ROBOTIRÁNYÍTÁS

4. előadás

A szabályozási kör, rendszerek leírása

Dr. habil. Kovács Levente
egyetemi docens

kovacs.levente@nik.uni-obuda.hu

Dr. Haidegger Tamás
egyetemi adjunktus

haidegger@irob.uni-obuda.hu

EKIK Egyetemi Kutató és Innovációs Központ
K MOOC
Óbudai Egyetem Bejczy Antal iRobottechnikai Központ
Élettani Szabályozások Csoport Óbudai Egyetem

Az előadás témája és célja

Jelen előadás az előző előadásban tisztázott irányítástechnikai alapfogalmak ismeretében a szabályozási kört hivatott bemutatni. Ismertetjük a szabályozási kör tagjait és jeleit, valamint az egyszerűsített szabályozási kört is. Ezt követően foglalkozunk azon tipikus vizsgálójelekkel, melyek segítségével a rendszer tulajdonságairól információt nyerünk. Itt az egységugrást és az egység impulzust (valamint a közöttük fennálló kapcsolatot) tárgyaljuk részletesen, a további vizsgáló jeleket csak megemlítjük. Ezután a rendszerek leírására használt három modellreprezentációt mutatjuk be: az állapotteres leírást, az átviteli függvényt és a pólus-zérus-erősítés alakot, kiemelve a modellek közötti kapcsolatot. Végezetül a nemlineráris rendszerek osztályozásáról, numerikus megoldásáról, valamint a munkaponti linearizációról beszélünk, az utóbbit példával is illusztráljuk.

Az előadás célja, hogy a hallgatók megismerjék a szabályozási kör elemeit és különböző jeleit, és magabiztos jártasságot szerezzenek a rendszereket leíró modellekben, emellett alapismeretekre tegyenek szert a nemlineáris rendszerekről.

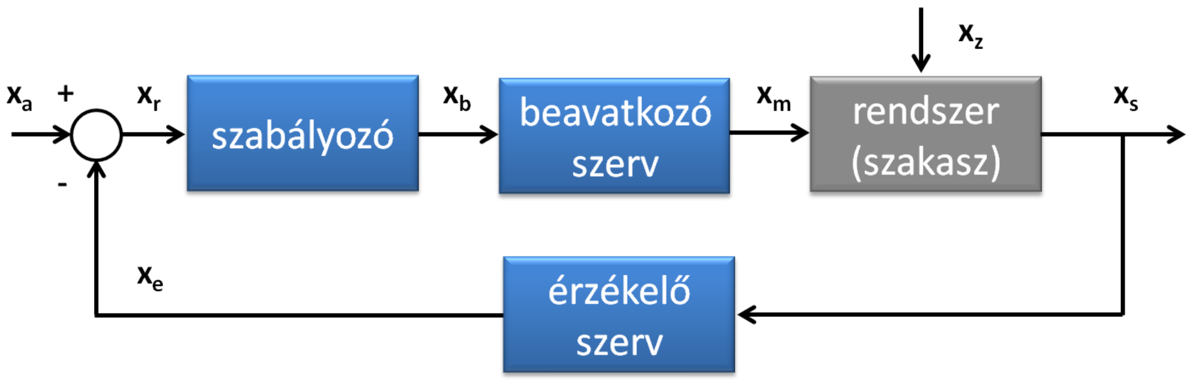
Kulcsszavak

szabályozási kör, szabályozó, rendszer (szakasz), alapjel, hibajel, beavatkozó jel, szabályozott jellemző, egységugrás, átmeneti függvény/ ugrásválasz, Dirac-impulzus/ Dirac-delta/ egység impulzus, súlyfüggvény/ impulzusválasz, állapotteres leírás, állapotegyenlet, kimeneti egyenlet, állapotváltozó, állapottrajektória, átviteli függvény, karakterisztikus polinom, pólus, zérus, pólus-zérus-erősítés, szuperpozíció elve, munkaponti linearizáció

