ROBOTIRÁNYÍTÁS

7. előadás

Frekvenciatartomány, Bode és Nyquist diagram

Dr. habil. Kovács Levente
egyetemi docens
kovacs.levente@nik.uni-obuda.hu

Dr. Haidegger Tamás
egyetemi adjunktus
haidegger@irob.uni-obuda.hu

EKIK Egyetemi Kutató és Innovációs Központ
K MOOC
Óbudai Egyetem Bejczy Antal iRobottechnikai Központ
Élettani Szabályozások Csoport Óbudai Egyetem

Az előadás témája és célja

Jelen előadás témája a frekvenciatartományban leggyakrabban használt diagramok (Bode és Nyquist) bemutatása. A Bode diagram jellemzőinek ismertetése után egy részletes, lépésről-lépésre haladó módszert mutatunk a Bode diagram papíron történő megrajzolásához. Természetesen számítógépen a Matlab `bode()` parancsával is kirajzoltathatjuk az amplitúdó-és fázismenetet. Ezt követően bemutatjuk a Bode diagram fázis- és amplitúdótartalékát, majd ezt felhasználva a Bode-féle stabilitási kritériumot is. A Nyquist diagram esetében szintén tárgyalásra kerül a fázis- és amplitúdótartalék értelémezése, valamint a Nyquist-féle stabilitás kritérium (Matlabban a `nyquist()` parancsot használhatjuk). Az előadás ismerteti továbbá a lineáris alaptagok amplitúdó- és fázismenetét.

Az előadás célja, hogy a frekvenciatartománybeli analízis biztos alapot szolgáltasson a későbbi előadások szabályozótervezéséhez.

Kulcsszavak

Bode diagram, Nyquist diagram, fázismenet, amplitúdómenet, fázistartalék, amplitúdótartalék, Bode-féle stabilitás kritérium, Nyquist-féle stabilitás kritérium

Tartalomjegyzék

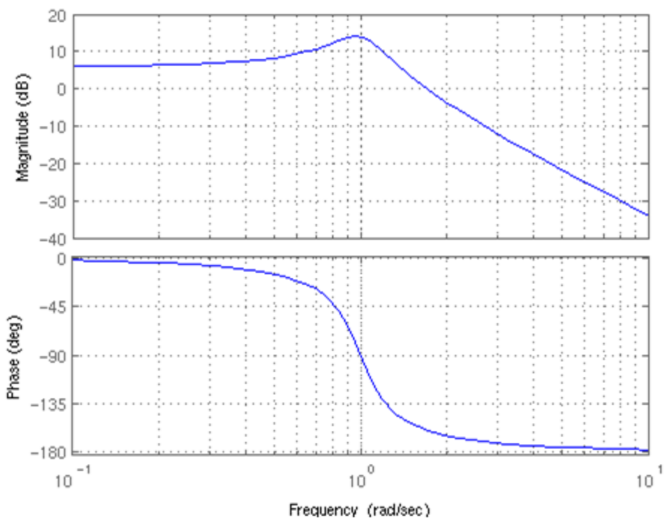
1. Bode diagram

A Bode diagram LTI (linear time invariant) rendszerek frekvencia válaszát jeleníti meg; és két függvényt ábrázol: az *amplitúdó-körfrekvencia függvény*t és a *fázis-körfrekvencia függvény*t.

1.1. Bode diagram jellemzői

Az amplitúdó-körfrekvencia függvény a Bode diagram felső részén található, *amplitúdódiagram*nak is hívjuk (1. ábra felső diagramja). Az x tengely a frekvenciát ábrázolja logaritmikus skálán [log], ezért egy nagyságrendnyi lépésközt egy dekádnak hívunk (pl. 10^1 és 10^2 között). Az y tengelyen az amplitúdó található decibelben [dB]:

$$|W(j\omega)|_{dB} = 20\ \log_{10} \left|W(j\omega)\right|. \tag{1}$$

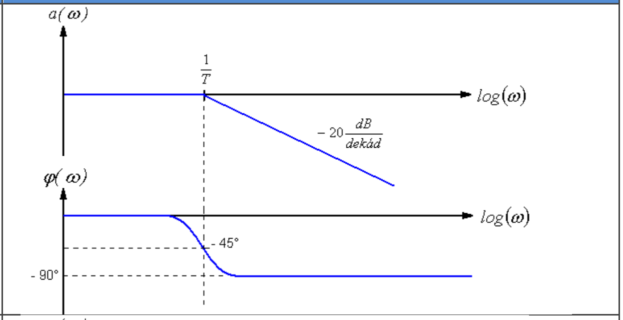
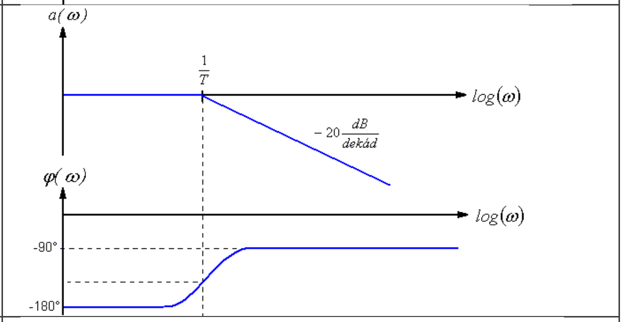
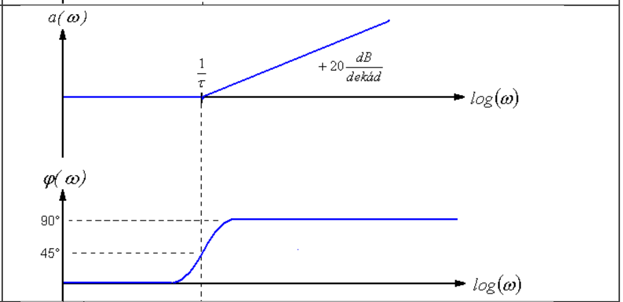
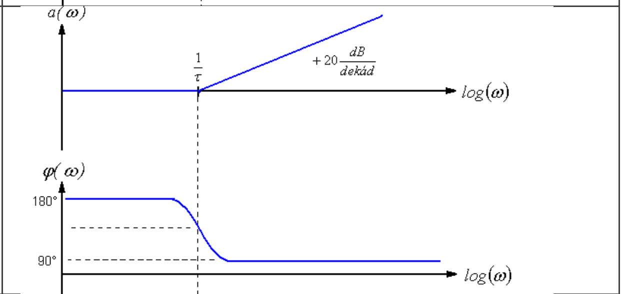
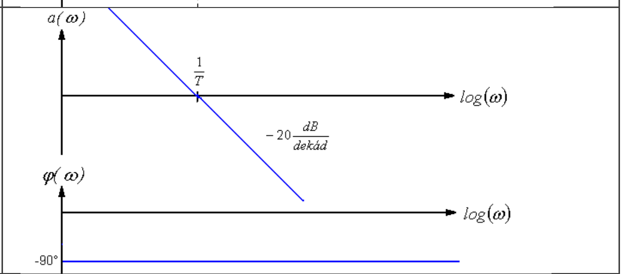
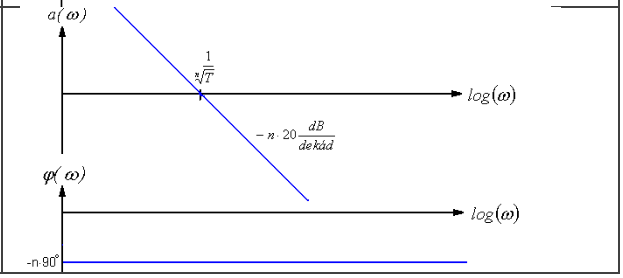


1. ábra: Bode diagram

A fázis-körfrekvencia függvény a Bode diagram alsó részén található, *fázisdiagram*nak is hívjuk (1. ábra alsó diagramja). Az x tengely ugyanúgy a frekvenciát ábrázolja logaritmikus skálán [log], mint az amplitúdódiagram, az y tengelyen viszont fázis látható lineáris fok skálán [°].

1.2. Pólusok és zérusok hatása a Bode diagramra

Az 1. táblázatban összefoglalva látható, hogy a pólusok és a zérusok milyen hatással vannak a Bode diagram amplitúdó- és fázismenetére.

Név	Átviteli függvény	Amplitúdó menet	Fázis menet	Bode diagram
Stabil (negatív valós részű) pólus	$\frac{1}{Ts+1}$	−20 dB/dekád	−90° eltolás	
Instabil (pozitív valós részű) pólus	$\frac{1}{Ts-1}$	−20 dB/dekád	+90° eltolás	
„Stabil” (negatív valós részű) zérus	$\tau s+1$	+20 dB/dekád	+90° eltolás	
„Instabil” (pozitív valós részű) zérus	$\tau s-1$	+20 dB/dekád	−90° eltolás	
Integrátor	$\frac{1}{Ts}$	−20 dB/dekád	−90° (konstans)	
Integrátor-sor	$\frac{1}{Ts^n}$	−n·20 dB/dekád	−n·90° (konstans)	

1. táblázat: Pólusok és zérusok hatása a Bode diagram amplitúdó- és fázismenetére

1.3. Bode diagram rajzolása – lépésről lépésre

1.3.1. Zérusok és pólusok meghatározása

A zérusok az átviteli függvény számlálójának a gyökei, a pólusok az átviteli függvény nevezőjének a gyökei. Ezek lehetnek valós számok vagy komplex konjugált póluspár.

