ROBOTIRÁNYÍTÁS

6. előadás

A rendszer kimeneti válasza, rendszerválasz és alaptagok

Dr. habil. Kovács Levente
egyetemi docens

kovacs.levente@nik.uni-obuda.hu

Dr. Haidegger Tamás
egyetemi adjunktus

haidegger@irob.uni-obuda.hu

EKIK Egyetemi Kutató és Innovációs Központ
Óbudai Egyetem Bejczy Antal iRobottechnikai Központ
Élettani Szabályozások Csoport Óbudai Egyetem

Az előadás témája és célja

Ebben az előadásban megismerkedünk azokkal a legfontosabb fogalmakkal, melyek a rendszerválasz időtartománybeli jellemzéséhez szükségesek. Szó lesz ezeknek a fogalmaknak a jelentőségéről, és arról, hogyan következtethetünk a szabályzás minőségére az általuk definiált mérőszámok segítségével. Definiáljuk a dinamikus rendszerek lehetséges állapotait és a stabilitást.

Az előadás második részében gyakorlati példákon keresztül mutatjuk be, hogyan számítható a rendszerválasz időtartományban, a rendszer operátortartományban megadott átviteli függvényének és a rendszer bemenetének ismeretében. Bemutatjuk, hogyan alkalmazható a részlettörtekre bontás a rendszerválasz meghatározásánál, és az inverz Laplace-transzformáció alkalmazásánál módjáról is szó lesz.

Az előadás harmadik részében bemutatjuk azokat az alaptagokat, melyek egy valós, lineáris, dinamikus rendszer leírásában leggyakrabban előfordulnak, a tagok fizikai jelentését és átviteli függvényét tárgyaljuk. Szó lesz az alaptagok hatásvázlatban való elhelyezéséről, a hatásvázlat egyszerűsítéséről és az eredő átviteli függvény kiszámításáról.

Az előadás célja, hogy a hallgatók megismerjék, hogyan lehetséges egy irányítási rendszer leírásába a rendszer bemenetét integrálni, hogyan kapcsolhatók egyes rendszerek, és az eredő rendszer milyen matematikai struktúrával írható le.

Kulcsszavak

Rendszerválasz, végérték, statikus hiba, túllövés, holtidő, felfutási idő, szabályozási idő, dinamikus hibasáv, nyugalmi helyzet, gerjesztett rendszer, stabilis rendszer, labilis rendszer, állandósult állapot, rendszerválasz időfüggvénye, Hurwitz-kritérium, alaptagok, soros kapcsolás, párhuzamos kapcsolás, visszacsatolás, hatásvázlat-egyszerűsítés

Tartalomjegyzék

1. A rendszer viselkedése

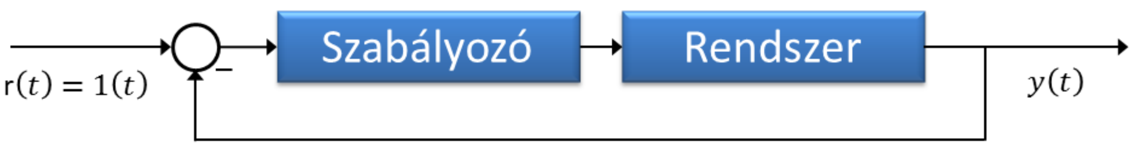
1.1. A rendszer ugrásválaszának értelmezése

Egy dinamikus rendszer viselkedéséről és a szabályzás milyenségéről a rendszer ugrásválasza (átmeneti függvénye) ad információt.

