ROBOTIRÁNYÍTÁS

2. előadás

Matematikai alapok

Dr. habil. Kovács Levente
egyetemi docens

kovacs.levente@nik.uni-obuda.hu

Dr. Haidegger Tamás
egyetemi adjunktus

haidegger@irob.uni-obuda.hu

EKIK Egyetemi Kutató és Innovációs Központ
K-MOOC
Óbudai Egyetem Bejczy Antal iRobottechnikai Központ
Élettani Szabályozások Csoport Óbudai Egyetem

Az előadás témája és célja

Az előadás célja, hogy a hallgatók korábbi matematikai ismereteit felelevenítse azokon a területeken, melyek szorosan kapcsolódnak az irányítástechnikához. A meglevő tudást ebben az előadásban bővítjük a szükséges elemekkel, így a kurzus során könnyebben vehetik az akadályokat, több figyelmet szentelhetnek a tényleges irányítástechnikai fogalmak és megközelítések megismerésére.

Az előadás során átismételjük a lineáris algebra alapjait, azoknak alkalmazási szintjén. Szó lesz a vektorok és mátrixok felírásának módjáról, az ezekkel végezhető alapvető matematikai műveletekről (összeadás, szorzás stb.), a műveletek tulajdonságairól és szerepükről, felhasználásukról a kurzus későbbi fejezeteiben. Átismételjük a mátrixokkal való speciális műveleteket, így a determináns és az inverz számítását, majd ezeket gyakorlati példákon keresztül is bemutatjuk.

Az előadás második részében szó lesz a komplex számokkal végzett alapvető műveletekről, felírásukról, ábrázolásukról, illetve kapcsolatukról az irányítástechnikával. Bemutatjuk az Euler-féle felírást, és azt, hogyan oldhatóak meg közönséges differenciálegyenletek komplex számok segítségével. A második rész célja, hogy bemutassa a kapcsolatot az absztrakt matematikai fogalmak és a gyakorlatban, a valóságban kézzel fogható megoldások között.

Az előadás végén a Fourier-sorfejtésről és a Fourier-transzformációról lesz szó, mely szerves része az irányítástechnikához szorosan kapcsolódó jelfeldolgozásnak, illetve szilárd alapokat biztosít a tananyag során alkalmazott egyéb transzformációs eljárások megértéséhez.

Kulcsszavak

Lineáris algebra, vektorok, mátrixok, determináns, inverz, adjungált, komplex számok, Euler-féle felírás, Fourier-sorfejtés, Fourier-transzformáció, frekvenciatartomány

Tartalomjegyzék

1. Lineáris algebra

1.1. Vektorok

A *vektorok* jelentős szerepet a szabályozástechnikában. Az irányított fizikai mennyiségek (sebesség, erő stb.) jelölése mellett gyakran alkalmazzuk őket egy rendszer paramétereinek (pl. tömeg, ellenállás) és változóinak (pl. gyorsulás, áramerősség) egy csoportba foglalásához.

Jelölésük általában **kis félkövér** betűkkel történik.

A vektorok elemei *skalármennyiségek*, csak értékük van, irányítottságuk nincs.
Kétféle felírásuk létezik:

Oszlopvektorok: $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ Sorvektorok: $\mathbf{b} = [b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_m]$

Az átmenet sor- és oszlopvektor között a *transzponálás:*

$$\boldsymbol{a}^T = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}^T = [a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n]$$

a dimenziója $n \times 1$, hiszen n sorból és 1 oszlopból áll. **b** dimenziója hasonlóképpen $1 \times m$. Transzponálással a dimenzió megváltozik, így pl. $\mathbf{b}^T$dimenziója $m \times 1$.

A vektorok összeadhatóak, ha dimenziójuk megegyezik.