1.3.2. Zérusok és pólusok abszolút értékének számítása és növekvő sorrendbe rendezése

A valós számok abszolút értékének számítása könnyen elvégezhető. A komplex számok abszolút értékét az alábbiak szerint végezzük el:

$$z = a + ib \rightarrow |z| \coloneqq \sqrt{a^2 + b^2} \tag{1}$$

Komplex konjugált póluspár abszolút értéke megegyezik.

1.3.3. Multiplicitás, index meghatározása

A *multiplicitás* (M) azt jelenti, hogy az adott pólus vagy zérus „hányszoros gyök”. A komplex konjugált póluspár az kétszeres, a valós szám egyszeres gyök.

Az *index* (I) zérus esetén -1, pólus esetén $+1$.

1.3.4. Amplitúdómenet meredekségének számítása

A *meredekség* (ME) egy pólus amplitúdó-tolásának értéke megszorozva a multiplicitással és az indexszel.

$$ME = -20 \frac{dB}{dekád} \cdot M \cdot I \tag{2}$$

1.3.5. Táblázat készítése (abszolút érték, index, multiplicitás, meredekség)

Az átláthatóság kedvéért egy táblázatban foglaljuk össze az eddig számított értékeket.

1.3.6. Az amplitúdómenet meghatározása

1.3.6.1. Kezdőpont meghatározása (szabad integrátor)

A kezdőpont a *szabad integrátor* meglététől vagy hiányától függ. A szabad integrátor azt jelenti, hogy a gyöktényezős alakban (*zpk*) a nevezőben van egy szabad s, amit kiemelve a törtből az átviteli függvény $1/s$-sel szorzódik. Az amplitúdómenet kezdeti értéke

$$a_{dB} = 20 \cdot \log K, \tag{3}$$

ahol a statikus erősítés

$$K = W(s = 0) \tag{4}$$

Ha van szabad integrátor, akkor az amplitúdómenet egy *meredek* szakasszal indul, melynek meredeksége: szabad integrátorok száma szorozva $-20\ db/dekáddal$. Az amplitúdómenet kezdeti értéke minden esetben $a_{dB} = \infty$.

Ha nincs szabad integrátor, akkor az amplitúdómenet egy *egyenes* szakasszal indul. Az amplitúdómenet kezdeti értéke ilyenkor $a_{dB} = 20 \cdot \log K$.

1.3.6.2. Nevezetes pontok meghatározása (pólus, zérus hatása)

A *pólusok, zérusok* (és a szabad integrátor) hatásukat külön fejtik ki, azonban az előzőek hatásához adódik hozzá az új hatás.

1.3.7. A fázismenet meghatározása

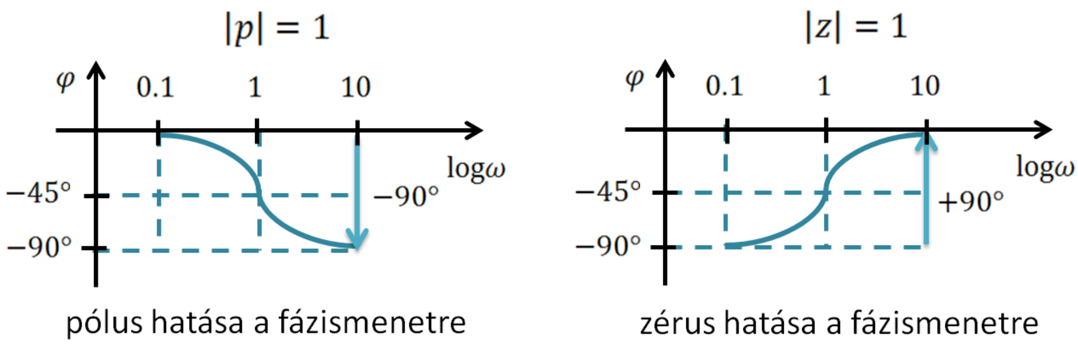
1.3.7.1. Kezdőpont meghatározása (szabad integrátor)

Ha van szabad integrátor, akkor a fázismenet $\varphi = -90°$-ról indul.