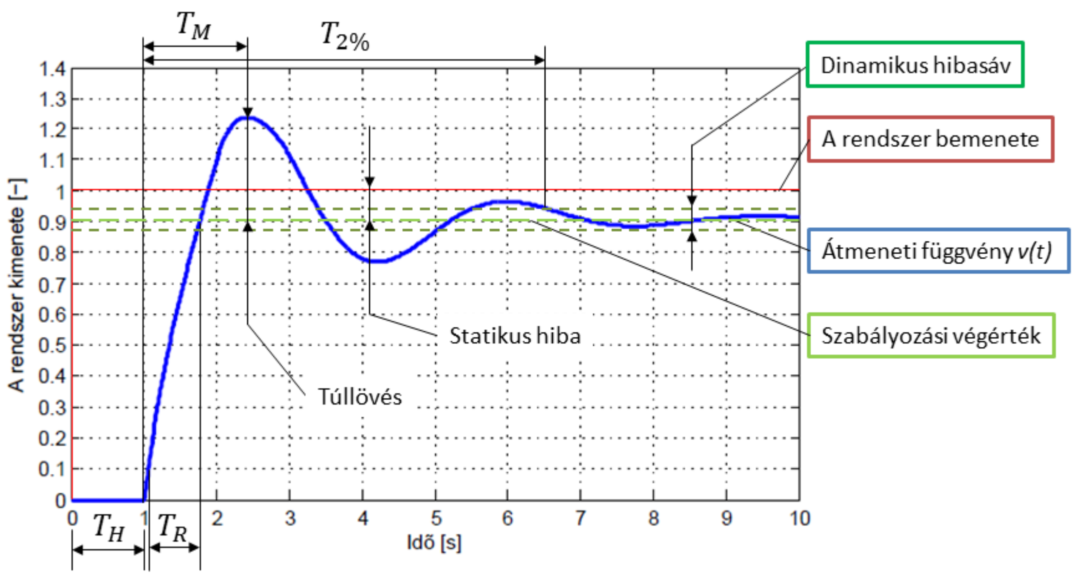
Az átmeneti függvény vizsgálata két alapesetben lehet hasznunkra:

1. Egy rendszer dinamikai jellemzőinek, felépítésének becslése

2. Egy szabályozott rendszer esetében, a szabályozás időtartománybeli jellemzőinek (minőségének) ellenőrzése



Egy általános kéttárolós rendszer tipikus átmeneti függvénye az 1. ábrán látható.



1. ábra: Egy általános kéttárolós rendszer tipikus átmeneti függvénye

Az 1. ábra alapján a következő *alapfogalmakat* vezethetjük be:

Végérték: az átmeneti függvény értéke $t \to \infty$ esetében

Statikus hiba: az átmeneti függvény végértékének előjeles eltérése a bemenetre adott egységugrás értékétől

Túllövés: az átmeneti függvény első maximumának értékének eltérése a végértéktől. Százalékban adjuk meg:

$$\Delta v = \frac{v(T_M) - v_\infty}{v_\infty} \tag{1}$$

T_H Holtidő: az az időtartam, melynek el kell telnie, hogy a bemenet hatása megjelenjen a kimeneten.

T_R Felfutási idő: a végérték 10%-ának és 90%-ának felvétele között eltelt idő

T_M Az átmeneti függvény első maximumának eléréséhez szükséges idő

$T_{2\%}$ Szabályozási idő: az az időtartam, amely után a rendszerválasz nem lép ki a végérték ± 2%-s hibasávjából

1.2. A rendszer állapotának leírása: definíciók

Ahhoz, hogy egy rendszer állapotát egyértelműen meghatározzuk, a rendszer viselkedése alapján célszerű néhány általános definíciót bevezetni.

Mozgásállapot

Adott egy $\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}, t)$ alakban felírható dinamikus rendszer.

A rendszer *nyugalmi állapotban* van, ha a valamennyi állapotváltozójának mozgása megszűnik, azaz $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{0}$.

A nyugalmi helyzetből kitérített, majd magára hagyott rendszer mozgását a rendszer *saját mozgásának* nevezzük.

Ha a nyugalmi helyzetből a rendszert egy időfüggő bemenő jel hatására térítjük ki, *gerjesztett mozgásról* beszélünk.

