ROBOTIRÁNYÍTÁS

10. előadás
Összetett gyakorlati példa

Dr. habil. Kovács Levente
egyetemi docens

Dr. Haidegger Tamás
egyetemi adjunktus

EKIK
Egyetemi Kutató és Innovációs Központ

K-MOOC

ÓBUDAI EGYETEM
Bejczy Antal iRobottechnikai Központ

Physiological Controls Group

Élettani Szabályozások Csoport
Óbudai Egyetem

Tartalom

1. A modell áttekintése

2. A rendszer átviteli függvényének levezetése

3. Soros PI-szabályozó tervezése

1. A modell áttekintése

A modell áttekintése

Az alábbi gyakorlati példában egy DC-motorral hajtott, autókban található kormánymű leegyszerűsített modelljén mutatjuk be a soros PI-kompenzációt, lépésről lépésre.

A rendszer bemenete a DC-motorra kapcsolt feszültség, kimenete pedig a kormány szögelfordulása.

A modell két fő komponensből épül fel:

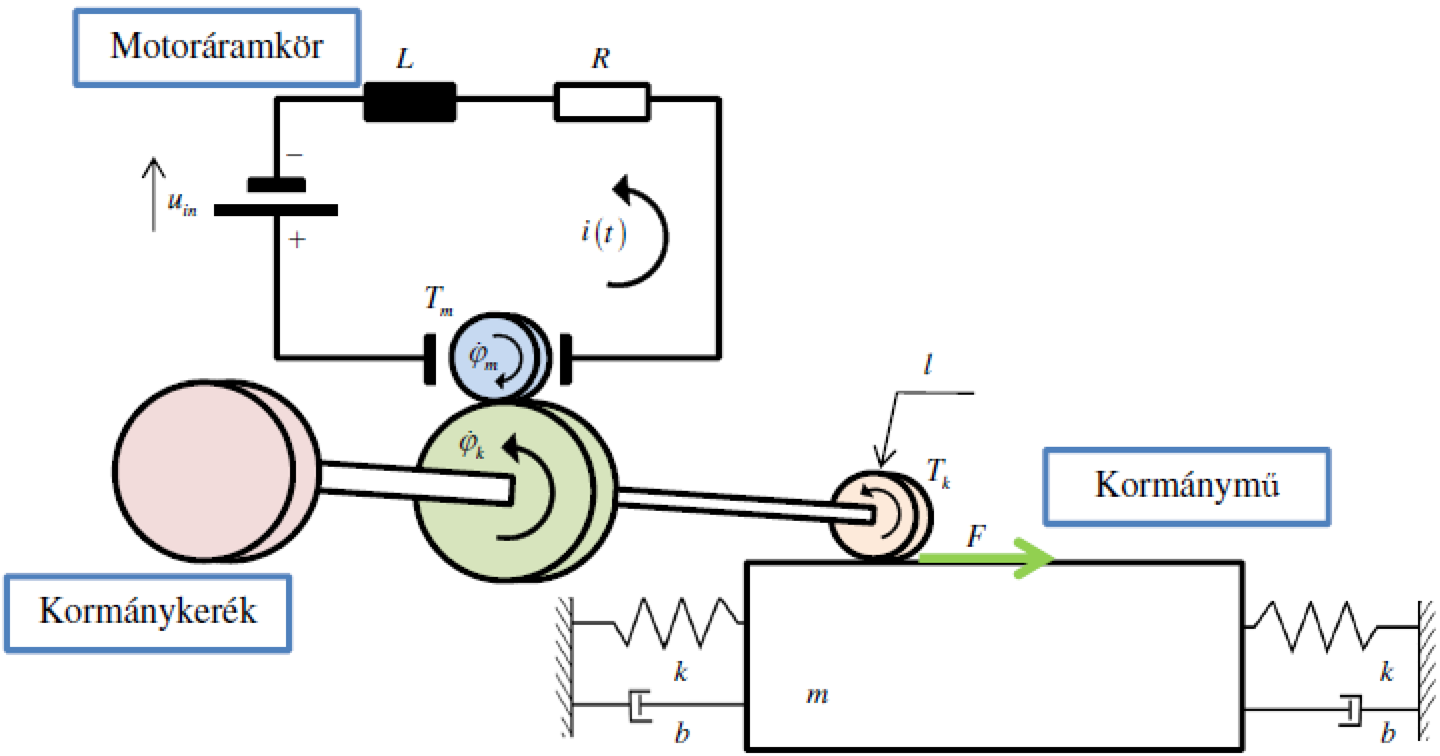
1. a DC-motor áramköre
2. a motor által meghajtott mechanizmus

A komponensek egyéni viselkedését és kapcsolatát a fizikai törvények alapján matematikai összefüggésekkel írjuk le.

A végső összefüggés a rendszer átviteli függvénye, melyhez a konvencionális PI-szabályozó tervezési módszerek segítségével tervezünk szabályozót.

A modell áttekintése

A kormánymű dinamikai modellje:



A modell áttekintése

A rendszer paraméterei:

u_{in}- a DC-motoráramkörre kapcsolt feszültség, a rendszer bemenete

φ_k- a kormány szöghelyzete, a rendszer kimenete

i- a DC-motoráramkör hurokárama

R- a motoráramkor lineáris ellenállása

L- a motoráramkör induktív ellenállása

φ_m- a DC-motor tengelyének szöghelyzete

r- a DC-motor és a kormány tengelyei közötti fogaskerék-áttétel

l- a kormánymű fogaslécét meghajtó fogaskerék sugara

m- a kormánymű tömege

k- a kormánymű rugalmassága

b- a kormánymű csillapítása

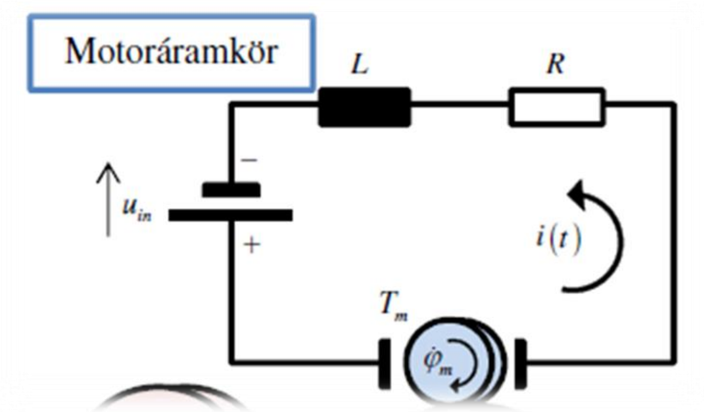
F- a kormányműre a fogasléc által ható erő

T_k- a kormány tengelyére a kormányműről visszaható nyomaték

2. A rendszer átviteli függvényének levezetése

A DC-motor áramköre

A felhasználandó egyenleteket a DC-motor áramkörével kezdjük.



Az áramkörben u_{in} feszültség hatására $i(t)$áramerősség jelenik meg. Az áramkör egyes tagjain eső feszültségek előjeles összege zérus, így felírható, hogy

$$u_{in} - u_R - u_L - u_{EMF} = 0$$

A DC-motor áramköre

A lineáris ellenálláson eső feszültség Ohm törvénye alapján:

$$u_R(t) = Ri(t)$$

A tekercsen eső feszültség arányos az áramerősség változásával:

$$u_L(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$

A Lenz-szabály alapján a motor tekercseiben indukálódó áram a motor fordulatszámával arányos feszültséget (elektromotoros erő) hoz létre:

$$u_{EMF}(t) = \dot{\varphi}_m(t) \cdot K_E$$

K_E a motorállandó, DC-motorra jellemző, katalógusból leolvasható mennyiség, $\dot{\varphi}_m$ pedig a motor fordulatszáma.

