MECHANIKA I. (Statika)

Előadás

Dr. Legeza László - Dr. Goda Tibor

Gépszerkezettani és Biztonságtechnikai Intézet

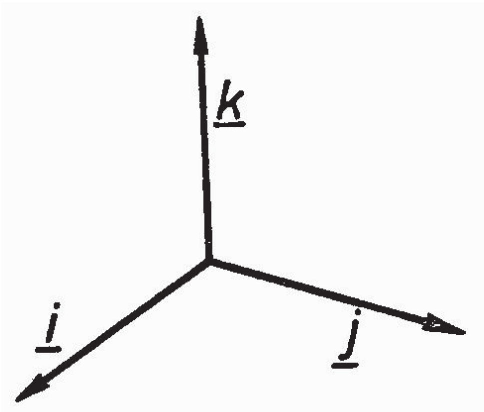
Vektorok, vektorműveletek

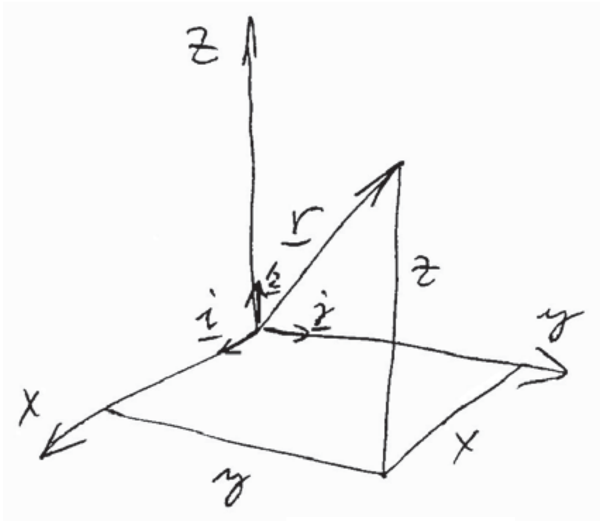
Mennyiségek: testek, jelenségek mérhető tulajdonságait mennyiségeknek nevezzük.

- Skalár mennyiség (hőmérséklet, sűrűség, tömeg, stb.)
- Vektor mennyiség: van nagysága, iránya és állása (erő, sebesség, gyorsulás, stb.)

Vektor: irányított szakasz, amelynek nagysága, értelme (állása) és iránya van. Jelölése: aláhúzott kisbetű/nagybetű (Pl. **a**)

<u>Vektorok megadása:</u> válasszunk a térben három páronként egymásra merőleges egységvektort; **<u>i</u>, <u>j</u>, <u>k</u>**. Alkosson ez a három egységvektor jobbsodrású koordinátarendszert. Ezen egységvektorok segítségével a tér bármely vektora egyértelműen előállítható (egységvektorok lineáris kombinációjával).





$$\underline{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\underline{r} = x \cdot \underline{i} + y \cdot \underline{j} + z \cdot \underline{k}$$

$$\underline{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vektor abszolút értéke: a vektor hosszát adja meg.

$$|\underline{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Egységvektor: egységnyi hosszúságú vektor (pl. koordinátatengelyek egységvektorai) Bármely vektorból készíthetünk egységvektort, ha a vektort elosztjuk önmaga abszolút értékével.

$$\underline{a}^0 = \frac{\underline{a}}{|\underline{a}|}$$

Példa. 1.: Legyen adva egy vektor: **$\underline{a}$**. Határozzuk meg a vektor abszolút értékét illetve egységvektorát.

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}$$

Megoldás:

$$\left|\underline{a}\right| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3$$

$$\underline{a}^0 = \frac{\underline{a}}{\left|\underline{a}\right|} = \begin{bmatrix} \frac{a_x}{\left|\underline{a}\right|} \\ \frac{a_y}{\left|\underline{a}\right|} \\ \frac{a_z}{\left|\underline{a}\right|} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \underline{i} + \frac{2}{3} \cdot \underline{j} + \frac{2}{3} \cdot \underline{k}$$

Ellenőrzés: Ha **$\underline{a}^0$** valóban egységvektor, akkor abszolút értéke egyenlő 1-el.

