ROBOTIRÁNYÍTÁS

6. előadás

A rendszer kimeneti válasza, rendszerválasz és alaptagok

Dr. habil. Kovács Levente
egyetemi docens

Dr. Haidegger Tamás
egyetemi adjunktus

EKIK
Egyetemi Kutató és Innovációs Központ
ÓBUDAI EGYETEM
Bejczy Antal iRobottechnikai Központ
Élettani Szabályozások Csoport
Óbudai Egyetem

Tartalom

1. A rendszer viselkedése

1.1. A rendszer ugrásválaszának értelmezése
1.2. Alapfogalmak
1.3. Nyugalmi állapot, magára hagyott rendszer, gerjesztés: definíciók

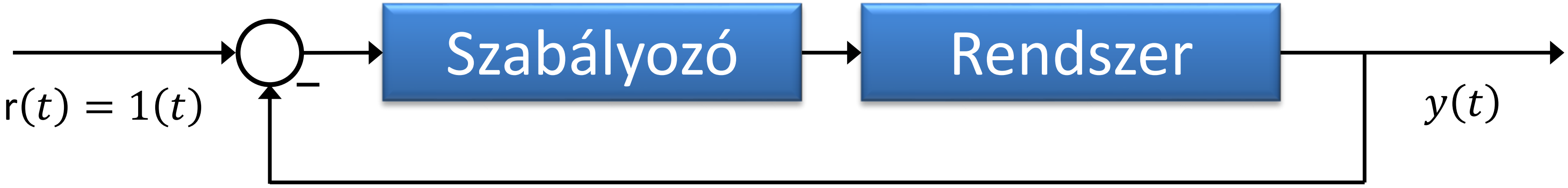
A rendszer ugrásválaszának értelmezése

Egy dinamikus rendszer viselkedéséről és a szabályzás milyenségéről a rendszer ugrásválasza (átmeneti függvénye) ad információt.

Az átmeneti függvény vizsgálata két alapesetben hasznos:

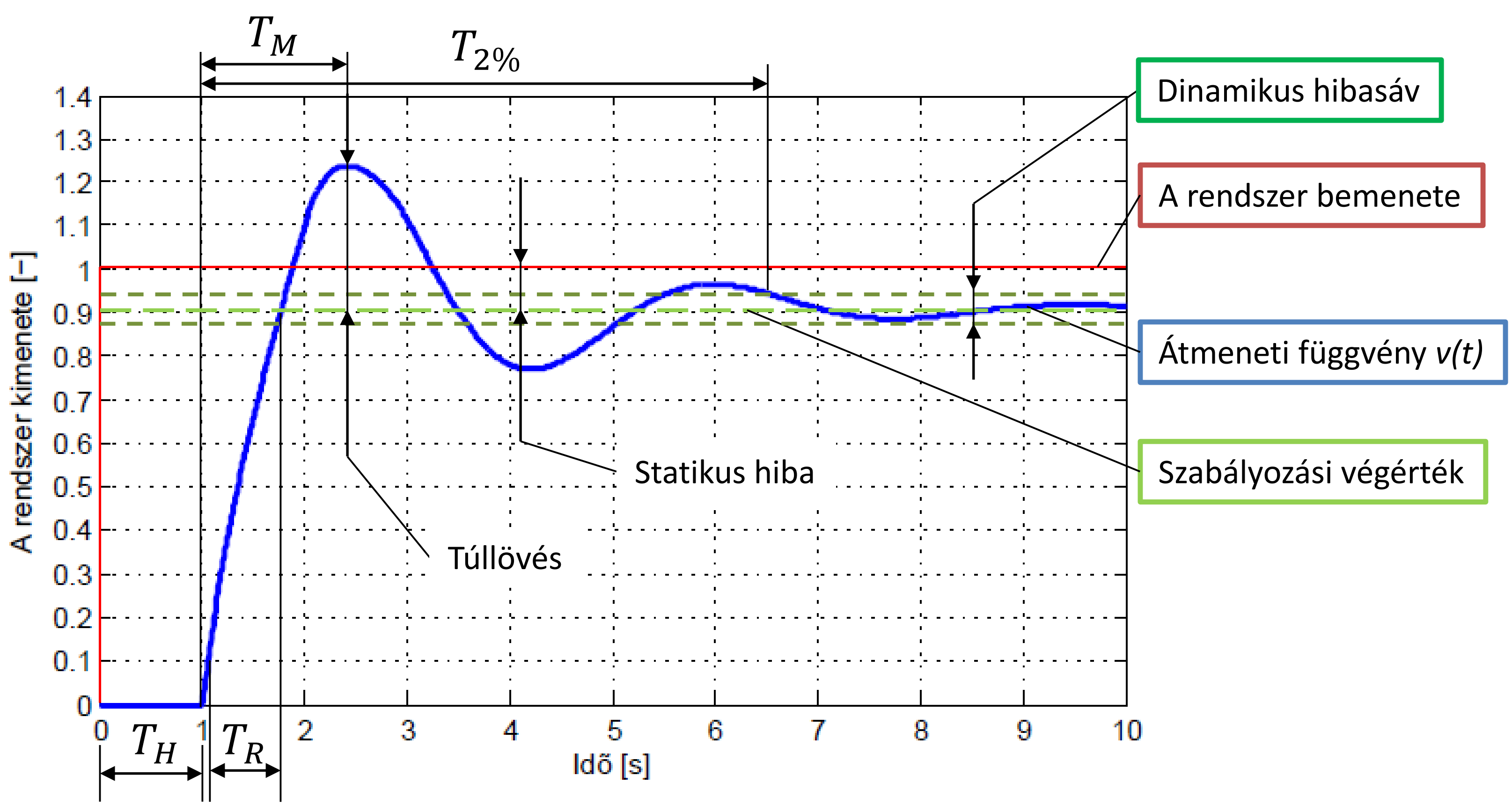
1. Egy rendszer dinamikai jellemzőinek, felépítésének becslésére