Behelyettesítve:

$$\boxed{u_{in}(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + K_E\dot{\varphi}_m(t)}$$

A DC-motor áramköre

A motoráramkör kimenete a motor által kifejtett T_m nyomaték, ez teremti majd meg a kapcsolatot a kormánymű mechanikájával.

DC-motorok esetén a motor által kifejtett nyomaték egyenesen arányos a motoráramkör hurokáramával:

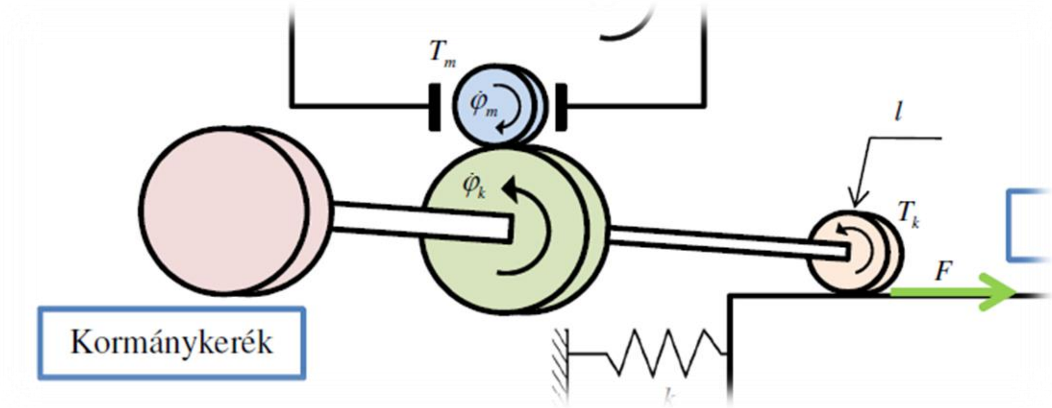
$$T_m(t) = K_M i(t)$$

K_M motorállandó értéke szintén katalógusból kiolvasható. A mérnöki gyakorlatban a két motorállandó értékét azonosnak vesszük, azaz:

$$K_M = K_E = K$$

A kormánykerék kapcsolata

A motor kimeneti tengelye fogaskerekeken keresztül (kék) csatlakozik a kormánytengelyhez (zöld). A fogaskerekek közötti áttétel felhasználásával:

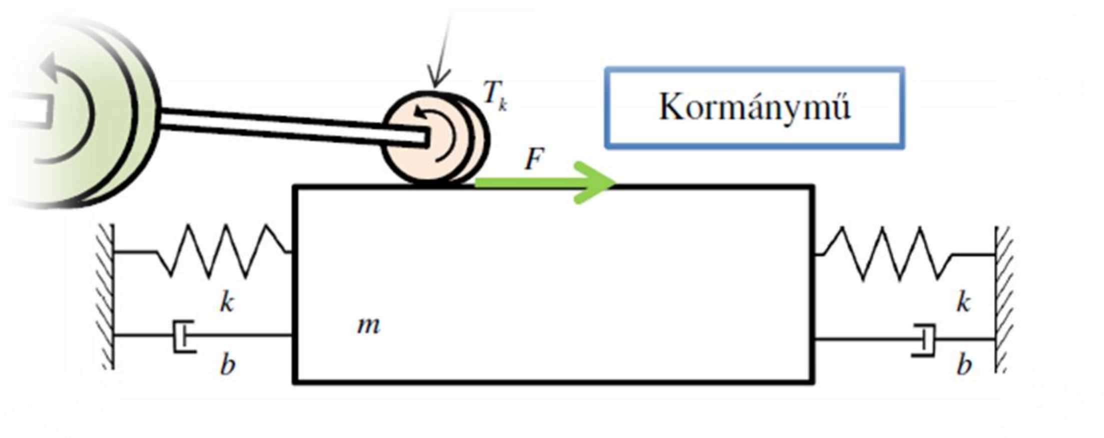


$$\dot{\varphi}_m = r\dot{\varphi}_k$$
$$T_m = \frac{1}{r} T_k$$

Mivel a kormány tengelye merev, a T_k nyomaték megjelenik a halványpiros fogaskeréken is, mely a testre F erőt gyakorol. Az erőkar ismeretében ez az erő megegyezik a nyomaték és a kerék sugarának hányadosával:

$$F = \frac{T_k}{l}$$

A kormánymű mechanikája



Az m tömegű test két-két rugó és csillapítás elemen keresztül kapcsolódik a merev falhoz – ami esetünkben a rugalmas kerekek és a merev talaj kapcsolatát jelenti. Az ismert összefüggéseket felhasználva a rendszer mozgásegyenlete:

$$\boxed{m\ddot{x} + 2b\dot{x} + 2kx = F}$$

A test elmozdulása megegyezik a halványpiros fogaskerék elfordulásához tartozó ívhosszal, ami megteremti a kapcsolatot x elmozdulás és φ_k szögelfordulás között:

$$x = \varphi_k \cdot l$$

Az rendszer elemeinek egyesítése

Felírásra kerültek a szükséges fizikai összefüggések.

A feladat: a bemeneti és kimeneti változók kifejezése a modellparaméterek függvényében. A rendelkezésre álló egyenletek:

$$(1)\quad u_{in} = R \cdot i + L\frac{di}{dt} + K\dot{\varphi}_m$$

$$(2)\quad T_m = K \cdot i$$

$$(3)\quad \dot{\varphi}_m = r\dot{\varphi}_k$$

$$(4)\quad T_m = \frac{1}{r}T_k$$

$$(5)\quad F = \frac{T_k}{l}$$

$$(6)\quad F = m\ddot{x} + 2b\dot{x} + 2kx$$

$$(7)\quad x = \varphi_k \cdot l$$

Az rendszer elemeinek egyesítése

Kifejezhetők a bemenő és kimenő változók:

$$(8)\quad F = l(m\ddot{\varphi}_k + 2b\dot{\varphi}_k + 2k\varphi_k)\quad (6{,}7\ egyenletekből)$$

$$(9)\quad T_k = l^2(m\ddot{\varphi}_k + 2b\dot{\varphi}_k + 2k\varphi_k)\quad (5{,}8\ egyenletekből)$$

$$(10)\quad r \cdot T_m = l^2\left(m\frac{1}{r}\ddot{\varphi}_m + 2b\frac{1}{r}\dot{\varphi}_m + 2k\frac{1}{r}\varphi_m\right)\quad (3{,}4{,}9\ egyenletekből)$$

$$(11)\quad K \cdot i = \frac{l^2}{r^2}(m\ddot{\varphi}_m + 2b\dot{\varphi}_m + 2k\varphi_m)\quad (2{,}10\ egyenletekből)$$

A Laplace-transzformációt elvégezzük az (1) és (11) egyenleteken:

$$(L1)\quad U(s) = RI(s) + LsI(s) + K\Phi_m(s)s \rightarrow I(s) = \frac{U(s) - K\Phi_m(s)s}{Ls + R}$$

$$(L2)\quad KI(s) = \frac{l^2}{r^2}\left(ms^2\Phi_m(s) + 2bs\Phi_m(s) + 2k\Phi_m(s)\right)$$

