ROBOTIRÁNYÍTÁS

4. előadás

A szabályozási kör, rendszerek leírása

Dr. habil. Kovács Levente
egyetemi docens

Dr. Haidegger Tamás
egyetemi adjunktus

EKIK
Egyetemi Kutató és Innovációs Központ

K-MOOC

ÓBUDAI EGYETEM
Bejczy Antal iRobottechnikai Központ

Élettani Szabályozások Csoport
Óbudai Egyetem

Tartalom

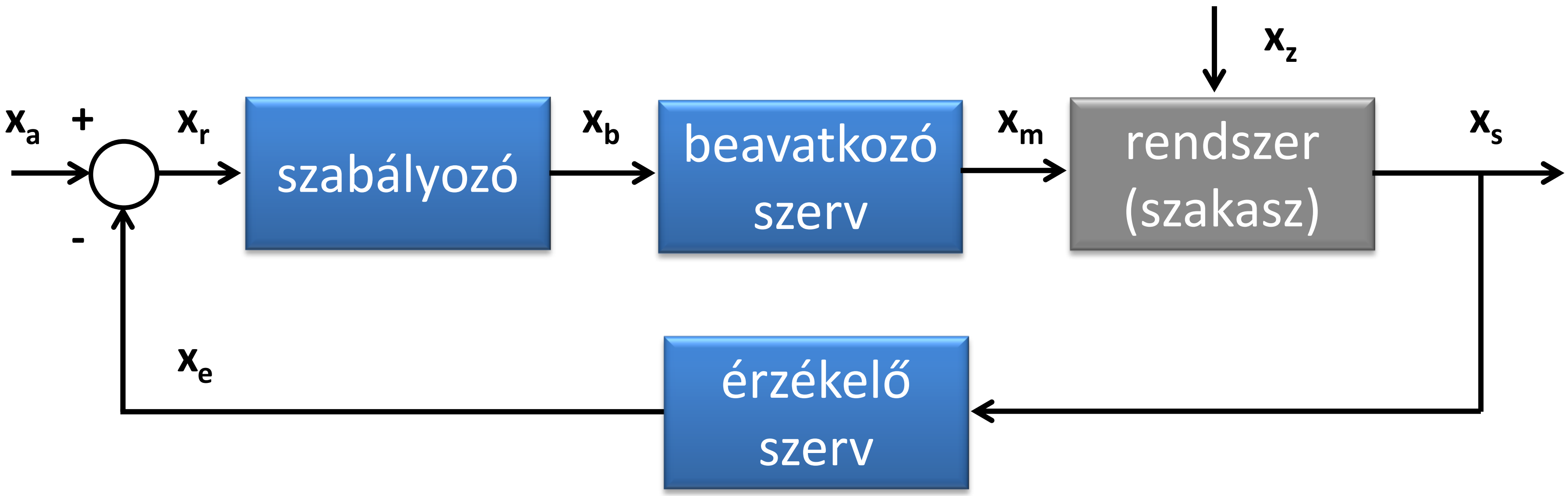
Tartalom

1. A szabályozási kör

1.1. A szabályozási kör

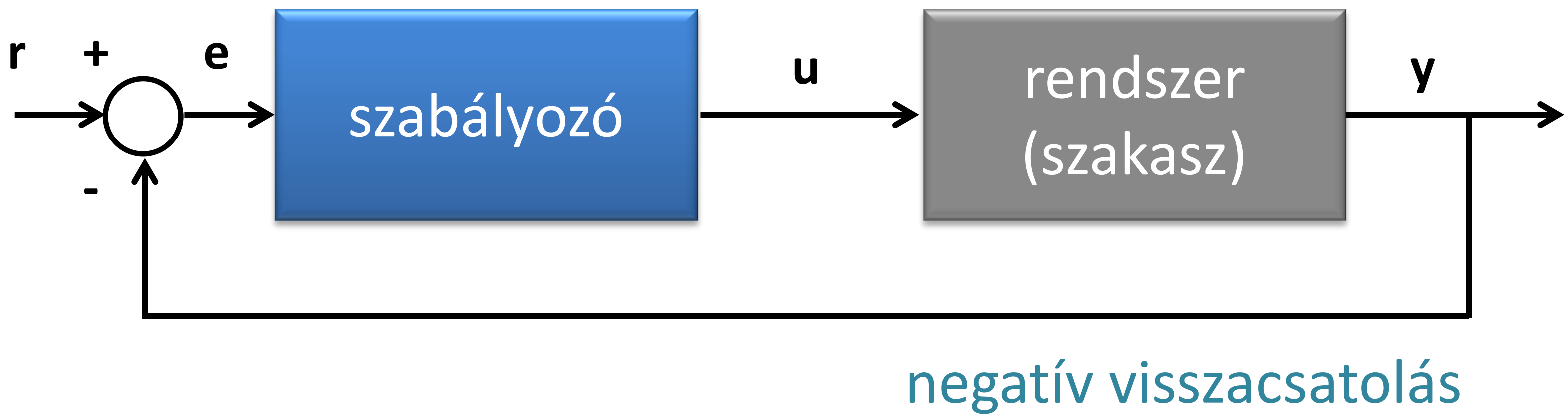
1.2. A szabályozási kör egyszerűsített alakja