Példa: ha $m = n = 3$, akkor $\mathbf{a} + \mathbf{b}^T = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{bmatrix}$

A vektorok összeadása *kommutatív* és *asszociatív* művelet, azaz:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$$

$$\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$$

A vektorok szorzásának több módja is létezik. Két vektor *skalárszorzata* az azonos indexű tagok összeszorzását, majd ezek összeadását jelenti. Feltétele, hogy a vektorok elemeinek száma (n) megegyezzen.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \cdots = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

A skalárszorzat *kommutatív* és *disztributív* művelet:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$$

Megjegyzés: ha a vektort skalárral szorzunk, az eredmény vektor marad:

$$\lambda \cdot \mathbf{a} = \lambda \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \lambda \cdot a_2 \\ \lambda \cdot a_3 \end{bmatrix}$$

Két vektor *vektorszorzata* alatt a két vektor által meghatározott síkra merőleges vektort értjük. A vektorszorzat csak 3×1 dimenziójú vektorokra értelmezett, ám a mindennapi fizikában komoly jelentőséggel bír, pl. az nyomaték kiszámítására az erő és az erőkar vektorszorzatát használjuk, de az elektromechanikában vektorszorzatot alkalmazunk a Lorentz-erő számítására is.

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix}$$

A vektorszorzat *disztributív* és *anti-asszociatív*:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$$

Fontos tulajdonsága a vektorok *hármasszorzata*:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$$

1.2. Mátrixok

A *mátrixok* szerepe az robotikában jelentős, hiszen mechanikai egyenletek, térbeli transzformációk és a rendszerek viselkedésének a leírása is segítségükkel történik.

A mátrixokat általában a latin ábécé **NAGY FÉLKÖVÉR** betűivel jelöljük:

$$\underset{(n \times m)}{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{A}$ mátrix dimenziója $n \times m$, ahol n a sorok, m az oszlopok számát jelöli. Egy $n \times m$ méretű mátrixnak tehát $n \cdot m$ db. eleme van.

Példa: $\underset{(2\times3)}{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \underset{(4\times2)}{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$

Műveletek mátrixokkal

Egy $n \times m$ méretű mátrix *transzponáltja* egy $m \times n$ méretű mátrix, elemei pedig az eredeti mátrix elemeinek páronkénti felcseréléséből adódnak:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} b_{11} = a_{11} \\ b_{12} = a_{21} \\ b_{21} = a_{12} \\ \vdots \end{matrix} \qquad \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix}$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \uparrow$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{A}^T \rightarrow b_{ij} = a_{ji} \rightarrow \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix}$$

Példa: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

Ha az $n \times m$ mátrix esetében $n = m$, akkor négyzetes mátrixról beszélünk.
A *diagonális* mátrixok esetbén csak a mátrix *főátlójában* találhatóak nem zérus elemek:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} \end{bmatrix} \qquad \text{Példa: } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Az *egységmátrix* olyan diagonális mátrix, melynek minden főátló menti elemének értéke 1:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Mátrixok összeadása: két mátrix csak akkor adható össze, ha dimenziójuk megegyezik. Ilyenkor a mátrixok minden tagját egyenként össze kell adni:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix}$$

Példa:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

A mátrixok összeadása *kommutatív* és *asszociatív* művelet:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$$

Mátrixok szorzása

Két mátrix akkor szorozható össze egymással, ha a szorzandó mátrix oszlopainak száma megegyezik a szorzó mátrix sorainak számával. Ha egy $n_1 \times m_1$ méretű mátrixot egy $n_2 \times m_2$ méretű mátrixszal szorzunk, továbbá $m_1 = n_2$, a szorzat egy $n_1 \times m_2$ méretű mátrix lesz.

$$\underset{n_1 \times m_1}{\mathbf{A}} \cdot \underset{n_2 \times m_2}{\mathbf{B}} = \underset{n_1 \times m_2}{\mathbf{C}}$$

$\mathbf{C}$ mátrix elemeire igaz, hogy

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n_2} a_{ik} b_{ik}, \quad i = 1 \dots n_1, \quad j = 1 \dots m_2$$

Minden c_{ij} elem tehát meghatározható, ha a szorzandó mátrix *i*-edik sorának elemeit megszorozzuk a szorzó mátrix *j*-edik oszlopának elemeivel, balról jobbra, illetve fentről lefelé irányban:

1. Példa:

$$\begin{array}{cc} & \mathbf{B} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{A} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 5 & 6 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{C} \end{array}$$

$$c_{33} = a_{31} b_{13} + a_{32} b_{23} = 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 = -2$$

$$c_{12} = a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22} = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 0 = 6$$