Az rendszer elemeinek egyesítése

Az (L1) és (L2) egyenletekből $I(s)$ kiejthető, így a kifejezés tovább egyszerűsödik:

$$K\frac{U(s)-Ks\Phi_m(s)}{Ls+R}=\frac{l^2}{r^2}\left(ms^2\Phi_m(s)+2bs\Phi_m(s)+2k\Phi_m(s)\right)$$

A kimenő és bemenő jelek arányát kifejezve a rendszer átviteli függvénye meghatározható:

$$W(s)=\frac{\Phi_k(s)}{U(s)}=\frac{\frac{Kr}{l^2}}{(Ls+R)(ms^2+2bs+2k)+\frac{K^2r^2}{l^2}s}$$

Paraméterértékek behelyettesítése

Legyenek a rendszer fizikai paraméterei a következők:

$$K = 0.15\,[Vs]$$
$$r = 100\,[-]$$
$$l = 0.1\,[m]$$
$$L = 10\,[H]$$
$$R = 350\,[\Omega]$$
$$m = 80\,[kg]$$
$$b = 25\,[Ns/m]$$
$$k = 1\,[N/m]$$

Behelyettesítve az átviteli függvénybe, ismerős formára hozható a kifejezés::

$$\boxed{W(s) = \frac{\Phi_k(s)}{U(s)} = \frac{1500}{800s^3 + 28500s^2 + 40000s + 700}}$$

3. Soros PI-szabályozó tervezése

A rendszer zérus-pólus alakja

A rendszer pólusai meghatározhatóak a MATLAB vagy más numerikus számításokat végző programcsomag, segítségével, ennek hiányában pedig más közelítő módszerek, pl. a Newton-Rhapson módszer segítségével.

A rendszer pólusai azok az *s* értékek, melyekre a nevező értéke zérus. Ezek az értékek a következők:

$$p_1 = -0.0177$$
$$p_2 = -1.4451$$
$$p_3 = -34.1621$$

Az átviteli függvény tehát felírható a következő alakban:

$$W(s) = \frac{1500}{800} \frac{1}{(s + 34.1621)(s + 1.4451)(s + 0.0177)}$$

A rendszer időállandós alakja

A gyakorlatban célszerű a rendszer *időállandós* alakját alkalmazni, melynek lényege, hogy a nevezőben található szorzat tagjainak konstans tagja (ha van) egységnyi legyen:

$$W(s) = \frac{1.875}{34.1621 \cdot \left(\frac{1}{34.1621}s + 1\right) \cdot 1.4451 \cdot \left(\frac{1}{1.4451}s + 1\right) \cdot 0.0177 \cdot \left(\frac{1}{0.0177}s + 1\right)}$$

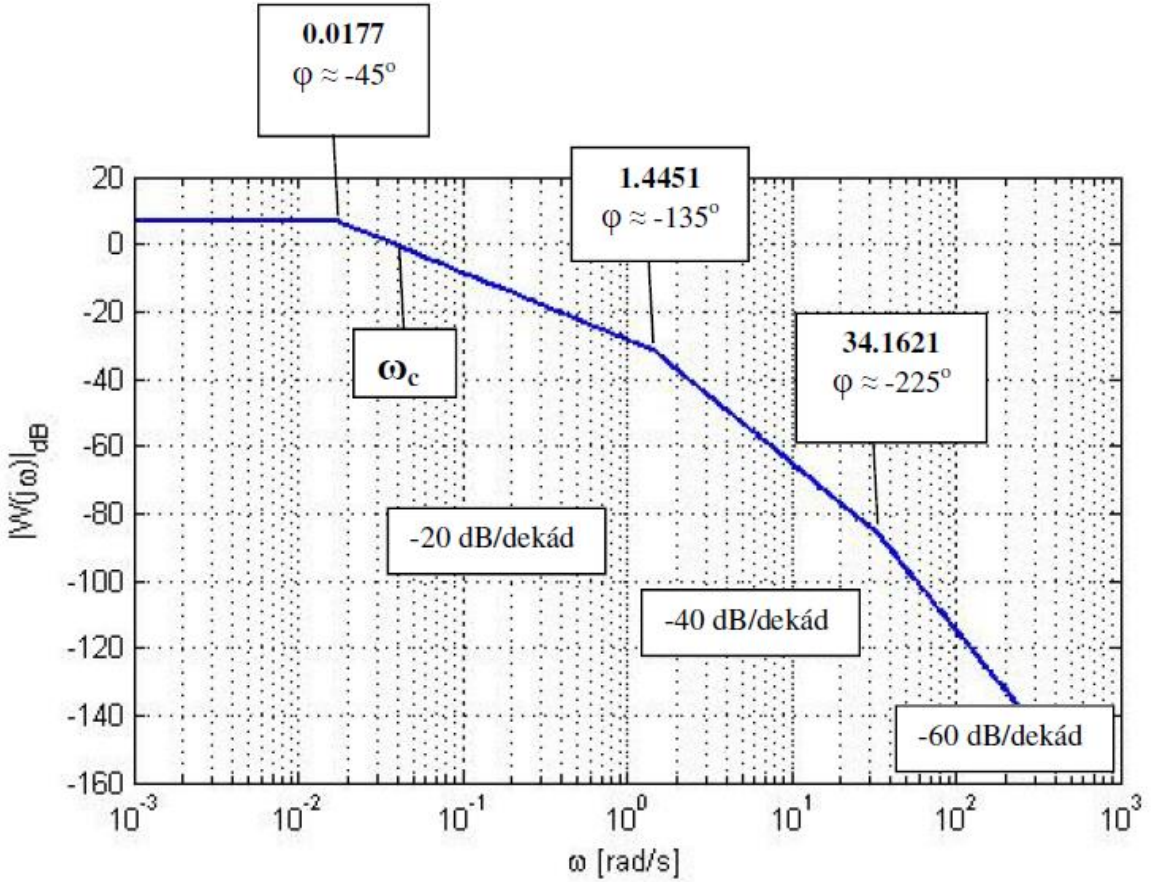
$$\boxed{W(s) = \frac{2.146}{(0.0273s + 1)(0.692s + 1)(56.4s + 1)}}$$

Az időállandók:

$$T_1 = 56.4 \text{ sec}$$
$$T_2 = 0.692 \text{ sec}$$
$$T_3 = 0.0273 \text{ sec}$$