A szabályozási kör



x_a: alapjel
x_r: rendelkező jel
x_b: beavatkozó jel
x_m: módosított jellemző
x_z: zavaró jel
x_s: szabályozott jellemző
x_e: hibajel

A szabályozási kör egyszerűsített alakja



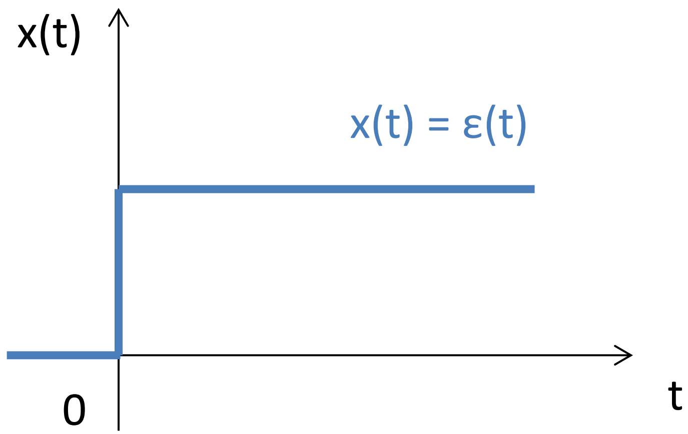
r: alapjel
e: hibajel
u: beavatkozó jel (a szabályozó kimenete, a rendszer bemenete)
y: szabályozott jellemző (a rendszer kimenete)

2. Tipikus vizsgálójelek

Mi az a vizsgálójel?

- egy ismeretlen rendszerről információt tudunk nyerni azáltal, hogy tipikus vizsgálójelent adunk meg gerjesztésnek (bementi jelnek)
- az erre adott válaszból (kimenet) következtetünk a rendszer dinamikájára, tulajdonságaira

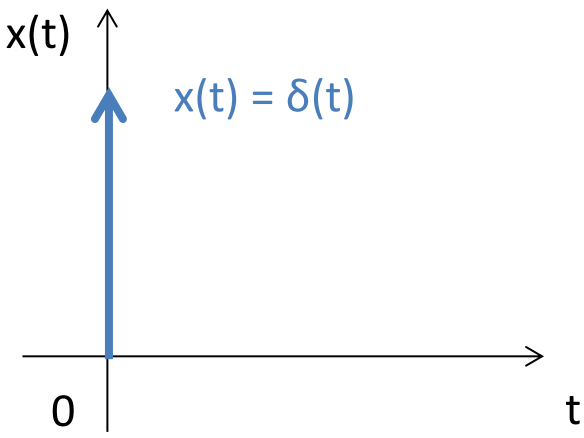
Egységugrás, ε(t) vagy 1(t)



$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, ha\ t < 0 \\ 1, ha\ t > 0 \end{cases}$$

- valódi fizikai mennyiség értéke nem változhat ugrásszerűen → közelítés
- ha a bemenőjel az egységugrás, akkor a kimenőjel az átmeneti függvény/ ugrásválasz/ step response, v(t)

Dirac-impulzus/ Dirac-delta/ Egység impulzus, δ(t)



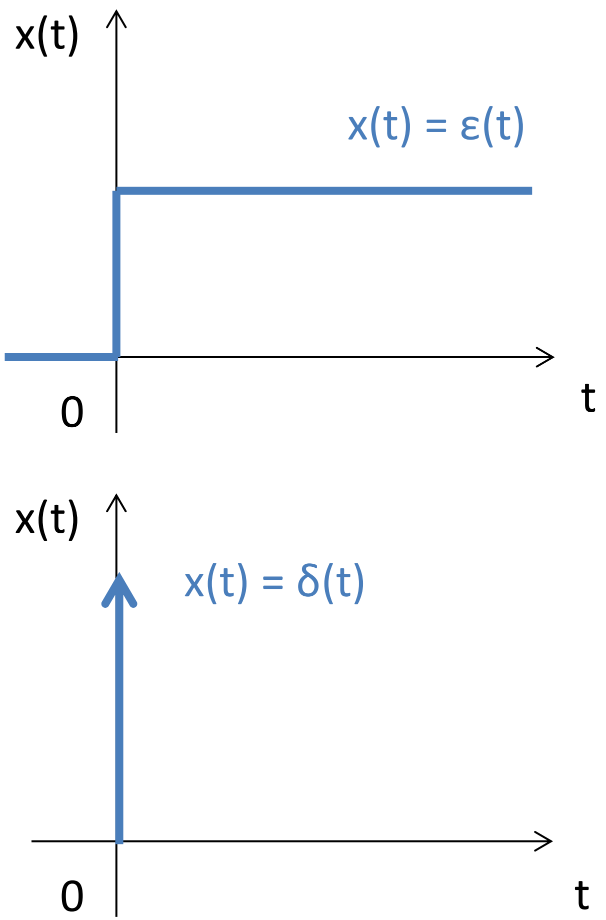
$$\delta(t,T) = \begin{cases} \frac{1}{T}, ha\ 0 < t < T \\ 0 \quad egyébként \end{cases}$$

- az egység impulzus jel
  - ✓ szélessége: T, magassága: 1/T
  - ✓ intenzitása egységnyi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t,T)dt = 1$$

- a valóságban nem tudunk Dirac-deltát létrehozni
- ha a bemenőjel az Dirac-impulzus, akkor a kimenőjel a súlyfüggvény/ impulzusválasz, w(t)
- a legtöbb információt a rendszer súlyfüggvénye szolgáltatja