2. Egy szabályozott rendszer esetében, a szabályozás időtartománybeli jellemzőinek (minőségének) ellenőrzésére



A rendszer ugrásválaszának értelmezése

Egy általános kéttárolós rendszer átmeneti függvénye:



Alapfogalmak

Végérték: az átmeneti függvény értéke $t \to \infty$ esetében
Statikus hiba: az átmeneti függvény végértékének előjeles eltérése a bemenetre adott egységugrás értékétől
Túllövés: az átmeneti függvény első maximumának értékének eltérése a végértéktől. Százalékban adjuk meg:

$$\Delta v = \frac{v(T_M) - v_\infty}{v_\infty}$$

T_H Holtidő: az az időtartam, melynek el kell telnie, hogy a bemenet hatása megjelenjen a kimeneten.
T_R Felfutási idő: a végérték 10%-ának és 90%-ának felvétele között eltelt idő
T_M Az átmeneti függvény első maximumának eléréséhez szükséges idő
$T_{2\%}$ Szabályozási idő: az az időtartam, amely után a rendszerválasz nem lép ki a végérték ± 2%-s hibasávjából

Definíciók

Adott egy $\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}, t)$ alakban felírható dinamikus rendszer.

A rendszer *nyugalmi állapotban* van, ha a valamennyi állapotváltozójának mozgása megszűnik, azaz $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{0}$.

A nyugalmi helyzetből kitérített, majd magára hagyott rendszer mozgását a rendszer *saját mozgásának* nevezzük.

Ha a nyugalmi helyzetből a rendszert egy időfüggő bemenő jel hatására térítjük ki, *gerjesztett mozgásról* beszélünk.

<u>Stabilitás</u>

A nyugalmi helyzetből kitérített rendszer akkor *stabilis*, ha saját mozgása során visszatér nyugalmi helyzetébe vagy annak közeli környezetébe.
Pl. Inga

A nyugalmi helyzetből kitérített rendszer akkor *labilis*, ha saját mozgása során nem tér vissza nyugalmi helyzetébe vagy annak közeli környezetébe.
Pl. Inverz inga

Definíciók

Állandósult állapot: a rendszer viselkedése $t \to \infty$ esetén.
Nem feltétlenül jelent nyugalmi állapotot (pl. harmonikus gerjesztés).

Az állandósult állapot meghatározására a Laplace végérték tétel alkalmazható:

$$y_{t\to\infty} = \lim_{s\to 0} s \cdot W(s) \cdot U(s)$$

$W(s)$: a rendszer átviteli függvénye

$U(s)$: a rendszer bemenetének Laplace-transzformáltja

Példa

Ha $W(s) = \frac{3}{2+s}$, a rendszer átmeneti függvénye állandósult állapotban:

$$y_{t\to\infty} = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{3}{2+s} \cdot \frac{1}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{3}{2+s} = \frac{3}{2}$$

2. A rendszerválasz becslése

2.1. Az inverz LA Laplace transzformáció haszna (ismétlés)
2.2. Részlettörtekre bontás
2.3. Az impulzusválasz időfüggvénye
2.4. Az egységugrás-válasz időfüggvénye

A Laplace transzformáció haszna (ismétlés)

Differenciálegyenlet algebrai egyenletté való átalakítása
(*s* operátor tartományban)

Deriválás

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = sF(s) - f(0)$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$$

időtartomány	*s* operátor tartomány
$\frac{d}{dt}$	$\cdot\, s$

Integrálás

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}$$

időtartomány	*s* operátor tartomány
$\int dt$	$\cdot\, \frac{1}{s}$

Részlettörtekre bontás

- az inverz Laplace transzformáció könnyen elvégezhető részlettörtekre bontással is, amennyiben a transzformált *racionális törtfüggvény* (számlálója és nevezője valós együtthatójú polinom *s-ben).*

- ha a tört ($Y(s)$) nevezője ($D(s)$) szorzatalakos formában van, akkor a törtet felbontjuk olyan részlettörtek összegére, melyeknek nevezője az eredeti tört egy-egy szorzatát tartalmazza

$$Y(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)} = \frac{r_1}{s-p_1} + \frac{r_1}{s-p_2} + \cdots + \frac{r_1}{s-p_n}$$

- a részlettörtek számlálóit az alábbi összefüggés segítségével számítjuk:

$$r_n = \left[(s-p_n)\frac{N(s)}{D(s)}\right]_{s=p_n}$$

Az impulzusválasz időfüggvénye

Számítsuk ki az alábbi átviteli függvénnyel megadott rendszer impulzusválaszának időfüggvényét:

$$W(s) = \frac{50}{(s^2 + 7s + 10)(s + 10)}$$

- a megoldáshoz a kimeneti jel Laplace transzformáltjának részlettörtekre bontásával jutunk
- először azonban nézzük meg a bementi jel Laplace transzformáltját

$$u(t) = \delta(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s) = 1$$

- az átviteli függvény definícióját átrendezve:

$$Y(s) = W(s) \cdot U(s) = \frac{50}{(s^2 + 7s + 10)(s + 10)} \cdot 1$$

Az impulzusválasz időfüggvénye

- a nevezőből egy pólus rögtön meghatározható:

$$p_1 = -10$$

- a másik két pólus a másodfokú egyenlet megoldásából számítható:

$$s^2 + 7s + 10 = 0$$

$$p_2 = -5$$

$$p_3 = -2$$

- a kimenet Laplace transzformáltja szorzatalakban tehát:

$$Y(s) = \frac{50}{(s+2)(s+5)(s+10)}$$

Az impulzusválasz időfüggvénye

- felhasználva a részlettörtekre bontás egyenletét:

$$r_n = \left[(s - p_n)\frac{N(s)}{D(s)}\right]_{s=p_n}$$

$$r_1 = \left[(s + 10)\frac{50}{(s+2)(s+5)(s+10)}\right]_{s=-10} = 1{,}25$$

$$r_2 = \left[(s + 5)\frac{50}{(s+2)(s+5)(s+10)}\right]_{s=-5} = -3{,}33$$

$$r_3 = \left[(s + 2)\frac{50}{(s+2)(s+5)(s+10)}\right]_{s=-2} = 2{,}08$$

Az impulzusválasz időfüggvénye

Laplace tartomány

- a kiszámított r_n-ek ismeretében a kimenet Laplace transzformáltja részlettörtek összegeként:

$$Y(s) = \underbrace{\overset{r_1}{\frac{1{,}25}{s + 10}}}_{-p_1} + \underbrace{\overset{r_2}{\frac{-3{,}33}{s + 5}}}_{-p_2} + \underbrace{\overset{r_3}{\frac{2{,}08}{s + 2}}}_{-p_3}$$

Idő tartomány

Hogy lesz Laplace tartományból időtartomány?
Inverz Laplace transzformációval!