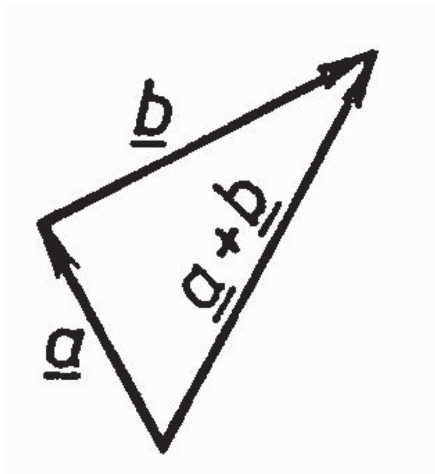
$$\left|\underline{a}^0\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{9}{9}} = 1$$

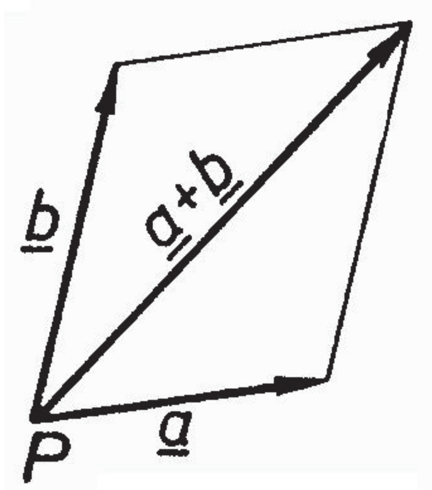
Vektorok összeadása I.

Vektorok összegzésével vektort kapunk.

$$\underline{a} + \underline{b} = \underline{c}$$

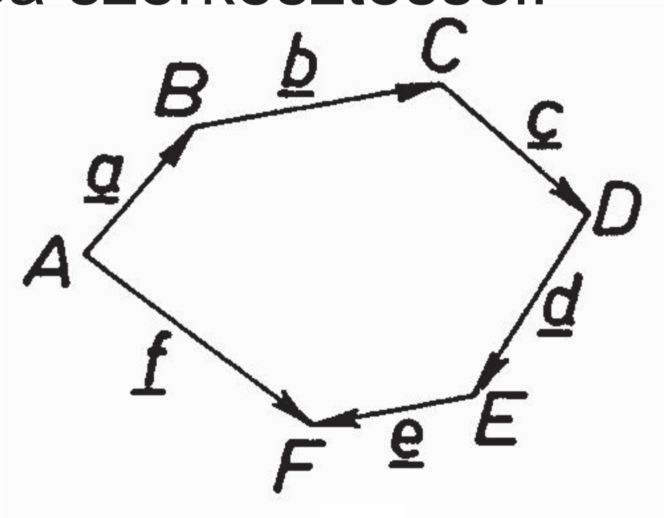
Szerkesztéssel:





Kettőnél több vektor összeadása szerkesztéssel:

$$\underline{a} + \underline{b} + \underline{c} + \underline{d} + \underline{e} = \underline{f}$$



Vektorok összeadása II.

Vektorok összegzése számítással (összeadás koordinátákkal):

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix}$$

$$\underline{a} + \underline{b} = \begin{bmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{bmatrix}$$

Példa. 2.: Legyen adva két vektor: **a** és **b**. Határozzuk meg a két vektor összegét.

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Megoldás:

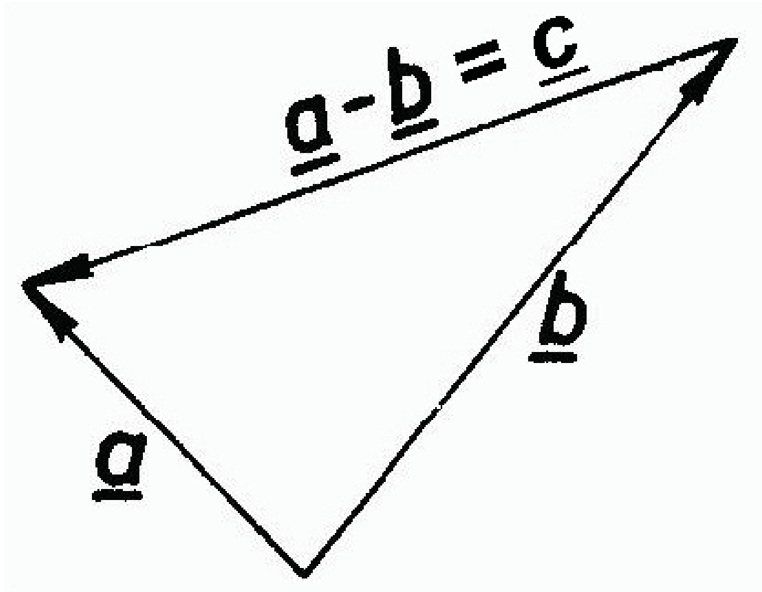
$$\underline{a} + \underline{b} = \begin{bmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+0 \\ 2+2 \\ 0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vektorok különbsége (kivonás)

Vektorok kivonása szintén vektort eredményez.

$$\underline{a}-\underline{b}=\underline{a}+\left(-\underline{b}\right)=\underline{c}$$

Szerkesztéssel:



A különbségvektor mindig a kisebbítendő vektor felé mutat!

