

# ROBOTIRÁNYÍTÁS

## 11. előadás

### Pólusáthelyezés állapotviszacsatolással

Dr. habil. Kovács Levente  
egyetemi docens

[kovacs.levente@nik.uni-obuda.hu](mailto:kovacs.levente@nik.uni-obuda.hu)

Dr. Haidegger Tamás  
egyetemi adjunktus

[haidegger@irob.uni-obuda.hu](mailto:haidegger@irob.uni-obuda.hu)



Élettani  
Szabályozások  
Csoport  
Óbudai Egyetem

## Az előadás témája és célja

Az előző előadásokon soros kompenzátorokat terveztünk, azaz a szabályozó a szabályozási körben a szakasz előtt helyezkedett el, a szabályozó kimenete a szakasz bemenete volt, a szakasz kimenete pedig negatívan vissza volt csatolva. Jelen előadásban azonban olyan szabályozást tervezünk, ahol nem a kimenet, hanem a rendszer állapotváltozói vannak visszacsatolva egy  $K$  vektoron keresztül. Ehhez azonban a rendszert állapotteretes leírásban kell vizsgálnunk, emellett a rendszer irányíthatóságát is ellenőriznünk kell.

Az előadás célja, hogy a hallgatók megismerkednek a pólusáthelyezéssel állapotvisszacsatolás tervezésével, amit egy papíron levezetett számolás példa mellett egy Matlab és Simulink segítségével megoldott példa is segít.

## Kulcsszavak

hasonlósági transzformáció, kanonikus alak, pólusáthelyezés, állapotvisszacsatolás, irányíthatóság, megfigyelhetőség, Ackermann-formula

## Tartalomjegyzék

1. Állapotegyenlet és kanonikus alakjai .....	4
1.1. Áttérés állapotterres leírásból átviteli függvényre .....	4
1.2. Hasonlósági transzformáció .....	5
1.3. Kanonikus alakok .....	5
2. Pólusáthelyezés állapotviszacsatolással .....	7
2.1. Állapotviszacsatolási modell .....	7
2.2. Irányíthatóság, megfigyelhetőség .....	8
2.2.1. Irányíthatóság (controllability) .....	8
2.2.2. Megfigyelhetőség (observability) .....	8
2.3. Pólusáthelyezés állapotviszacsatolással .....	8
2.4. Ackermann-formula.....	9
2.4.1. Ackermann-formula – számolás példa .....	9
2.4.2. Ackermann-formula – Matlab példa.....	12

# 1. Állapotegyenlet és kanonikus alakjai

## 1.1. Áttérés állapotterez leírásból átviteli függvényre

A 4. előadáson megismerkedtünk a különböző modellreprezentációkkal: időtartományban az állapotterez leírászt használtuk, Laplace tartományban pedig az átviteli függvényt (és a pólusz-erősítés alakot).

A 8. előadástól szabályozótervezéssel foglalkoztunk (empirikus szabályozások; P, PI és PID soros kompenzátorok), és ha visszaemlékszünk, a szabályozandó szakaszunkat mindig átviteli függvény formájában (lásd (1) egyenlet) adtuk meg. Ennek az az oka, hogy a Laplace transzformáció rendelkezik egy nagy előnnyel, miszerint a differenciálegyenleteket algebrai egyenletté alakítja ( $s$  operátor tartományban). Soros kompenzátorok tervezésénél ezt az előnyt ki tudjuk használni, hiszen a szabályozandó szakasz kimenetének ismeretére van csak szükségünk, amit negatíván visszacsatolunk.

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0}{a_ns^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0} \quad (1)$$

Más a helyzet viszont, amikor a rendszer „belsejében” lévő jelek ismeretére is szükségünk van, azaz a rendszer állapotváltozóit ( $x$ ) is ismerni és használni szeretnénk. Ebben az esetben az állapotterez leírászt kell használnunk (lásd (2) és (3) egyenlet). Az állapotegyenlet (a (2) egyenlet) az  $x$  állapotváltozó időbeli változását írja le, míg a kimeneti egyenlet (a (3) egyenlet) az  $y$  kimenet (szabályozott jellemző) adott  $t$  időpillanatbeli értékét adja meg.

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) \quad (2)$$

$$y(t) = Cx(t) + Dx(t) \quad (3)$$

A kapcsolat az állapotterez leírás és az átviteli függvény között az, hogy az  $A$  mátrix sajátértékei (állapotterez leírás) a rendszer pólusai (átviteli függvény).

