ROBOTIRÁNYÍTÁS

9. előadás

Soros kompenzátorok, PID szabályozó

Dr. habil. Kovács Levente
egyetemi docens

kovacs.levente@nik.uni-obuda.hu

Dr. Haidegger Tamás
egyetemi adjunktus

haidegger@irob.uni-obuda.hu

Az előadás témája és célja

Az előző előadás az empirikus szabályozókat tárgyalta, melyek esetén táblázatban összefoglalt szabályokon alapuló tervezés történik, tipikusan olyan rendszerekhez, melyekről kevés, esetleg semmilyen információ nem áll rendelkezésünkre. Jelen előadásban olyan rendszerekhez tervezünk szabályozót, amelyeknek ismerjük a matematikai modelljét. Ebben az esetben már egzaktabb tervezést tudunk végezni, általunk specifikált, előírt szabályozási paraméter értékéhez (jelen esetben fázistartalékéhoz) tudunk szabályozót tervezni.

Az előadás ismerteti a soros kompenzálás elvét, a soros kompenzátorok típusait és kiemelten a PID szabályozók tulajdonságait. Ezt követően részletesen bemutatjuk a P szabályozó tervezését előírt fázistartalékra (példával illusztrálva, Matlab megoldással), majd a közelítő PID szabályozó tervezését előírt fázistartalékra.

Az előadás célja, hogy az iparban még ma is leggyakrabban alkalmazott PID szabályozó tervezésével megismerkedjenek a hallgatók.

Kulcsszavak

soros kompenzátor, ideális deriváló tag, közelítő deriváló tag, ideális PID szabályozó, közelítő PID szabályozó, pólus-zérus kiejtés

Tartalomjegyzék

1. Soros kompenzátorok

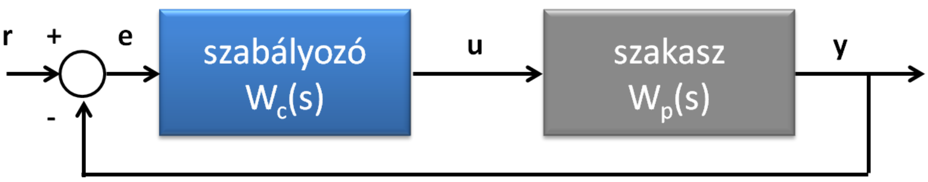
1.1. Soros kompenzálás elve

Soros kompenzálás esetén (1. ábra) a szabályozó tulajdonságai:

- a szakasszal sorba kapcsolt tag (szakasz előtt van);
- bemenő jele a hibajel (e), kimenő jele a beavatkozó jel (u);
- átviteli függvényét ($W_c(s)$) úgy tervezzük meg, hogy zárt körben a szakasz nem megfelelő tulajdonságai kikompenzálódjanak (ezért hívjuk a szabályozót kompenzátornak is).

A soros kompenzátort tartalmazó szabályozási körrel szembeni elvárások:

1. stabil legyen (ez a legfontosabb elvárás);
2. egyéb minőségi tulajdonság:
    - statikus pontosság
    - zajelnyomás
    - gyorsaság
    Ezen egyéb minőségi tulajdonságok azonban csak a stabilitás rovására növelhetők bizonyos határon túl.



1. ábra: Soros kompenzátort tartalmazó szabályozási kör

1.2. Soros kompenzátorok típusai

A soros kompenzátorok három alaptagból épülhetnek fel:

- arányos (P) tag: a hiba aktuális értékét veszi figyelembe,
- integráló (I) tag: a hiba korábbi értékeit veszi figyelembe,
- deriváló (D) tag: a hiba alakulását veszi figyelembe.

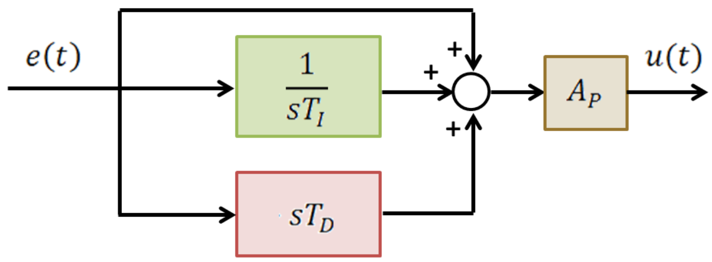
Az előző (8.) előadáson már foglalkoztunk P és PI szabályozók tervezésével, így a P és az I alaptag átviteli függvénye már ismerős. Ami újdonságot jelenthet az eddigiekhez képest, az a deriváló (D) tag. A deriváló tag átviteli függvénye $W_{D_i} = sT_D$, azonban ha megfigyeljük ezt az átviteli függvényt, észrevehetjük, hogy a számláló fokszáma nagyobb, mint a nevezőé (a nevező ebben az esetben 1), ez pedig fizikai rendszerrel nem valósítható meg (emiatt *ideális deriváló tag*nak hívjuk). Éppen ezért a valóságban implementálandó szabályozókban *közelítő deriváló tag*ot alkalmazunk, ahol az ideális deriváló tag mellett (melynek paramétere a deriválási idő, T_D) egy új pólust is bevezetünk, aminek időállandója T_C. A soros kompenzátorokat felépítő alaptagok átviteli függvényét és paramétereit az 1. táblázat tartalmazza.