2. Példa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-5) & 1 \cdot 4 + 2 \cdot 6 \\ -2 \cdot 2 + 4 \cdot 0 & -2 \cdot 1 + 4 \cdot (-5) & -2 \cdot 4 + 4 \cdot 6 \\ 4 \cdot 2 + 0 \cdot 0 & 4 \cdot 1 + 0 \cdot (-5) & 4 \cdot 4 + 0 \cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -9 & 16 \\ -4 & -22 & 16 \\ 8 & 4 & 16 \end{bmatrix}$$

A mátrixok szorzása *nem kommutatív* művelet:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$$

A tagok felcseréléséhez a mátrixok transzponálására van szükség:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (\mathbf{B}^T \mathbf{A}^T)^T$$

A mátrix szorzása egységmátrixszal az eredeti mátrixot eredményezi:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{A}$$

A mátrix szorzása skalárral hasonló a vektor skalárral való szorzásához:

$$\lambda\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1m} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \dots & \lambda a_{nm} \end{bmatrix}$$

Megjegyzés:

A vektorok tekinthetők olyan mátrixoknak, melyek egyik dimenziója *1*. Ilyenkor a vektorok szorzásánál ügyelni kell a felírás sorrendjére és arra, hogy sor- vagy oszlopvektorokat szorzunk-e egymással.

Példa: $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{a}^T \cdot \boldsymbol{b} = [a_1 \quad a_2 \quad a_3] \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \boldsymbol{b}^T \cdot \boldsymbol{a}$$

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}^T = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \cdot [b_1 \quad b_2 \quad b_3] = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}^T = \boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}$$

Ez utóbbi kifejezés alatt két vektor *diadikus* szorzatát értjük. Jelölése: $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$.

A mátrixok vektorokkal való szorzása hasonlóképpen közelíthető meg, ha a szorzó vektort egy $n \times 1$ dimenziós mátrixnak tekintjük.

Példa: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 \\ 0 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

Determináns

A négyzetes mátrixok fontos jellemzője a mátrix *determinánsa. A* determináns *skalármennyiség*.

1×1 mátrix esetén a determináns a mátrix önmaga.

2×2 mátrix esetén a determináns a főátló elemeinek és a mellékátló elemeinek szorzatának különbsége:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \ \det(\mathbf{A}) = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

3×3 vagy annál nagyobb mátrixok esetén a determináns megegyezik a mátrix valamely sora vagy oszlopa szerint számított *aldeterminánsok* előjeles összegével.

A mátrix minden eleméhez egy sakktábla-szerű mintázat alapján egy előjelet rendelünk, és az adott sor szerint kifejtve előjelesen adjuk össze a sor elemeinek és a hozzájuk tartozó aldeterminánsok szorzatának összegét:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Az 1. oszlop szerinti kifejtés és az aldeterminánsok:

$$\boxed{2 \cdot \det\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}} \quad \boxed{2 \cdot \det\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}} \quad \boxed{1 \cdot \det\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}}$$

$$\det\mathbf{A} = +2 \cdot \big(-3 \cdot 1 - 1 \cdot (-2)\big) - 2 \cdot \big(-1 \cdot 1 - 0 \cdot (-2)\big) + 1 \cdot \big(-1 \cdot 1 - 0 \cdot (-3)\big) = -1$$

Mintázat: $\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$

A négyzetes mátrix *adjungáltja* a mátrix egyes elemeihez tartozó, sakktábla-mintázat alapján előjelezett aldeterminánsokból épített mátrix transzponáltja.

Példa:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow adj(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} \det\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} & -\det\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} & \det\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \\ -\det\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} & \det\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} & -\det\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \\ \det\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} & -\det\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} & \det\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Egy négyzetes mátrix *inverze* az a mátrix, mellyel az eredeti mátrixot megszorozva egységmátrix adódik.