Az egységugrás és a Dirac-impulzus kapcsolata



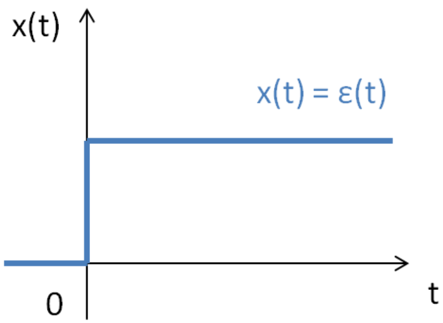
- az egységugrásról tudjuk, hogy: $\varepsilon(t) = 1, ha\ t > 0$
- a Dirac-impulzusról tudjuk, hogy: $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$

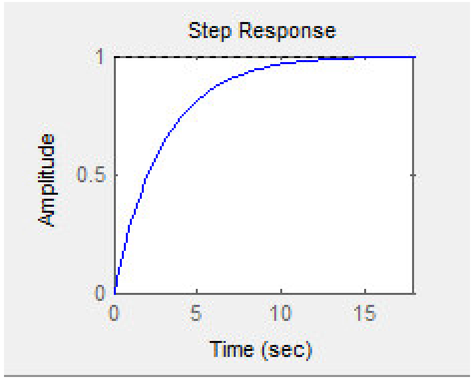
$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

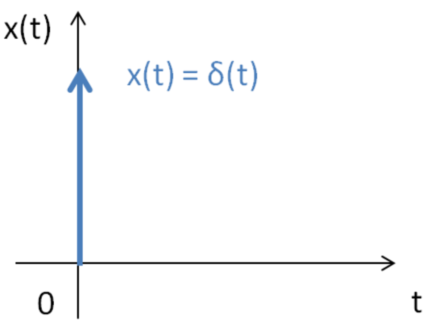
$$\varepsilon(t)' = \delta(t)$$

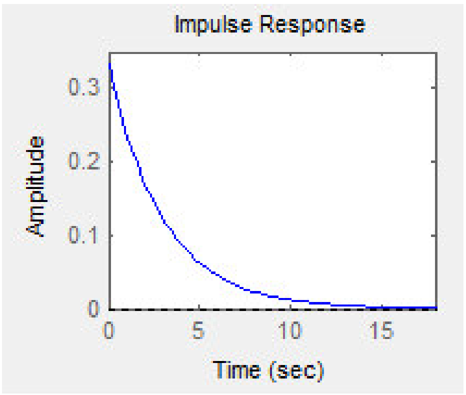
az egységugrás deriváltja a Dirac-impulzus

