ROBOTIRÁNYÍTÁS

2. előadás
Matematikai alapok

Dr. habil. Kovács Levente
egyetemi docens

Dr. Haidegger Tamás
egyetemi adjunktus

EKIK
Egyetemi Kutató és Innovációs Központ

K-MOOC

ÓBUDAI EGYETEM
Bejczy Antal iRobottechnikai Központ

Physiological Controls Group
Élettani Szabályozások Csoport
Óbudai Egyetem

Tartalom

1. Lineáris algebra

Vektorok és mátrixok

A *vektorok* jelentős szerepet a szabályozástechnikában. Az irányított fizikai mennyiségek (sebesség, erő stb.) jelölése mellett gyakran alkalmazzuk őket egy rendszer paramétereinek (pl. tömeg, ellenállás) és változóinak (pl. gyorsulás, áramerősség) egy csoportba foglalásához.

Jelölésük általában **kis félkövér** betűkkel történik.

A vektorok elemei *skalármennyiségek*, csak értékük van, irányítottságuk nincs.

Vektorok és mátrixok

Oszlopvektorok:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

Sorvektorok:

$$\mathbf{b} = [b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_m]$$

Az átmenet sor- és oszlopvektor között a *transzponálás:*

$$\mathbf{a}^T = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}^T = [a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n]$$

Vektorok és mátrixok

$\mathbf{a}$ dimenziója $n \times 1$, hiszen n sorból és 1 oszlopból áll.
$\mathbf{b}$ dimenziója hasonlóképpen $1 \times m$.
Transzponálással a dimenzió megváltozik, így pl. $\mathbf{b}^T$ dimenziója $m \times 1$.

A vektorok összeadhatóak, ha dimenziójuk megegyezik.
Példa: ha $m = n = 3$, akkor

$$\mathbf{a} + \mathbf{b}^T = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{bmatrix}$$

A vektorok összeadása *kommutatív* és *asszociatív* művelet, azaz:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$$

$$\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$$

Vektorok és mátrixok

A vektorok szorzásának több módja is létezik.

Két vektor *skalárszorzata* az azonos indexű tagok összeszorzását, majd ezek összeadását jelenti. Feltétele, hogy a vektorok elemeinek száma (n) megegyezzen.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \cdots = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

A skalárszorzat *kommutatív* és *disztributív* művelet:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$$

Megjegyzés: ha a vektort skalárral szorzunk, az eredmény vektor marad:

$$\lambda \cdot \mathbf{a} = \lambda \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \lambda \cdot a_2 \\ \lambda \cdot a_3 \end{bmatrix}$$

Vektorok és mátrixok

Két vektor *vektorszorzata* alatt a két vektor által meghatározott síkra merőleges vektort értjük. A vektorszorzat csak 3×1 dimenziójú vektorokra értelmezett, ám a mindennapi fizikában komoly jelentőséggel bír.

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix}$$

A vektorszorzat *disztributív* és *anti-asszociatív*:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$$

Fontos tulajdonsága a vektorok *hármasszorzata*:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$$

Vektorok és mátrixok

A *mátrixok* szerepe az robotikában jelentős, hiszen mechanikai egyenletek, térbeli transzformációk és a rendszerek viselkedésének a leírása is segítségükkel történik.

A mátrixokat általában a latin ábécé **NAGY FÉLKÖVÉR** betűivel jelöljük:

$$\underset{(n\times m)}{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{A}$ mátrix dimenziója $n \times m$, ahol n a sorok, m az oszlopok számát jelöli. Egy $n \times m$ méretű mátrixnak tehát $n \cdot m$ db. eleme van.

Példa:

$$\underset{(2\times 3)}{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \underset{(4\times 2)}{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Műveletek mátrixokkal:

Transzponált: egy $n \times m$ méretű mátrix transzponáltja egy $m \times n$ méretű mátrix, elemei pedig az eredeti mátrix elemeinek páronkénti felcseréléséből adódnak:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} b_{11} &= a_{11} \\ b_{12} &= a_{21} \\ b_{21} &= a_{12} \\ &\vdots \end{aligned} \qquad \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix}$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \uparrow$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{A}^T \rightarrow b_{ij} = a_{ji} \rightarrow \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix}$$

Példa:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Vektorok és mátrixok

Ha az $n \times m$ mátrix esetében $n = m$, akkor négyzetes mátrixról beszélünk.