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$$

Kiszámítása a következő összefüggéssel történik:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} adj(\mathbf{A})$$

Példa: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad adj\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \det(\mathbf{A}) = 1 \cdot 3 - 0 \cdot 2 = 3$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} adj(\mathbf{A}) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Ellenőrzés:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 0\left(\frac{-2}{3}\right) & 1 \cdot 0 + 0 \cdot \frac{1}{3} \\ 2 \cdot 1 + 3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) & 2 \cdot 0 + 3 \cdot \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Komplex számok

A komplex számok általános alakja: $c = a + b \cdot j$

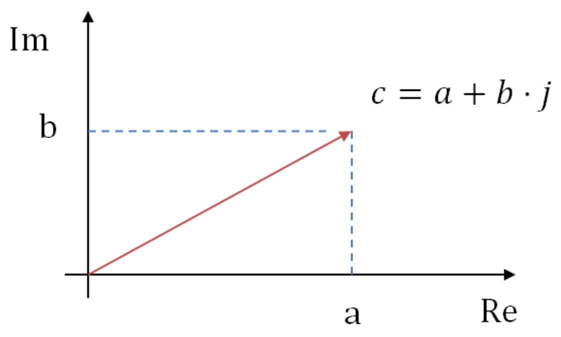
Az irányítástechnikában és robotikában az egységnyi komplex értéket (imaginárius egységet) *j*-vel jelöljük, a matematikában általában használatos *i* helyett:

$$j = \sqrt{-1} \qquad j^2 = -1$$

A komplex számok valós és képzetes részből állnak:

$$c = \mathrm{Re}\{c\} + j \cdot \mathrm{Im}\{c\}, \qquad \mathrm{Re}\{c\} = a, \mathrm{Im}\{c\} = b$$

A komplex számok grafikus ábrázolása a komplex síkon lehetséges:



1. ábra: A komplex számok grafikus ábrázolása

A komplex számok tehát egy kétdimenziós vektorként értelmezhetőek a $\mathrm{Re} - \mathrm{Im}$ síkon így hosszuk és irányításuk is van. Ennek a felírásnak nagy jelentősége van a robotika számos területén, mint ahogyan azt majd a kurzus során látni fogjuk.

A komplex számok *konjugáltja* a következőképpen írható fel:

$$\bar{c} = a - j \cdot b$$

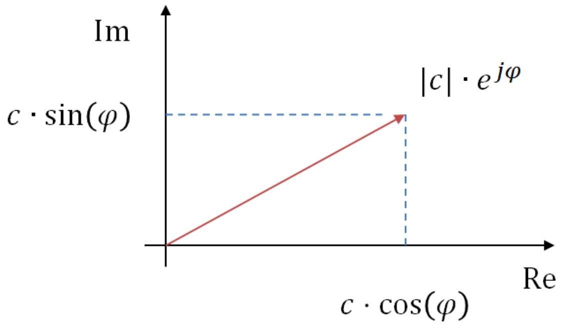
Négyzetek összege komplex számok esetén:

$$c \cdot \bar{c} = (a + j \cdot b)(a - j \cdot b) = a^2 + b^2$$

Komplex számok *abszolút értéke* az alábbi összefüggés alapján számítható ki:

$$|c| = \sqrt{c \cdot \bar{c}} = \sqrt{(\mathrm{Re}\{c\})^2 + (\mathrm{Im}\{c\})^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

A komplex számokat polár-koordinátarendszerben is felírhatjuk, mint ahogyan az a 2. ábrán is látható.



2. ábra: A komplex számok ábrázolása polár-koordinátarendszerben

Hasonlóképpen, gyakran alkalmazzuk az Euler-féle felírást is:

$$c = |c| \cdot \left(\cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi)\right) = |c| \cdot e^{j\varphi}$$

AzEuler-féle felírással analógiát fedezhetünk fel a harmonikus jelekkel. Ilyenkor$|c|$ a jel *amplitúdója*, φ pedig a fázisszög. Az Euler-féle felírás következményeként megteremthető az átmenet a harmonikus jelek általános ábrázolása és azok komplex számmal való felírása között:

$$f(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \quad \rightarrow \quad f(t) = A - j \cdot B$$
$$g(t) = M\cos(\omega t + \varphi) \quad \rightarrow \quad Me^{-j\varphi}$$

Megjegyzés: a felírás nem egyenlőséget jelöl, csupán *megfeleltetést.* Az átírás jelentősége elsősorban a robotikában túlnyomórészt előforduló *általános differenciálegyenletek* megoldása.