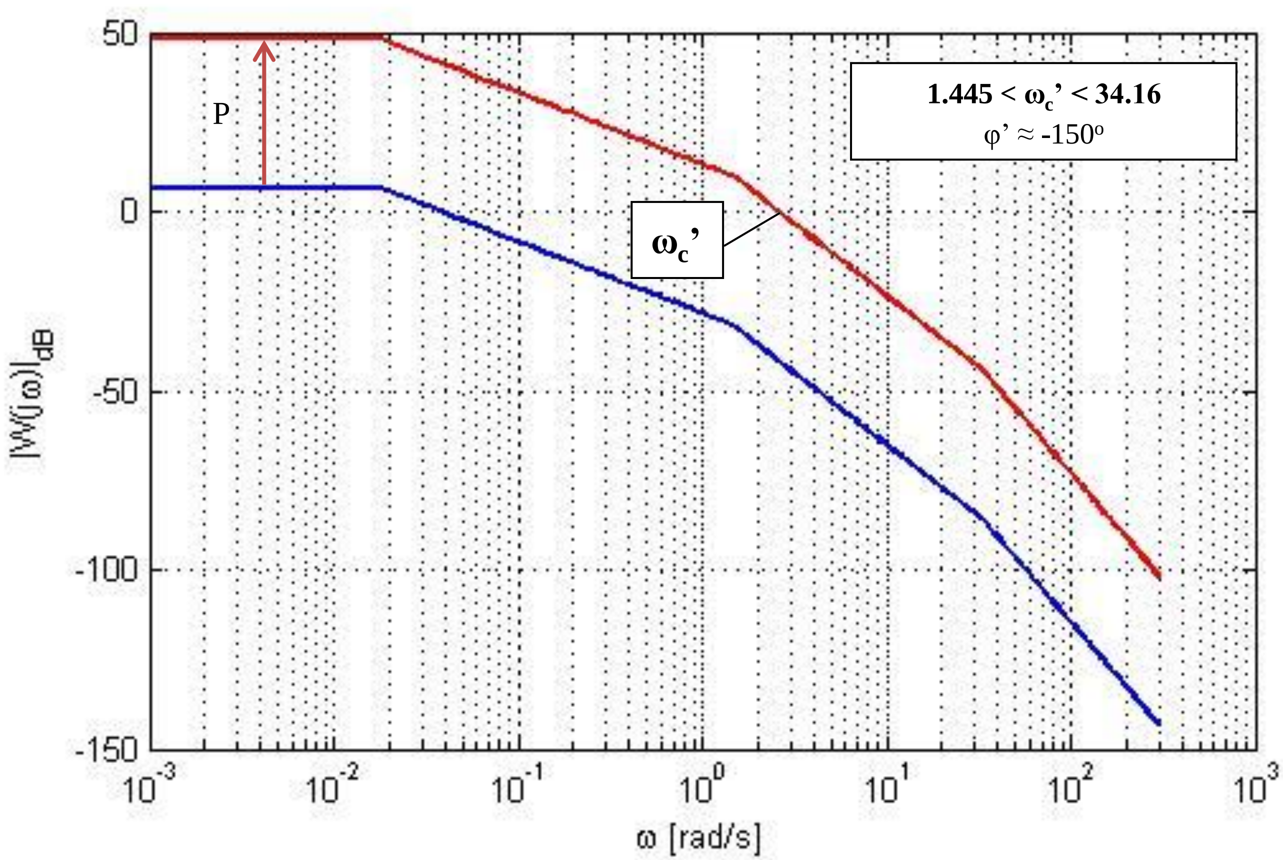
A rendszer Bode-diagramja

A rendszer Bode-diagramja megszerkeszthető a szokásos módon, közelítő integráló tagok segítségével. A bekeretezett értékek a törési frekvenciákat mutatják, ω_c a vágási körfrekvencia.



Soros PI-kompenzáció

A cél egy olyan PI szabályzó tervezése, mely a Bode-diagramot párhuzamosan eltolja önmagával úgy, hogy a 0 dB értéket $\varphi' = 150°$ értéknél metssze (fázistartalék: $\varphi' = 150°$). Először a *P-szabályzót* tervezzük meg:



Soros PI-kompenzáció

A P-szabályozóval piros színnel jelzett görbét kívánjuk előállítani.

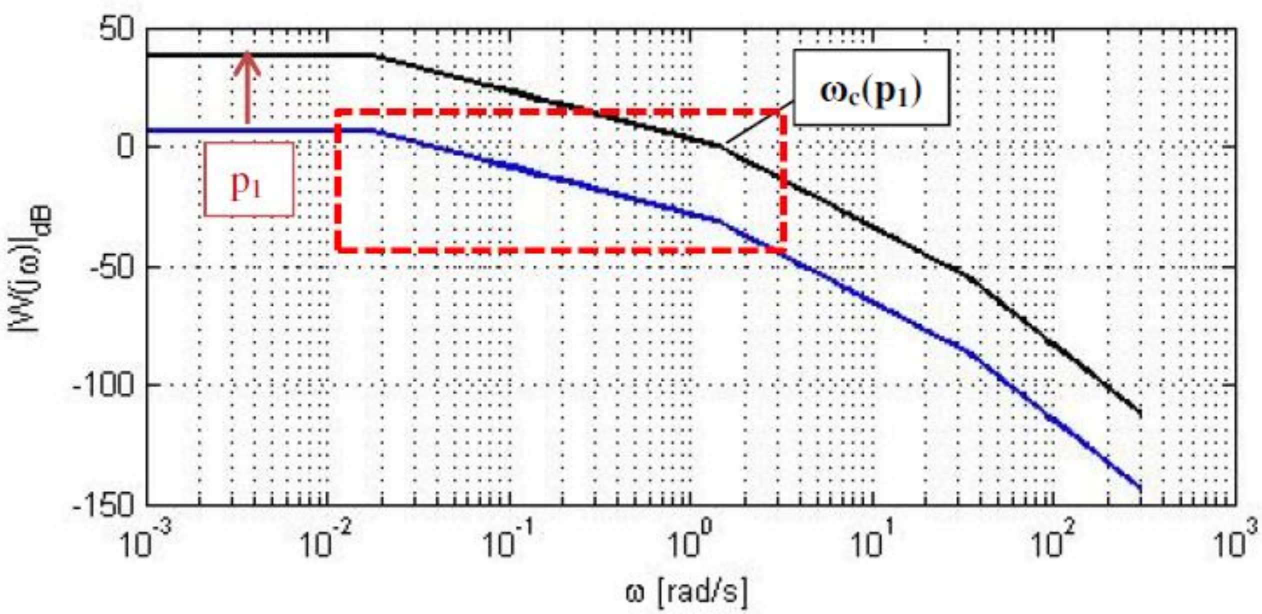
Az új vágási körfrekvencia, ω_c a második és a harmadik töréspont között helyezkedik el, hiszen a második töréspontban a fázis elméleti értéke csak $\varphi = 135°$, a második töréspontban pedig már $\varphi = 255°$.

Az elérni kívánt fázis azonban $\varphi' = 150°$. A feladat megoldásához nincs közvetlenül szükség a Bode-fázisdiagram megszerkesztésére, de érdemes ellenőrzésképpen felrajzolni azt.

Soros PI-kompenzáció

A P értékkel való eltolás a kétszeres törés miatt két lépésben kerül elvégzésre.