Diagonális mátrix: csak a mátrix *főátlójában* találhatóak nem zérus elemek:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Egységmátrix: olyan diagonális mátrix, melynek minden főátló menti elemének értéke 1:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Vektorok és mátrixok

Mátrixok összeadása: két mátrix csak akkor adható össze, ha dimenziójuk megegyezik. Ilyenkor a mátrixok minden tagját egyenként össze kell adni:

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix}$$

Példa:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

A mátrixok összeadása *kommutatív* és *asszociatív* művelet:

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$$

$$\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})=(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}$$

Vektorok és mátrixok

Mátrixok szorzása

Két mátrix akkor szorozható össze egymással, ha a szorzandó mátrix oszlopainak száma megegyezik a szorzó mátrix sorainak számával.

Ha egy $n_1 \times m_1$ méretű mátrixot egy $n_2 \times m_2$ méretű mátrixszal szorzunk, továbbá $m_1 = n_2$, a szorzat egy $n_1 \times m_2$ méretű mátrix lesz.

$$\underset{n_1 \times m_1}{\mathbf{A}} \cdot \underset{n_2 \times m_2}{\mathbf{B}} = \underset{n_1 \times m_2}{\mathbf{C}}$$

$\mathbf{C}$ mátrix elemeire igaz, hogy

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n_2} a_{ik} b_{ik}, \quad i = 1 \ldots n_1, \quad j = 1 \ldots m_2$$

Vektorok és mátrixok

Minden c_{ij} elem tehát meghatározható, ha a szorzandó mátrix *i*-edik sorának elemeit megszorozzuk a szorzó mátrix *j*-edik oszlopának elemeivel, balról jobbra, illetve fentről lefelé irányban:

1. Példa:

$$\mathbf{B} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 5 & 6 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{C}$$

$$\boxed{c_{33} = a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} = 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 = -2}$$

$$\boxed{c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 0 = 6}$$

2. Példa

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-5) & 1 \cdot 4 + 2 \cdot 6 \\ -2 \cdot 2 + 4 \cdot 0 & -2 \cdot 1 + 4 \cdot (-5) & -2 \cdot 4 + 4 \cdot 6 \\ 4 \cdot 2 + 0 \cdot 0 & 4 \cdot 1 + 0 \cdot (-5) & 4 \cdot 4 + 0 \cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -9 & 16 \\ -4 & -22 & 16 \\ 8 & 4 & 16 \end{bmatrix}$$

Vektorok és mátrixok

A mátrixok szorzása *nem kommutatív* művelet:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$$

A tagok felcseréléséhez a mátrixok transzponálására van szükség:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (\mathbf{B}^T \mathbf{A}^T)^T$$

Mátrix szorzása egységmátrixszal:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{A}$$

Mátrix szorzása skalárral:

$$\lambda\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1m} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \dots & \lambda a_{nm} \end{bmatrix}$$

Vektorok és mátrixok

Megjegyzés:

A vektorok tekinthetők olyan mátrixoknak, melyek egyik dimenziója *1*.

Ilyenkor a vektorok szorzásánál ügyelni kell a felírás sorrendjére és arra, hogy sor- vagy oszlopvektorokat szorzunk-e egymással.

Példa: $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \mathbf{b}^T \cdot \mathbf{a}$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}^T = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{bmatrix} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}^T = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$$

Ez utóbbi két vektor *diadikus* szorzata. Jelölése: $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$

Vektorok és mátrixok

A mátrixok vektorokkal való szorzása hasonlóképpen közelíthető meg, ha a szorzó vektort egy $n \times 1$ dimenziós mátrixnak tekintjük.