Példa: általános differenciálegyenletek harmonikus megoldása komplex számok segítségével.

A megoldandó differenciálegyenlet: $y'' + 2y' + 5y = 0$

Megoldás karakterisztikus polinommal:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = \begin{cases} -1 + 2j \\ -1 - 2j \end{cases}$$

A megoldás próbafüggvénye:

$$y = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x} = Ae^{-1x}e^{2t \cdot x} + Be^{-1t}e^{-2t \cdot x}$$

$$Ae^{-1x}e^{2x \cdot j} + Be^{-1t}e^{-2x \cdot j} = Ae^{-x}\left(\cos(2x) + \sin(2x)\right) + Be^{-x}\left(\cos(2x) - \sin(2x)\right) =$$

$$= e^{-x}\left(C\cos(2x) + D\sin(2x)\right) = Ee^{-x}\cos(2x + \varphi)$$

3. A Fourier-transzformáció

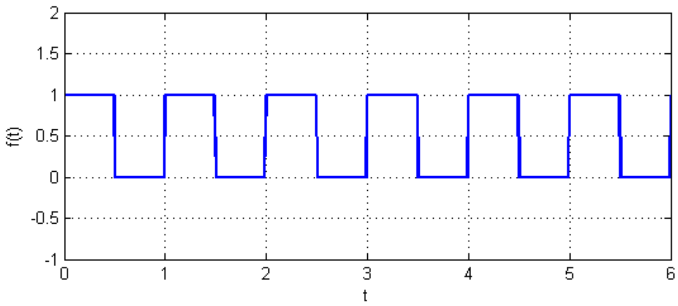
A Fourier-transzformáció célja, hogy bármely periodikus függvényt (gyakorlati alkalmazásban elektromos, mágneses stb. jeleket) diszkrét frekvenciájú, harmonikus jelek összegére bontson fel. Ez a függvény *Fourier-sora*. A Fourier-sorral az eredeti függvényeket általában *közelítjük*, és csak a legszignifikánsabb tagokat használjuk fel a sorból az eredeti függvény jellemzésére.

Az alapjel periódusideje T, az *alapharmonikus* körfrekvencia ω_0.

$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(n\omega_0 t) + b_n\sin(n\omega_0 t)]$ $\qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t)dt \quad a_n = \frac{2}{T}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t)cos(n\omega_0 t)dt \quad b_n = \frac{2}{T}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t)sin(n\omega_0 t)dt$

Példa Fourier-sorfejtésre: négyszögjel (3. ábra).



3. ábra: Tipikus négyszögjel, 0 és 1 közötti maximum értékekkel

A jel periódusideje $T = 1$.

$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t)dt$, így

$$a_0 = \frac{1}{1}\int_{-1/2}^{1/2} f(t)dt = \int_{-1/2}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{1/2} f(t)dt = \int_{-1/2}^{0} 0dt + \int_{0}^{1/2} 1dt = \frac{1}{2}$$

$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t)cos(n\omega_0 t)dt$, ezért

$$a_n = \frac{2}{1}\int_{-1/2}^{1/2} f(t)\cos\left(n\frac{2\pi}{1}t\right)dt = 2\left[\int_{-1/2}^{0} 0\cdot\cos\left(n\frac{2\pi}{1}t\right)dt + \int_{0}^{1/2} 1\cdot\cos\left(n\frac{2\pi}{1}t\right)dt\right]$$
$$= 2\left[\frac{1}{2\pi n}\sin(2\pi n t)\right]_0^{1/2} = \frac{1}{\pi n}\sin(n\pi)$$

Mivel $\sin(n\pi) = 0$ minden n értékére, ezért $a_n = 0$.