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-\alpha}\right\} = e^{\alpha t}$$

$$y(t) = \underbrace{1{,}25}_{r_1} \cdot e^{\overbrace{-10}^{p_1}t} \underbrace{- 3{,}33}_{r_2} \cdot e^{\overbrace{-5}^{p_2}t} + \underbrace{2{,}08}_{r_3} \cdot e^{\overbrace{-2}^{p_3}t}$$

Az egységugrás-válasz időfüggvénye

Számítsuk ki az alábbi átviteli függvénnyel megadott rendszer egységugrás-válaszának időfüggvényét:

$$W(s) = \frac{50}{(s^2 + 7s + 10)(s + 10)}$$

- a megoldáshoz a kimeneti jel Laplace transzformáltjának részlettörtekre bontásával jutunk

- először azonban nézzük meg a bementi jel Laplace transzformáltját

$$u(t) = \varepsilon(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s) = \frac{1}{s}$$

- az átviteli függvény definícióját átrendezve:

$$Y(s) = W(s) \cdot U(s) = \frac{50}{(s^2 + 7s + 10)(s + 10)} \cdot \frac{1}{s}$$

Az egységugrás-válasz időfüggvénye

- ebben az esetben az eddigi három pólushoz egy negyedik is adódik:

$$p_1 = -10 \qquad p_2 = -5 \qquad p_3 = -2 \qquad p_4 = 0$$

- r_n-ek számítása:

$$r_1 = \left[(s+10)\frac{50}{(s+2)(s+5)(s+10)s}\right]_{s=-10} = -0{,}26$$

$$r_2 = \left[(s+5)\frac{50}{(s+2)(s+5)(s+10)s}\right]_{s=-5} = 0{,}67$$

$$r_3 = \left[(s+2)\frac{50}{(s+2)(s+5)(s+10)s}\right]_{s=-2} = -1{,}04$$

$$r_4 = \left[(s+0)\frac{50}{(s+2)(s+5)(s+10)s}\right]_{s=0} = 0{,}5$$

Az egységugrás-válasz időfüggvénye

- a megoldás az impulzusválasz időfüggvényénél használt számítás logikájával:

Laplace tartomány

$$Y(s) = \frac{-0{,}26}{s+10} + \frac{0{,}67}{s+5} + \frac{-1{,}04}{s+2} + \frac{0{,}5}{s}$$

Idő tartomány

$$y(t) = -0{,}26 \cdot e^{-10t} + 0{,}67 \cdot e^{-5t} - 1{,}04 \cdot e^{-2t} + 0{,}5$$

3. A rendszer átviteli függvényének vizsgálata

3.1. Alaptagok
3.2. Alaptagok kapcsolása
3.3. Nyitott és zárt kör
3.4. A szabályozási kör alapfogalmai

Alaptagok

A valós rendszerek átviteli függvényét általában felírhatjuk ún. *alaptagok* szorzataként, mely a rendszerek valós mechanikai/elektromos/mágneses stb. viselkedésének a következménye.
Ezek a tagok nullad-, első- és másodrendű rendszereket írnak le.
Példa:

$$W(s) = \frac{12s^2 + 8s + 1}{s^4 + 5s^3 + 7s^2 + 2s} = 0.5 \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{0.5s + 1} \cdot (2s + 1) \cdot (6s + 1) \cdot \frac{1}{1 + 3s + s^2}$$

Az egyes tagok jellemzése azok *amplitúdó-* és *fázismenetével* történik.
Általánosságban elmondható, hogy egy komplex dinamikus rendszer viselkedését jól közelíthetjük, ha az alaptagok egyéni viselkedéséből, mint alkotóelemekből becsüljük a teljes rendszert (Bode-diagram).

Alaptagok

Arányos tag: konstans szorzóként jelenik meg az átviteli függvényben.

$$W(s) = p$$

Egyenes arányosságot jelöl, pl. Newton II. törvénye: $F = m \cdot a,\ W(s) = \frac{a}{F} = \frac{1}{m}$

Egytárolós tag: egy *energiatárolóval* rendelkezik, mely rendszerint egy állapotváltozó deriválását jelenti.

Arányos integrátor: $W(s) = \frac{1}{1+Ts}$

Arányos deriváló tag: $W(s) = 1 + Ts$

Pl: RL-rezgőkör

$$\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{R}{L}i(t) + \frac{1}{L}V_{be}(t), \qquad sI(s) = -\frac{R}{L}I(s) + \frac{1}{L}V_{be}(s)$$

$$W(s) = \frac{I(s)}{V_{be}(s)} = \frac{\frac{1}{L}}{\frac{R}{L}s+1}$$

Alaptagok

Ideális integráló tag: $W(s) = \frac{1}{Ts}$

Ideális deriváló tag: $W(s) = Ts$

Az ideális tagok általában állapotváltozók közti integráló/deriváló kapcsolatot jelentenek.

Pl: viszkózus csillapítás. $F_b = b\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}, \quad W(s) = \frac{F_b}{v} = bs$

Kéttárolós tag: a rendszer *tehetetlenségét* jelöli.

