eredő helye:

$$z_Q = \frac{\underline{M}_{(0)}}{\underline{F}_Q}\,. \tag{5.38.}$$

Az *(5.36.)* alapján látható, hogy a fajlagos erő diagramjának területe arányos az eredő nagyságával, melynek hatásvonala a súlyponton halad át.



5.4. ábra

PÉLDÁK ÉS FELADATOK

5.1. PÉLDA

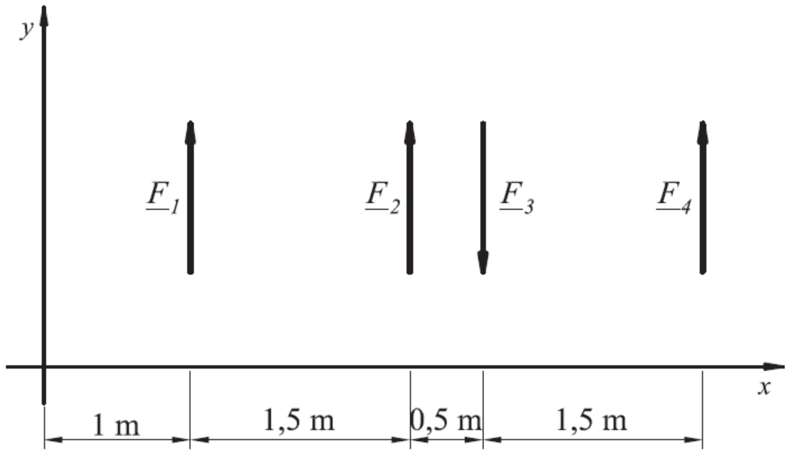
Határozzuk meg szerkesztéssel és számítással az 5.5. ábrán látható, párhuzamos erőkből álló erőrendszer eredőjének helyét és nagyságát.
Az erők nagysága és az y tengelytől való távolsága:

$F_1 = 4{,}5\text{ kN}, r_1 = 1{,}0\text{ m},$

$F_2 = 1{,}5\text{ kN}, r_2 = 2{,}5\text{ m},$

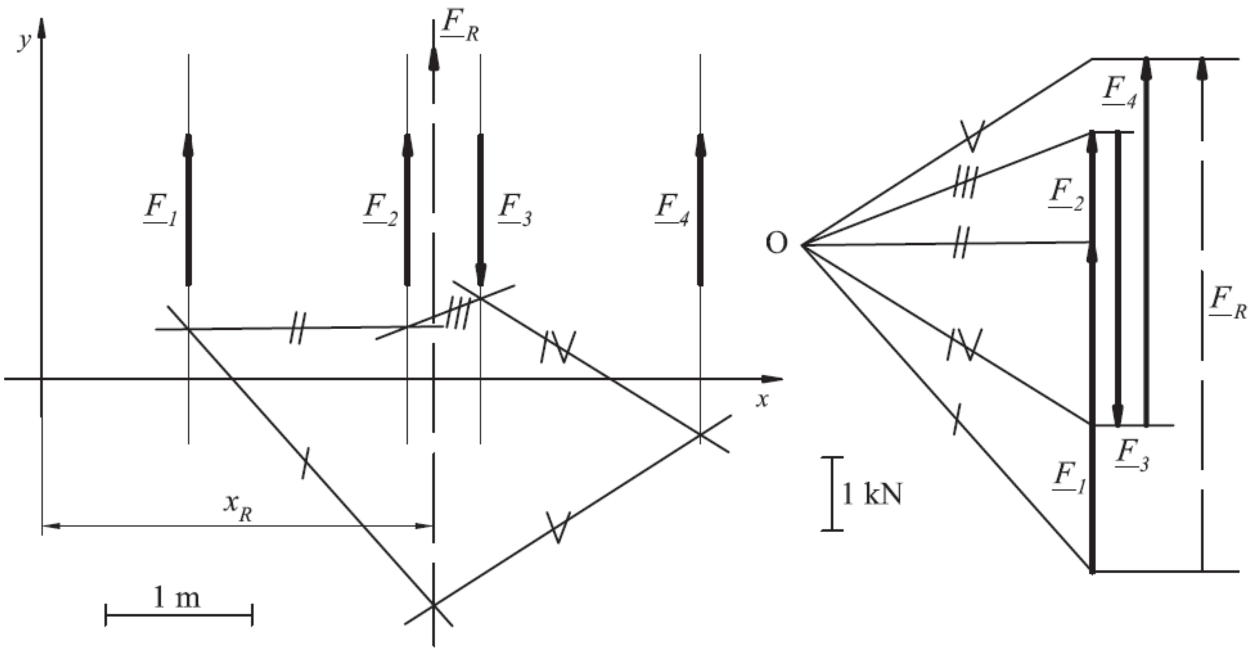
$F_3 = 4{,}0\text{ kN}, r_3 = 3{,}0\text{ m},$