Az ugrásválasz és az impulzusválasz kapcsolata









$$v(t) \int_0^t w(t)dt$$

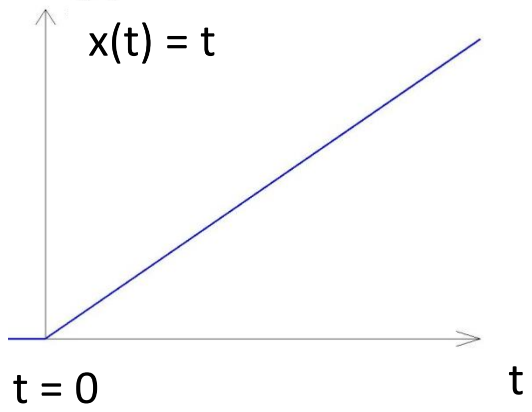
átmeneti függvény/
ugrásválasz

$$w(t) = \frac{dv(t)}{dt}$$

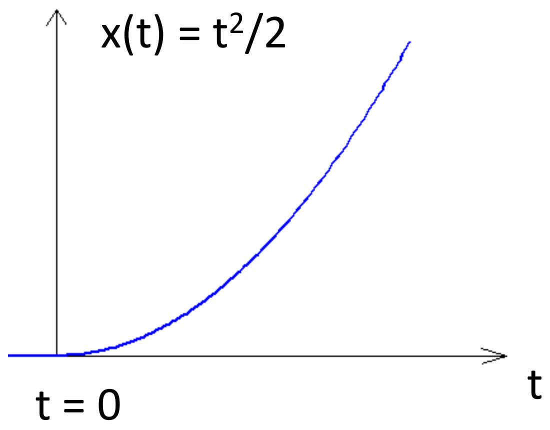
súlyfüggvény/
impulzusválasz

Egyéb vizsgálójelek

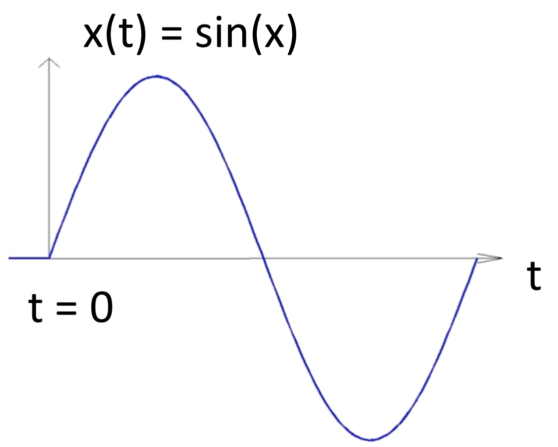
Egység sebességugrás



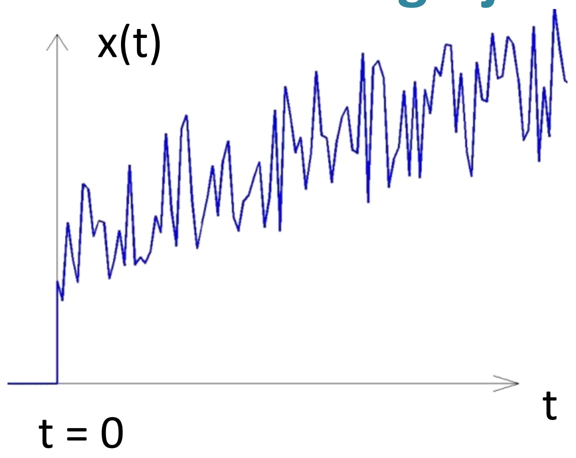
Egység gyorsulásugrás



Sinusos gerjesztés



Véletlenszerű gerjesztés



3. Rendszerek leírása

3.1. Állapotteres leírás

3.2. Átviteli függvény

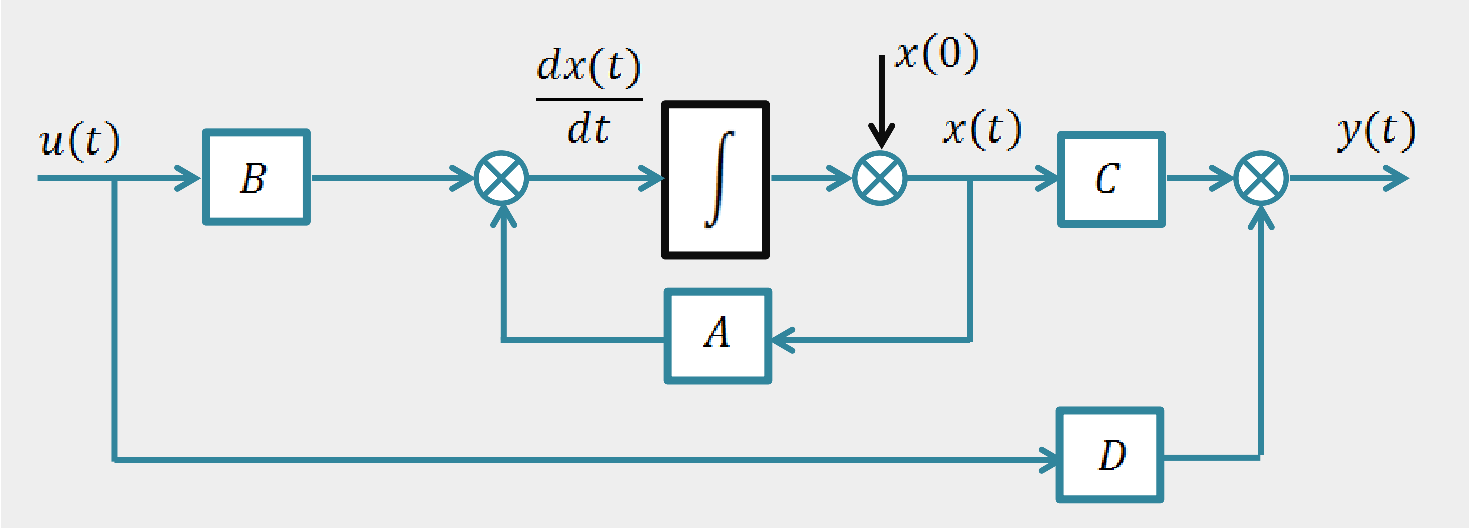
3.3. Pólusok, zérusok

3.4. Az állapotteres leírás és az átviteli függvény kapcsolata

3.5. Pólus-zérus-erősítés alak

Állapotteres leírás

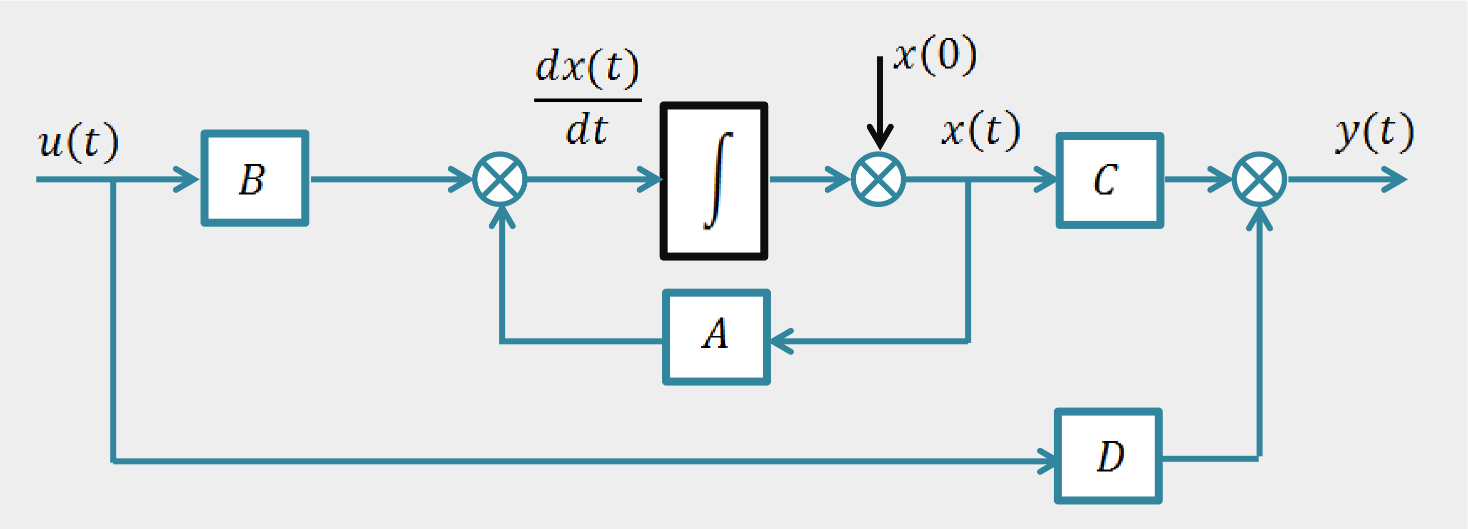
$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Dx(t)$$