Általános alakja: $W(s) = \frac{1}{T^2s^2+2\xi Ts+1}$

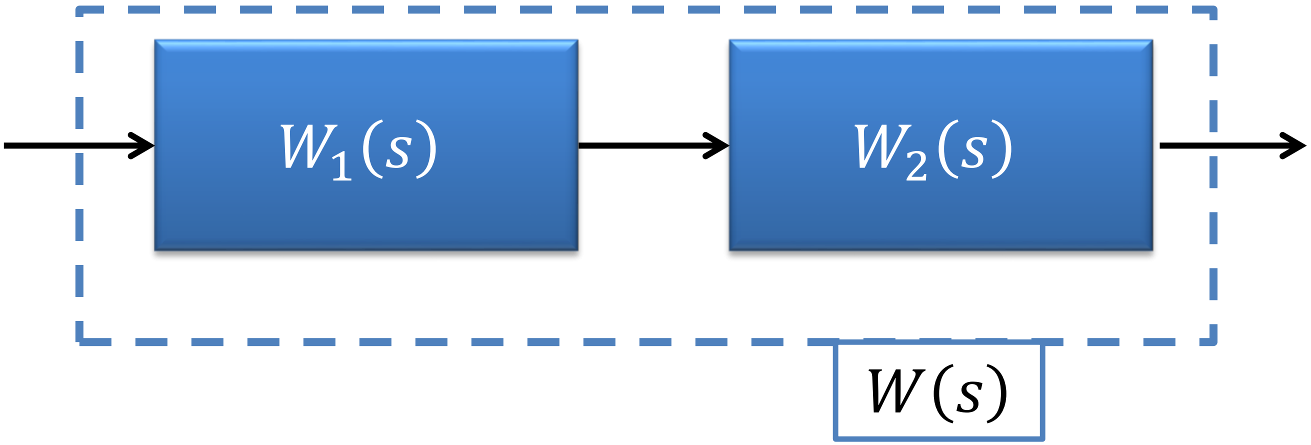
Pl: tömeg-rugó-csillapítás modell. $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F$

$$W(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + bs + k} = \frac{\frac{1}{k}}{\underbrace{\boxed{\frac{k}{m}}}_{\boxed{T^2}} s^2 + \underbrace{\boxed{\frac{b}{k}}}_{\boxed{2\xi T}} s + 1}$$

Alaptagok kapcsolása

A szabályozókör tagjainak kapcsolása a hatásláncon belül meghatározza az eredő átviteli függvényt. Ilyenek a *soros* kapcsolás, a *párhuzamos* kapcsolás, illetve a pozitív vagy negatív visszacsatolás.

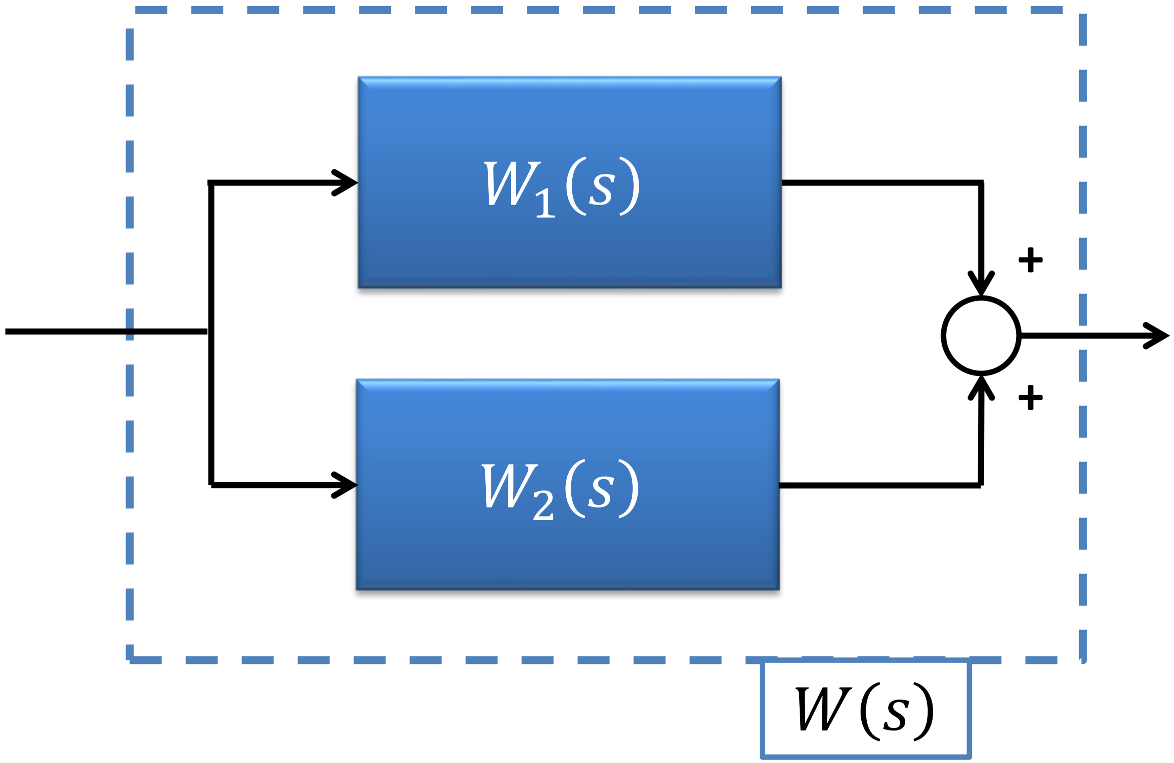
Soros kapcsolás: az egymással sorosan összekapcsolt tagok *összeszorzódnak*