Tartalomjegyzék

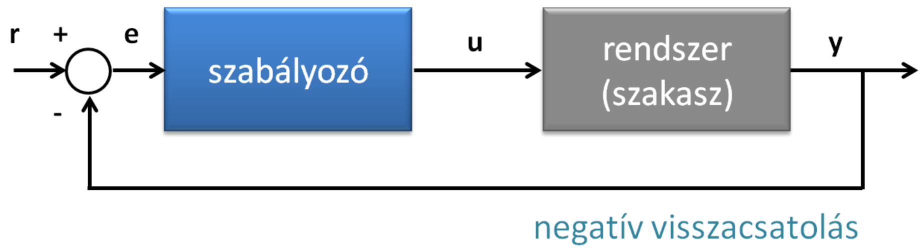
1. A szabályozási kör

A szabályozási kör felépítését az 1. ábra mutatja. A kör tartalmazza a szabályozni kívánt *rendszer*t, amit *szakasz*nak is hívunk. A szakaszon kívül a körben található még a *szabályozó*, amely a szabályozási algoritmus alapján hat a rendszerre. A szabályozó működéséhez elengedhetetlen a *beavatkozó szerv*, ami a szakaszra gyakorolt hatást valósítja meg, valamint az *érzékelő szerv*, amely a szakasz tulajdonságait/egyes paramétereit méri és ezáltal információt szolgáltat a szabályozónak. Az *alapjel* (x_a) tartalmazza azt az értéket, amelyre a szakaszt a szabályozással szeretnénk beállítani. Például egy terem hőmérsékletének szabályozásánál, ha 22°C-ot szeretnénk elérni, akkor az alapjelet 22°C-ra kell állítani. A szabályozás „lelke" a *negatív visszacsatolás*. A szakasz kimenetén a szabályozás hatására megjelenik a *szabályozott jellemző* (x_s), a terem hőmérsékletének példájánál maradva ez azt jelenti, hogy éppen hány fok van. Ha a terem hűtését egy meleg napon csak éppen elkezdtük, akkor például 25°C-os szabályozott jellemzőt mér az érzékelő szerv, majd előállítja a *hibajel*et (x_e). A hibajel negatív előjellel van visszakapcsolva, és mint látható az 1. ábrán, egy összegzőn keresztül az alapjellel adódik össze. Folytatva a példát, a 22°C-os alapjel és a 25°C-os szabályozott jellemző egy -3°C-os *rendelkező jel*et fog előállítani (x_r), amit a szabályozó megkap. A szabályozási algoritmus alapján ebből *beavatkozó jel*et (x_b) állít elő a szabályozó, amit a beavatkozó szerv kap meg bemenetként, amely végül előállítja a *módosított jellemző*t (x_m), ami a szakasz bemenete. Emellett a rendszerre még hathat nem a szabályozáshoz tartozó, külső *zavaró jel* (x_z) is.



1. ábra: A szabályozási kör

A gyakorlatban a szabályozási kör egyszerűsített alakját használjuk (2. ábra), ahol a szabályozó alatt értjük a szabályozási algoritmus mellett a beavatkozó és az érzékelő szervet is. Így a körben csak a *szabályozó* és a *szakasz* található, ennek megfelelően a szabályozási kör jelei is egyszerűsödnek (és más jelölést kapnak). Az *alapjel* (r) megmarad, csak úgy, mint a rendszer kimenete, a *szabályozott jellemző* (y). E kettő különbsége (a *negatív visszacsatolás* miatt) adja a *hibajel*et (e), amely a szabályozó bemenete. A *beavatkozó jel* (u) a szabályozó kimenete, és egyben a rendszer bemenete.