Jel.	Típus	Átviteli függvény	Paraméterek
P	arányos	$W_P(s) = A_P$	A_P erősítés
I	integráló	$W_I(s) = \frac{1}{sT_I}$	T_I integrálási idő
D_i	ideális deriváló	$W_{D_i}(s) = sT_D$	T_D deriválási idő
D	közelítő deriváló	$W_D(s) = \frac{sT_D}{1+sT_C}$	T_D deriválási idő; T_C időállandó

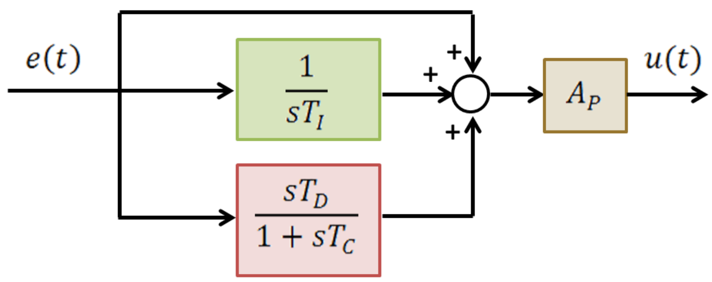
1. táblázat: A soros kompenzátorokat felépítő alaptagok

1.3. PID szabályozó tulajdonságai

Az ideális és közelítő deriváló tag bevezetése következtében megkülönböztetünk *ideális PID szabályozó*t (2. ábra) és *közelítő PID szabályozó*t (3. ábra).



2. ábra: Az ideális PID szabályozó blokkdiagramja



3. ábra: A közelítő PID szabályozó blokkdiagramja

Az ideális PID szabályozó átviteli függvénye:

$$W_{PID}(s) = A_P\left(1 + \frac{1}{sT_I} + sT_D\right) \tag{1}$$

A közelítő PID szabályozó átviteli függvénye:

$$W_{PID}(s) = A_P\left(1 + \frac{1}{sT_I} + \frac{sT_D}{1 + sT_C}\right) \tag{2}$$

A továbbiakban a közelítő PID szabályozóval fogunk foglalkozni.

A közelítő PID szabályozó átviteli függvényét átalakítva olyan alakhoz jutunk, ami a szabályozótervezésnél jól használható:

$$W_{PID}(s) = A_P\left(1 + \frac{1}{sT_I} + \frac{sT_D}{1 + sT_C}\right) = \frac{A_P}{T_I} \cdot \frac{1 + (T_I + T_C)s + T_I(T_D + T_C)s^2}{s(1 + sT_C)} \tag{3}$$

Látható, hogy a szabályozónak négy paramétere van: az $A_P > 0$ erősítés, az integrátor $T_I > 0$ időállandója, valamint a derivátorhoz tartozó $T_D, T_C > 0$ időállandók.

A közelítő PID szabályzó **megváltoztatja**:

- a *körerősítést*, melyet $\frac{A_P}{T_I}$-szeresére módosít,
- a szabályozási kör *típusszámát* 1-el növeli,
- a felnyitott körben *két új zérus* jelenik meg (a zérusok komplex konjugált póruspárt alkothatnak megfelelő időállandók választása esetén),
- a felnyitott körben *két új pólus* jelenik meg.