$$W(s) = W_1(s)W_2(s)$$

Alaptagok kapcsolása

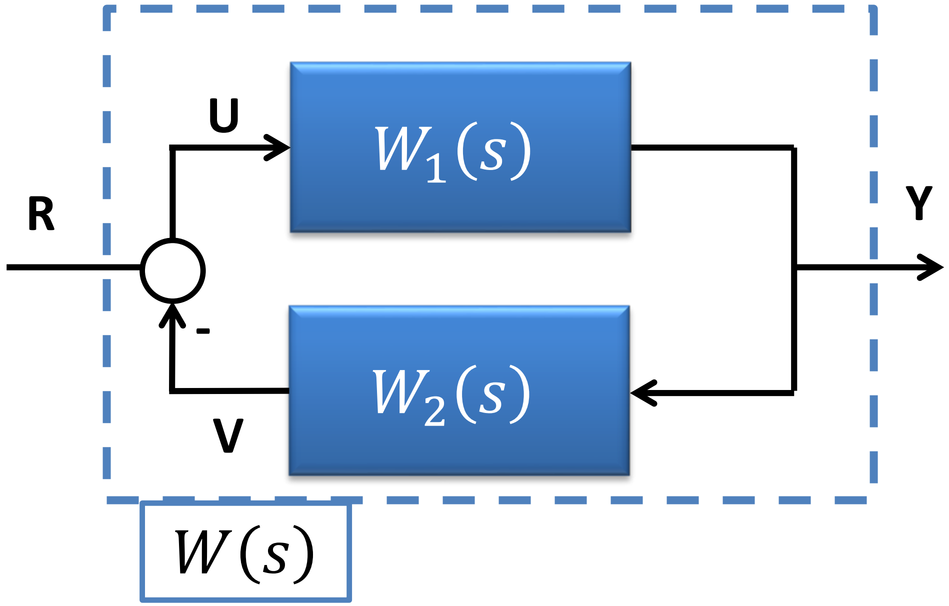
Párhuzamos kapcsolás: az egymással párhuzamosan összekapcsolt tagok *összeadódnak.*



$$W(s) = W_1(s) + W_2(s)$$

Alaptagok kapcsolása

Visszacsatolás: visszacsatolásnak nevezzük, ha a szabályozókörön belül egy jelet közvetlenül vagy egy visszacsatolt tagon keresztül visszavezetünk a hatáslánc egy korábbi pontjába, *hurkot* képezve. A kanonikus szabályozókörben ezt *negatív visszacsatolással* érjük el.



$$Y(s) = W_1(s)U(s)$$

$$U(s) = R(s) - V(s)$$

$$V(s) = Y(s)W_2(s)$$

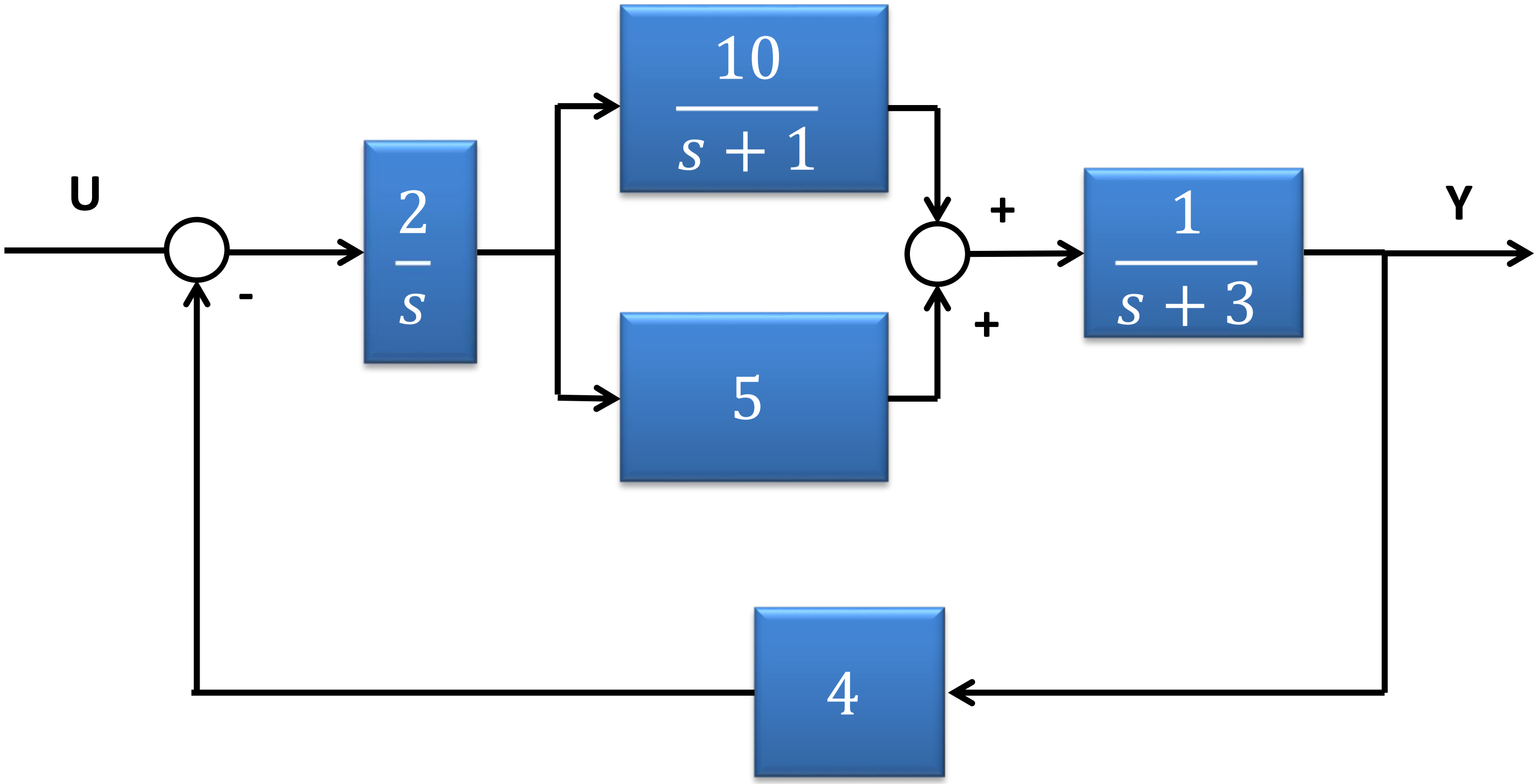
$$\downarrow$$

$$Y(s) = W_1(s)\big(R(s) - Y(s)W_2(s)\big)$$

$$W(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{W_1(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)}$$