$F_4 = 5{,}0\text{ kN}, r_4 = 4{,}5\text{ m}.$



5.5. ábra

Első lépésben szerkesztéssel oldjuk meg a feladatot.
Először szükség van egy hosszlépték alapján szerkesztett léptékhelyes szerkezeti ábrára (5.6.a. ábra). Ezután megrajzoljuk az erők vektorsokszögét, a megválasztott erőléptéknek megfelelően (5.6.b. ábra). Az ellentétes értelmű erőket kissé eltolva rajzoltuk, hogy az ábra szemléletesebb legyen, bár tudjuk, hogy mind egy vonalba esnek. Az eredő erővektor az első vektor kezdőpontja és az utolsó vektor végpontja között helyezkedik el, a vektorábra nyílfolyama az eredőre nézve ütköző. A lépték segítségével az eredő meghatározható.
Ezután következik a kötélábra szerkesztése. Felveszünk egy O póluspontot, majd ezt összekötjük az erők kezdő- illetve végpontjával, és beszámozzuk őket az alábbiak szerint. Az első erő kezdőpontjából húzott kötéloldal az I-es. Az első erő végpontja, illetve a második erő kezdőpontjából húzott kötéloldal a II-es jelet kapja, és így tovább. A kötéloldalakkal párhuzamosokat húzunk a hosszléptéknek megfelelően szerkesztett ábrába (5.6.a. ábra) oly módon, hogy az első erő hatásvonalát metszük az I-es és II-es kötéloldallal, majd a második erő hatásvonalát metsző II-es kötéloldali metszéspontba párhuzamost húzunk a III-as kötéloldallal és



így tovább. Végül az utolsó kötéloldalt metszésre hozzuk az I-es kötéloldallal, a metszéspont kijelöli az eredő erő hatásvonalának helyét.

a. *b.*

5.6. ábra

A szerkesztés eredményei mérés alapján:

$$F_R = 7 \text{ kN},$$

$$x_R = 2{,}6 \text{ m}.$$

Számítással a következőképp oldható meg a feladat. Az (5.16.) egyenlet alapján:

$$F_R = \sum_{i=1}^{n} F_i = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = 4{,}5 \text{ kN} + 1{,}5 \text{ kN} - 4{,}0 \text{ kN} + 5{,}0 \text{ kN} = 7{,}0 \text{ kN}.$$

A felfelé mutató erőket pozitív, a lefelé mutatókat negatív értelemmel vesszük figyelembe. Az eredő helyének meghatározásához szükség van nyomatékösszegre. Az egyszerűség kedvéért az eredő helyét az origótól határozzuk meg, azaz a nyomatékösszeget is az origóra írjuk fel:

$$x_R = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot F_i}{F_R} = \frac{4{,}5 \text{ kN} \cdot 1{,}0 \text{ m} + 1{,}5 \text{ kN} \cdot 2{,}5 \text{ m} - 4{,}0 \text{ kN} \cdot 3{,}0 \text{ m} - 5{,}0 \text{ kN} \cdot 4{,}5 \text{ m}}{7{,}0 \text{ kN}} =$$