2. Soros kompenzátor tervezése előírt fázistartalékra

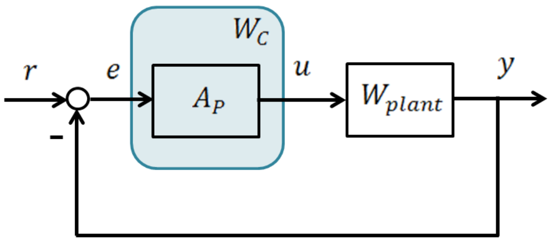
A következőkben bemutatjuk, hogyan lehet P, illetve közelítő PID szabályozót tervezni előírt fázistartalékra. A fázistartalék a stabilitással függ össze, ahogy az az előző előadásokon tárgyalva volt, így kézenfekvő, hogy a fázistartalék nagyságával írjuk elő, mennyire stabil rendszert szeretnénk tervezni. Általában $45° - 60°$-os fázistartalékra tervezünk ökölszabályként, ez számít megbízhatóan stabil rendszernek. Ha $72°$ a fázistartalék, akkor a rendszer kimenetén nincs túllövés, viszont a rendszer lassabb. A túllövés mértéke és a rendszer gyorsasága tehát egymással szembenálló követelmények, a megfelelő arány megtalálása a tervezőmérnök feladata. A fázistartalék mellett lehet előírt állandósult hibára is tervezni, ez olyan szabályozásoknál lehetséges, amikben nincs integráló tag, hiszen egységugrás bemenet esetén az integráló tag használata önmagában biztosítja a nulla maradó hibát.

2.1. P szabályozó tervezése előírt fázistartalékra

2.1.1. A tervezési feladat

Tervezzünk P típusú szabályozót, mely W_C átviteli függvényű (az erősítése A_P) a W_{plant} átviteli függvényű szakaszhoz (4. ábra). Az előírt fázistartalék legyen $\varphi_t = 45°$.

$$W_{plant} = \frac{4}{(1+10s)(1+3s)(1+0.2s)} \tag{4}$$



4. ábra: P szabályozó tervezése előírt fázistartalékra – a tervezési feladat

2.1.2. A tervezés koncepciója

1. Először tekintsünk egy P szabályozót $A_P = 1$ értékű erősítéssel, és keressük meg azt a frekvenciát, ahol a felnyitott kör fázismenete

$$\varphi|_{\omega_o} = -180° + \varphi_t = -180° + 45° = -135° \tag{5}$$

2. A megkeresett frekvencia ω_o, ezt kell vágási frekvenciának választani.

3. Az ω_o frekvencián a felnyitott kör erősítését állítsuk be 1-re, tehát

$$K_{open}|_{\omega_o} = K_P \cdot K_{plant} = 1 \leftrightarrow 0\text{dB} \tag{6}$$

4. Az ω_o frekvencián $A_P = 1$ erősítés mellett a felnyitott kör amplitúdó erősítése A_1:

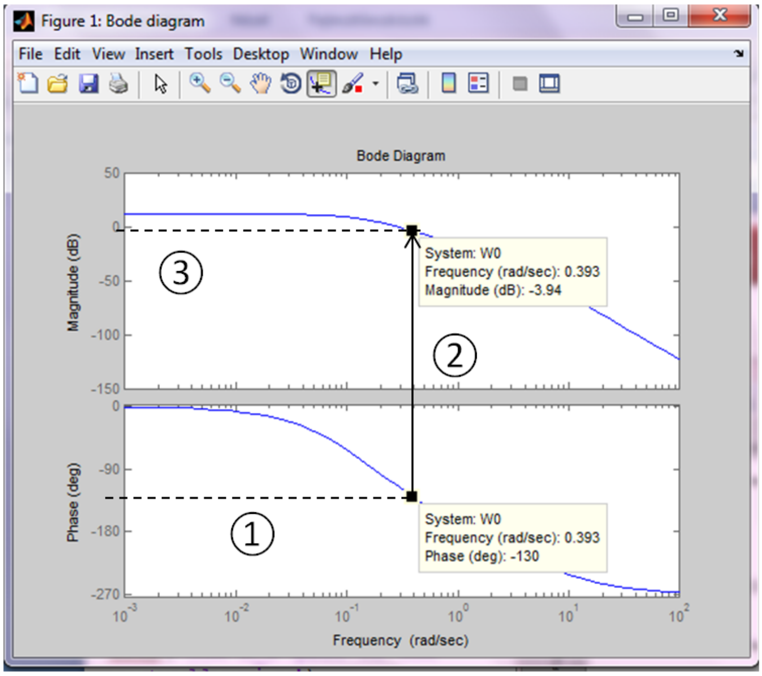
$$A_P \cdot A_1 = 1 \Rightarrow A_P = \frac{1}{A_1} \tag{7}$$

2.1.3. Megoldás Matlabban

1. Grafikus megoldás

A grafikus megoldáshoz tartozó Bode diagramot az 5. ábra mutatja.