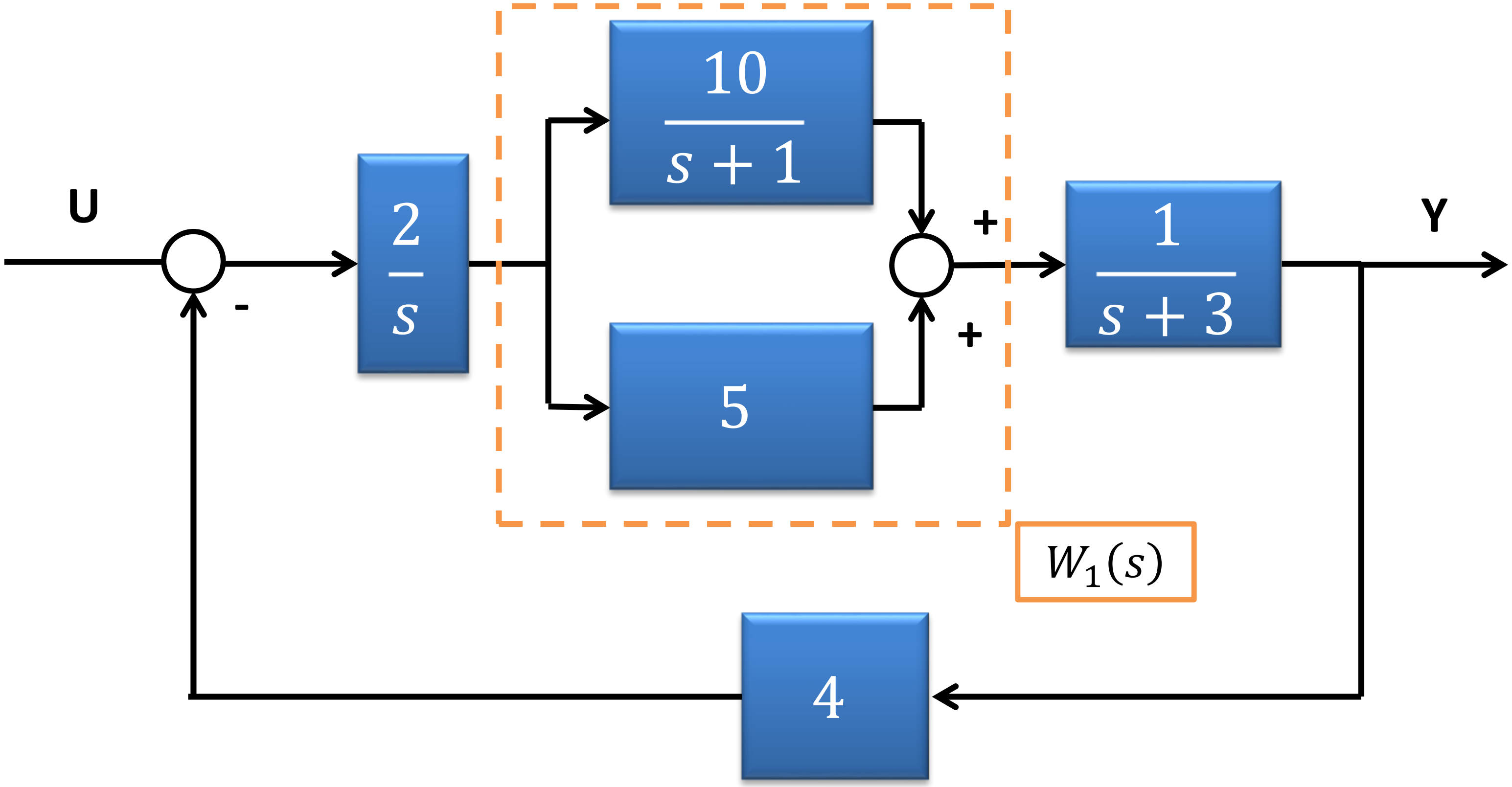
Példa: hatásvázlat egyszerűsítése

Adott a következő hatásvázlat:



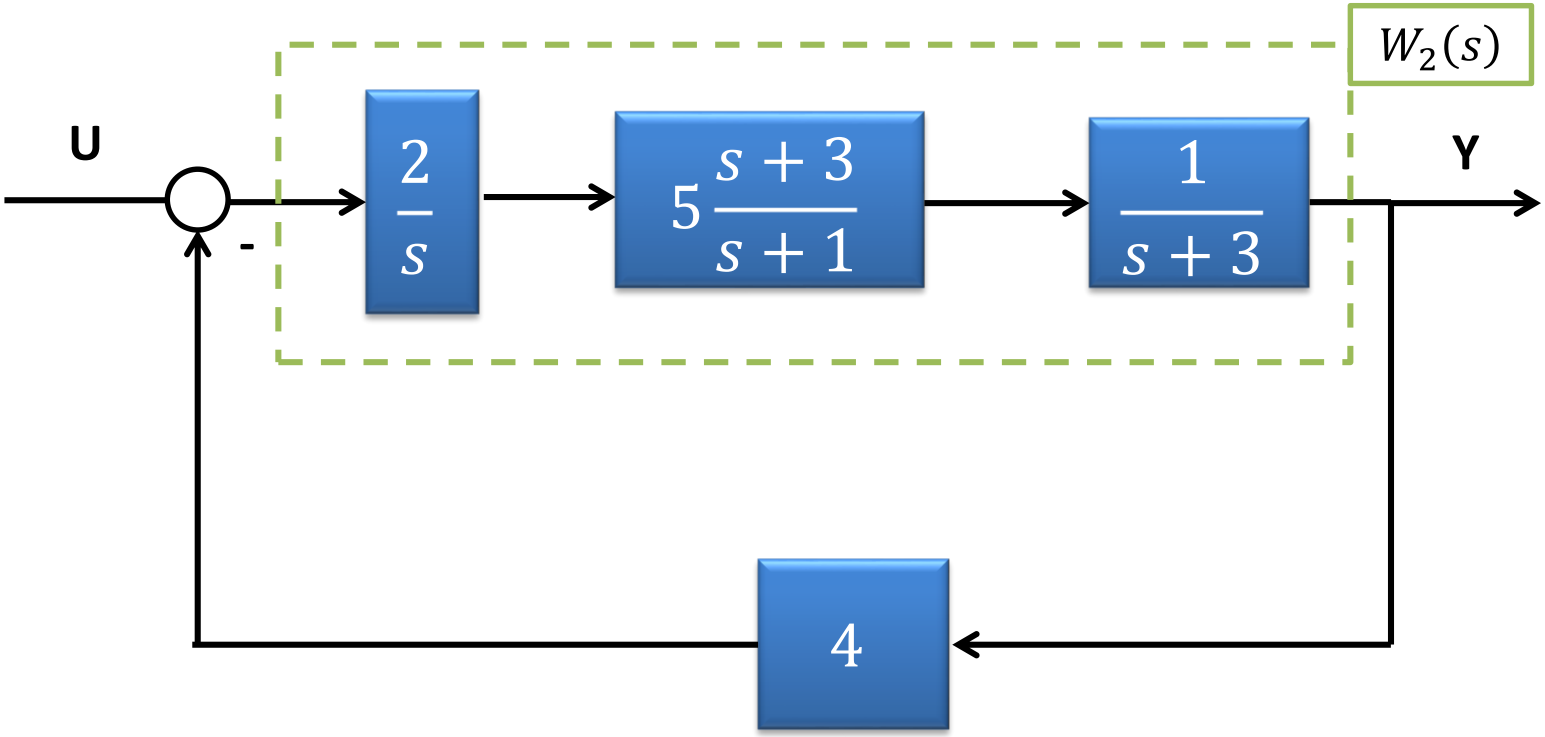
Határozzuk meg $W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ eredő átviteli függvényt!