Először a Bode-diagramot önmagával párhuzamosan eltoljuk felfelé addig, amíg a második töréspont rá nem fekszik a 0 dB tengelyre, mint ahogyan az az ábrán is látható:



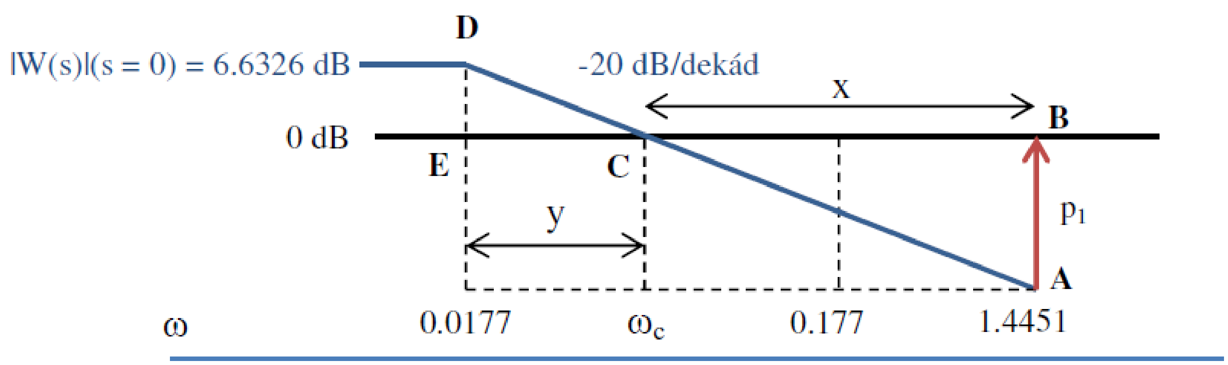
Soros PI-kompenzáció

Az így meghatározott új vágási körfrekvencia:

$$\omega_c^{p_1} = \frac{1}{T_2} = 1.445\ \frac{rad}{s}$$

Az eltolás valójában egy arányos taggal való szorzást jelent. Kérdés: mekkora legyen p_1?

A meghatározáshoz szükség lesz a piros szaggatott vonallal jelzett terület külön vizsgálatára:



Soros PI-kompenzáció

Első lépésként a **DEC** háromszöget vizsgáljuk. **C** pont a vágási körfrekvencia, melynek pontos értékét nem ismerjük, de kiszámíthatjuk. **D** pontban a nagyítás értéke kiszámítható a megfelelő behelyettesítéssel:

$$\overline{DE} = |W(j\omega)||_{\omega=0.0177\ rad/s}$$

A számítást könnyebbé tehetjük, ha a közelítő értéket határozzuk meg, hiszen a nagyítás állandó az $\omega < 0.0177\ rad/s$ tartományban (a Bode-diagram itt vízszintesen fut). Tehát közelítve:

$$\overline{DE} \approx |W(j\omega)||_{\omega=0} = 2.146 = 6.6326\,dB$$

Fontos megjegyezni, hogy a két érték némileg eltérhet egymástól, hiszen jelen esetben a Bode-diagramot tört vonalakkal helyettesítettük, holott a valóságban az átmenet a töréspontoknál „lekerekített”.

Soros PI-kompenzáció

A logaritmikus skálán a vágási körfrekvencia értékét a következőképpen kell kifejeznünk:

$$\omega_c = 0.0177 \cdot 10^y$$

y az **EC** szakasz hossza, a **DEC** háromszög **DC** oldalának meredeksége pedig $20\ dB$. Ebből következik, hogy a **DE** szakasz hossza az **EC** oldal hosszának és a **DC** meredekségének szorzata, azaz:

$$\overline{DE} = 6.6326\, dB = 20\, \frac{dB}{dekád} \cdot y = 20 \cdot \log\left(\frac{\omega_c}{0.0177}\right)$$

A szabályozatlan rendszer vágási körfrekvenciája tehát:

$$\boxed{\omega_c = 0.0177 \cdot 10^{\frac{6.6326}{20}} = 0.0379\ \frac{rad}{s}}$$

Soros PI-kompenzáció

A p_1 arányos nagyítással, ami valójában a W(s) átviteli függvény elé kerülő konstans szorzó, a Bode-diagramot úgy toljuk el, hogy az **A** pont a **B** pontba kerüljön.

Ehhez most az **ABC** háromszög vizsgálatára van szükség. **A** vágási körfrekvencia ismeretében már ismert az **AB** távolság, ha a **B** pont frekvenciáját az **A** pontban levő frekvenciával fejezzük ki:

$$\omega(B) = 1.4451\ rad/s = \omega(C) \cdot 10^x = 0.0379 \cdot 10^x$$

x azt fejezi ki, hogy hány dekád távolságra van **C** pont **B** ponttól. Egy dekád $(x = 1)$ esetén $\omega(C)$ pontosan tízszerese lenne $\omega(B)$ értékének, két dekád $(x = 2)$ esetén százszorosa, stb. Ha megoldjuk a fenti egyenletet, x értékére a következő adódik:

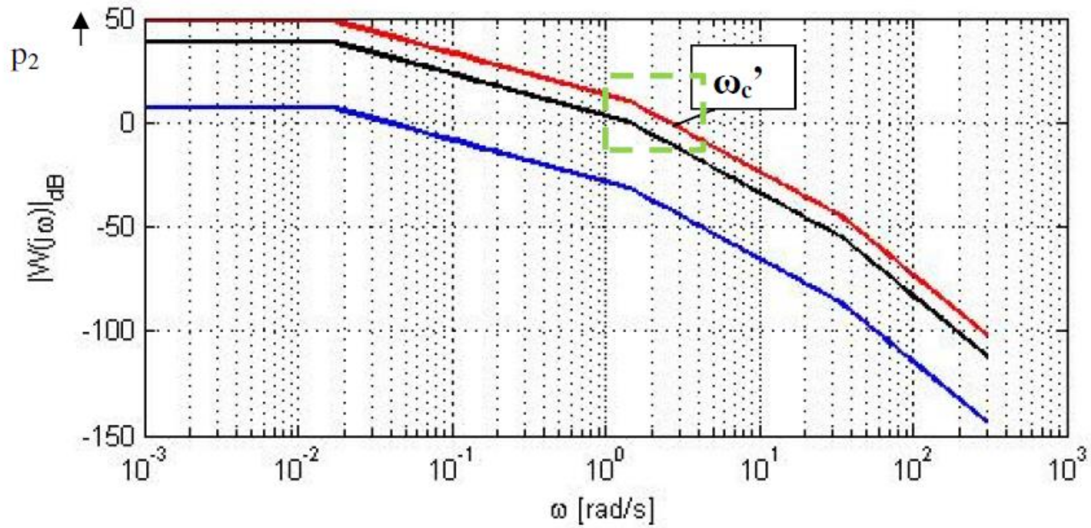
$$1.4451 = 0.0379 \cdot 10^x \;\rightarrow\; x = \log\left(\frac{1.4451}{0.0379}\right) = \log(38.1293) = 1.5813$$

Soros PI-kompenzáció

Az AB szakasz hossza a korábbiakkal összhangban, mely egyben a p_1 erősítés értéke is, a következőképpen számolható:

$$\overline{AB} = p_1 = 20\,\frac{dB}{dek\acute{a}d} \cdot 1.5813\; dek\acute{a}d = 31.626\, dB$$

A következő lépésben p_2 értéke kerül meghatározásra. Ebben az esetben a fekete színnel jelzett görbét toljuk el párhuzamosan a piros színnel jelzett görbének fedésébe úgy, hogy a $0\ dB$ tengelyt a kívánt ω'_c körfrekvenciában vágja át:



Soros PI-kompenzáció

Mielőtt meghatároznánk p_2 értékét, szükségünk van ω'_c értékére, melyet mi határozunk meg a kijelölt fázistartalék alapján. Mivel a függőleges eltolás nem módosítja a Bode-fázisdiagram alakját, ezért ω'_c értékét az eredeti rendszer alapján, pontosabban annak egy jó közelítésének alapján számítjuk ki.