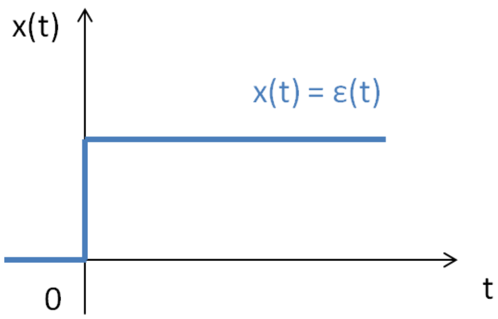


2. ábra: A szabályozási kör egyszerűsített alakja

2. Tipikus vizsgálójelek

Egy ismeretlen rendszerről információt tudunk nyerni azáltal, hogy tipikus vizsgálójelent adunk meg gerjesztésnek (bementi jelnek). Az erre adott válaszból (kimenet) következtetünk a rendszer dinamikájára, tulajdonságaira.

Az első tipikus vizsgálójel az *egységugrás*, jele: $\varepsilon(t)$ vagy $1(t)$, lásd 3. ábra. Ez egy olyan jel, ami a 0. időpillanatig zérus értékű, majd ebben az időpillanatban egységnyit ugrik az értéke, és minden további időpillanatban tartja ezt a konstans értéket. Itt meg kell jegyeznünk, hogy valódi fizikai mennyiség értéke nem változhat ugrásszerűen, így ezt a valóságban csak közelíteni tudjuk. Ha a rendszernek bemenőjelként az egységugrást adtuk, akkor a kimenőjel az *átmeneti függvény/ ugrásválasz/ step response*[1], $v(t)$.

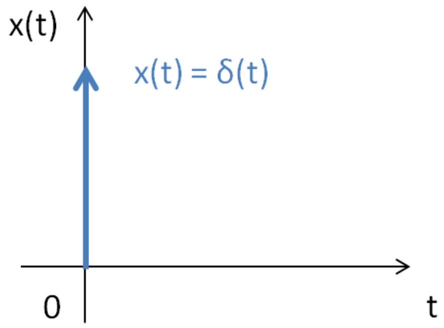


3. ábra: Egységugrás

A másik tipikus vizsgálójel a *Dirac-impulzus/ Dirac-delta/ egység impulzus*, jele: $\delta(t)$, lásd 4. ábra. Ebben az esetben a 0. időpillanat előtt és után is zérus a jel értéke, a 0. időpillanatban viszont végtelen (szűkebb értelemben ezt nevezzük Dirac-impulzusnak vagy Dirac-deltának). Ha egységugrást lehetetlen előállítani a gyakorlatban, akkor triviálisan Dirac-impulzust még inkább az. Éppen ezért a Dirac-impulzust közelítjük egy olyan négyszög jellel, amelynek szélessége T, magassága pedig $1/T$. Ennek következtében az egység impulzus intenzitása (a téglalap területe) mindig egységnyi, függetlenül T konkrét értékétől. Ha a bemenőjel az

[1] A perjellel elválasztott megnevezések szinonimák, az irodalomban mindegyiket használják.