A két reprezentáció között áttérés lehetséges mind a két irányban, azonban a megfeleltetés csak az állapotterez leírásról az átviteli függvényre egyértelmű, ennek egyenlete:

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B(s) + D \quad (4)$$

Amikor átviteli függvényről állapotterezbe térünk át, akkor az így kapott leírás több formában is előállhat.

Matlabban az áttérésekre a `tf2ss()`, illetve az `ss2tf()` függvények használhatók.

## 1.2. Hasonlósági transzformáció

Ahogy említettük, egyetlen rendszernek több állapotteres leírása létezik; ezek ugyanazt a rendszert írják le, hasonlósági transzformációval átalakíthatók egymásba.

A *hasonlósági transzformáció* (vagy *állapotteres transzformáció*) egy  $T$  invertálható transzformációs mátrixszal definiált:

$$z = Tx \Rightarrow x = T^{-1}z \quad (5)$$

A transzformáció következtében egy új állapotváltozó jön létre, a  $z$  állapotváltozó. Az állapotegyenlet a  $z$  állapotváltozóval felírva:

$$\dot{z} = TAT^{-1}z + TBu \quad (6)$$

$$y = CT^{-1}x + Du \quad (7)$$

Azt, hogy ez a (6) és (7) egyenlettel reprezentált rendszer valóban ugyanaz a rendszer, mint amit az  $x$  állapotváltozóval (lásd (2) és (3) egyenlet) írtunk le, az garantálja, hogy egy mátrix sajátértékei invariánsak a hasonlósági transzformációra. Tehát  $A$  és  $TAT^{-1}$  sajátértékei ugyanazok, és egyben az átviteli függvény pólusai is.

## 1.3. Kanonikus alakok

Az állapotegyenlet megfelelő *kanonikus alakja* lehetővé teszi az átviteli függvény nevezőjében a pólusok/ együtthatók közvetlen leolvasását.

A Matlab meg tudja határozni a transzformációs mátrixokat, amelyek ahhoz kellenek, hogy az adott állapotteres leírás kanonikus formára alakítható legyen, valamint megadja magát a transzformációt is. A továbbiakban röviden ismertetjük azon Matlab által kínált függvényeket, melyeknek segítségével a rendszer egy kanonikus alakjához juthatunk.

### Állapotteres transzformáció adott $T$ transzformációs mátrixszal (**ss2ss**)

Matlab szintaxis: `sysT = ss2ss(sys, T)`.

Az `ss2ss` függvény megadja a transzformált állapotteres modellt (`sysT`) adott `sys` rendszer és  $T$  transzformáció mellett (a `sys` állapotteres leírású kell, hogy legyen, a  $T$  mátrix pedig invertálható).

### Modális/blokkdiagonális kanonikus alak (**canon modal** típusa)

Matlab szintaxis: `[csys, T] = canon(sys, 'modal')`.

Nem csak a kanonikus alakot ( $\text{c}_{\text{sys}}$ ), de a használt  $\mathbb{T}$  transzformációt is megadja. A kapott alakban  $A$  egy blokkdiagonális mátrix, a blokk mérete tipikusan

- 1x1-es valós sajátértékek esetén
- 2x2-es komplex sajátértékek esetén
- ha többszörös sajátértékek vannak, akkor a blokkok nagyobbak lehetnek.

Például ha a rendszer pólusai (az  $A$  mátrix sajátértékei):

$$p_1 = \lambda_1, p_2 = \sigma + j\omega, p_3 = \sigma - j\omega, p_4 = \lambda_2, \quad (8)$$

akkor az  $A$  mátrix az alábbi blokkdiagonális alakú:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & \omega & 0 \\ 0 & -\omega & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

### Megfigyelhetőségi kanonikus alak (**canon companion típusa**)

Matlab szintaxis: `[csys, T] = canon(sys, 'companion')`.

Nem csak a kanonikus alakot ( $\text{c}_{\text{sys}}$ ), de a használt  $\mathbb{T}$  transzformációt is megadja. A rendszer karakterisztikus egyenlete explicit módon megjelenik az  $A$  mátrix jobb szélső oszlopában

Például ha a rendszer karakterisztikus polinomja:

$$\Delta(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0, \quad (10)$$

akkor az  $A$  mátrix az alábbi alakú:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 1 & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -a_n \end{bmatrix} \quad (11)$$

### Irányíthatósági kanonikus alak (**ss (tf)**)

Matlab szintaxis: `sys=ss(tf(n,d))`.

Hasonló algoritmust használ, mint a `tf2ss`, de átskálazza az állapot-vektort annak érdekében, hogy összenyomja az  $A$  állapotmátrix numerikus tartományát, és hogy a numerikus számításokat javítsa.