1. Kirajzoltatjuk Matlabban a Bode diagramot (ezt a `bode()` paranccsal tehetjük meg), és keressük meg a $-135°$-ot a fázismeneten. A példában (5. ábra) látható, hogy nem tudtuk pontosan megtalálni, csak a $-130°$-ot; ez azért van, mert a Matlab diszkrét frekvenciákra számítja a Bode diagram amplitúdó-és fázismenetét.



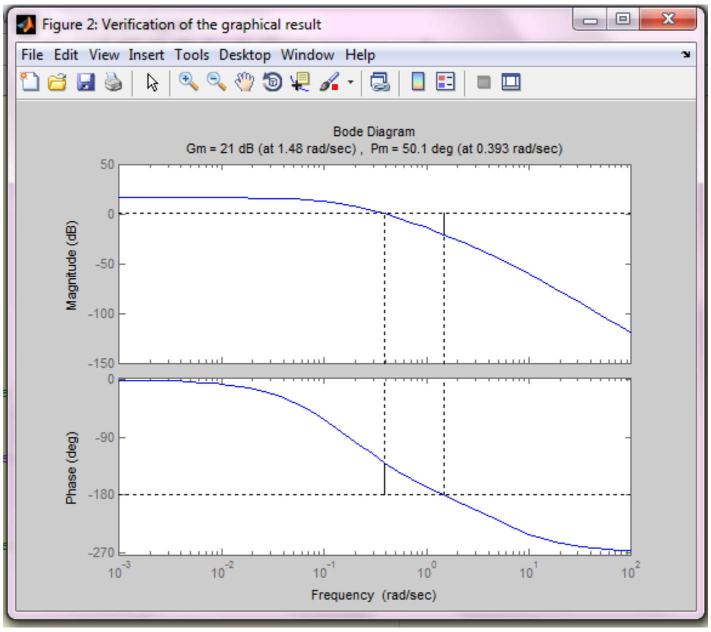
5. ábra: P szabályozó tervezése előírt fázistartalékra – grafikus megoldás

2. Leolvassuk az ehhez tartozó frekvenciát, ezt választjuk vágási frekvenciának (a példában 0,393 rad/sec).

3. Megkeressük a vágási frekvencián az erősítés értékét (a példában $-3{,}94$ dB).

4. Tehát 3,94 dB erősítéssel kell kompenzálnunk, hogy az előírt fázistartalékot elérjük. Átszámítva a decibelt lineáris skálára:

$$A_P = 10^{3{,}94/20} = 1{,}5740 \tag{8}$$



6. ábra: P szabályozó tervezése előírt fázistartalékra – grafikus megoldás ellenőrzése

5. Az eredményt le tudjuk ellenőrizni, ha meghívjuk a `margin()` parancsot a szabályozóval kompenzált zárt körre (6. ábra). Ez ugyanúgy kirajzolja a diagramot, mint a `bode()`, de az ábrán megjeleníti a fázistartalék (Pm) numerikus értékét is. Azt kaptuk, hogy a zárt kör fázistartaléka $50{,}1°$, ami azért nem pontosan az előírt $45°$, mert nem találtuk meg a Bode diagramon pontosan a $-135°$-ot.

2. Numerikus megoldás

1. A megoldás numerikus megkereséséhez nem kirajzoltatjuk a Bode diagramot, hanem elmentjük egy mátrixba az összetartozó amplitúdó, fázis és frekvencia értékeket:

```
[mag,phase,w]=bode(W0);
```

2. Ezután megkeressük a vágási frekvenciát, ami az előírt fázistartalékhoz tartozik.

Először emlékezzünk vissza, mi a fázistartalék definíciója (7. előadás (5) egyenlete):

$$\varphi_t = 180° + \varphi(\omega_c)\ [°] \tag{9}$$

Ha minden $\varphi(\omega_c)$ frekvencián kiszámítjuk a (9) egyenlet értelmében, hogy mennyi lenne az adott frekvencián a fázistartalék, akkor már csak meg kell nézni, hogy ezek közül melyik van a legközelebb az általunk előírt fázistartalékhoz (`pm`). Definiáljunk tehát egy olyan `phi` vektort, ami tartalmazza az egyes fázisértékek esetén az előírt fázistartaléktól való távolságot:

```
phi = abs((180+phase)-pm);
```

A `phi` vektorból tehát a legkisebb elemet szeretnénk kiválasztani, mert ekkor vagyunk a legközelebb az előírt fázistartalékhoz (ideális esetben ez az elem 0, hiszen akkor pontosan megtaláltuk az előírt fázistartalékot).

```
[min_value, phi_index] = min(phi);
```

3. A megkapott `min_value` a legkisebb elem, de a végső megoldáshoz ennek indexe kell (`phi_index`), tehát, hogy hányadik elem a `phi` vektorban. Ennek ismeretében már a vágási körfrekvencia (`w(phi_index)`), a nyitott kör fázisa a vágási frekvencián (`phase(phi_index)`) és a nyitott kör amplitúdója a vágási frekvencián (`mag(phi_index)`) is számítható.

