ROBOTIRÁNYÍTÁS

5. előadás

A Laplace-transzformáció alkalmazásai, frekvenciatartomány

Dr. habil. Kovács Levente
egyetemi docens

kovacs.levente@nik.uni-obuda.hu

Dr. Haidegger Tamás
egyetemi adjunktus

haidegger@irob.uni-obuda.hu

EKIK Egyetemi Kutató és Innovációs Központ

K-MOOC

Óbudai Egyetem Bejczy Antal iRobottechnikai Központ

Élettani Szabályozások Csoport Óbudai Egyetem

Az előadás témája és célja

Ebben az előadásban bemutatásra kerül a Laplace-transzformáció, mely az irányítástechnikában leggyakrabban alkalmazott függvénytranszformációs eljárás. Szó lesz a transzformáció alapjairól, kapcsolatáról a Fourier-transzformációval, tulajdonságairól és a legfontosabb kapcsolódó tételekről. Bemutatjuk a korábbi előadásokban bemutatott tipikus vizsgálójelek Laplace-transzformáltjait, illetve a leggyakrabban alkalmazott függvényeket idő- és operátortartományban is feltüntető, összefoglaló táblázatot.

Az előadás második részében szó lesz a rendszerek stabilitásának alaptételéről, a lineáris dinamikus rendszerek operátortartományban felírt általános alakjáról, illetve a frekvenciatartomány kapcsolatáról. Végül, egy egyszerű példán keresztül mutatjuk be a kapcsolatot az operátortartomány és a frekvenciatartomány között, illetve annak módszerét, hogyan térhetünk át az egyik reprezentációról a másikra.

Kulcsszavak

Laplace-transzformáció, tipikus vizsgálójelek, operátortartomány, időtartomány, frekvenciatartomány, határérték-tétel, konvolúciós-tétel, stabilitás, stabilitás határa

Tartalomjegyzék

1. A Laplace-transzformáció

1.1. A Laplace-transzformációról általában

A Laplace-transzformáció során időtartománybeli (időtől függő) függvényeket operátortartománybeli (komplex frekvenciától függő) függvényekké transzformálunk. Előnye, hogy az operátortartományban számos, a változókkal és függvényekkel végzendő művelet (deriválás, konvolúció, stb.) leegyszerűsödik.

A transzformáció csak a pozitív időtengelyen értelmezhető, a transzformálandó függvénynek pedig integrálhatónak kell lennie a $t \in [0, \infty)$ intervallumban.

A transzformáció formálisan felírva:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = F(s),\ s = j\omega + \sigma \tag{1}$$

A Laplace-transzformáció tehát a Fourier-transzformációból származtatható:

$$\int_0^\infty e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} f(t)\,dt = F(s) \leftrightarrow \int_{-\infty}^\infty e^{-j\omega t} f(t)\,dt = F(j\omega) \tag{2}$$

Az időtartományba való visszatérést az inverz Laplace-transzformációval érhetjük el:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma - j\omega}^{\sigma + j\omega} F(s) e^{st}\,ds = f(t) \tag{3}$$

A Laplace-transzformáció fontos tulajdonságai:

Differenciálás: a Laplace-transzformációval a differenciálegyenletek *algebrai egyenletekké* alakíthatók.

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt} f(t)\right\} = sF(s) - f(0^-) \tag{4}$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2}{dt^2} f(t)\right\} = s^2 F(s) - sf(0^-) - \frac{d}{dt} f(t)\bigg|_{t=0} \tag{5}$$

Integrálás:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t)\,dt\right\} = \frac{1}{s} F(s) \tag{6}$$

Linearitás:

$$\mathcal{L}^{-1}\{aF(s)\} = a\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} \tag{7}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)+F_2(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\} + \mathcal{L}^{-1}\{F_2(s)\} \tag{8}$$