## 2. Pólusáthelyezés állapotviszacsatolással

### 2.1. Állapotviszacsatolási modell

Állapotviszacsatolási modell tervezésénél feltesszük, hogy az állapotváltozók elérhetők a szabályozó számára minden időpillanatban. A soros kompenzátorokkal szemben itt nem a kimenet ( $y$ ), hanem az állapotváltozó ( $x$ ) van negatívan visszacsatolva (1. ábra). Ahhoz viszont, hogy az állapotváltozóhoz hozzáférjünk, a rendszert ketté kell bontani, először csak a (2) egyenlettel leírt rendszer található a körben; ennek kimeneteként férünk hozzá az állapotváltozóhoz. Ezután van sorba kapcsolva a  $C$  mátrix, aminek a kimenete már a  $Cx = y$  (ez pontosan az állapotteres leírás második, kimeneti egyenlete – a (3) egyenlet – csak a  $D$  mátrix nélkül, ami valós rendszerekben nem szerepel).

A szabályozó jel az állapotváltozó lineáris kombinációjaként áll elő:

$$u = -Kx, \quad (12)$$

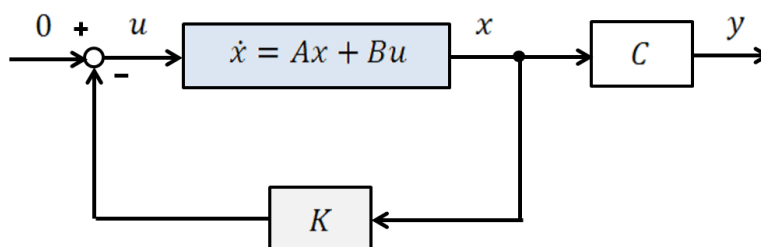
ahol  $K$  egy  $n$  elemű sorvektor ( $n = \dim x$ ), ha a rendszer egyetlen bemenetű. Vegyük észre, hogy a visszacsatolásban nem egyetlen skalár érték van, hanem  $n$  skalár értékű időfüggvény egy vektorba foglalva (az összes állapotváltozó visszacsatolása).

A zárt kör állapotegyenlete állapotviszacsatolás esetén (behelyettesítve a (12) egyenletet a (2) egyenletbe):

$$\dot{x} = (A - BK)x, \quad (13)$$

ami azt jelenti, hogy a zárt kör pólusai az  $A - BK$  mátrix sajátértékei.

A szabályozási cél, hogy a szakasz pólusai (az  $A$  mátrix sajátértékei) tetszőleges helyre áthelyezhetők legyenek a komplex számsíkon. Ez megoldható egy megfelelően megválasztott  $K$  vektor segítségével, ha az  $(A, B)$  pár (állapot)irányítható.



1. ábra: Állapotviszacsatolási modell

Külön felhívnánk a figyelmet arra, hogy azt, hogy a szakasz pólusait hova helyezzük át (hova írjuk elő a zárt rendszer pólusait), a **tervező dönti el**.

## 2.2. Irányíthatóság, megfigyelhetőség

### 2.2.1. Irányíthatóság (controllability)

A teljes állapotirányíthatóság megadja, hogy egy külső bement képes a rendszer belső állapotát átvinni tetszőleges kezdeti állapotból tetszőleges végső állapotba véges idő alatt.

Az irányíthatósági mátrix:

$$M_c = [B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B] \quad (14)$$

**Az irányíthatóság feltétele:** az  $M_c$  irányíthatósági mátrix teljes rangú kell, hogy legyen, azaz

$$\text{rank}(M_c) = n \quad (15)$$

### 2.2.2. Megfigyelhetőség (observability)

Egy rendszer megfigyelhető, ha minden lehetséges állapotvektor és szabályozó vektor érték mellett az aktuális állapot előállítható véges idő alatt csupán a kimenetek használatával. Ez azt is jelenti, hogy csupán a kimenetekből a teljes rendszer viselkedése meghatározható.

A megfigyelhetőségi mátrix:

$$M_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (16)$$

**A megfigyelhetőség feltétele:** az  $M_o$  megfigyelhetőségi mátrix teljes rangú kell, hogy legyen, azaz

$$\text{rank}(M_o) = n \quad (17)$$

## 2.3. Pólusáthelyezés állapotviszacsatolással

**Alapprobléma.** Adott a rendszer állapotterez alakban. A rendszer pólusai vagy instabilak, vagy stabilak, de lassúak.

**Cél.** A cél az, hogy az általunk előírt értékekre gyorsítsuk a rendszer pólusait. A gyorsítás azt jelenti, hogy a valós tengely mentén a  $-\infty$  irányába mozgatjuk el a pólusokat.