4. A (7) egyenletben lévő A_1 erősítés éppen az imént számított `mag(phi_index)`, így a keresett A_P erősítés:

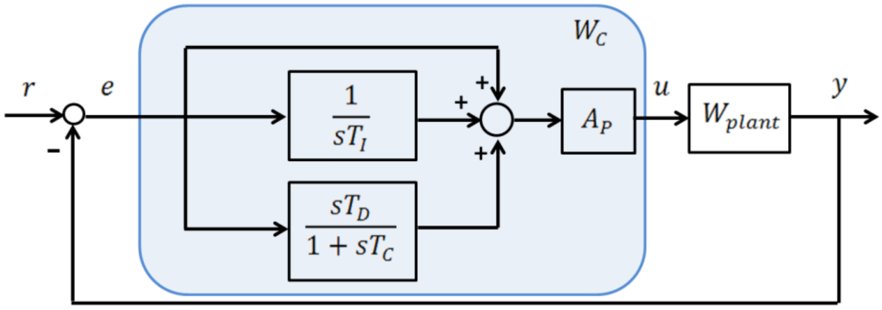
```
A_P_numerical = 1/mag(phi_index).
```

2.2. Közelítő PID szabályozó tervezése előírt fázistartalékra

2.2.1. A tervezési feladat

Tervezzünk közelítő PID típusú szabályozót a W_{plant} átviteli függvényű szakaszhoz (7. ábra). Az előírt fázistartalék legyen $\varphi_t = 45°$, az állandósult állapotbeli hiba pedig $e_\infty = 0$.

$$W_{plant} = \frac{4}{(1+10s)(1+3s)(1+0.2s)} \tag{10}$$



7. ábra: Közelítő PID szabályozó tervezése előírt fázistartalékra – a tervezési feladat

2.2.2. A tervezés koncepciója

A tervezés alap koncepciója a **pólus-zérus kiejtés**. Ez azt jelenti, hogy úgy választjuk meg a szabályozó zérusait (azoknak időállandóját), hogy azok kiejtsék a szakasz nem kívánt (leglassabb) pólusait (ez matematikailag egy szorzáskor történő egyszerűsítést jelent). Ehhez alakítsuk még egy kicsit tovább a közelítő PID szabályozó átviteli függvényének (3) egyenletben található egyenletét, felhasználva a

$$\begin{aligned} \tau_1 + \tau_2 &= T_I + T_C \\ \tau_1\tau_2 &= T_I(T_D + T_C) \end{aligned} \tag{11}$$

új jelöléseket:

$$W_{PID}(s) = \frac{A_P}{T_I} \cdot \frac{1 + (T_I + T_C)s + T_I(T_D + T_C)s^2}{s(1+sT_C)} = \frac{A_P}{T_I} \cdot \frac{(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)}{s(1+sT_C)} \tag{12}$$

1. Először is, a feladat kiírásban szereplő $e_\infty = 0$ állandósult hiba garantált az integrátor használata miatt, nem igényel további tervezést.

2. A szakasz két leglassabb pólusának kiejtéséhez éljünk az alábbi választásokkal:

$$\begin{aligned} T_C &= 0.1T_D \\ \tau_1 &= T_1 \\ \tau_2 &= T_2 \end{aligned} \tag{13}$$