Ha nincs szabad integrátor, akkor a fázismenet $\varphi = 0°$-ról indul.

1.3.7.2. Nevezetes pontok meghatározása (pólus, zérus hatása)

A *zérus* a fázismenetet $\varphi = +90°$-al, míg a *pólus* $\varphi = -90°$-al tolja el. A zérus, pólus hatás „hatóköre” ± 1 dekád, hatása szimmetrikus. Ez azt jelenti, hogy például a $p = 1$ pólus értékét megelőző dekádnál ($\omega = 0{,}1$) elindul a hatás (a fázistolás), a pólus értékénél éppen $\varphi = -45°$ a fázistolás, majd a teljes $-90°$-os tolás a pólus értékét követő dekádnál ($\omega = 10$) fejeződik be. A példa illusztrációját pólus és zérus esetén a 2. ábra mutatja.



2. ábra: A pólus/zérus hatás lefolyása a fázismeneten

Az előadásban (7. előadás diái) két példán keresztül is bemutatjuk a Bode diagram amplitúdó-és fázismenetének rajzolását.

1.4. Bode diagram fázis- és amplitúdótartaléka

Az alábbiakban ismertetünk két nagyon fontos fogalmat, melyek segítségével a Bode diagram alapján a rendszer stabilitásáról tudunk képet alkotni.

1.4.1. Fázistartalék, φ_t (Phase Margin, Pm)

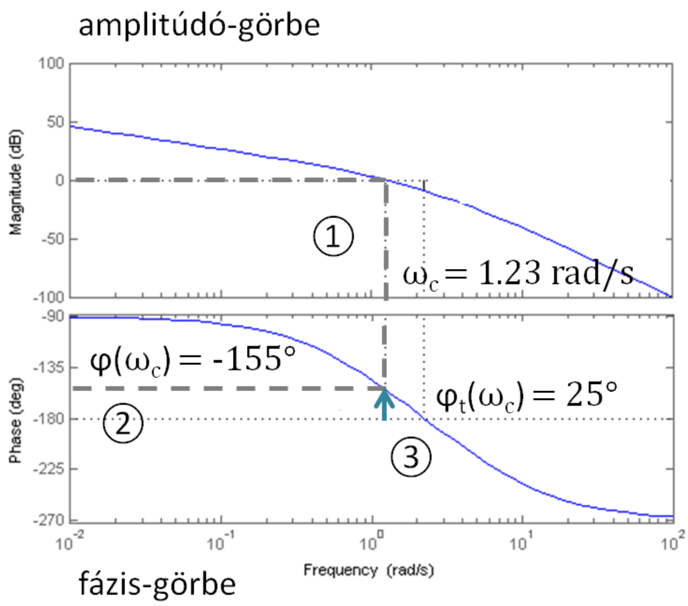
A fázistartalék megmutatja, hogy mekkora fázistolás hatására lenne a zárt kör instabil. A fázistartalékot *nyitott körre* értelmezzük.

Grafikusan az alábbiak szerint olvasható le a fázistartalék a Bode diagramról (lásd 3. ábra):

1. az amplitúdó-görbén megkeressük, hogy a görbe hol metszi a $0\ dB$-t; ez a ω_c vágási körfrekvencia (az ábrán látható példában $\omega_c = 1{,}23\ \mathrm{rad/s}$)
2. megnézzük, hogy mennyi a fázisgörbén a görbe értéke ezen a ω_c frekvencián; ez a $\varphi(\omega_c)$ fázis (az ábrán látható példában $\varphi(\omega_c) = -155°$)
3. a fázisgörbén megkeressük a $-180°$-ot és ehhez viszonyítjuk a $\varphi(\omega_c)$ értékét, azaz

$$\begin{aligned}\varphi_t &= \pi + \varphi(\omega_c)\ [\mathrm{rad}] \\ \varphi_t &= 180° + \varphi(\omega_c)\ [°]\end{aligned} \tag{5}$$

Az ábrán látható példában tehát a fázistartalék értéke $\varphi_t = 180° - 155° = 25°$.



3. ábra: A fázistartalék a Bode diagramon

1.4.2. Amplitúdótartalék/erősítéstartalék (Gain Margin, Gm)

Az amplitúdótartalék megmutatja, hogy ha a hurokerősítést Gm-szeresére növelnénk, akkor a stabilitás határhelyzetére jutnánk. Az amplitúdótartalékot *nyitott körre* értelmezzük.