Példa:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 \\ 0 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

A négyzetes mátrixok fontos jellemzője a mátrix *determinánsa.*

Determináns *skalármennyiség*.

1×1 mátrix esetén a determináns a mátrix önmaga.

2×2 mátrix esetén a determináns a főátló elemeinek és a mellékátló elemeinek szorzatának különbsége:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad \det(\mathbf{A}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

3×3 vagy annál nagyobb mátrixok esetén a determináns megegyezik a mátrix valamely sora vagy oszlopa szerint számított *aldeterminánsok* előjeles összegével.

A mátrix minden eleméhez egy sakktábla-szerű mintázat alapján egy előjelet rendelünk, és az adott sor szerint kifejtve előjelesen adjuk össze a sor elemeinek és a hozzájuk tartozó aldeterminánsok szorzatának összegét:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Az 1. oszlop szerinti kifejtés és az aldeterminánsok:

$$2 \cdot \det \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \qquad 2 \cdot \det \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \qquad 1 \cdot \det \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det\mathbf{A} = & +2 \cdot \big(-3 \cdot 1 - 1 \cdot (-2)\big) \\ & -2 \cdot \big(-1 \cdot 1 - 0 \cdot (-2)\big) \\ & +1 \cdot \big(-1 \cdot 1 - 0 \cdot (-3)\big) \\ = & -1 \end{aligned}$$

Mintázat:

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

Vektorok és mátrixok

A négyzetes mátrix *adjungáltja* a mátrix egyes elemeihez tartozó, sakktábla-mintázat alapján előjelezett aldeterminánsokból épített mátrix transzponáltja.

Példa:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow adj(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} \det\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} & -\det\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} & \det\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \\ -\det\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} & \det\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} & -\det\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \\ \det\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} & -\det\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} & \det\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \end{bmatrix}^T =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Vektorok és mátrixok

Egy négyzetes mátrix inverze az a mátrix, mellyel az eredeti mátrixot megszorozva egységmátrix adódik.

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{I}$$

Kiszámítása a következőképpen történik:

$$\boxed{\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{\det(\mathbf{A})}adj(\mathbf{A})}$$

Példa:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{bmatrix}\qquad adj\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 0 & 1\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}3 & 0\\ -2 & 1\end{bmatrix}\qquad \det(\mathbf{A})=1\cdot 3-0\cdot 2=3$$

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{\det(\mathbf{A})}adj(\mathbf{A})=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}3 & 0\\ -2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

Ellenőrzés:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\cdot 1+0\left(\frac{-2}{3}\right) & 1\cdot 0+0\cdot\frac{1}{3}\\ 2\cdot 1+3\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) & 2\cdot 0+3\cdot\frac{1}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

2. Komplex számok

A komplex számok

A komplex számok általános alakja:

$$c = a + b \cdot j$$

Az irányítástechnikában és robotikában az egységnyi komplex értéket (imaginárius egységet) *j*-vel jelöljük, a matematikában általában használatos *i* helyett:

$$j = \sqrt{-1} \qquad\qquad j^2 = -1$$

A komplex számok valós és képzetes részből állnak:

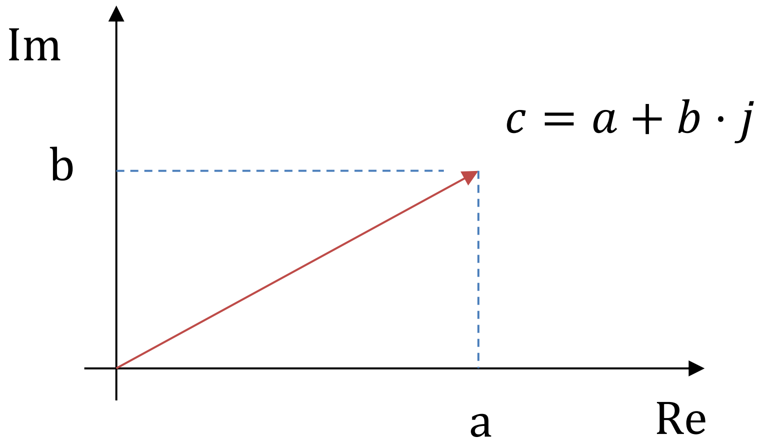
$$c = \mathrm{Re}\{c\} + j \cdot \mathrm{Im}\{c\}$$

$$\mathrm{Re}\{c\} = a$$

$$\mathrm{Im}\{c\} = b$$

A komplex számok

A komplex számok grafikus ábrázolása a komplex síkon lehetséges:



A komplex számok tehát egy kétdimenziós vektorként értelmezhetőek
a $\mathrm{Re} - \mathrm{Im}$ síkon így hosszuk és irányításuk is van.

Ennek a felírásnak nagy jelentősége van a robotika számos területén.

A komplex számok

A komplex számok *konjugáltja* a következőképpen írható fel:

$$\bar{c} = a - j \cdot b$$

Négyzetek összege komplex számok esetén:

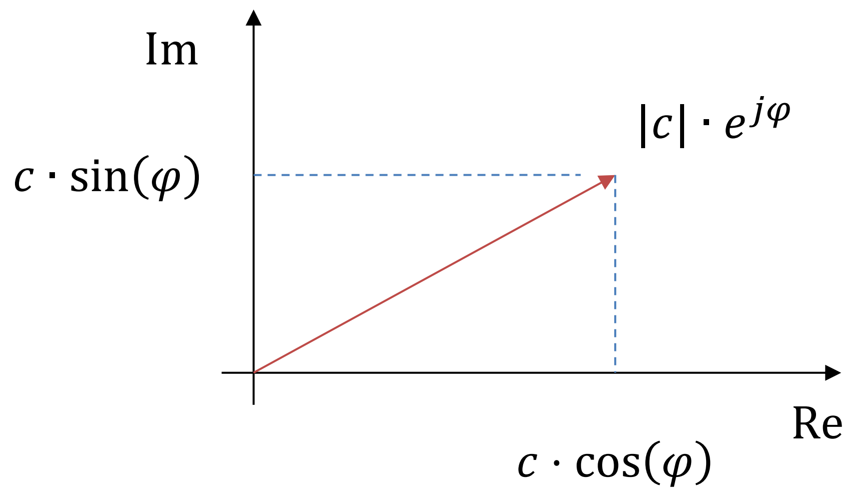
$$c \cdot \bar{c} = (a + j \cdot b)(a - j \cdot b) = a^2 + b^2$$

Komplex számok *abszolút értéke*:

$$|c| = \sqrt{c \cdot \bar{c}} = \sqrt{(\mathrm{Re}\{c\})^2 + (\mathrm{Im}\{c\})^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

A komplex számok

Polár-koordinátarendszerben a felírás a következő:



Euler-féle felírás:

$$c = |c| \cdot \left(\cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi)\right) = |c| \cdot e^{j\varphi}$$

$|c|$ a jel *amplitúdója*, φ a fázisszög.

Analógia: harmonikus jelek azonos paraméterekkel jellemezhetőek.

A komplex számok

Az Euler-féle felírás következményeként megteremthető az átmenet a harmonikus jelek általános ábrázolása és azok komplex számmal való felírása között.

$$f(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \quad \rightarrow \quad f(t) = A - j \cdot B$$
$$g(t) = M\cos(\omega t + \varphi) \quad \rightarrow \quad Me^{-j\varphi}$$

Megjegyzés: a felírás nem egyenlőséget jelöl, csupán *megfeleltetést.*

Az átírás jelentősége elsősorban a robotikában túlnyomórészt előforduló *általános differenciálegyenletek* megoldása.