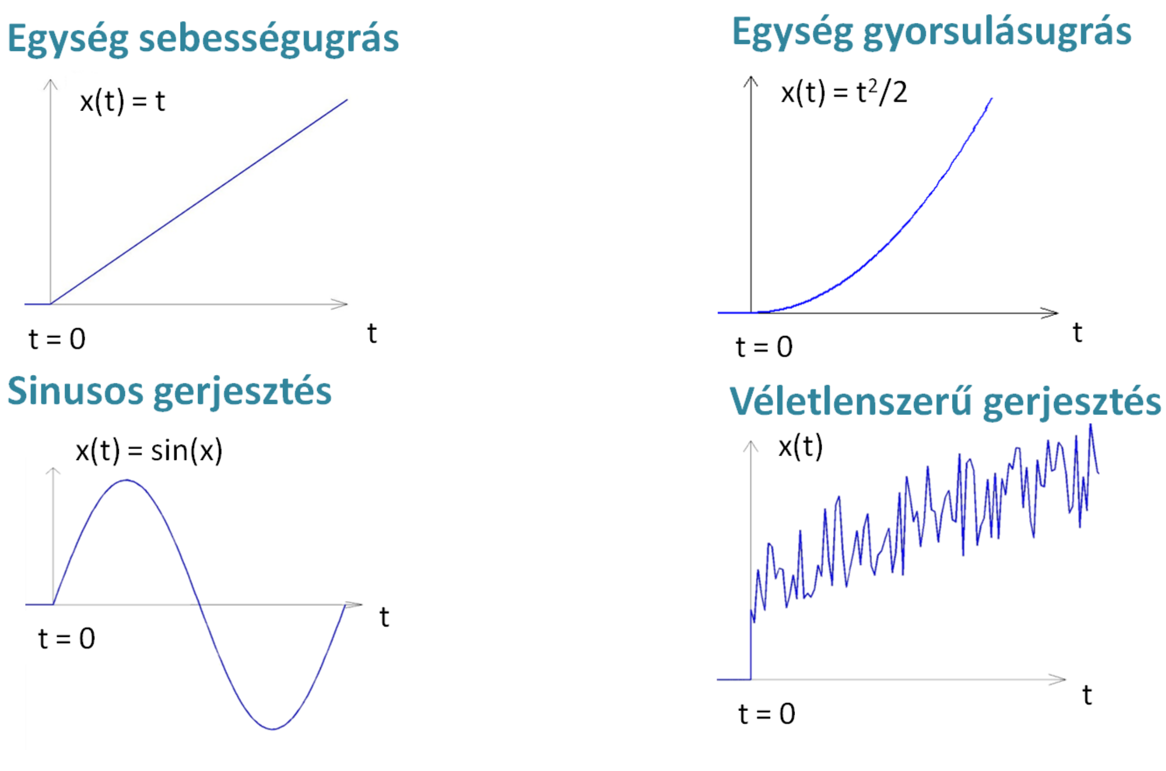
Dirac-impulzus, akkor a kimenőjel a *súlyfüggvény/ impulzusválasz*, $w(t)$. A legtöbb információt a rendszer súlyfüggvénye szolgáltatja a rendszerről, így ez egy gyakran használt vizsgálójel.



4. ábra: Dirac-impulzus/ Dirac-delta/ Egység impulzus

A két legfontosabb vizsgálójel között fontos összefüggés áll fenn: az **egységugrás deriváltja a Dirac-impulzus**.

A fentiek mellett egyéb vizsgálójeleket is szokás alkalmazni (5. ábra). Az egységugrás integrálásával az *egység sebességugrás*t kapjuk, majd ezt is tovább integrálva, az *egység gyorsulásugrás*t. *Sinusos gerjesztés*t használva bementként, a kimenet is valamilyen sinusos jel lesz. A *véletlenszerű gerjesztés*t speciális szabályozástechnikai probléma, az ún. identifikáció esetén használjuk.



5. ábra: Egyéb vizsgálójelek

3. Rendszerek leírása

Rendszerek leírására alapvetően három modellreprezentációt használunk: *állapotteres leírás*, *átviteli függvény* és *pólus-zérus-erősítés alak*. Ezeket a struktúrákat a Matlabban rendre az alábbi beépített függvényekkel lehet előállítani: `ss()`, `tf()`, `zpk()`.