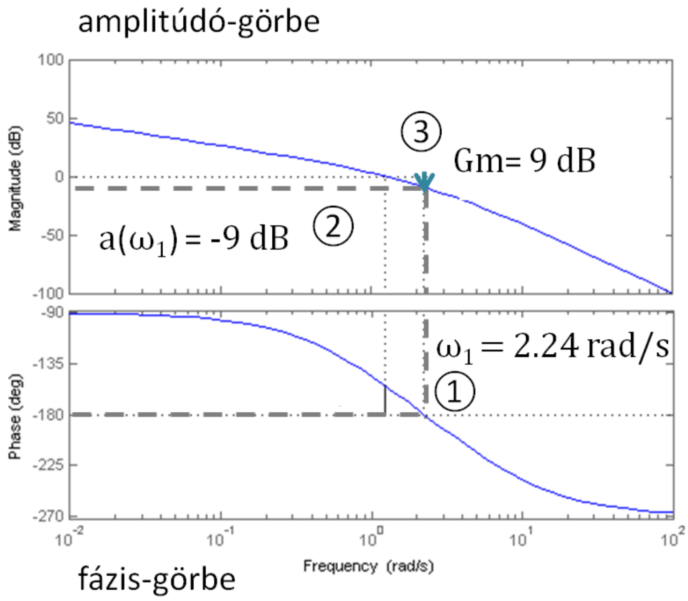
Grafikusan az alábbiak szerint olvasható le az amplitúdótartalék a Bode diagramról (lásd 4. ábra):

1. a fázisgörbén megkeressük, hogy a görbe hol metszi a $-180°$-t; ez a ω_1 frekvencia (az ábrán látható példában $\omega_1 = 2{,}24\ \mathrm{rad/s}$)
2. megnézzük, hogy mennyi az amplitúdó-görbén a görbe értéke ezen a ω_1 frekvencián; ez a $a(\omega_1)$ fázis (az ábrán látható példában $a(\omega_1) = -9\ dB$)
3. az amplitúdó-görbén megkeressük a $0\ dB$-ot és ehhez viszonyítjuk a $a(\omega_1)$ értékét, azaz

$$\begin{aligned} Gm_{dB} &= 0 - a(\omega_1)\ [\mathrm{dB}] \\ Gm_{lin} &= 10^{\frac{a(\omega_1)}{20}} \end{aligned} \tag{5}$$

Az ábrán látható példában tehát az amplitúdótartalék értéke

$$\begin{aligned} Gm_{dB} &= 0 - (-9) = 9\ dB \\ Gm_{lin} &= 10^{\frac{9}{20}} = 2{,}82 \end{aligned}$$



4. ábra: Az amplitúdótartalék a Bode diagramon

1.5. Bode-féle stabilitási kritérium

A Bode-féle stabilitása kritériumot mindig **nyitott körre ábrázolunk**, tehát a $W_0(j\omega)$ rendszerre, azonban a következtetést mindig a zárt rendszerre ($W_{cl}(j\omega)$) vonjuk le.

A nyitott $W_0(j\omega)$ kör Bode diagramjának φ_t fázistöbblete alapján:

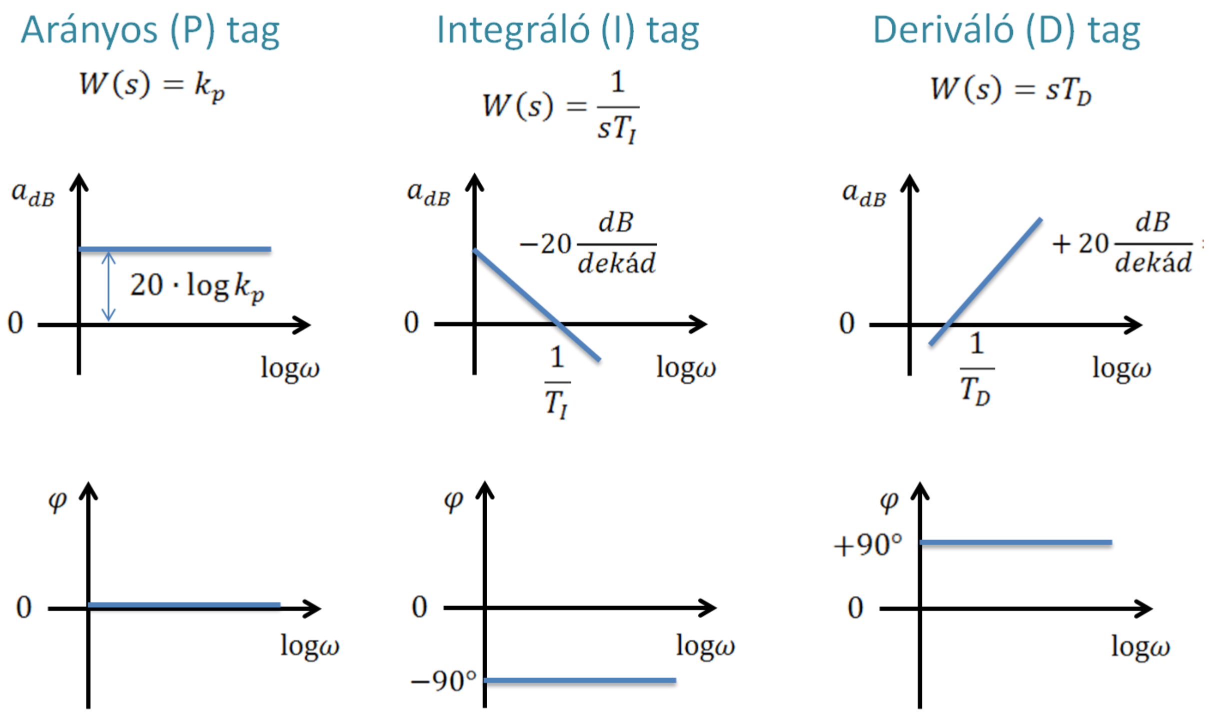
- A zárt rendszer stabilis, ha $\varphi_t > 0$;
- A zárt rendszer stabilitás határán van, ha $\varphi_t = 0$;
- A zárt rendszer labilis, ha $\varphi_t < 0$.

Megjegyezzük, hogy $\varphi_t \in [45, 60]°$ a biztos működés (gyakorlati tapasztalat).

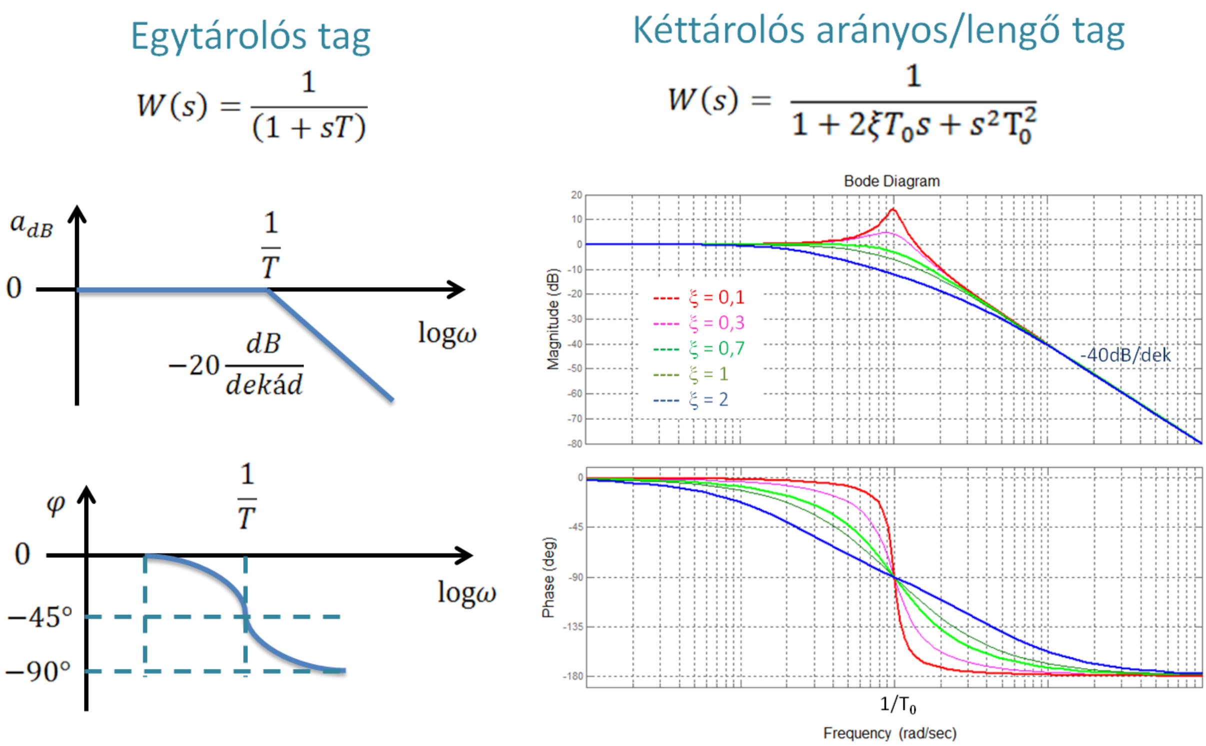
1.6. Lineáris alaptagok amplitúdó- és fázismenete

Az 5. és 6. ábrán összefoglaltuk a lineáris alaptagok amplitúdó- és fázismenetét.