Stabilitás

A nyugalmi helyzetből kitérített rendszer akkor *stabilis*, ha saját mozgása során visszatér nyugalmi helyzetébe vagy annak közeli környezetébe. *Pl. Matematikai inga*

A nyugalmi helyzetből kitérített rendszer akkor *labilis*, ha saját mozgása során nem tér vissza nyugalmi helyzetébe vagy annak közeli környezetébe. *Pl. Inverz inga*

Állandósult állapot: a rendszer viselkedése $t \to \infty$ esetén. Nem feltétlenül jelent nyugalmi állapotot (pl. harmonikus gerjesztés). Az állandósult állapot meghatározására a Laplace végérték tétel alkalmazható:

$$y_{t\to\infty} = \lim_{s\to 0} s \cdot W(s) \cdot U(s) \tag{2}$$

$W(s)$: a rendszer átviteli függvénye

$U(s)$: a rendszer bemenetének Laplace-transzformáltja

Példa: állandósult állapot számítása

Ha $W(s) = \frac{3}{2+s}$, a rendszer átmeneti függvénye állandósult állapotban:

$$y_{t\to\infty} = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{3}{2+s} \cdot \frac{1}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{3}{2+s} = \frac{3}{2} \tag{3}$$

2. A rendszerválasz becslése

2.1. A Laplace-transzformáció és részlettörtekre való bontás

Az előző előadás anyagában láthattuk, hogyan alakíthatóak át az időtartománybeli differenciálegyenletek algebrai egyenletekké a Laplace-transzformáció segítségével. Hasonlóképpel, megfelelő alakra hozva az operátortartománybeli kifejezéseket, az inverz Laplace-transzformáció segítségével meghatározható a rendszer időbeli lefutása.

Az inverz Laplace-transzformáció könnyen elvégezhető részlettörtekre bontással is, amennyiben a transzformált függvény az operátortartományban racionális törtfüggvény, azaz számlálója és nevezője valós együtthatójú polinom s-ben.

Ha a tört $Y(s)$ nevezője $D(s)$ szorzatalakos formában van, akkor a törtet felbontjuk olyan részlettörtek összegére, melyeknek nevezője az eredeti tört egy-egy szorzatát tartalmazza:

$$Y(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)} = \frac{r_1}{s-p_1} + \frac{r_2}{s-p_2} + \cdots + \frac{r_n}{s-p_n} \tag{4}$$

A részlettörtek számlálóit az alábbi összefüggés segítségével számítjuk:

$$r_n = \left[(s-p_n)\frac{N(s)}{D(s)} \right]\Bigg|_{s=p_n} \tag{5}$$

2.2. Az impulzusválasz időfüggvénye

Az impulzusválasz időfüggvényének számítását a következő példán keresztül mutatjuk be.

Példa: Számítsuk ki az alábbi átviteli függvénnyel megadott rendszer impulzusválaszának időfüggvényét:

$$W(s)=\frac{50}{\left(s^2+7s+10\right)\left(s+10\right)} \tag{6}$$

A megoldáshoz a kimeneti jel Laplace transzformáltjának részlettörtekre bontásával jutunk. Először azonban nézzük meg a bementi jel Laplace transzformáltját:

$$u(t)=\delta(t)\rightarrow U(s)=1 \tag{7}$$

Az átviteli függvény definícióját átrendezve a kimenetre következő kifejezés adódik:

$$Y(s)=W(s)\cdot U(s)=\frac{50}{\left(s^2+7s+10\right)\left(s+10\right)}\cdot 1 \tag{8}$$

A nevezőből az egyik pólus számítás nélkül is meghatározható: $p_1=-10$. A másik két pólus a másodfokú egyenlet megoldóképletéből származtatható: $s^2+72+10=0\rightarrow p_2=-5,\ p_3=-2$