Például az eredetileg a rendszer pólusai legyenek  $s_1 = 0.5, s_2 = -1.5$ . A feladat, hogy gyorsítsuk kétszeres értékükre a pólusokat (ha kell, stabilizáljuk is). Ennek eredményeképpen a zárt kör pólusai:  $s_{a1} = -1, s_{a2} = -3$ . A kérdés az, hogy ezt milyen  $K$  állapotviszacsatolási vektorral érhetjük ezt el?

**Megoldás.** A  $K$  állapotviszacsatolási vektor az *Ackermann-formula* segítségével számítható.



## 2.4. Ackermann-formula

Ha a zárt kör előírt sajátértékeinek vektora

$$[s_{c1} \quad s_{c2} \quad \cdots \quad s_{cn}], \quad (18)$$

akkor az  $A - BK$  mátrix karakterisztikus egyenlete

$$\varphi_c(s) = \prod_{i=1}^n (s - s_{ci}) \quad (19)$$

és a hozzátartozó állapotviszacsatolási  $K$  vektor

$$K = e_n^T \cdot M_C^{-1} \cdot \varphi_c(A), \quad (20)$$

ahol  $e_n$  az  $n$ . egységvektor,  $M_C$  pedig az irányíthatósági mátrix. A (20) egyenletet hívjuk **Ackermann-formulának**, ami tehát a **pólusáthelyezéssel állapotviszacsatolási probléma megoldását adja meg**.

Matlabban a  $K = \text{acker}(A, B, p)$  parancs használható, ahol  $A$  és  $B$  a rendszer mátrixai,  $p$  az előírt pólusok vektora,  $K$  pedig a keresett állapotviszacsatolási vektor.

### 2.4.1. Ackermann-formula – számolás példa

#### Feladat

Adott az alábbi lineáris rendszerünk:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u \quad (21)$$

Azt szeretnénk, hogy az állapotviszacsatolás eredményeképp a zárt rendszer pólusai a következők legyenek:

$$s_{c1,c2} = -2 \pm 2j \quad (22)$$

Milyen  $K$  állapotviszacsatolási vektort kell használnunk ehhez?

#### Megoldás

##### 1. Probléma megfogalmazása, a jelenlegi rendszer pólusainak számítása

A rendszer pólusai az  $A$  mátrix sajátértékei, azaz a karakterisztikus egyenlet gyökei:

$$\varphi(s) = \det(sI - A) = 0 \quad (23)$$

Az egységmátrix ( $I$ ) dimenziója megegyezik az  $A$  mátrixéval (jelen esetben 2x2-es):

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (24)$$

Az  $sI - A$  számítása:

$$sI = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow sI - A = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s \end{bmatrix} \quad (25)$$

Felhasználva, hogy a 2x2-es mátrix determinánsának számítási szabálya

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = ad - bc, \quad (26)$$

a karakterisztikus polinomra az alábbi adódik:

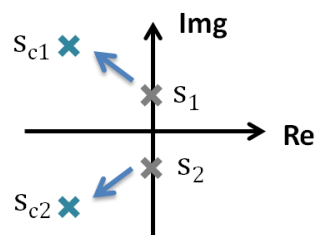
$$\varphi(s) = \det(sI - A) = s \cdot s - (-1) \cdot 1 = s^2 + 1 \quad (27)$$

A karakterisztikus egyenlet megoldása, a rendszer pólusai tehát:

$$\varphi(s) = s^2 + 1 = 0 \Rightarrow s^2 = -1 \Rightarrow s = \sqrt{-1} = j \Rightarrow s_1 = +j, s_2 = -j \quad (28)$$

## 2. $\varphi_c(A)$ számítása

Azt szeretnénk tehát, hogyha a jelenlegi pólusok ( $s_1 = +j, s_2 = -j$ ) a zárt körben gyorsulnának ( $s_{c1,c2} = -2 \pm 2j$ ), lásd 2. ábrát.