Számítással:

$$\underline{a}-\underline{b}=\begin{bmatrix} a_x-b_x \\ a_y-b_y \\ a_z-b_z \end{bmatrix}=\underline{c}$$

Példa. 3.: Legyen adva két vektor: **a** és **b**. Határozzuk meg a két vektor különbségét.

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Megoldás:

$$\underline{a} - \underline{b} = \begin{bmatrix} a_x - b_x \\ a_y - b_y \\ a_z - b_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-0 \\ 2-2 \\ 0-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vektorok skalárral (számmal) való szorzása (nyújtás, zsugorítás)

Vektort számmal szorozva vektort kapunk.

A λ **a** vektor az **a** vektorral párhuzamos, hossza

$$|\lambda| \cdot |\underline{a}|$$

Ha $|\lambda|>1$ nyújtásról, ha $|\lambda|<1$ zsugorításról beszélünk.

Ha

- **$\lambda>0$**; a **(λa)** vektor iránya az **a** vektor irányával megegyezik,
- **$\lambda<0$**; a **(λa)** vektor iránya az **a** vektor irányával ellentétes.

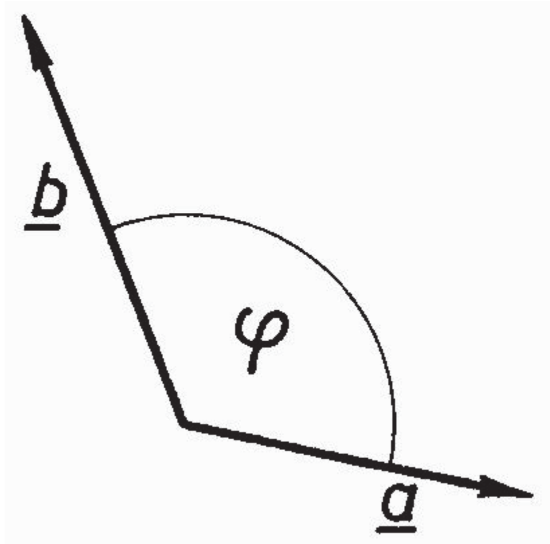
$$\lambda \cdot \underline{a} = \lambda \cdot \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \cdot a_x \\ \lambda \cdot a_y \\ \lambda \cdot a_z \end{bmatrix}$$

Vektorok skaláris szorzata I.

Az **a** és **b** vektorok skaláris szorzatának az

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \cos\varphi$$

számot (skaláris mennyiséget) nevezzük, ahol φ a két vektor által bezárt kisebbik szög.



a b>0 esetén a vektorok hegyesszöget, **a b<0** esetén tompaszöget és **a b=0** esetén derékszöget zárnak be.

Két egymásra merőleges vektor skaláris szorzata zérus! Két vektor skaláris szorzatának eredménye egy skalár (egy szám).

Skaláris szorzás elvégzése koordinátákkal: $\underline{a} \cdot \underline{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$

Vektorok skaláris szorzata II.

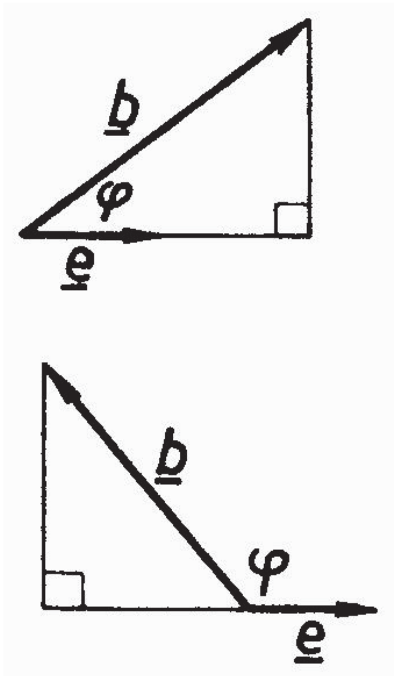
Egységvektorok skaláris szorzatai:

$$\underline{i} \cdot \underline{i} = |\underline{i}| \cdot |\underline{i}| \cdot \cos 0^\circ = 1 \qquad \underline{i} \cdot \underline{i} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 1$$

$$\underline{i} \cdot \underline{j} = |\underline{i}| \cdot |\underline{j}| \cdot \cos 90^0 = 0 \qquad \underline{i} \cdot \underline{j} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 0$$