A kimenetre adódó kifejezés operator tartományban tehát felírható a következő szorzatos alakban:

$$Y(s)=\frac{50}{(s+2)(s+5)(s+10)} \tag{9}$$

A részlettörtekre bontáshoz felhasználjuk az (5) egyenletet, így:

$$r_1=\left[(s+10)\frac{50}{(s+2)(s+5)(s+10)}\right]\Bigg|_{s=-10}=1.25 \tag{10}$$

$$r_2=\left[(s+5)\frac{50}{(s+2)(s+5)(s+10)}\right]\Bigg|_{s=-5}=-3.33 \tag{11}$$

$$r_3=\left[(s+2)\frac{50}{(s+2)(s+5)(s+10)}\right]\Bigg|_{s=-2}=2.08 \tag{12}$$

A kiszámított értékek segítségével a kimenet Laplace-transzformáltja felírható részlettörtek összegeként:

$$Y(s)=\frac{r_1}{s-p_1}+\frac{r_2}{s-p_2}+\frac{r_3}{s-p_3}=\frac{1.25}{s+10}+\frac{-3.33}{s+5}+\frac{2.08}{s+2} \tag{13}$$

A kimenet időtartománybeli felírásához inverz Laplace-transzformációra van szükség:

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{Y(s)\right\} \tag{14}$$

A nevezetes függvények Laplace-transzformáltjának táblázatából kiolvasható, hogy

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\}=e^{at} \tag{15}$$

Ezt felhasználva az összeg minden tagjára, a kimenet alakja időtartományban a következőképpen írható fel:

$$y(t)=1.25e^{-10t}-3.33e^{-5t}+2.08e^{-2t}\,. \tag{16}$$

2.3. Az egységugrás-válasz időfüggvénye

Az impulzusválasz-függvényhez hasonlóan számítható a rendszer egységugrás-bemenetre adott válasza időtartományban.

Példa: Számítsuk ki a (6) egyenletben feltüntetett átviteli függvénnyel megadott rendszer egységugrás-válaszának időfüggvényét!

A megoldáshoz itt is a kimeneti jel Laplace transzformáltjának részlettörtekre bontásával jutunk, melyhez először szükség van a bemeneti jel Laplace-transzformáltjának meghatározásához:

$$u(t)=1(t)\rightarrow U(s)=\frac{1}{s} \tag{17}$$

Hasonlóan az előző példához, a kimenet alakja operátortartományban a következő alakban írható fel:

$$Y(s)=W(s)\cdot U(s)=\frac{50}{\left(s^2+7s+10\right)\left(s+10\right)}\cdot\frac{1}{s} \tag{18}$$

Látható, hogy egy új pólus is megjelenik a rendszerben, így a négy pólus a következőképpen alakul: $p_1=-10,\ p_2=-5,\ p_3=-2,\ p_4=0$.

$$r_1 = \left[(s+10) \frac{50}{(s+2)(s+5)(s+10)s} \right] \Bigg|_{s=-10} = -0.26 \tag{19}$$

$$r_2 = \left[(s+5) \frac{50}{(s+2)(s+5)(s+10)s} \right] \Bigg|_{s=-5} = 0.67 \tag{20}$$

$$r_3 = \left[(s+2) \frac{50}{(s+2)(s+5)(s+10)s} \right] \Bigg|_{s=-2} = -1.04 \tag{21}$$

$$r_4 = \left[s \frac{50}{(s+2)(s+5)(s+10)s} \right] \Bigg|_{s=0} = 0.5 \tag{22}$$

Operátortartományban a kimenet a következőképpen írható fel részlettörtekre bontás után:

$$Y(s) = \frac{r_1}{s-p_1} + \frac{r_2}{s-p_2} + \frac{r_3}{s-p_3} + \frac{r_4}{s-p_4} = \frac{-0.26}{s+10} + \frac{0.67}{s+5} + \frac{-1.04}{s+2} + \frac{0.5}{s} \tag{23}$$