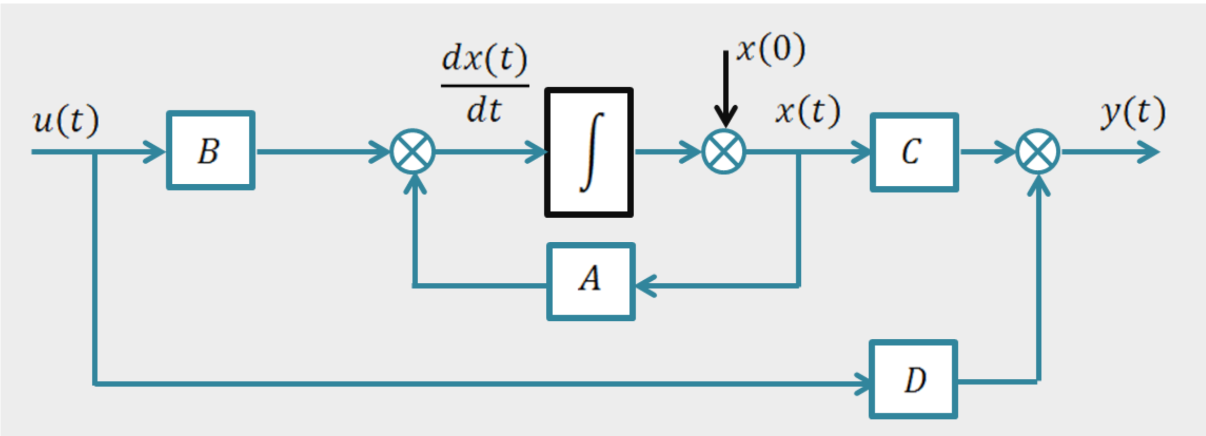
3.1. Állapotteres leírás (state space model)

Az állapotteres leírás a rendszert **időtartományban** írja le. A leírás két egyenletből áll, az (1) az *állapotegyenlet*, a (2) a *kimeneti egyenlet*, melyek összesen négy paramétermátrixot tartalmaznak. Az állapotegyenlet az x *állapotváltozó* időbeli változását írja le (SISO esetben x egy oszlopvektor), míg a kimeneti egyenlet az y *kimenet* (szabályozott jellemző) adott t időpillanatbeli értékét. A négy paramétermátrix a következő: A az állapot mátrix, B a bemeneti mátrix, C a kimeneti mátrix és D az együttható mátrix.

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) \tag{1}$$

$$y(t) = Cx(t) + Dx(t) \tag{2}$$

Az állapotteres leírás egyenletei az 5. ábrán látható blokkdiagramról is leolvashatók ($x(0)$ az állapotváltozó kezdeti feltétele).



6. ábra: Állapotteres leírás

Tegyük fel, hogy u bemenő jel j számú elemet, míg az y kimenő jel k számú elemet tartalmaz, az x állapotváltozók száma pedig n. Ekkor az A mátrix dimenziója $n\,x\,n$, a B mátrix dimenziója $n\,x\,j$, a C mátrix dimenziója $k\,x\,n$, D mátrix dimenziója pedig $k\,x\,j$.

Az állapotegyenlet megoldása (állapottrajektória):

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \tag{3}$$

3.2. Átviteli függvény (transfer fuction)

Az átviteli függvény a rendszert **Laplace tartományban (komplex frekvenciatartomány)** írja le. Az átviteli függvény az

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y = b_0 u^{(m-1)} + b_1 u^m + \cdots + b_{m-1}\dot{u} + b_m u \tag{4}$$

lineáris differenciálegyenlet Laplace-transzformáltja, ha a kezdeti feltételek nullák:

$$y^{(n-1)}(0) = y^{(n-2)}(0) = \cdots = \dot{y}(0) = y(0) = 0. \tag{5}$$

Az átviteli függvény a kimenet Laplace-transzformáltjának és a bemenet Laplace-transzformáltjának hányadosát adja meg:

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \tag{6}$$

Az átviteli függvény nevezőjét *karakterisztikus polinom*nak hívjuk:

$$\Delta(s) = a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 \tag{7}$$

Az átviteli függvény nevezőjének (karakterisztikus egyenlet) a gyökei a *pólusok* ($p_i(s)$), míg az átviteli függvény számlálójának a gyökei a *zérusok* ($z_i(s)$).

Fontos kapcsolat az állapotteres leírás és az átviteli függvény között, hogy **az A mátrix sajátértékei (állapotteres leírás) a rendszer pólusai (átviteli függvény)**.