Eltolási tulajdonság:

$$\mathcal{L}\{f(t-T)\} = F(s)e^{-sT} \tag{9}$$

$$\mathcal{L}\{e^{-at}f(t-T)\} = F(s+a) \tag{10}$$

1.2. Konvolúció és határérték

A Lapace-transzformáció két legjelentősebb tétele a következő:

Konvolúciós tétel:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f_1(t)\, f_2(t-\tau)\, d\tau\right\} = F_1(s)F_2(s) \tag{11}$$

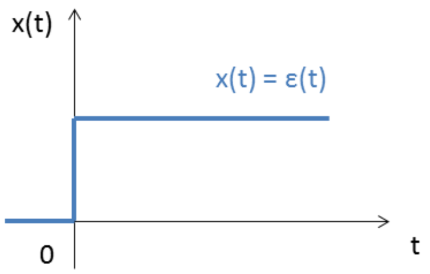
Határérték-tétel:

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s) \tag{12}$$

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s) \tag{13}$$

1.3. Tipikus vizsgálójelek Laplace-transzformáltja

Egységugrás

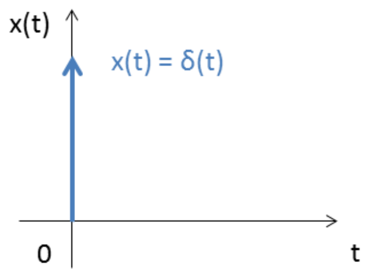


$$\mathcal{L}\{\varepsilon(t)\} = \int_0^\infty \varepsilon(t)e^{-st}\mathrm{d}t = \int_0^\infty 1\cdot e^{-st}\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^\infty = -\frac{1}{s}\cdot 0 + \frac{1}{s}\cdot 1 = \frac{1}{s}$$

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, ha\ t < 0 \\ 1, ha\ t > 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\mathcal{L}\{\varepsilon(t)\} = \frac{1}{s}}$$

Dirac-delta



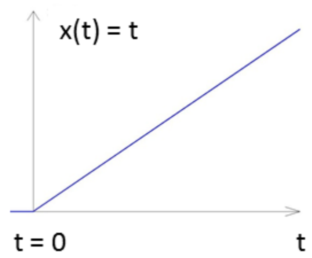
A Dirac-delta integrálértéke egységnyi, kiterjedése azonban elhanyagolható. Az e^{-st} függvénnyel megszorozva valójában „kiválasztja" a függvény értékét $t = 0$ helyen.

$$e^{-st}\big|_{t=0} = 1$$

$$\boxed{\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1}$$

$$\delta(t,T) = \begin{cases} \frac{1}{T}, ha\ 0 < t < T \\ 0 \quad egyébként \end{cases}$$

Egység sebességugrás



$$x(t) = t$$

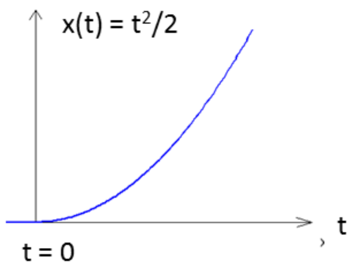
$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \int_0^\infty t e^{-st}\mathrm{d}t =$$

$$= \left[-t\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^\infty + \int_0^\infty 1\cdot\frac{1}{s}e^{-st}\mathrm{d}t =$$

$$= 0 - \frac{1}{s^2}\left[e^{-st}\right]_0^\infty = -\frac{1}{s^2}(0-1) = \frac{1}{s^2}$$

$$\boxed{\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}}$$

Egység gyorsulásugrás



$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \int_0^\infty t^2 e^{-st}\mathrm{d}t =$$