Ugyancsak a Laplace-transzformációs táblázatot felhasználva, a rendszer kimenete időtartományban a következő:

$$y(t) = -0.26e^{-10t} + 0.67e^{-5t} - 1.04e^{-2t} + 0.5\,. \tag{24}$$

3. A rendszer átviteli függvényének vizsgálata

3.1. A Hurwitz-kritérium

A Hurwitz-kritérium telesülése a lineáris rendszerek stabilitásának szükséges és elégséges feltétele. A szabályozástechnikában zárt szabályzási rendszerekre alkalmazzák a rendszer átviteli függvényének ismeretében:

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{W_0(s)}{1 + W_0(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \tag{25}$$

$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$ a rendszer *karakterisztikus polinomja.*

A rendszer stabilitásához a következő kritériumoknak *együttesen* kell teljesülniük:

$$a_i > 0 \qquad i = 1 \dots n \tag{26}$$

$$H_i > 0 \qquad i = 1 \dots n \tag{27}$$

H_i a H Hurwitz-mátrixhoz tartozó, főátló menti aldeterminánsokat jelöli, melyek a következőképpen számítandók:

$$H = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} \qquad \begin{aligned} H_1 &= a_{n-1} \\ H_2 &= a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3} \\ H_3 &= a_{n-1}(a_{n-2}a_{n-3} - a_{n-1}a_{n-4}) - -a_n(a_{n-3}^2 - a_{n-1}a_{n-5}) \\ H_4 &= \cdots \end{aligned}$$

2. ábra: A Hurwitz-determináns és az aldeterminánsok számítása

3.2. Alaptagok

A valós rendszerek átviteli függvényét általában felírhatjuk ún. *alaptagok* szorzataként, mely a rendszerek valós mechanikai/elektromos/mágneses stb. viselkedésének a következménye. Ezek a tagok nullad-, első- és másodrendű rendszereket írnak le.

Példa:

$$W(s) = \frac{12s^2 + 8s + 1}{s^4 + 5s^3 + 7s^2 + 2s} = 0.5 \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{0.5s + 1} \cdot (2s + 1) \cdot (6s + 1) \cdot \frac{1}{1 + 3s + s^2} \tag{28}$$

Az egyes tagok jellemzése azok *amplitúdó-* és *fázismenetével* történik. Általánosságban elmondható, hogy egy komplex dinamikus rendszer viselkedését jól közelíthetjük, ha az alaptagok egyéni viselkedéséből, mint alkotóelemekből becsüljük a teljes rendszert (Bode-diagram).

A következőben bemutatjuk ezeket az alaptagokat.

Arányos tag: konstans szorzóként jelenik meg az átviteli függvényben.

$$W(s) = p \tag{29}$$

Egyenes arányosságot jelöl, pl. Newton II. törvénye: $F = m \cdot a$, $W(s) = \frac{a}{F} = \frac{1}{m}$

Egytárolós tag: egy *energiatárolóval* rendelkezik, mely rendszerint egy állapotváltozó deriválását jelenti.

Arányos integrátor:

$$W(s) = \frac{1}{1 + Ts} \tag{30}$$

Arányos deriváló tag:

$$W(s) = 1 + Ts \tag{31}$$

Példa egytárolós tagra: RL-rezgőkör.

$$\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{R}{L}i(t) + \frac{1}{L}V_{be}(t), \quad sI(s) = -\frac{R}{L}I(s) + \frac{1}{L}V_{be}(s) \tag{32}$$

$$W(s) = \frac{I(s)}{V_{be}(s)} = \frac{\frac{1}{L}}{\frac{R}{L}s + 1} \tag{33}$$

Ideális integráló tag:

$$W(s) = \frac{1}{Ts} \tag{34}$$

Ideális deriváló tag:

$$W(s) = Ts \tag{35}$$

Az ideális tagok általában állapotváltozók közti integráló/deriváló kapcsolatot jelentenek.