$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t)sin(n\omega_0 t)dt$, tehát

$$b_n = \frac{2}{1}\int_{-1/2}^{1/2} f(t)\sin\left(n\frac{2\pi}{1}t\right)dt = 2\left[\int_{-1/2}^{0} 0\cdot\sin\left(n\frac{2\pi}{1}t\right)dt + \int_{0}^{1/2} 1\cdot\sin\left(n\frac{2\pi}{1}t\right)dt\right]$$

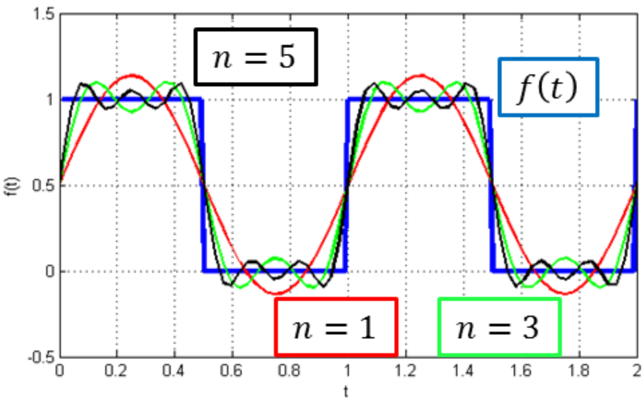
$$= -2\left[\frac{1}{2\pi n}\cos(2\pi nt)\right]_0^{1/2} = -\frac{1}{\pi n}\cos(n\pi) + \frac{1}{\pi n}$$

Amennyiben n páros, $b_n = 0$, amennyiben páratlan, $b_n = \frac{2}{\pi n}$.
Összegezve:

$$f(t) \approx \frac{1}{2} + \sum_{n=1,3,5\ldots}^{\infty}\left[0\cdot\cos(2\pi nt) + \frac{2}{\pi n}\sin(2\pi nt)\right]$$

$$f(t) \approx \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sin(2\pi t) + \frac{2}{3\pi}\sin(3\cdot 2\pi t) + \frac{2}{5\pi}\sin(5\cdot 2\pi t) + \cdots$$

A sorfejtést elvégezve, folyamatosan bővítve a sort az új elemekkel, egyre pontosabban közelíthető a kívánt periodikus függvény, mint ahogyan az a 4. ábrán is látható.



4. ábra: A négyszögjel Fourier-sorral való közelítése, n=1,3,5 értékek esetén

A nem periodikus függvények *nem megszámlálható* végtelen harmonikus összetevőből állnak, ami *folytonos eloszlású* frekvenciát eredményez. Nem választható ki egyetlen frekvencia sem, melyhez véges értékű amplitúdó tartozik, de megadható egy $d\omega$ *frekvenciasáv*, melyhez *amplitúdósűrűség* tartozik.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \qquad \rightarrow \qquad F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

Ezt a kölcsönös összefüggést nevezzük *Fourier-transzformációnak*. Előnye, hogy a frekvenciafüggvény (spektrum) egyértelműen meghatározza a függvény időbeli alakját.

Az előadás összefoglalása

Az előadás során felelevenítettük a kurzus során használatos matematikai tudásanyagot. Kiegészítettük a korábbi lineáris algebrai ismereteket a mátrixokkal való speciális műveletekkel, a komplex számok számos felírását és tulajdonságaikat ismertettük, illetve bemutattuk a Fourier-transzformációt, annak jelentőségét, illetve az átmenetet a Fourier-sorfejtés és a Fourier-transzformáció között.

Ellenőrző kérdések

1. Milyen feltételeknek kell teljesülnie ahhoz, hogy két vektor, két mátrix, illetve egy vektor és egy mátrix összeadható/összeszorozható legyen?

2. Hogyan számítható ki egy négyzetes mátrix determinánsa, inverze? Mikor létezik egy mátrixnak ez a két értéke?

3. Hogyan számíthatjuk ki egy komplex szám abszolút értékét és hogyan kapcsolódik a polár-koordinátarendszerben való felírása az abszolút érték és a fázisszög fogalmához?

4. Hogyan kapcsolódnak a komplex számok a homogén, állandó együtthatós, közönséges differenciálegyenletek megoldásához, és hogyan történik az áttérés a képzetes értékekről a valós, mérhető értékek tartományába?

5. Mi a különbség a Fourier-sorfejtés és a Fourier-transzformáció között?