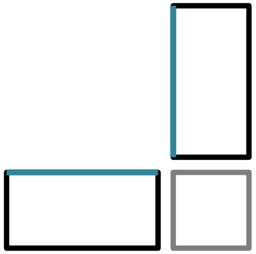


Az állapotegyenlet megoldása (állapottrajektória):

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

Állapotteres leírás





mátrix szorzás:
első mátrix sor
második mátrix oszlop

Ha: ***j*** számú *u* bemenő jel
k számú *y* kimenő jel
x állapotváltozók száma ***n***

Akkor: ***A*** **állapot mátrix** $(n \times n)$
B **bemeneti mátrix** $(n \times j)$
C **kimeneti mátrix** $(k \times n)$
D **együttható mátrix** $(k \times j)$

Átviteli függvény

Átviteli függvény

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \qquad n \geq m$$

Az átviteli függvény az

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y = b_0 u^{(m-1)} + b_1 u^m + \cdots + b_{m-1}\dot{u} + b_m u$$

lineáris differenciálegyenlet Laplace-transzformáltja, ha a kezdeti feltételek nullák:

$$y^{(n-1)}(0) = y^{(n-2)}(0) = \cdots = \dot{y}(0) = y(0) = 0$$

Karakterisztikus polinom $\Delta(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$

Pólusok, zérusok

Pólusok

az átviteli függvény nevezőjének (a karakterisztikus egyenlet) a gyökei

$$\Delta(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 \longrightarrow$$

p_i (s_i) gyökök = pólusok

Zérusok

az átviteli függvény számlálójának a gyökei

$$b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0 \longrightarrow$$

z_i (s_i) gyökök = zérusok

Az állapotteres leírás és az átviteli függvény kapcsolata

Időtartomány

1. $\dot{x} = Ax + Bu$
2. $y = Cx + Du$

Laplace tartomány

1. $sX(s) = AX(s) + BU(s)$
2. $Y(s) = CX(s) + DU(s)$

1 ➡

$$sX(s) - AX(s) = BU(s)$$
$$(sI - A) \cdot X(s) = BU(s)$$
$$X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s)$$

2 ➡

$$Y(s) = C[(sI - A)^{-1}BU(s)] + DU(s)$$
$$Y(s) = [C(sI - A)^{-1}B(s) + D]U(s)$$
$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B(s) + D$$
$$D = 0$$
$$(sI - A)^{-1} = \frac{\mathrm{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)}$$
$$W(s) = \frac{C \cdot \mathrm{adj}(sI - A)B}{\det(sI - A)}$$

- det(sI – A) = 0 definíció szerint az A mátrix sajátértékeit adja meg
- azonban det(sI – A) = 0 a rendszer karakterisztikus egyenlete, amelynek gyökei a pólusok

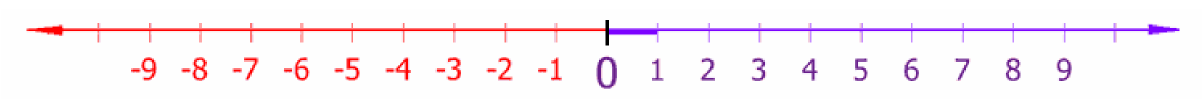
az *A* mátrix sajátértékei = a rendszer pólusai

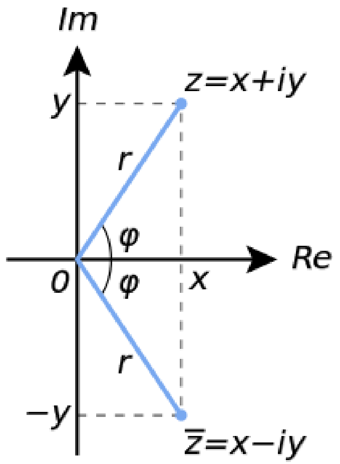
Pólus-zérus-erősítés alak

Az átviteli függvényt gyöktényezős alakra hozva:

$$W(s) = k\frac{\prod_{i=1}^{m-1}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}$$

- a gyökök valós számok vagy komplex konjugált párok lehetnek





4. Rendszerválasz időfüggvénye

4.1. A Laplace transzformáció haszna (ismétlés)

4.2. Részlettörtekre bontás

4.3. Az impulzusválasz időfüggvénye

4.4. Az egységugrás-válasz időfüggvénye

A Laplace transzformáció haszna (ismétlés)