3.2. Pólus-zérus-erősítés alak (zero-pole-gain model)

A pólus-zérus-erősítés alak ugyanúgy **Laplace tartományban** írja le a rendszert, mint az átviteli függvény; tulajdonképpen az átviteli függvény gyöktényezős alakra hozva:

$$W(s) = k\,\frac{\prod_{i=1}^{m-1}(s - z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s - p_j)} \tag{8}$$

A gyökök (a pólusok és a zérusok) valós számok vagy komplex konjugált párok lehetnek.

4. Nemlineáris rendszerek

4.1. Rendszerek osztályzása

A *lineáris rendszerek* lineáris alaptagokból épülnek fel, úgy, mint

- az arányos (P) tag,
- az integráló (I) tag és
- a deriváló (D) tag.

A lineáris alaptagok között az összegző taggal képzünk kapcsolatot (lineáris kapcsolat).

A *nemlineáris rendszerek*ben van legalább egy nemlineáris alaptag, pl. hatvány, trigonometrikus vagy exponenciális függvényt megvalósító tag. A nemlineáris alaptagok között a szorzó és a hányados képző taggal képzünk kapcsolatot (nemlineáris kapcsolat).

A lineáris és nemlineáris rendszerek között a legfontosabb különbség, hogy lineáris rendszerekben a *szuperpozíció elve* (az egyes jelek hatása függetlenül számítható és utána összegezhető) érvényes, míg nemlineáris rendszereknél nem érvényes.

4.2. Nemlineáris rendszerek numerikus megoldása

A folytonosidejű időben változó nemlineáris rendszer állapotegyenlete:

$$\dot{x} = f(t, x, u) \tag{9}$$

$$y = g(t, x, u) \tag{10}$$

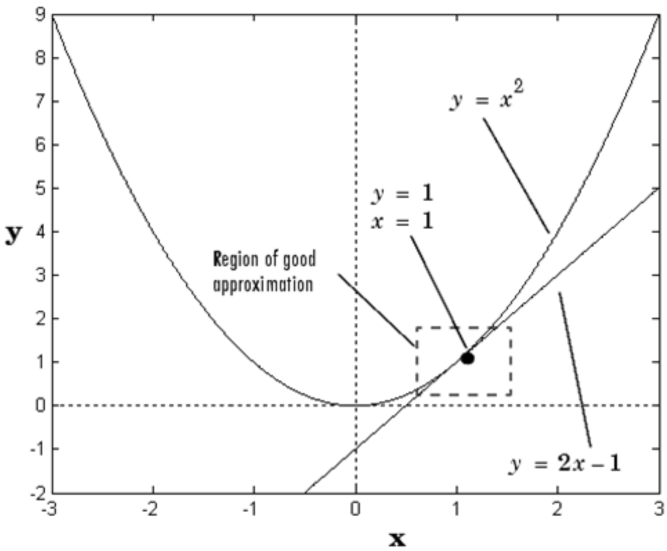
Az állapotegyenlet megoldása (az állapottrajektória) úgy számítható, hogy az $x_0(t)$ kezdeti állapot és $u_0(t)$ bemenő jel (gerjesztés) ismert, és keressük az állapotegyenlet $x(t)$ megoldását.

A megoldásra közelítő módszerek vannak, úgy, mint a *Taylor-sorba fejtés* (másodrendű Taylor-sorral közelítjük a megoldást), vagy a *Runge–Kutta-módszer* (másodrendű vagy negyedrendű módszer).

4.3. Munkaponti linearizáció

A munkaponti linearizáció a nemlineáris rendszer lineáris közelítését jelenti egy munkapontban. A linearizáció csak a munkapontban és annak kis környezetében valid.

Lássunk egy példát munkaponti linearizációra (7. ábra). Legyen a nemlineáris függvény $y = x^2$. Linearizáljunk a függvényt az alábbi munkapontban: $x = 1, y = 1$. Az eredmény a $y = 2x - 1$ lineáris függvény. A munkapont közelében a lineáris $y = 2x - 1$ függvény jó közelítése a nemlineáris $y = x^2$ függvénynek, azonban a munkaponttól távol a közelítés rossz. A validitás tartománya a nemlineáris rendszertől függ.