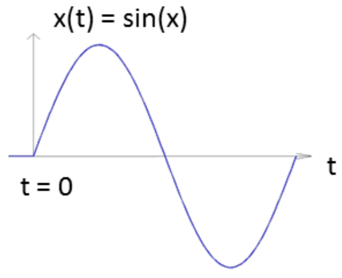
$$= \left[-t^2\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^\infty + \int_0^\infty 2t\cdot\frac{1}{s}e^{-st}\mathrm{d}t =$$

$$= 0 - \frac{2}{s}\int_0^\infty t\cdot\frac{1}{s}e^{-st}\mathrm{d}t = \frac{2}{s}\left(\frac{1}{s^2}\right) = \frac{2}{s^3}$$

$$x(t) = t^2$$

$$\boxed{\mathcal{L}\{t^2\} = \frac{2}{s^3}}$$

Harmonikus gerjesztés



$$x(t) = \sin(\omega t)$$

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \int_0^\infty \sin(\omega t) e^{-st} \mathrm{d}t =$$

$$= \left[-\frac{1}{\omega} \cos(\omega t) e^{-st} \right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{1}{\omega} \cos(\omega t) \cdot s e^{-st} \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{\omega} - \frac{s}{\omega} \left[\frac{1}{\omega} \sin(\omega t) e^{-st} \right]_0^\infty - \frac{s^2}{\omega^2} \int_0^\infty \sin(\omega t) \cdot e^{-st} \mathrm{d}t$$

$$\boxed{\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} = \frac{1}{\omega} - \frac{s^2}{\omega^2} \mathcal{L}\{\sin(\omega t)\}}$$

$$\boxed{\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}}$$

1.4. Nevezetes függvények Laplace-transzfromáltjai

Az irányítástechnikai gyakorlatban leggyakrabban előforduló függvények Laplace-transzformáltjait gyakran táblázatos formában rögzítjük, így könnyen elérhetőek és felhasználhatóak a számításokhoz. Ezeket a függvényeket és transzformáltjaikat az alábbi táblázat foglalja össze.

Időfüggvény	Laplace-transzformált	Időfüggvény	Laplace-transzformált
$F(t), t > 0$	$F(s)$	$\frac{1}{T^2} t e^{-\frac{t}{T}}$	$\frac{1}{(Ts+1)^2}$
$\delta(t)$	1	$\frac{1}{T_1 - T_2}\left(e^{-\frac{t}{T_1}} - e^{-\frac{t}{2_1}}\right)$	$\frac{1}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)}$
$\delta(t-\tau)$	e^{-st}	$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{s^{n+1}}$
$1(t)$	$\frac{1}{s}$	$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
$1(t-\tau)$	$\frac{1}{s} e^{-st}$	$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
t	$\frac{1}{s^2}$	$-\frac{1}{T} \mathrm{sh}\left(\frac{t}{T}\right)$	$\frac{1}{1-T^2 s^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$-\frac{1}{T^3}(t-T) e^{-\frac{t}{T}}$	$\frac{s}{(1+Ts)^2}$
$\frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}}$	$\frac{1}{Ts+1}$	$1 - \frac{t+T}{t} e^{-\frac{t}{T}}$	$\frac{1}{s(1+Ts)^2}$
$1 - e^{-\frac{t}{T}}$	$\frac{1}{s(Ts+1)}$	$T\left(e^{-\frac{t}{T}} + \frac{t}{T} - 1\right)$	$\frac{1}{s^2(1+Ts)}$

1. táblázat: Nevezetes függvények Laplace-transzfromáltjai

2. Stabilitás és frekvenciatartomány

2.1. A stabilitás alaptétele

Egy zárt hatásláncú, lineáris dinamikus rendszer átviteli függvénye felírható a következő formában:

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{W_0(s)}{1 + W_0(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \tag{14}$$

$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$ a rendszer *karakterisztikus polinomja*

A $a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$ egyenlet megoldásai a rendszer pólusai:

$$p_i,\ i = 1 \dots n$$

A stabilitás feltétele, hogy a rendszer pólusainak valós része negatív legyen, azaz

$$\mathrm{Re}\{p_i\} < 0,\ i = 1 \dots n$$

Megjegyzés

$\mathrm{Re}\{p_i\} = 0$ esetén a rendszer a stabilitás határára kerül. Ilyenek például a csillapítással nem rendelkező rendszerek.