Példa: hatásvázlat egyszerűsítése



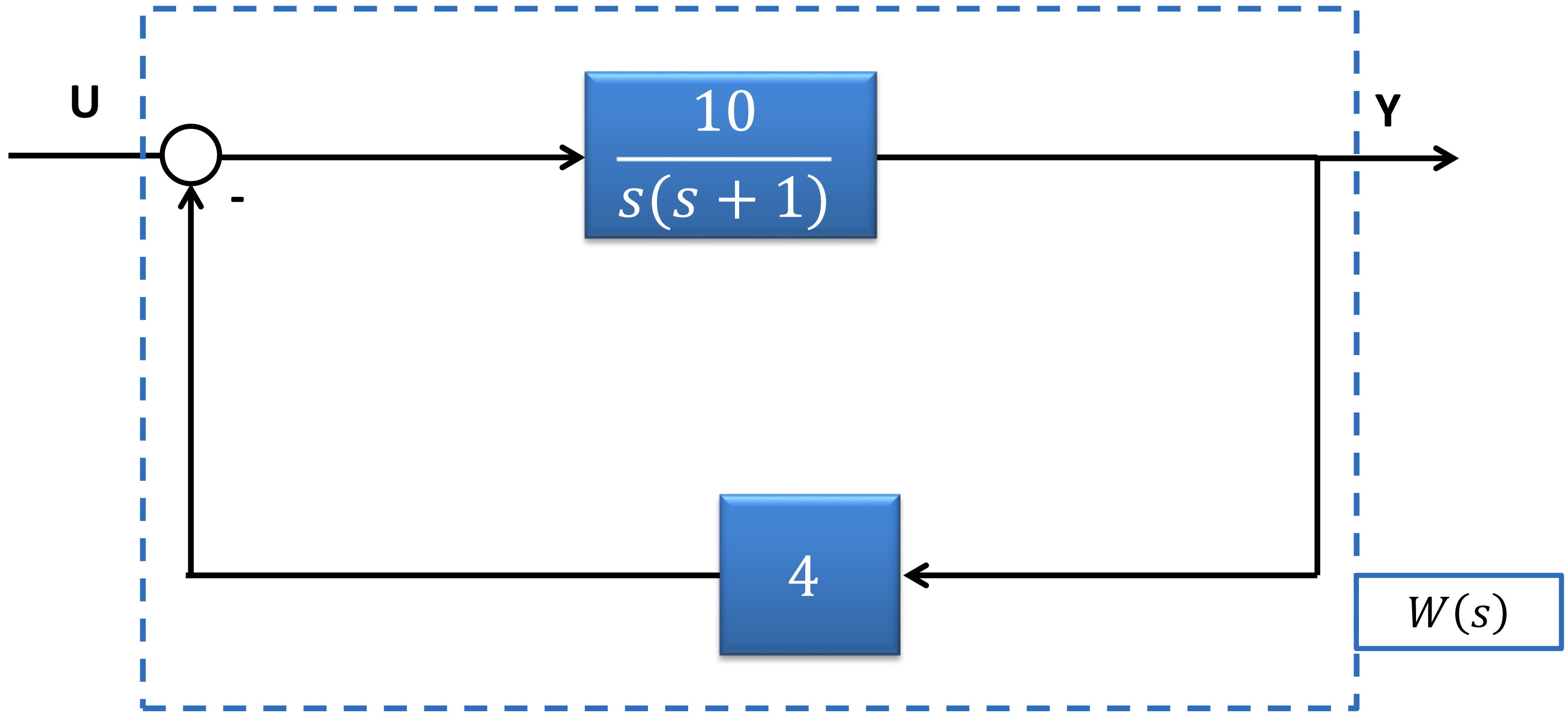
$$W_1(s) = 5 + \frac{10}{s+1} = \frac{5s+15}{s+1} = 5\frac{s+3}{s+1}$$