Például viszkózus csillapítás: $F_b = b\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$, $W(s) = \frac{F_b}{v} = bs$

Kéttárolós tag

A rendszer *tehetetlenségét* jelöli. Általános alakja:

$$W(s) = \frac{1}{T^2s^2 + 2\xi Ts + 1} \tag{36}$$

Például ilyen tömeg-rugó-csillapítás modell:

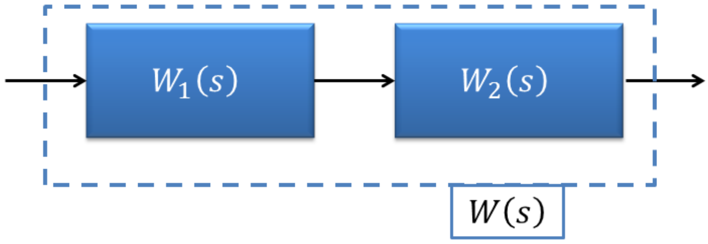
$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F \tag{37}$$

$$W(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + bs + k} = \frac{\frac{1}{k}}{\frac{k}{m}s^2 + \frac{b}{k}s + 1} \tag{38}$$

3.3. Alaptagok kapcsolása

A szabályozókör tagjainak kapcsolása a hatásláncon belül meghatározza az eredő átviteli függvényt. Ilyenek a *soros* kapcsolás, a *párhuzamos* kapcsolás, illetve a pozitív vagy negatív visszacsatolás.

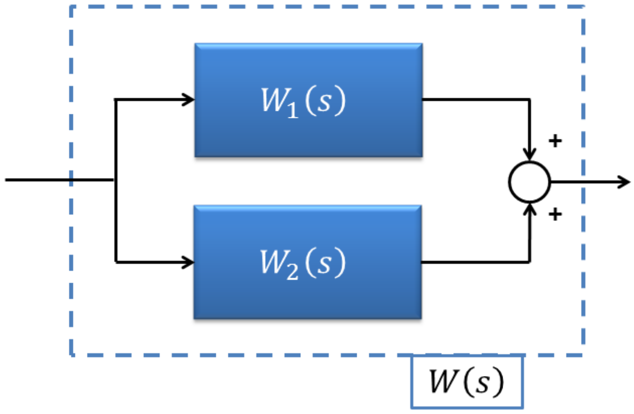
Soros kapcsolás: az egymással sorosan összekapcsolt tagok *összeszorzódnak*



3. ábra: Alaptagok soros kapcsolása

$$W(s) = W_1(s)W_2(s) \tag{39}$$

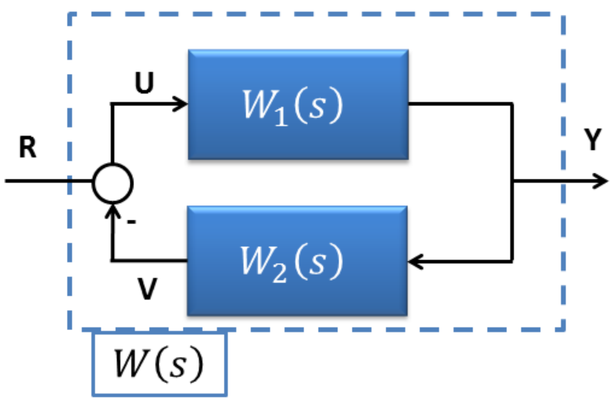
Párhuzamos kapcsolás: az egymással párhuzamosan összekapcsolt tagok *összeadódnak.*



4. ábra: Alaptagok párhuzamos kapcsolása

$$W(s) = W_1(s)+W_2(s) \tag{40}$$

Visszacsatolás: visszacsatolásnak nevezzük, ha a szabályozókörön belül egy jelet közvetlenül vagy egy visszacsatolt tagon keresztül visszavezetünk a hatáslánc egy korábbi pontjába, *hurkot* képezve. A kanonikus szabályozókörben ezt *negatív visszacsatolással* érjük el.