A komplex számok

Példa: általános differenciálegyenletek harmonikus megoldása komplex számok segítségével.

$$y'' + 2y' + 5y = 0$$

Megoldás karakterisztikus polinommal:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = \begin{cases} -1+2j \\ -1-2j \end{cases}$$

A megoldás próbafüggvénye:

$$y = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x} = Ae^{-1x}e^{2t\cdot x} + Be^{-1t}e^{-2t\cdot x}$$

$$Ae^{-1x}e^{2x\cdot j} + Be^{-1t}e^{-2x\cdot j}$$
$$= Ae^{-x}\big(\cos(2x) + \sin(2x)\big) + Be^{-x}\big(\cos(2x) - \sin(2x)\big)$$

$$= e^{-x}\big(C\cos(2x) + D\sin(2x)\big) = Ee^{-x}\cos(2x + \varphi)$$

3. A Fourier-transzformáció

A Fourier-transzformáció

A Fourier-transzformáció célja, hogy bármely periodikus függvényt (gyakorlati alkalmazásban elektromos, mágneses stb. jeleket) diszkrét frekvenciájú, harmonikus jelek összegére bontson fel.

Ez a függvény *Fourier-sora*. A Fourier-sorral az eredeti függvényeket általában *közelítjük*, és csak a legszignifikánsabb tagokat használjuk fel a sorból az eredeti függvény jellemzésére.

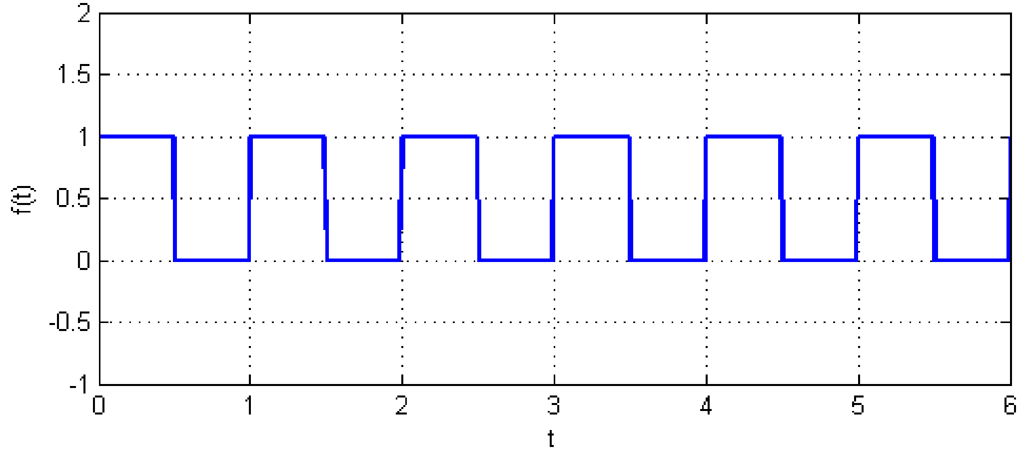
Az alapjel periódusideje T, az *alapharmonikus* körfrekvencia ω_0.

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)] \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t)dt \qquad a_n = \frac{2}{T} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t)cos(n\omega_0 t)dt \qquad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t)sin(n\omega_0 t)dt$$

A Fourier-transzformáció

Példa Fourier-sorfejtésre: négyszögjel.



A jel periódusideje $T = 1$.

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t)dt \quad \longrightarrow \quad a_0 = \frac{1}{1}\int_{-1/2}^{1/2} f(t)dt = \int_{-1/2}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{1/2} f(t)dt$$

$$= \int_{-1/2}^{0} 0dt + \int_{0}^{1/2} 1dt = \frac{1}{2}$$

A Fourier-transzformáció

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t)cos(n\omega_0 t)dt$$

$$a_n = \frac{2}{1} \int_{-1/2}^{1/2} f(t)\cos\left(n\frac{2\pi}{1}t\right)dt$$

$$= 2\left[\int_{-1/2}^{0} 0 \cdot \cos\left(n\frac{2\pi}{1}t\right)dt + \int_{0}^{1/2} 1 \cdot \cos\left(n\frac{2\pi}{1}t\right)dt\right]$$

$$= 2\left[\frac{1}{2\pi n}\sin(2\pi n t)\right]_0^{1/2} = \frac{1}{\pi n}\sin(n\pi)$$

Mivel $\sin(n\pi) = 0$ minden n értékére, ezért $a_n = 0$.