Példa: hatásvázlat egyszerűsítése



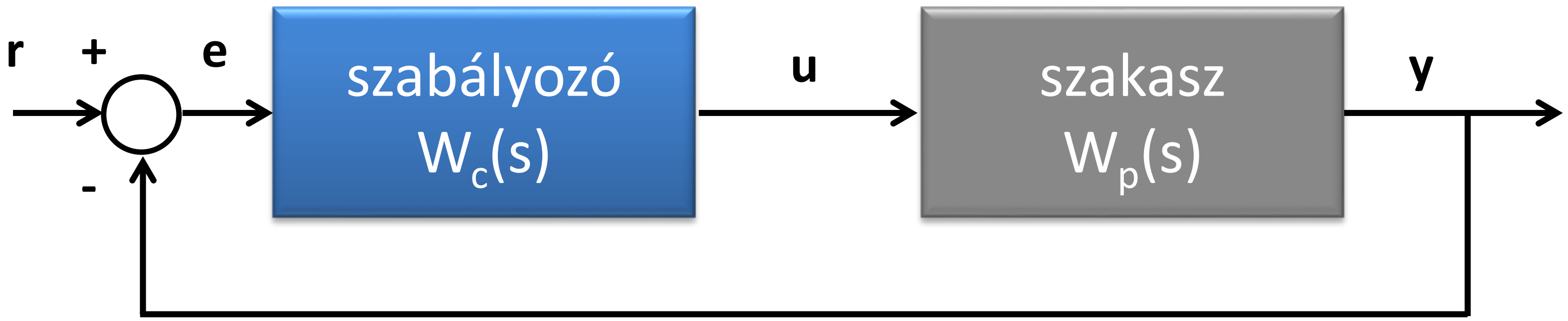
$$W_2(s) = \frac{2}{s} \cdot 5 \cdot \frac{\cancel{s+3}}{s+1} \cdot \frac{1}{\cancel{s+3}} = \frac{10}{s(s+1)}$$

Példa: hatásvázlat egyszerűsítése



$$W(s) = \frac{\frac{10}{s(s+1)}}{1 + 4\frac{10}{s(s+1)}} = \frac{10}{s^2 + s + 40}$$

Nyitott és zárt kör



Nyitott kör átviteli függvénye (hurokerősítés)

$$W_o(s) = W_c(s) \cdot W_p(s)$$

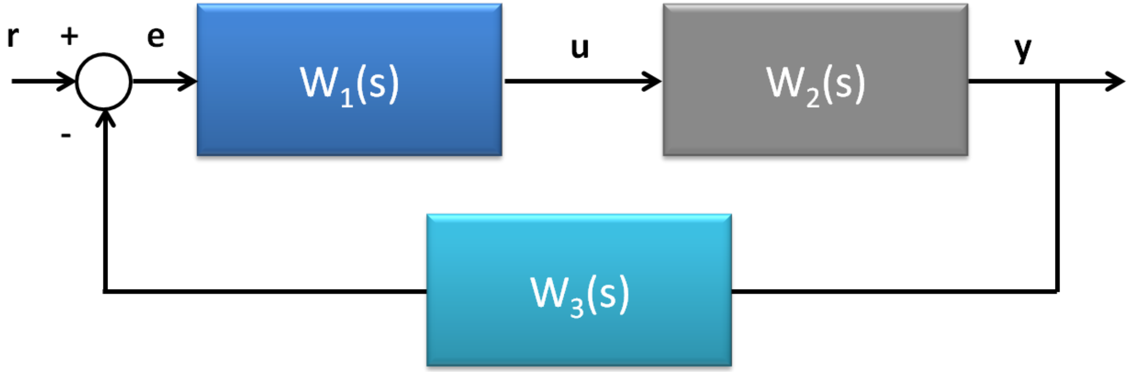
Zárt kör átviteli függvénye

$$W_c(s) = \frac{W_o(s)}{1 + W_o(s)}$$

Előre vezető ág / (1 plusz hurokerősítés)

Nyitott és zárt kör

Fontos: ha a visszacsatoló ágban is van tag, akkor az a hurokerősítésbe beleszámít!



Előrevezető (feedforward) ág átviteli függvénye

$$W_{ff} = W_1(s) \cdot W_2(s)$$

Visszacsatoló (feedback) ág átviteli függvénye

$$W_{fb} = W_3(s)$$

Nyitott kör (open loop) átviteli függvénye (hurokerősítés)

$$W_o = W_1(s) \cdot W_2(s) \cdot W_3(s)$$

Zárt kör (closed loop) átviteli függvénye

$$W_{cl} = \frac{W_1(s) \cdot W_2(s)}{1 + W_1(s) \cdot W_2(s) \cdot W_3(s)}$$

A szabályozási kör alapfogalmai

A nyitott kör átviteli függvényének irányítástechnikában szokásos alakja

$$W_o(s) = \frac{K}{s^i} \cdot \frac{\prod(1+s\tau_i)\prod(1+2\mu_i\tau_i s+\tau_i{}^2 s^2)}{\underbrace{\prod(1+sT_i)}_{①}\underbrace{\prod\left(1+2\xi_i T_i s+T_i{}^2 s^2\right)}_{②}} = \frac{K}{s^i} \cdot W_{01}(s)$$

- K : körerősítés (statikus erősítés, dcgain)
- i : típusszám $(i \geq 0)$
  - ✓ a felnyitott körben lévő szabad (visszacsatolatlan) integrátorok száma
  - ✓ $\frac{1}{s^i}$: *i* db integrátor soros kapcsolása
- ① : egytárolós tagok ➡ valós pólus
- ② : kéttárolós tagok ➡ komplex konjugált póluspár

➡ a felnyitott kör egytárolós és kéttárolós tagok soros kapcsolásából áll

Videó

[Alaptagok vizsgálata idő és frekvenciatartományban]

Köszönöm a figyelmet!

Dr. habil. Kovács Levente
egyetemi docens

kovacs.levente@nik.uni-obuda.hu

Dr. Haidegger Tamás
egyetemi adjunktus

haidegger@irob.uni-obuda.hu

EKIK Egyetemi Kutató és Innovációs Központ

ÓBUDAI EGYETEM Bejczy Antal iRobottechnikai Központ

Élettani Szabályozások Csoport Óbudai Egyetem