- Az *arányos (P) tag* az amplitúdómenetet konstans (P nagyságától függő értékkel) tolja el, míg a fázismenetet változatlanul hagyja.
- Az *integráló (I) tag* az amplitúdómeneten $-20\,db/dekádos$ törést okoz, míg a fázismenetet $\varphi = -90°$-al tolja el minden frekvencián. (Hasonlítsuk össze egy pólus hatásával.)
- A *deriváló (D) tag* az amplitúdómeneten $+20\,db/dekádos$ törést okoz, míg a fázismenetet $\varphi = +90°$-al tolja el minden frekvencián. (Hasonlítsuk össze egy zérus hatásával.)
- Az *egytárolós tag* (amely egy pólust tartalmaz) az amplitúdómeneten $-20\,db/dekádos$ törést okoz, míg a fázismenetet $\varphi = -90°$-al tolja el.
- *Kéttárolós arányos/lengő tag*nak két pólusa van, így hatása ennek megfelelő: az amplitúdómeneten $-40\,db/dekádos$ törést okoz, míg a fázismenetet $\varphi = -180°$-al tolja el. Az, hogy a törés a görbéknél mennyire „éles” vagy „meredek”, a kéttárolós tag ξ csillapítási tényezőjétől függ.



5. ábra: A P, I és D alaptagok amplitúdó- és fázismenete

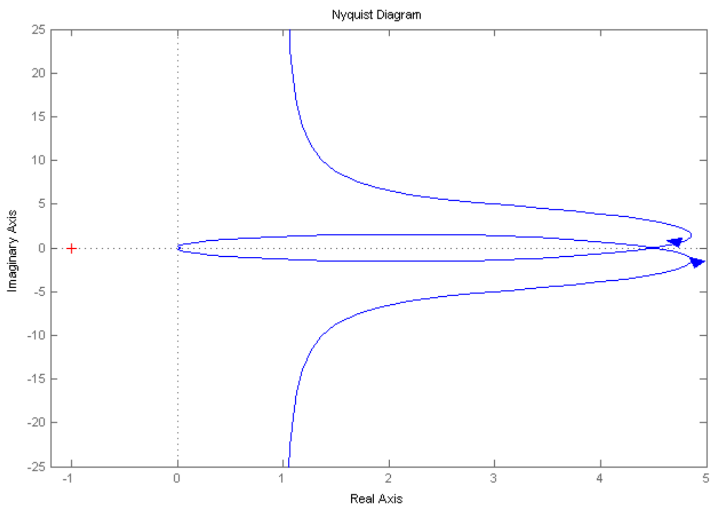


6. ábra: Az egy- és kéttárolós tagok amplitúdó- és fázismenete

2. Nyquist diagram

2.1. Nyquist diagram jellemzői

A Nyquist diagram az LTI rendszerek frekvencia válaszát jeleníti meg *polárdiagramon*. Mind a fázis ($\phi(\omega)$), mind az erősítés/ amplitúdó ($|Y(j\ \omega)|$) megjelenik *egyetlen ábrán* a frekvencia függvényében.