3. A (11) és (13) öt egyenlete alapján felállított egyenletrendszert megoldva egy másodfokú egyenletet kapunk T_D-re, melynek két megoldása lehet:

$$0.11{T_D}^2 - 1.1(\tau_1 + \tau_2)T_D + \tau_1\tau_2 = 0 \ \rightarrow T_{D,1}, T_{D,2}, \tag{14}$$

valamint T_I-re azt kapjuk, hogy

$$T_I = \tau_1 + \tau_2 - 0.1T_D. \tag{15}$$

A megoldást úgy kell kiválasztani, hogy az alábbiak teljesüljenek:

$$\begin{gathered} T_I > T_D \\ T_{D,1}, T_{D,2} > 0 \end{gathered} \tag{16}$$

4. Végezetül a keresett A_P erősítés az alábbiak szerint számítható:

$$\frac{A_P}{T_I} \cdot A_1 = 1 \Longrightarrow A_P = \frac{T_I}{A_1} \tag{17}$$

(Összehasonlítva a (17) egyenletet a P szabályozó tervezés utolsó lépésének (7) egyenletével, vegyük észre, hogy a különbség abból fakad, hogy a P szabályozó A_P-szeresére, míg a közelítő PID szabályozó $\frac{A_P}{T_I}$-szeresére módosítja a körerősítést.)

2.2.3. Megoldás Matlabban

1. Deklaráljuk az előírt fázistartalékot, majd egyenlővé tesszük τ_1 és τ_2 értékét a szakasz két legnagyobb időállandójú pólusával (lásd: (13) egyenlet).

2. Kiszámíttatjuk a (14) és (15) egyenletek megoldását.

3. Tervezünk egy „előszabályozót”, ahol $A_P = 1$, és felhasználjuk a (13)-ból, hogy $T_C = 0.1T_D$. Így a szabályozó alakja:

$$W_{PID}(s) = \frac{1}{T_I} \cdot \frac{(1 + s\tau_1)(1 + s\tau_2)}{s(1 + s \cdot 0{,}1 \cdot T_C)} \tag{18}$$

4. Előállítjuk az „előszabályozót” tartalmazó nyitott kört.

5. Megkeressük a vágási frekvenciát és az A_P erősítést a P szabályozó tervezésénél ismertetett numerikus módszerrel (9. oldal).

6. Az A_P erősítés ismeretében létrehozzuk a végleges szabályozót a (12) egyenletnek megfelelően.

A megoldáshoz használandó összes Matlab kód megtalálható az előadás diákon.

Az előadás összefoglalása

Soros kompenzátorokat azért tervezünk, hogy a szabályozandó szakasz nem kívánt tulajdonságait kompenzálni tudjuk. A szabályozó (kompenzátor) mindig a szabályozandó szakasz előtt helyezkedik el a körben: a szabályozó kimenete a szakasz bemenete. Sokféle elvárásunk lehet egy szabályozással szemben, azonban a legfontosabb, hogy mindig stabil rendszert tervezünk, a többi elvárás (statikus pontosság, zajelnyomás és gyorsaság) sajnos csak ennek rovására javítható, így komplex ismereteket igényel a szabályozó megtervezése.

A soros kompenzátorok három alaptagból épülnek fel: az arányos (P), az integráló (I) és a deriváló (D) tagokbó. A deriváló tag a valóságban csak közelíthető, így közelítő D tagot használva tervezünk szabályozót. A három alaptag közül kiemelt szerepe van az integráló (I) tagnak, hiszen ha tartalmaz I tagot a szabályozónk, akkor egységugrás bementre garantálva van a nulla állandósult értékbeli szabályozási hiba. Ezek fényében P szabályozóval tudjuk ugyan stabilizálni a rendszert, de nulla maradó hibát nem tudunk elérni. Ellenben PID szabályozóval stabil, az alapjelet maradó hiba nélkül követő irányítást tudunk tervezni.

A gyakorlatban általában előírt fázistartalékra tervezünk szabályozót, hiszen azáltal, hogy a zárt kör fázistartalékát előírjuk, deklaráljuk, hogy milyen stabil szabályozási kört szeretnénk kapni. Mivel a P szabályozó egyetlen konstans paramétert tartalmaz, így csupán a szabályozandó rendszer stabilizálása lehet a cél; közelítő PID szabályozó használatával azonban a szabályozó időállandóit megfelelően megválasztva a szakasz nem csupán stabilizálható, de gyorsítható is a lassú pólusok kiejtésével (pólus-zérus kiejtés).

Ellenőrző kérdések

1. Mik a szabályozási körrel szembeni elvárások? Melyik a legfontosabb, milyen kapcsolatban állnak egymással?

2. Mi a közelítő PID szabályozó átviteli függvénye?

3. Mi a P szabályozó előírt fázistartalékra történő tervezésének koncepciója grafikus módszerrel?

4. Mi a P szabályozó előírt fázistartalékra történő tervezésének koncepciója numerikus módszerrel?

5. Mi a közelítő PID szabályozó előírt fázistartalékra és nulla maradó hibára történő tervezésének koncepciója?