7. ábra: Példa munkaponti linearizációra

A másodrendű nemlineáris, egy bemenetű rendszernek általános alakban az állapotegyenlete:

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = f_1(x_1(t), x_2(t), u(t)) \tag{11}$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = f_2(x_1(t), x_2(t), u(t)) \tag{12}$$

$$y = g(x_1(t), x_2(t), u(t)) \tag{13}$$

A linearizált rendszer mátrixainak számítása:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \tag{14}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix} \tag{15}$$

$$C = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \end{bmatrix} \tag{16}$$

$$D = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial u} \end{bmatrix} \tag{17}$$

Az előadás összefoglalása

A gyakorlatban a szabályozási kör egyszerűsített alakját használjuk, ahol a szabályozó alatt értjük a szabályozási algoritmus mellett a beavatkozó és az érzékelő szervet is. A körben található az alapjel, a szabályozott jellemző, a hibajel (a szabályozó bemenete), valamint a beavatkozó jel (a szabályozó kimenete, és egyben a rendszer bemenete).

Az egységugrás olyan jel, ami a 0. időpillanatig zérus értékű, majd ebben az időpillanatban egységnyit ugrik az értéke, és minden további időpillanatban tartja ezt a konstans értéket. Ha a rendszernek bemenőjelként az egységugrást adtuk, akkor a kimenőjel az átmeneti függvény/ ugrásválasz. Dirac-impulzus/ Dirac-delta/ egység impulzus esetén a 0. időpillanat előtt és után is zérus a jel értéke, a 0. időpillanatban viszont végtelen. Ha a bemenőjel a Dirac-impulzus, akkor a kimenőjel a súlyfüggvény/ impulzusválasz. A legtöbb információt a rendszer súlyfüggvénye szolgáltatja a rendszerről. Az egységugrás deriváltja a Dirac-impulzus.

Az állapotteres leírás a rendszert időtartományban írja le, és két egyenletből áll: az állapotegyenletből és a kimeneti egyenletből. Ezek összesen négy paramétermátrixot tartalmaznak (A, B, C, D). Az átviteli függvény a rendszert Laplace tartományban (komplex frekvenciatartomány) írja le, és a kimenet Laplace-transzformáltjának és a bemenet Laplace-transzformáltjának hányadosát adja meg. Az átviteli függvény nevezője a karakterisztikus polinom, ennek gyökei a pólusok, míg az átviteli függvény számlálójának a gyökei a zérusok. Az A mátrix sajátértékei (állapotteres leírás) a rendszer pólusai (átviteli függvény). A pólus-zérus-erősítés alak ugyanúgy Laplace tartományban írja le a rendszert, mint az átviteli függvény; tulajdonképpen az átviteli függvény gyöktényezős alakra hozva.

A lineáris rendszerek lineáris alaptagokból épülnek fel, melyek között az összegző taggal képzünk kapcsolatot. A nemlineáris rendszerekben van legalább egy nemlineáris alaptag, valamint a szorzó és a hányados képző taggal képzünk kapcsolatot a tagok között. A lineáris és nemlineáris rendszerek között a legfontosabb különbség, hogy lineáris rendszerekben a szuperpozíció elve (az egyes jelek hatása függetlenül számítható és utána összegezhető) érvényes, míg nemlineáris rendszereknél nem érvényes. A munkaponti linearizáció a nemlineáris rendszer lineáris közelítését jelenti egy munkapontban. A linearizáció csak a munkapontban és annak kis környezetében valid.

Ellenőrző kérdések

1. Milyen négy tagból áll egy általános szabályozási rendszer és ezek hogyan helyezkednek el a körben?

2. Mit értünk tipikus vizsgálójelen és milyen típusai vannak?

3. Mik a pólusok és zérusok?

4. Mi a kapcsolat az állapotteres leírás és az átviteli függvény között?

5. Mi a munkaponti linearizáció értelme?