$$Y(s) = W_1(s)U(s)$$

$$U(s) = R(s) - V(s)$$

$$V(s) = Y(s)W_2(s)$$

$$\downarrow$$

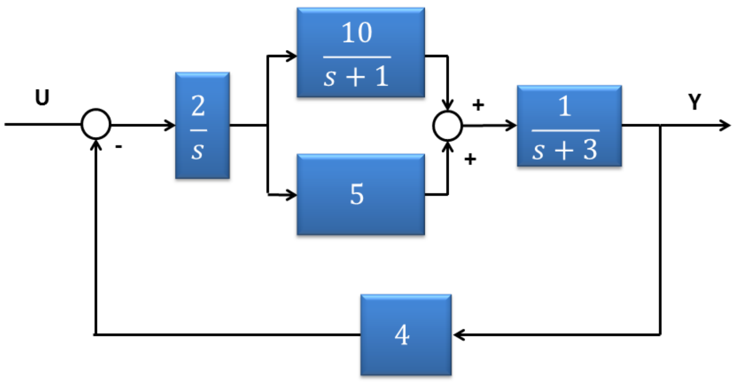
$$Y(s) = W_1(s)\big(R(s) - Y(s)W_2(s)\big)$$

$$W(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{W_1(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)}$$

5. ábra: Alaptagok visszacsatolása

Példa: hatásvázlat egyszerűsítése

Adott a 6. ábrán látható hatásvázlat. Határozzuk meg $W(s)=\dfrac{Y(s)}{U(s)}$ eredő átviteli függvényt!



6. ábra: Az eredeti rendszer hatásvázlata

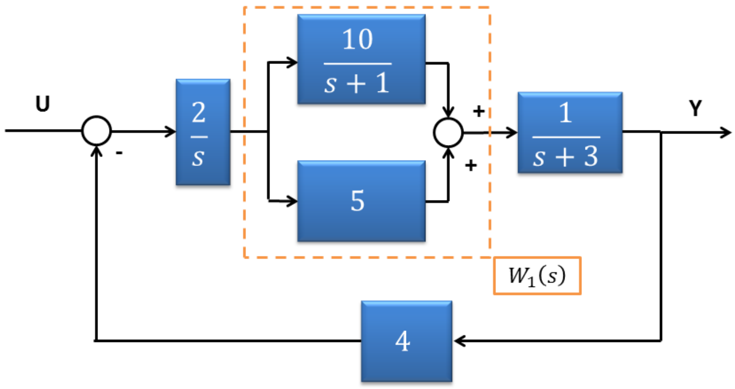
A hatásvázlat egyszerűsítése részletekben történik, az alaptagok összevonásával a soros és párhuzamos kapcsolás, illetve a visszacsatolt tagok eredőjének számításához használt egyenlettel. Elsőként a párhuzamosan kapcsolt tagokat vonjuk össze (7. ábra és (40)).

$$W_1(s) = 5 + \frac{10}{s+1} = \frac{5s+15}{s+1} = 5\frac{s+3}{s+1} \qquad (40)$$

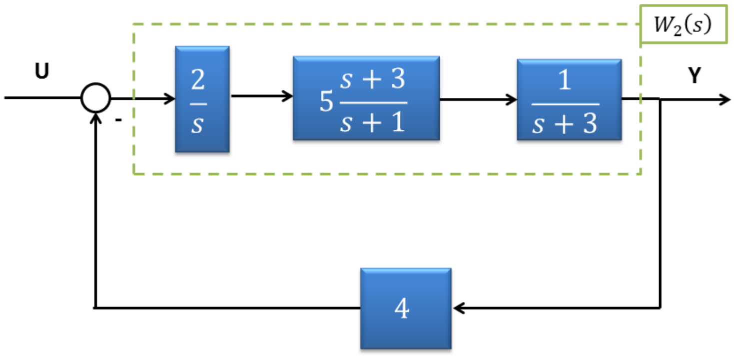
A következő lépésben az egymással sorosan kapcsolt tagokat vonjuk össze, azaz szorozzuk őket össze (8. ábra és 41).