2.2 A frekvenciatartomány

A frekvenciatartomány bevezetésének célja a rendszer átfogóbb értelmezése, stabilitásvizsgálat. Lényege, hogy a Laplace-transzformációban használt *s* operátort komplex frekvenciával helyettesítjük:

$$s = j\omega \tag{15}$$

Az áttérés eredményeképp az átviteli függvény komplex szám lesz, melyet a komplex síkon annak *nagyságával* (abszolút érték) és *irányával* jellemezhetünk, ω körfrekvencia függvényében.

$$W(s) \to W(j\omega) \tag{16}$$

$$W(j\omega) = \mathrm{Re}\{W(j\omega)\} + j\mathrm{Im}\{W(j\omega)\} \tag{17}$$

A komplex síkon a következőképpen írható fel a függvény:

$$W(j\omega) = |W(j\omega)|e^{j\arg\{W(j\omega)\}} \tag{18}$$

$$W|W(j\omega)| = \sqrt{\mathrm{Re}\{W(j\omega)\}^2 + \mathrm{Im}\{W(j\omega)\}^2} \tag{19}$$

$$\arg\{W(j\omega)\} = \arctan\frac{\mathrm{Im}\{W(j\omega)\}}{\mathrm{Re}\{W(j\omega)\}} \tag{20}$$

Példa: áttérés frekvenciatartományba

$$W(s) = \frac{s}{s+2} \tag{21}$$

$$W(j\omega) = \frac{j\omega}{j\omega+2} = \frac{j\omega}{j\omega+2}\frac{j\omega-2}{j\omega-2} = \frac{j\omega(j\omega-2)}{(j\omega+2)(j\omega-2)} = \frac{-\omega^2-2j\omega}{(j\omega)^2+2^2} = \\ = \frac{(-\omega^2)+j(-2\omega)}{-\omega^2+4} \tag{22}$$

$$W(j\omega) = \frac{\omega^2}{4-\omega^2} + j\frac{2\omega}{4-\omega^2} \tag{23}$$

$$|W(j\omega)| = \left(\frac{\omega^2}{4-\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{2\omega}{4-\omega^2}\right)^2 = \frac{\omega^4+4\omega^4}{(4-\omega^2)^2} \tag{24}$$

$$\arg\{W(j\omega)\} = \arctan\frac{\frac{2\omega}{4-\omega^2}}{\frac{\omega^2}{4-\omega^2}} = \arctan\left(\frac{2}{\omega}\right) \tag{25}$$

Az előadás összefoglalása

Ebben az előadásban bemutatásra kerül a Laplace-transzformáció, melyet a kurzus következő fejezeteiben intenzíven használunk majd. Láthattuk, hogyan térhetünk át időtartományból operátortartományba, és vissza. Elmondható tehát, hogy a Laplace-transzformáció egy biztos, kényelmes átmenetet jelent az időtartományban könnyen értelmezhető, de a számításokat nehezítő kifejezések, és az absztrakt, de az időtartománybeli függvényeket algebrai egyenletekké alakító operátortartomány között. Láthattuk, hogy a stabilitás alaptétele operátortartományban igen egyszerű és könnyen értelmezhető. Végül bemutattok, hogyan lehet egy rendszer viselkedését leírni a frekvenciatartományban.

Ellenőrző kérdések

1. Hogyan írható fel egy időtartománybeli függvény operátortartományban és fordítva? Mikor nem alkalmazható a Laplace-transzformáció?

2. Mik az egyes tipikus vizsgálójelek Laplace-transzformáltjai? Miért szükséges ezeknek a jeleknek az operátortartománybeli alakját is ismernünk?

3. Mi a stabilitás alaptétele? Mit jelent az, hogy egy feltétel szükséges/elégséges?

4. Mi a különbség az időtartomány, operátortartomány és a frekvenciatartomány között? Mi jelenti az átmenetet az egyes felírások között?

5. Egy függvény milyen jellemzőit ismerhetjük meg a frekvenciatartományban való felírással? Mi a változó paraméter?