Átrendezve a skaláris szorzás definícióját meghatározhatjuk két vektor által bezárt szöget:

$$\cos \varphi = \frac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{|\underline{a}| \cdot |\underline{b}|}$$



Az **e** egységvektor és a **b** vektor skaláris szorzatának geometriai jelentése:
a **b** vektor **e** irányított egyenesén adódó előjeles merőleges vetülete.

Példa. 4.: Legyen adva két vektor: **a** és **b**. Határozzuk meg a két vektor skaláris szorzatát és az általuk bezárt szög nagyságát.

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Megoldás:

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z = 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 3 = 6 - 2 - 3 = 1$$

$$\cos\varphi = \frac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{|\underline{a}| \cdot |\underline{b}|}$$

$$|\underline{a}| = \sqrt{3^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{9 + 4 + 1} = \sqrt{14}$$

$$|\underline{b}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 1 + 9} = \sqrt{14}$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{14}} = \frac{1}{14}$$

Vektorok vektoriális szorzata I.

Az **a** és **b** vektorok vektoriális szorzata a **c** vektor, ha

$$|\underline{c}| = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \sin\varphi$$

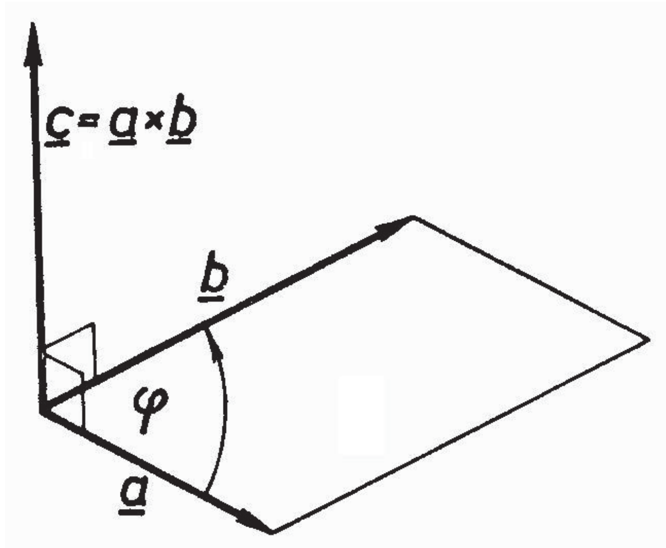
ahol **φ** a két vektor által bezárt kisebbik szög.
A vektoriális szorzás eredményeként kapott **c** vektor merőleges **a** -ra és **b** -ra, mégpedig úgy, hogy **a**, **b**, **c** jobbsodrású rendszert alkotnak.

A vektoriális szorzás jele:

$$\underline{a} \times \underline{b} = \underline{c}$$

$$|\underline{c}| = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \sin\varphi$$

ahol **|c|** egyenlő az **a** és **b** vektorok által meghatározott paralelogramma területével.



Vektorok vektoriális szorzata II.

Két vektor vektoriális szorzata pontosan akkor zérus, ha a két vektor egymással párhuzamos.
Két vektor vektoriális szorzata vektort eredményez.

Vektoriális szorzás elvégzése koordinátákkal:

$$\underline{a} \times \underline{b} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \underline{i} \cdot \left(a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y\right) - \underline{j} \cdot \left(a_x \cdot b_z - a_z \cdot b_x\right) + \underline{k} \cdot \left(a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x\right)$$

Példa. 5.: Legyen adva két vektor: **a** és **b**. Határozzuk meg a két vektor vektoriális szorzatát.

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} -6 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix}$$

Megoldás:

$$\underline{a} \times \underline{b} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -6 & -3 & 2 \\ -3 & 2 & -6 \end{vmatrix} = \underline{i} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} - \underline{j} \cdot \begin{vmatrix} -6 & 2 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} + \underline{k} \cdot \begin{vmatrix} -6 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 14 \cdot \underline{i} - 42 \cdot \underline{j} - 21 \cdot \underline{k}$$