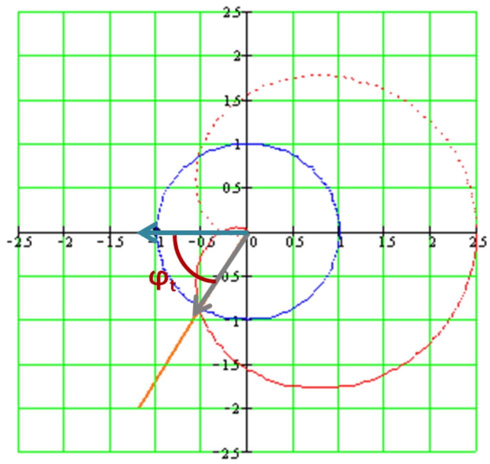


7. ábra: Nyquist diagram

2.2. Nyqusit diagram fázis- és amplitúdótartaléka

2.2.1. Fázistartalék, φ_t (Phase Margin, Pm)

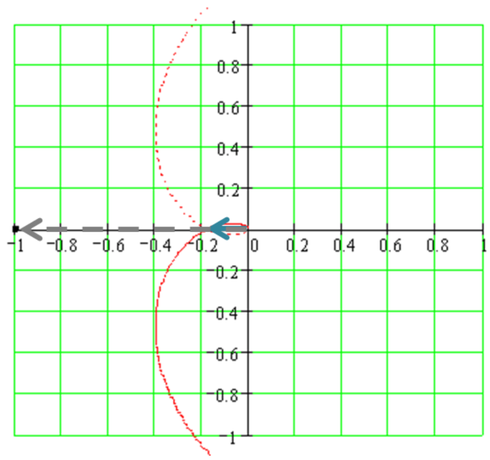
A fázistartalék az a szög a Nyquist diagramon, amennyit a frekvencia válasz (vektor) elmozdulhat, hogy a -1 pontba mutasson (8. ábra). Mérjük meg a frekvenciaválasz vektora (az ábrán szürke) és a $-180°$-os vektor (az ábrán kék) közötti szögkülönbséget! Az ábrán látható példában $\varphi_t = 60°$. Ha a fázistartalék nagy, a rendszer „erősen” stabil. Ha a fázistartalék 0, a Nyquist diagram átmegy a -1 ponton és a rendszer a stabilitás határán van.



8. ábra: A fázistartalék a Nyquist diagramon

2.2.2. Amplitúdótartalék/erősítéstartalék (Gain Margin, Gm)

Az amplitúdótartalék az az érték, amennyivel a frekvenciaválaszt szorozni kell, hogy a -1 pontba mutasson a vektor (9. ábra). Az ábrán látható példában a Nyquist diagram a $-180°$-os vektornál -0.18 értékű. Ez azt jelenti, hogy hurokerősítést $1/0.18$-szorosára emelhetjük, hogy a stabilitás határát elérjük. Tehát $Gm = 1/0.18 = 5.55$, vagy decibelben számolva $Gm = 20 \log_{10} 5.55 = 14.8\, dB$.



9. ábra: Az amplitúdótartalék a Nyquist diagramon

2.3. Nyquist-féle stabilitás kritérium

A Nyquist-féle stabilitása kritériumot mindig **nyitott körre ábrázolunk**, tehát a $W_0(j\omega)$ rendszerre, azonban a következtetést mindig a zárt rendszerre ($W_{cl}(j\omega)$) vonjuk le.

Egzakt Nyquist kritérium: a zárt rendszer stabilis, ha $W_0(j\omega)$ Nyquist diagramja az óramutató járásával ellentétesen annyiszor fogja körül a $-1 + j0$ pontot, amennyi labilis (jobboldali) pólusa van $W_0(j\omega)$-nak.

Egyszerűsített Nyquist kritérium: a zárt rendszer stabilis, ha $W_0(j\omega)$ Nyquist diagramja *nem fogja körül* a $-1 + j0$ pontot.

Az előadás összefoglalása

Frekvenciatartományban két függvényt vizsgálunk és ábrázolunk: az amplitúdó-körfrekvencia függvényt és a fázis-körfrekvencia függvényt. Ezen két függvény a Nyquist diagramon egyetlen polárdiagramon jelenik meg, míg a Bode diagram valójában két külön diagramot tartalmaz, az amplitúdó- és a fázisdiagramot.

Minden bonyolult lineáris rendszer felbontható lineáris alaptagok összegére. Ezek az alaptagok az amplitúdó- és fázismenetre egyenként fejtik ki hatásukat, a hatások azonban összeadódnak (ennek alapja a 4. előadáson tárgyalt szuperpozíció elve). Az 5. előadáson ismertetett stabilitás alaptétele és Hurwitz-kritérium mellett más módszerekkel is meg tudjuk állapítani, hogy egy rendszer stabil-e, sőt, azt is, hogy mennyire stabil. Erre a kérdésre a Bode és a Nyquist stabilitási kritériumok használhatók.

Ellenőrző kérdések

1. Mi a fázistartalék?

2. Mi az amplitúdótartalék?

3. A lineáris alaptagok milyen hatással vannak az amplitúdó-és fázismenetre?

4. Mi a Bode-féle stabilitási kritérium? Milyen körre vizsgáljuk, és milyen körre vonjuk le a következtetést?

5. Mi a Nyquist-féle stabilitási kritérium? Milyen körre vizsgáljuk, és milyen körre vonjuk le a következtetést?