$$= 2{,}68 \text{ m}.$$

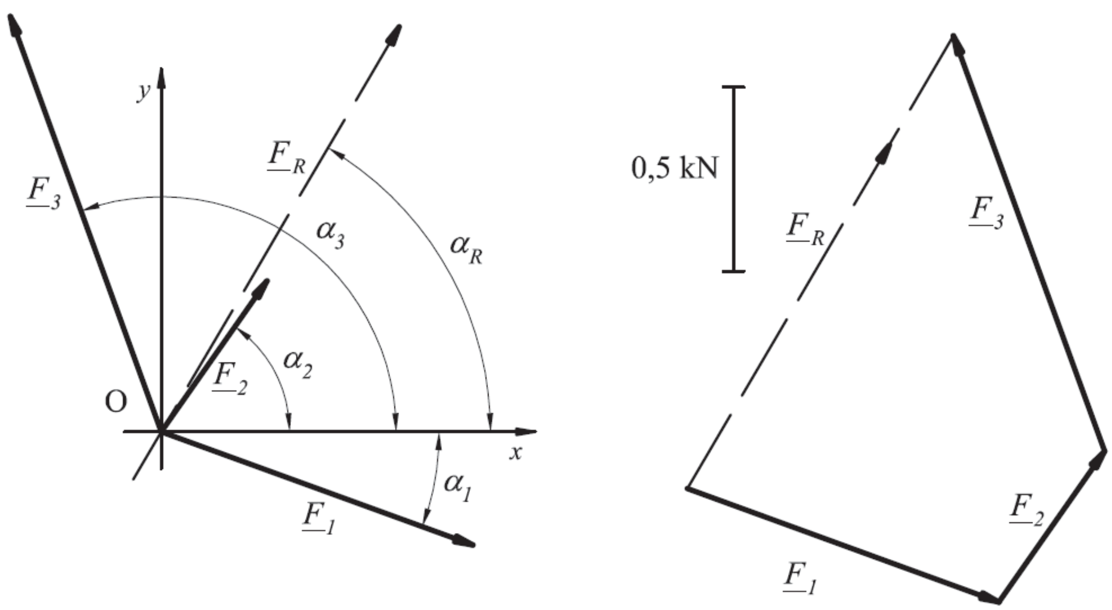
A nyomatékot pozitívnak tekintjük, amennyiben az óramutató járásával ellentétesen forgat.

5.2. PÉLDA

Adott az 5.7.a. ábrán vázolt, három erőből álló, közös metszéspontú síkbeli erőrendszer. Határozzuk meg az eredőt szerkesztéssel és számítással!

$$F_1 = 900 \text{ N}, \alpha_1 = -20°,$$
$$F_2 = 500 \text{ N}, \alpha_2 = 55°,$$
$$F_3 = 1200 \text{ N}, \alpha_3 = 110°.$$

A megoldáshoz a III. alaptételt vesszük alapul. Az eredő hatásvonala keresztülmegy az erők közös metszéspontján, nagysága pedig megegyezik az erők vektori összegével.



a. *b.*

5.7. ábra

A szerkesztéshez felveszünk egy erőléptéket, majd megrajzoljuk az erők vektorábráját. Az eredő az első erő kezdőpontjától az utolsó erő végpontjába mutat, ütköző nyílértelemmel. Az eredő nagysága a lépték alapján meghatározható, a hajlásszöge az ábráról leolvasható. A szerkesztés eredményei mérés alapján:

$$F_R = 1{,}4\ \mathrm{kN},\ \ \alpha_R = 60°.$$

Ezután számítással oldjuk meg a feladatot. Az eredő helye ismert, nagysága a vektori erők összegéből adódik:

$$(F_R) \doteq (F_1\,, F_2, F_3)$$

$$\underline{F_R} = \sum_{i=1}^{3} \underline{F_i} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{3} F_{ix} \\ \sum_{i=1}^{3} F_{iy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |\underline{F_1}| \cos\alpha_1 + |\underline{F_2}| \cos\alpha_2 + |\underline{F_3}| \cos\alpha_3 \\ |\underline{F_1}| \sin\alpha_1 + |\underline{F_2}| \sin\alpha_2 + |\underline{F_3}| \sin\alpha_3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 900\ \mathrm{N} \cdot \cos\ (-20°) + 500\ \mathrm{N} \cdot \cos\ 55° + 1200\ \mathrm{N} \cdot \cos\ 110° \\ 900\ \mathrm{N} \cdot \sin\ (-20°) + 500\ \mathrm{N} \cdot \sin\ 55° + 1200\ \mathrm{N} \cdot \sin\ 110° \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 722\ \mathrm{N} \\ 1229\ \mathrm{N} \end{bmatrix}.$$