$$W_2(s) = \frac{2}{s}\cdot 5\cdot \frac{\cancel{s+3}}{s+1}\cdot\frac{1}{\cancel{s+3}} = \frac{10}{s(s+1)} \qquad (41)$$

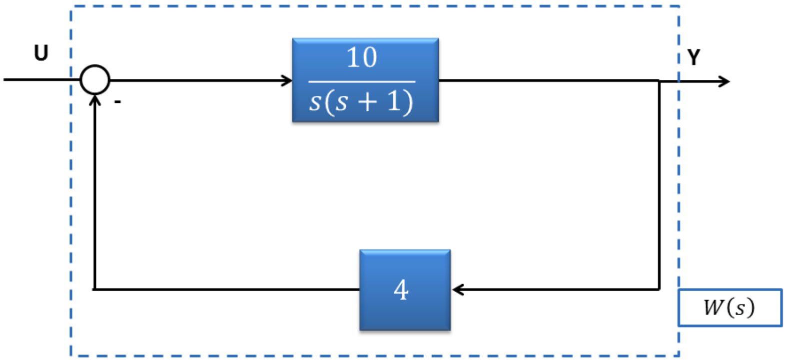
Végül, a visszacsatolt rendszert egyetlen átviteli függvénnyé alakítjuk (9. ábra és (42)).



7. ábra: Párhuzamosan kapcsolt tagok összevonása



8. ábra: Sorosan kapcsolt tagok összevonása



9. ábra: A visszacsatolt rendszer egyszerűsítése

$$W(s) = \frac{\frac{10}{s(s+1)}}{1 + 4\frac{10}{s(s+1)}} = \frac{10}{s^2 + s + 40} \tag{42}$$

A (42) egyenlet tehát a rendszer eredő átviteli függvénye, melyet a hatásvázlat részletekben történő egyszerűsítésével határoztunk meg.

Az előadás összefoglalása

Ebben az előadásban bemutattuk, milyen jellemzőkkel jellemezhető egy rendszer átmeneti függvénye, és hogy ezek a jellemzők hogyan kapcsolódnak a szabályozás minőségéhez. Láthattuk, hogyan számítható egy rendszer kimenetének időfüggvénye a rendszer és a bemeneti jel függvényében, mely a kurzus következő előadásaiban felmerülő példafeladatokban gyakran visszatérő módszer lesz. A hatásvázlat egyszerűsítése és az alaptagok kapcsolása a szabályozótervezés egyik fontos lépése. Mint ahogyan azt ebben az előadásban is láthattuk, a rendszer elemeinek átviteli függvénnyel való leírása lehetővé teszi az elemek egyetlen komplex hatásvázlatban való egyesítését, mely az irányítástechnikában a rendszerek leggyakrabban alkalmazott leírása.

Ellenőrző kérdések

1. Milyen értékekkel jellemezhető egy kéttárolós rendszer átmeneti függvénye? Mi ezeknek a jellemzőknek a fizikai tartalma?

2. Mit jelent, ha egy rendszer nyugalmi állapotban van, mi a saját mozgás és gerjesztett mozgás, és mikor beszélünk állandósult állapotról?

3. Hogyan számítató egy rendszer időtartománybeli lefutása adott bemenetre? Hogyan változik a rendszerválasz, ha a példákban szereplő rendszerre egységsebességugrás vagy harmonikus gerjesztést kapcsolunk?

4. Mi a Hurwitz-kritérium? Hogyan alakul a Hurwitz-determináns első-, másod-, harmad- és negyedrendű rendszerek esetén?

5. Hogyan egyszerűsíthető a hatásvázlat sorosan és párhuzamosan kapcsolt tagok esetén? Mi lenne az átviteli függvény pozitív visszacsatolás esetén?