Differenciálegyenlet algebrai egyenletté való átalakítása
(*s* operátor tartományban)

Deriválás

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = sF(s) - f(0)$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$$

időtartomány	***s* operátor tartomány**
$\frac{d}{dt}$	$\cdot\, s$

Integrálás

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}$$

időtartomány	***s* operátor tartomány**
$\int dt$	$\cdot\, \frac{1}{s}$

Részlettörtekre bontás

- az inverz Laplace transzformáció könnyen elvégezhető részlettörtekre bontással is, amennyiben a transzformált *racionális törtfüggvény* (számlálója és nevezője valós együtthatójú polinom *s-ben).*

- ha a tört $(\mathrm{Y}(s))$ nevezője $(\mathrm{D}(s))$ szorzatalakos formában van, akkor a törtet felbontjuk olyan részlettörtek összegére, melyeknek nevezője az eredeti tört egy-egy szorzatát tartalmazza

$$Y(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{N(s)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}=\frac{r_1}{s-p_1}+\frac{r_1}{s-p_2}+\cdots+\frac{r_1}{s-p_n}$$

- a részlettörtek számlálóit az alábbi összefüggés segítségével számítjuk:

$$r_n=\left[(s-p_n)\frac{N(s)}{D(s)}\right]_{s=p_n}$$

Az impulzusválasz időfüggvénye

Számítsuk ki az alábbi átviteli függvénnyel megadott rendszer impulzusválaszának időfüggvényét:

$$W(s) = \frac{50}{(s^2 + 7s + 10)(s + 10)}$$

- a megoldáshoz a kimeneti jel Laplace transzformáltjának részlettörtekre bontásával jutunk
- először azonban nézzük meg a bementi jel Laplace transzformáltját

$$u(t) = \delta(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s) = 1$$

- az átviteli függvény definícióját átrendezve:

$$Y(s) = W(s) \cdot U(s) = \frac{50}{(s^2 + 7s + 10)(s + 10)} \cdot 1$$

Az impulzusválasz időfüggvénye

- a nevezőből egy pólus rögtön meghatározható:

$$p_1 = -10$$

- a másik két pólus a másodfokú egyenlet megoldásából számítható:

$$s^2 + 7s + 10 = 0$$

$$p_2 = -5$$

$$p_3 = -2$$

- a kimenet Laplace transzformáltja szorzatalakban tehát:

$$Y(s) = \frac{50}{(s+2)(s+5)(s+10)}$$

Az impulzusválasz időfüggvénye

- felhasználva a részlettörtekre bontás egyenletét:

$$r_n = \left[(s - p_n)\frac{N(s)}{D(s)}\right]_{s=p_n}$$

$$r_1 = \left[(s+10)\frac{50}{(s+2)(s+5)(s+10)}\right]_{s=-10} = 1{,}25$$

$$r_2 = \left[(s+5)\frac{50}{(s+2)(s+5)(s+10)}\right]_{s=-5} = -3{,}33$$

$$r_3 = \left[(s+2)\frac{50}{(s+2)(s+5)(s+10)}\right]_{s=-2} = 2{,}08$$

Az impulzusválasz időfüggvénye

Laplace tartomány

- a kiszámított r_n-ek ismeretében a kimenet Laplace transzformáltja részlettörtek összegeként:

$$Y(s) = \frac{\overset{r_1}{1{,}25}}{s + \underset{-p_1}{10}} + \frac{\overset{r_2}{-3{,}33}}{s + \underset{-p_2}{5}} + \frac{\overset{r_3}{2{,}08}}{s + \underset{-p_3}{2}}$$

Idő tartomány

Hogy lesz Laplace tartományból időtartomány?
Inverz Laplace transzformációval!

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-\alpha}\right\} = e^{\alpha t}$$

$$y(t) = \underset{r_1}{1{,}25} \cdot e^{\overset{p_1}{-10}t} - \underset{r_2}{3{,}33} \cdot e^{\overset{p_2}{-5}t} + \underset{r_3}{2{,}08} \cdot e^{\overset{p_3}{-2}t}$$

r_1 p_1 r_2 p_2 r_3 p_3

Az egységugrás-válasz időfüggvénye

Számítsuk ki az alábbi átviteli függvénnyel megadott rendszer egységugrás-válaszának időfüggvényét:

$$W(s) = \frac{50}{(s^2 + 7s + 10)(s + 10)}$$

- a megoldáshoz a kimeneti jel Laplace transzformáltjának részlettörtekre bontásával jutunk
- először azonban nézzük meg a bementi jel Laplace transzformáltját

$$u(t) = \varepsilon(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s) = \frac{1}{s}$$

- az átviteli függvény definícióját átrendezve:

$$Y(s) = W(s) \cdot U(s) = \frac{50}{(s^2 + 7s + 10)(s + 10)} \cdot \frac{1}{s}$$