A Fourier-transzformáció

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) sin(n\omega_0 t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{1} \int_{-1/2}^{1/2} f(t) \sin\left(n \frac{2\pi}{1} t\right) dt$$

$$= 2\left[\int_{-1/2}^{0} 0 \cdot \sin\left(n \frac{2\pi}{1} t\right) dt + \int_{0}^{1/2} 1 \cdot \sin\left(n \frac{2\pi}{1} t\right) dt\right]$$

$$= -2\left[\frac{1}{2\pi n} \cos(2\pi n t)\right]_0^{1/2} = -\frac{1}{\pi n} \cos(n\pi) + \frac{1}{\pi n}$$

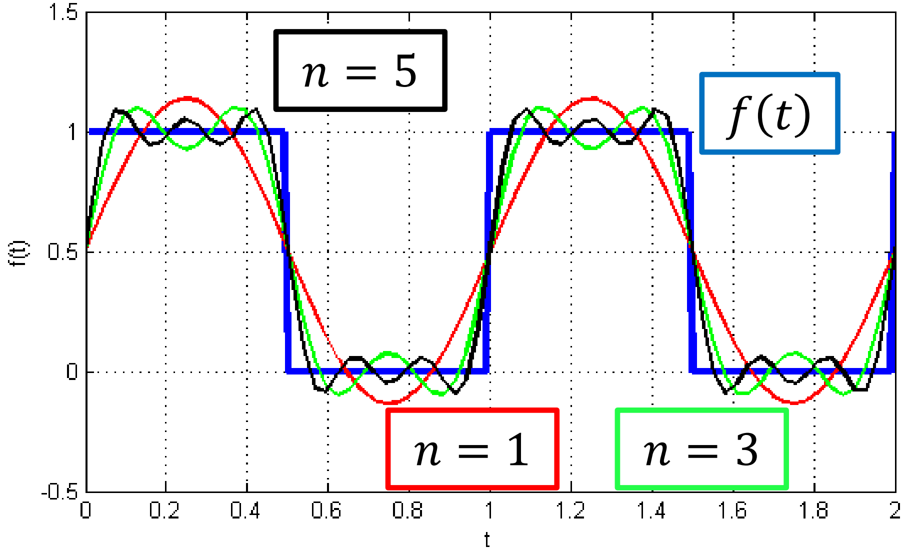
Amennyiben n páros, $b_n = 0$, amennyiben páratlan, $b_n = \frac{2}{\pi n}$

A Fourier-transzformáció

Összegezve:

$$f(t) \approx \frac{1}{2} + \sum_{n=1,3,5\ldots}^{\infty} \left[0 \cdot \cos(2\pi n t) + \frac{2}{\pi n} \sin(2\pi n t) \right]$$

$$f(t) \approx \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sin(2\pi t) + \frac{2}{3\pi} \sin(3 \cdot 2\pi t) + \frac{2}{5\pi} \sin(5 \cdot 2\pi t) + \cdots$$



A Fourier-transzformáció

A nem periodikus függvények *nem megszámlálható* végtelen harmonikus összetevőből állnak, ami *folytonos eloszlású* frekvenciát eredményez.

Nem választható ki egyetlen frekvencia sem, melyhez véges értékű amplitúdó tartozik, de megadható egy $d\omega$ *frekvenciasáv*, melyhez *amplitúdósűrűség* tartozik.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \longrightarrow F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

Ezt a kölcsönös összefüggést nevezzük *Fourier-transzformációnak*.

Előny: a frekvenciafüggvény (spektrum) egyértelműen meghatározza a függvény időbeli alakját.

Köszönöm a figyelmet!

Dr. habil. Kovács Levente
egyetemi docens

kovacs.levente@nik.uni-obuda.hu

Dr. Haidegger Tamás
egyetemi adjunktus

haidegger@irob.uni-obuda.hu

EKIK Egyetemi Kutató és Innovációs Központ

K-MOOC

Óbudai Egyetem
Bejczy Antal iRobottechnikai Központ

Physiological Controls Group

Élettani Szabályozások Csoport
Óbudai Egyetem