A $\varphi_t = 30°$ fázistartalék értéke , azaz a rendszer fázisa ebben a pontban:

$$\varphi = \varphi_t - 180° = 30° - 180° = 150°$$

Az átviteli függvény ismeretében a fázis a körfrekvencia függvényében kiszámítható:

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{\mathrm{Im}\{W(j\omega)\}}{\mathrm{Re}\{W(j\omega)\}}$$

Soros PI-kompenzáció

Belátható, hogy ez a kifejezés kézzel kiszámítva hosszadalmas folyamat, hiszen a $W(j\omega)$ rendszer nevezőjében harmadfokú polinom áll. A számítás kivitelezhető, de a kifejezésben megjelenő ω^3 nehézkessé teszi a zárt alakú megoldás megtalálását.

Ha a rendszer két legkisebb időállandóhoz tartozó törése, ebben az esetben T_2 és T_3 kellően messze vannak egymástól (a „kellően" szó némi mérnöki intuíciót is takar, a valóságban egymásnak legalább kétszerese a két érték), akkor a kisebbik időállandójú tagot egyszerűen elhagyhatjuk a számítások egyszerűsítésének érdekében.

A módosított átviteli függvény ezért így alakul:

$$W'(s) = \frac{2.146}{\cancel{(0.0273s+1)}(0.692s+1)(56.4s+1)} = \frac{2.146}{(0.692s+1)(56.4s+1)}$$

Soros PI-kompenzáció

Feltételezve, hogy a közelítés nem befolyásolja a számítások eredményét számottevően, a fázisra vonatkozó összefüggés a következőképpen alakul:

$$\tan\varphi(\omega'_c) = \frac{\mathrm{Im}\{W'(j\omega'_c)\}}{\mathrm{Re}\{W'(j\omega'_c)\}}$$

A kifejezésből csak ω'_c értéke ismeretlen.

Az átviteli függvény átírható a következő alakra:

$$W(j\omega) = \frac{2.146}{(0.692j\omega + 1)(56.4j\omega + 1)} = \frac{2.146}{-39.03\omega^2 + 57.092j\omega + 1}$$
$$= \frac{2.146}{(1 - 39.03\omega^2) + j \cdot 57.092\omega}$$

Soros PI-kompenzáció

A valós és a képzetes részek különválasztandók:

$$W(j\omega)=\frac{2.146}{\left(1-39.03\omega^2\right)+j\cdot 57.092\omega}=\frac{\left(1-39.03\omega^2\right)-j\cdot 57.092\omega}{\left(1-39.03\omega^2\right)-j\cdot 57.092\omega}\cdot\frac{2.146}{\left(1-39.03\omega^2\right)+j\cdot 57.092\omega}=$$

$$=\frac{2.146-83.7584\omega^2-j\cdot 122.3842\omega}{\left(1-39.03\omega^2\right)^2+57.092^2}=\underbrace{\frac{2.146-83.7584\omega^2}{\left(1-39.03\omega^2\right)^2+57.092^2}}_{\operatorname{Re}\{W(j\omega)\}}+j\cdot\underbrace{\frac{-122.3842\omega}{\left(1-39.03\omega^2\right)^2+57.092^2}}_{\operatorname{Im}\{W(j\omega)\}}$$

Ha a fázisértéket behelyettesítjük, a körfrekvenciára a következő egyenlet adódik:

$$\tan\varphi=\tan\left(-150^\circ\right)=0.5774=\frac{\dfrac{-122.3842\omega}{\left(1-39.03\omega^2\right)^2+57.092^2}}{\dfrac{2.146-83.7584\omega^2}{\left(1-39.03\omega^2\right)^2+57.092^2}}=\frac{-122.3842\omega}{2.146-83.7584\omega^2}$$

Soros PI-kompenzáció

Átrendezve:

$$\frac{-122.3842\omega}{2.146 - 83.7584\omega^2} = 0.5774 \rightarrow -48.3621\omega^2 + 122.3842\omega + 1.2391 = 0$$

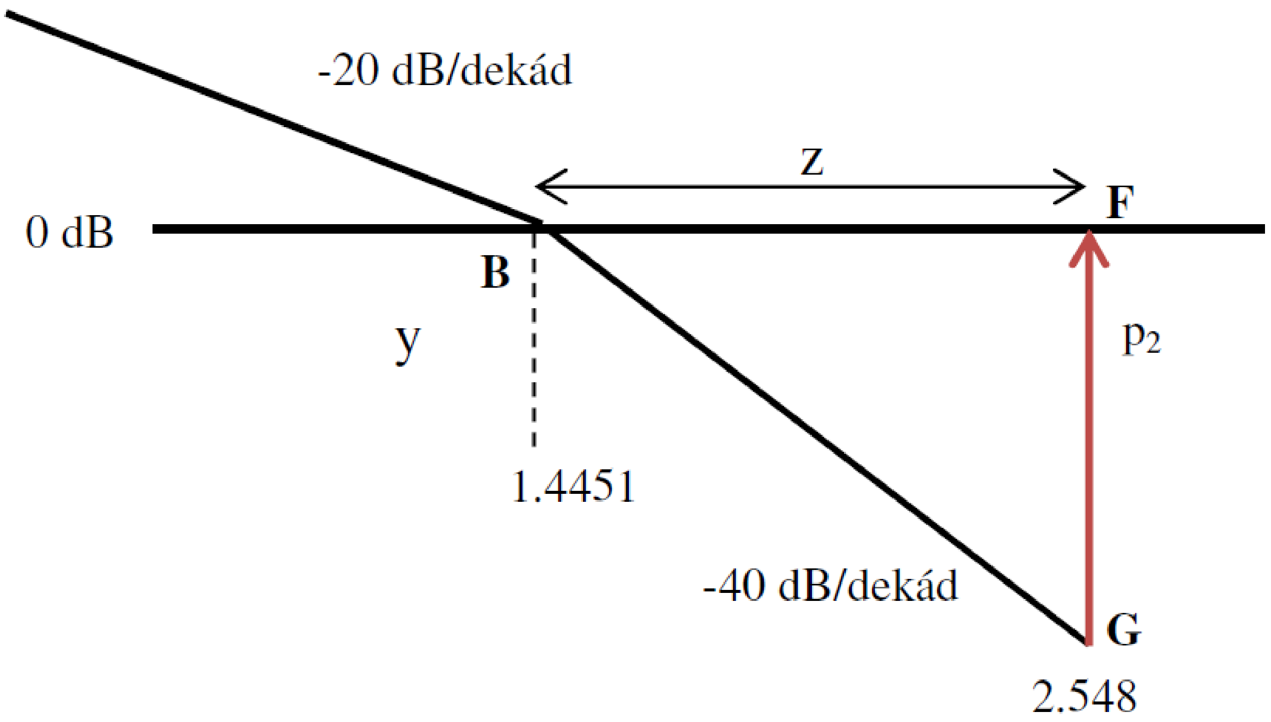
A másodfokú egyenlet megoldóképletét alkalmazzuk:

$$\omega_{1,2} = \frac{-122.3842 \pm \sqrt{122.3842^2 + 4 \cdot 1.2391 \cdot 48.3621}}{-2 \cdot 48.3621} = \left\{ \begin{array}{c} 2.548 \\ -0.0174 \end{array} \right. rad/s$$

$$\boxed{\omega'_c = 2.548\ rad/s}$$

Soros PI-kompenzáció

Az új vágási körfrekvencia ismeretében már meghatározható a p_2 érték, melyet az alábbi ábrából olvashatunk le:



Soros PI-kompenzáció

p_2 valójában az **FG** szakasz hossza, mely a **BGF** háromszög egyik befogója. A befogó hossza a korábbiakhoz hasonlóan a **BF** szakasz z hosszának és a **BG** szakasz meredekségének szorzata, ahol z az **F** pont távolságát adja meg **B**-től dekádban. Így:

$$\overline{FG} = p_2 = z \cdot 40 \frac{dB}{dekád}$$

$$1.4551 \cdot 10^z = 2.548 \rightarrow z = \log \frac{2.548}{1.4551} = 0.2433\ dekád$$

$$\boxed{p_2 = 40 \cdot 0.2433 = 9.732\ dB}$$

A rendszer végső nagyítása p_1 és p_2 nagyítások összege (decibelben):

$$\boxed{P = p_{1\mathrm{dB}} + p_{2\mathrm{dB}} = 31.626\ \mathrm{dB} + 9.732\ \mathrm{dB} = 41.3580\ \mathrm{dB} = 10^{\frac{41.3580}{20}} = 116.923}$$

Soros PI-kompenzáció

A P-szabályzót a következő alakú PI-szabályzóra bővítjük:

$$W_c(s) = P\frac{T_I s + 1}{T_I s}$$

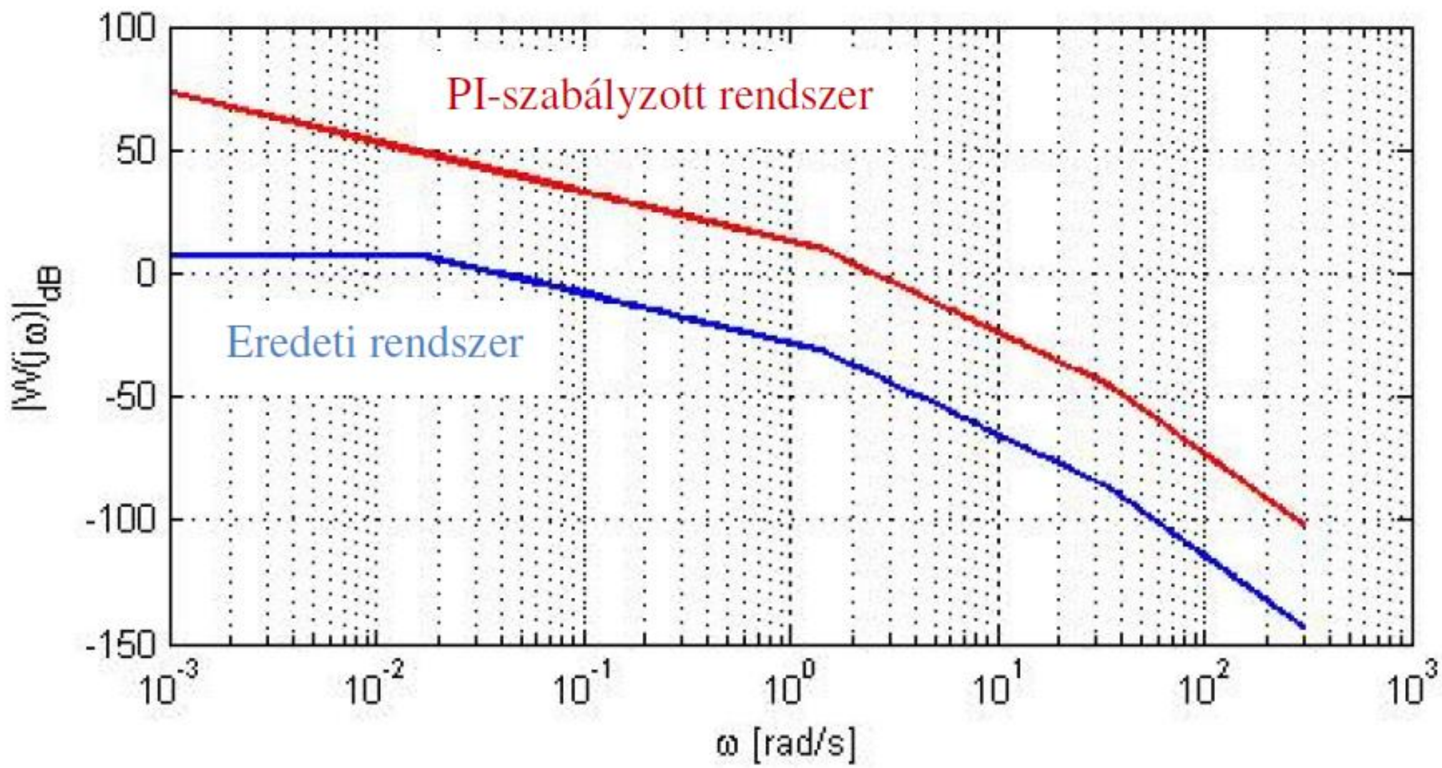
Ökölszabály szerint T_I értékét úgy választjuk meg, hogy $T_I s + 1$ megegyezzen a szabályozni kívánt rendszer legnagyobb időállandójú tagjával (a legkisebb frekvenciájú töréshez köthető taggal), mely esetünkben $T_1 = 56.4\ \mathrm{sec}$.

Ennek felhasználásával a szabályzó végleges alakja a következő:

$$\boxed{W_c(s) = P\frac{T_1 s + 1}{T_1 s} = 116.923 \cdot \frac{56.4s + 1}{56.4s} = \frac{56.4s + 1}{0.4824s}}$$