Az egységugrás-válasz időfüggvénye

- ebben az esetben az eddigi három pólushoz egy negyedik is adódik:

$$p_1 = -10 \qquad p_2 = -5 \qquad p_3 = -2 \qquad p_4 = 0$$

- r_n-ek számítása:

$$r_1 = \left[(s+10)\frac{50}{(s+2)(s+5)(s+10)s}\right]_{s=-10} = -0{,}26$$

$$r_2 = \left[(s+5)\frac{50}{(s+2)(s+5)(s+10)s}\right]_{s=-5} = 0{,}67$$

$$r_3 = \left[(s+2)\frac{50}{(s+2)(s+5)(s+10)s}\right]_{s=-2} = -1{,}04$$

$$r_4 = \left[(s+0)\frac{50}{(s+2)(s+5)(s+10)s}\right]_{s=0} = 0{,}5$$

Az egységugrás-válasz időfüggvénye

- a megoldás az impulzusválasz időfüggvényénél használt számítás logikájával:

Laplace tartomány

$$Y(s) = \frac{-0{,}26}{s+10} + \frac{0{,}67}{s+5} + \frac{-1{,}04}{s+2} + \frac{0{,}5}{s}$$

Idő tartomány

$$y(t) = -0{,}26 \cdot e^{-10t} + 0{,}67 \cdot e^{-5t} - 1{,}04 \cdot e^{-2t} + 0{,}5$$

5. Nemlineáris rendszerek

5.1. Rendszerek osztályzása

5.2. Nemlineáris rendszerek numerikus megoldása

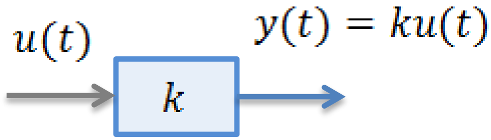
5.3. Munkaponti linearizáció

Rendszerek osztályzása

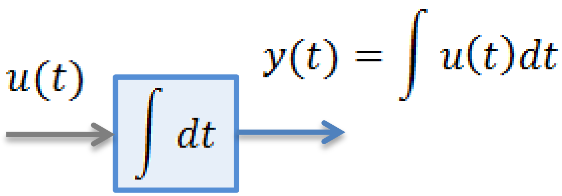
Lineáris rendszerek

- lineáris alaptagokból épülnek fel:

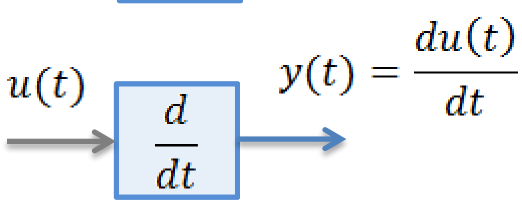
arányos (P) tag:



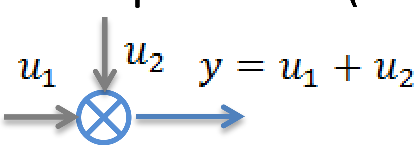
integráló (I) tag:



deriváló (D) tag:

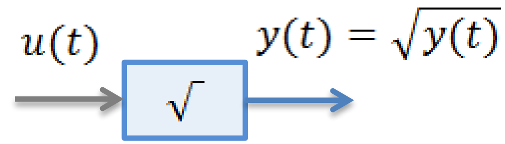


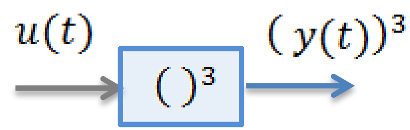
- a lineáris alaptagok között az összegző taggal képzünk kapcsolatot (lineáris kapcsolat)

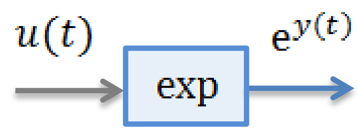


Nemlineáris rendszerek

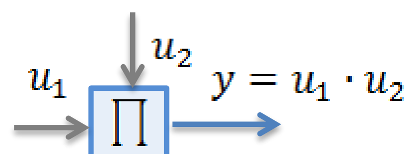
- van a rendszerben legalább egy nemlineáris alaptag, pl.

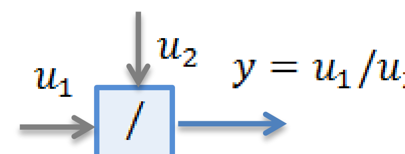






- a nemlineáris alaptagok között a szorzó és a hányados képző taggal képzünk kapcsolatot (nemlineáris kapcsolat)

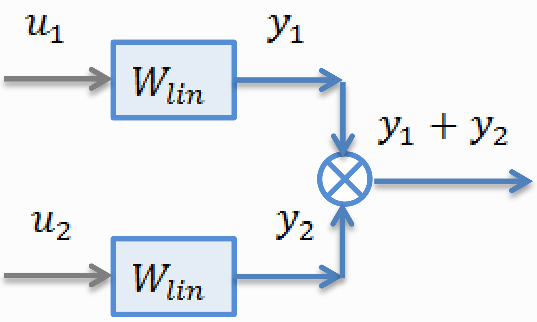




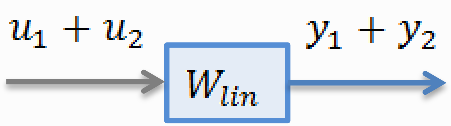
Rendszerek osztályzása

Szuperpozíció elve:

az egyes jelek hatása függetlenül számítható és utána összegezhető



két külön bemenetre két kimenet generálódik, ezek összegződnek



a bemenet a jelek összege, a kimenet a bemenetre adott jelek összege

Lineáris rendszerek

- érvényes a szuperpozíció elve

Nemlineáris rendszerek

- nem érvényes a szuperpozíció elve

Nemlineáris rendszerek numerikus megoldása

- folytonosidejű időben változó nemlineáris rendszer állapotegyenlete:

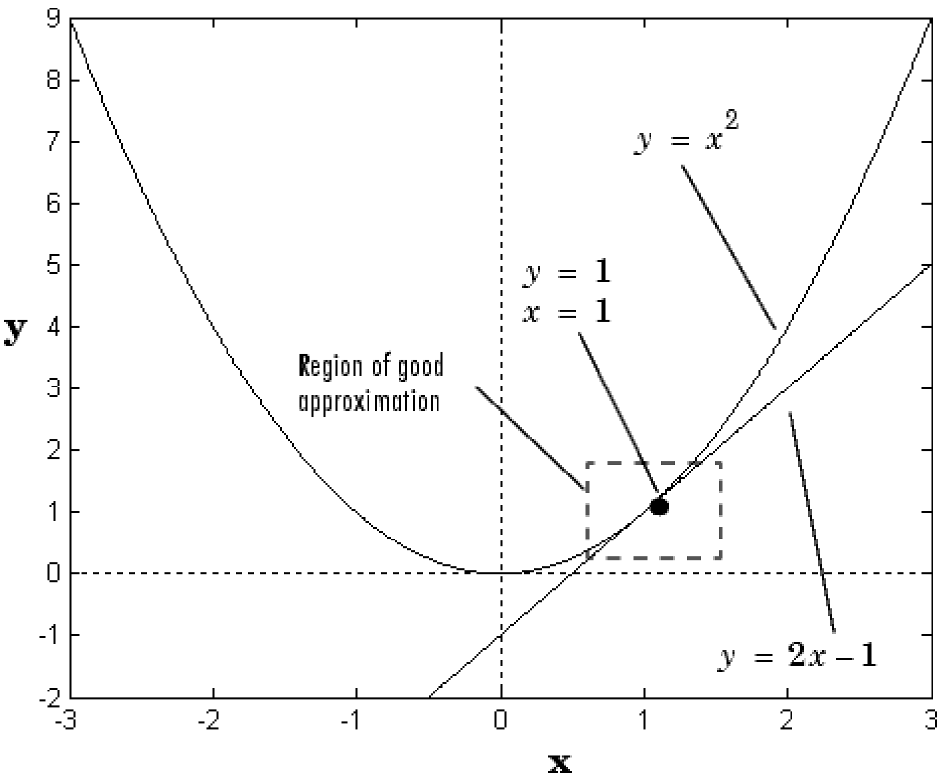
$$\dot{x} = f(t, x, u)$$
$$y = g(t, x, u)$$

- az állapottrajektória számítása: $x_0(t)$ kezdeti állapot és $u_0(t)$ bemenő jel (gerjesztés) ismert, keressük az állapotegyenlet $x(t)$ megoldását

- közelítő megoldások

  1. Taylor-sorba fejtés
     - ✓ másodrendű Taylor-sorral közelítjük a megoldást
  2. Runge–Kutta-módszer
     - ✓ másodrendű vagy negyedrendű módszer

Munkaponti linearizáció



Munkaponti linearizáció: a nemlineáris rendszer lineáris közelítését jelenti egy munkapontban

- valid: a munkapontban és annak kis környezetében

Példa

- legyen a nemlineáris függvény $y = x^2$
- linearizáljunk az alábbi munkapontban: $x = 1, y = 1$
- eredmény a $y = 2x - 1$ lineáris fv
- a munkapont közelében $y = 2x - 1$ jó közelítése a $y = x^2$ függvénynek
- a munkaponttól távol a közelítés rossz
- a validitás a nemlineáris rendszertől függ

Munkaponti linearizáció

- Másodrendű nemlineáris, egy bemenetű rendszer általános alakú állapotegyenlete, valamint a linearizált rendszer mátrixainak számítása :

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = f_1(x_1(t), x_2(t), u(t))$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = f_2(x_1(t), x_2(t), u(t))$$

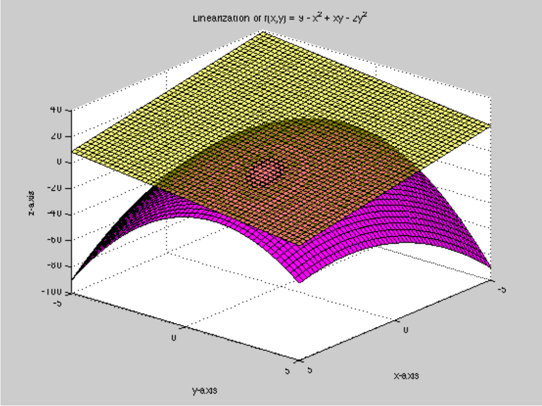
$$y = g(x_1(t), x_2(t), u(t))$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial u} \end{bmatrix}$$



Köszönöm a figyelmet!

Dr. habil. Kovács Levente
egyetemi docens

kovacs.levente@nik.uni-obuda.hu

Dr. Haidegger Tamás
egyetemi adjunktus

haidegger@irob.uni-obuda.hu

EKIK Egyetemi Kutató és Innovációs Központ

K-MOOC

ÓBUDAI EGYETEM Bejczy Antal iRobottechnikai Központ

Physiological Controls Group

Élettani Szabályozások Csoport
Óbudai Egyetem