Az eredőerő nagysága az alábbiak alapján számítható:

$$|\underline{F_R}| = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2} = \sqrt{(722\ \mathrm{N})^2 + (1229\ \mathrm{N})^2} = 1426\ \mathrm{N},$$

hajlásszöge pedig:

$$\alpha_R = arctan\frac{F_{Ry}}{F_{Rx}} = arctan\frac{1229\ \mathrm{N}}{722\ \mathrm{N}} = 59{,}6°.$$

5.3. FELADAT

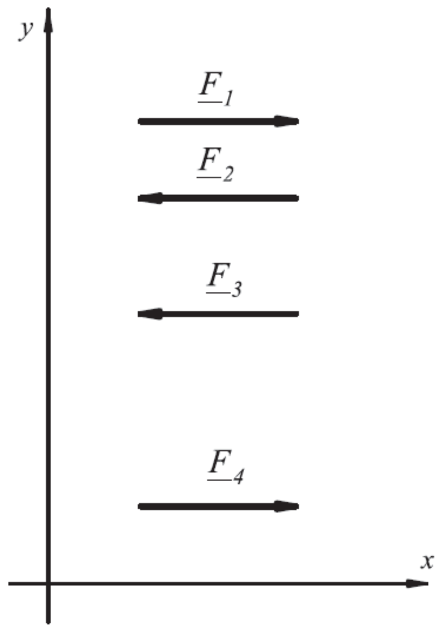
Határozza meg szerkesztéssel és számítással az 5.8. ábrán látható, párhuzamos erőkből álló erőrendszer eredőjének helyét és nagyságát.
Az erők nagysága és az x tengelytől való távolsága:

$$F_1 = 2{,}8\ \mathrm{kN}, r_1 = 3{,}0\ \mathrm{m},$$

$$F_2 = 0{,}4\ \mathrm{kN}, r_2 = 2{,}5\ \mathrm{m},$$

$$F_3 = 3{,}2\ \mathrm{kN}, r_3 = 1{,}75\ \mathrm{m}\ ,$$

$$F_4 = 4{,}6\ \mathrm{kN}, r_4 = 0{,}5\ \mathrm{m}.$$



5.8. ábra

5.4. FELADAT

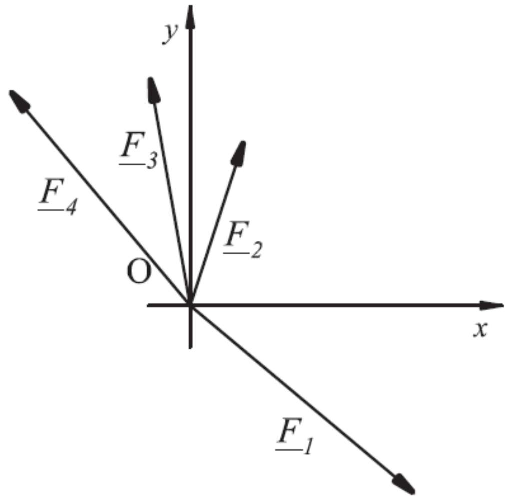
Adott az 5.9. ábrán látható, négy erőből álló, közös síkban működő, közös metszéspontú erőrendszer. Határozzuk meg az eredőt szerkesztéssel és számítással!

$F_1 = 700\ \text{N}, \alpha_1 = -40°,$

$F_2 = 410\ \text{N}, \alpha_2 = 72°\ ,$

$F_3 = 550\ \text{N}, \alpha_3 = 100°,$

$F_4 = 670\ \text{N}, \alpha_4 = 130°.$



5.9. ábra