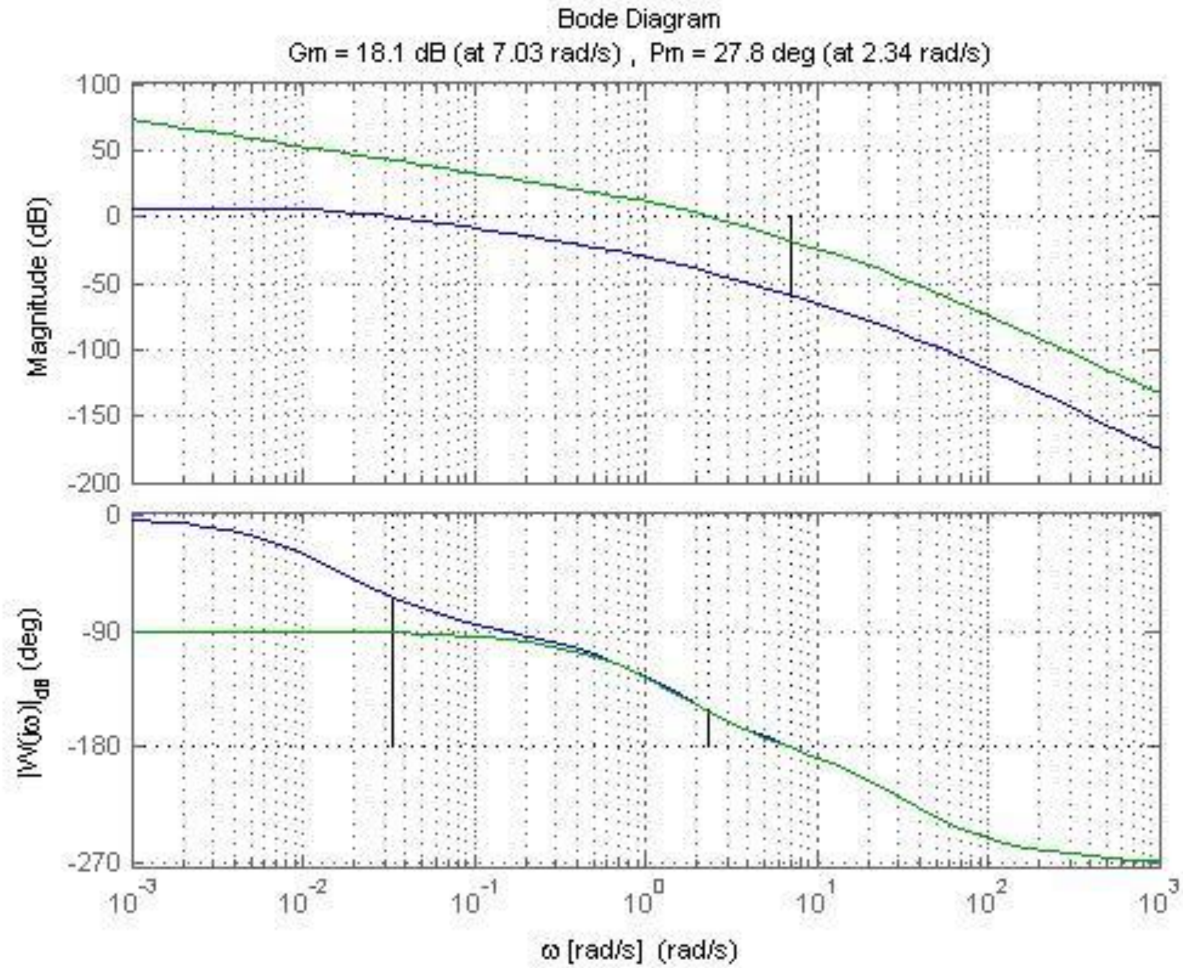
Soros PI-kompenzáció

A szabályozott rendszer közelítő Bode-diagramja:



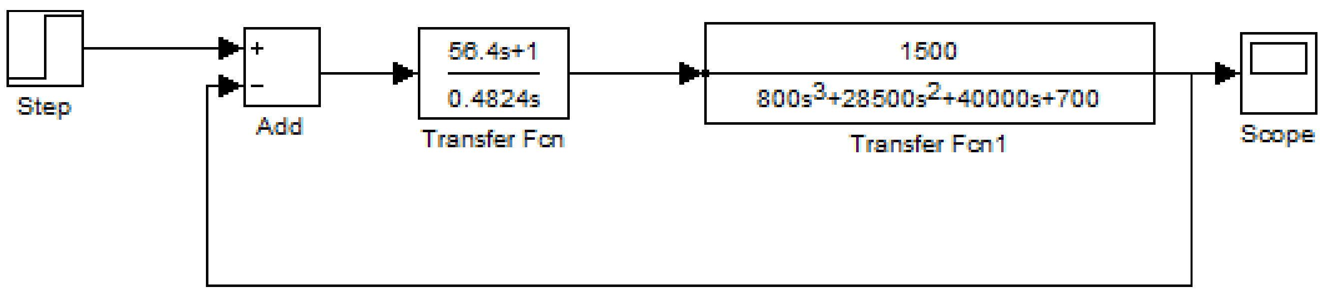
Soros PI-kompenzáció

A pontos Bode amplitúdó- és fázisdiagramok a MATLAB programcsomaggal előállíthatóak és ellenőrizhetőek:



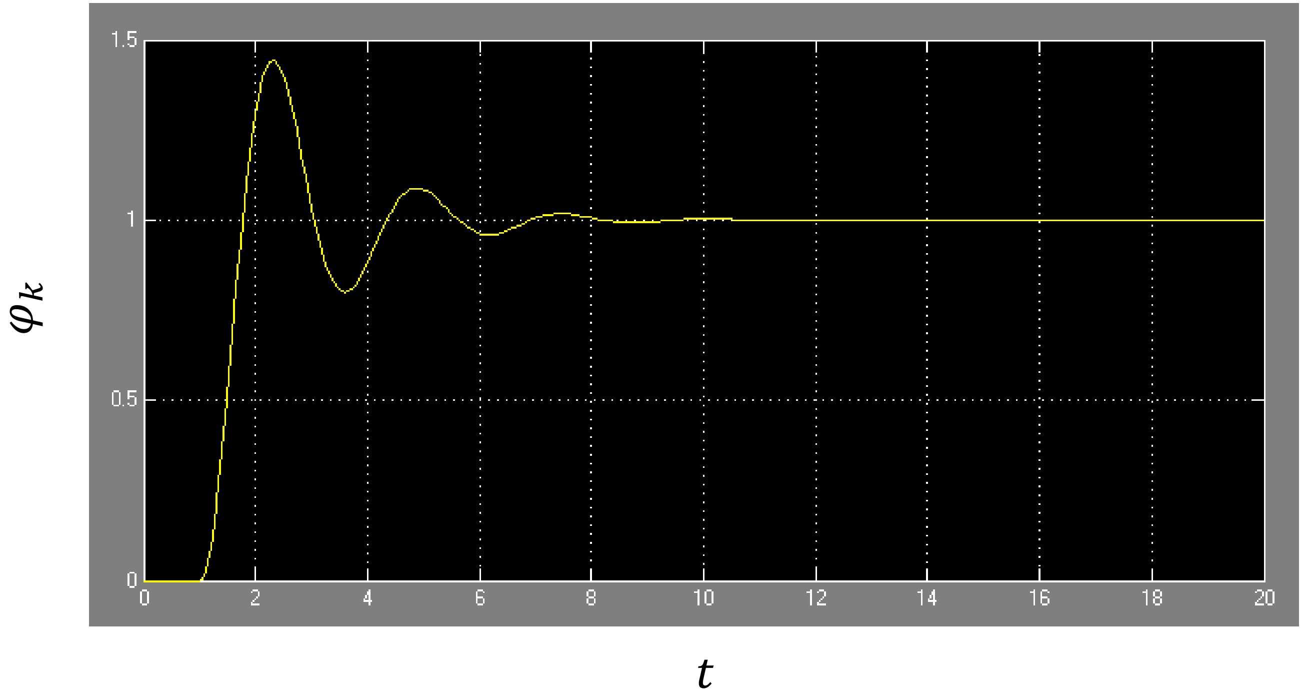
Soros PI-kompenzáció

Hogy a PI-kompenzációs szabályzás valóban működik, ellenőrzésképpen MATLAB Simulink környezetben megépíthető a szabályozókör modellje:



Soros PI-kompenzáció

A rendszer bemenetére egységugrást megadva látható, hogy rendszer jól követi a referenciajelet.



A szabályzó paraméterei ezek után módosíthatóak a szabályzás minőségi követelményeinek (túllövés, szabályozási idő stb.) figyelembe vételével.

Köszönöm a figyelmet!

Dr. habil. Kovács Levente
egyetemi docens

kovacs.levente@nik.uni-obuda.hu

Dr. Haidegger Tamás
egyetemi adjunktus

haidegger@irob.uni-obuda.hu

EKIK
Egyetemi Kutató és Innovációs Központ

K-MOOC

ÓBUDAI EGYETEM
Bejczy Antal iRobottechnikai Központ

Physiological Controls Group

Élettani Szabályozások Csoport
Óbudai Egyetem