2. ábra: Pólusok gyorsítása

A zárt kör karakterisztikus egyenlete állapotviszacsatolás esetén (definíció szerint):

$$\varphi_c(s) = \det(sI - (A - BK)) = 0 \quad (29)$$

Ezt most a gyöktényezős alakból tudjuk számítani:

$$\varphi_c(s) = (s - s_{c1}) \cdot (s - s_{c2}) \quad (30)$$

A zárt kör karakterisztikus egyenletének számítása a gyöktényezős alakból:

$$\begin{aligned} \varphi_c(s) &= [s - (-2 + 2j)] \cdot [s - (-2 - 2j)] = \\ &= [s + (2 - 2j)] \cdot [s + (2 + 2j)] = \\ &= s^2 + s(2 + 2j) + s(2 - 2j) + (2 - 2j)(2 + 2j) \end{aligned} \quad (31)$$

Felhasználva a komplex számok összeadására vonatkozó

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \quad (32)$$

szabályt, a (31) egyenlet elsőfokú tagja:

$$s(2 + 2j) + s(2 - 2j) = (4s, 0) = 4s \quad (33)$$

Ugyancsak felhasználva a komplex számok szorzására vonatkozó

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, bc + ad) \quad (34)$$

szabályt, a (31) egyenlet konstans tagja:

$$(2 - 2j)(2 + 2j) = (8, 0) = 8 \quad (35)$$

A zárt kör karakterisztikus egyenlete tehát:

$$\varphi_c(s) = s^2 + 4s + 8 \quad (36)$$

A zárt kör karakterisztikus egyenletébe most behelyettesítjük az  $A$  mátrixot (azaz az  $s = A$  helyettesítéssel élünk):

$$\varphi_c(A) = A^2 + 4 \cdot A + 8 \cdot I \quad (37)$$

Felhasználva, hogy

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (38)$$

a (37) egyenlet megoldása:

$$\varphi_c(A) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ -4 & 7 \end{bmatrix} \quad (39)$$

### 3. $M_c^{-1}$ számítása

Tudjuk, hogy az irányíthatósági mátrix a (14) egyenletben megadott alakú. Mivel esetünkben az állapotváltozók száma  $n = 2 \Rightarrow n - 1 = 1$ , ezért

$$M_c = [B \quad AB] \quad (40)$$

Felhasználva, hogy

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (41)$$

a (40) egyenlet megoldása:

$$M_c = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (42)$$

Az irányíthatósági mátrix inverzének számításánál felhasználjuk, hogy egy 2x2-es mátrix inverze az alábbiak szerint számítható:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad (43)$$

Tehát az irányíthatósági mátrix inverze:

$$M_c^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (44)$$

#### 4. $e_n^T$ számítása

Mivel  $n = 2$ , ezért

$$e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow e_n^T = [0 \quad 1] \quad (45)$$

#### 5. $K$ számítása

A  $K$  állapotviszacsatolási vektort az Ackermann-formula segítségével (lásd (20) egyenlet) kapjuk meg:

$$K = [0 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ -4 & 7 \end{bmatrix} = [0 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 5.5 & -1.5 \\ -1.5 & -5.5 \end{bmatrix} = [-1.5 \quad -5.5] \quad (46)$$

### 2.4.2. Ackermann-formula – Matlab példa

1. A szakaszt állapotteres leírásban adjuk meg, tehát az  $A$ ,  $B$ ,  $C$  és  $D$  mátrixokkal.

$$A = [-0.3929 \quad 0.1786 \quad 0.1429; \quad 0.5 \quad 0 \quad 0; \quad 0 \quad 0.25 \quad 0];$$

$$B = [1; 0; 0];$$

$$C = [0 \quad 0 \quad -0.7143];$$

$$D = 0;$$

2. A szakasz pólusai számíthatók az állapotmátrix sajátértékeinek számításával:

$$\text{eig}(A)$$

$$-0.5000$$

$$0.2500$$

$$-0.1429$$

3. Ha a szakasz instabil (vagy stabil, csak lassúak a pólusok), akkor az elsődleges célunk az, hogy stabil zárt kört állítsunk elő egy megfelelően megválasztott állapotviszacsatolás segítségével (esetleg gyorsítsuk a stabil, de lassú pólusokat).

4. Először nézzük meg, hogy a szakasz irányítható-e:

```
Mc=ctrb(A,B);
```

```
rank(Mc)
```

```
ans = 3
```

Ha az irányíthatósági mátrix rangja megegyezik az állapotváltozók számával, akkor a szakasz irányítható.

5. Írjuk elő a kívánt értékeket a zárt rendszer pólusai számára.

```
p = [-2.5000 -1.2500 -0.7143];
```

6. Számítsuk ki az ehhez szükséges  $K$  állapotviszacsatolási vektort:

```
K = acker(A,B,p)
```

```
K = 4.0714 11.7857 18.0000
```

7. Az eredmény ellenőrizhető a zárt kör pólusainak kiszámításával:

```
eig(A-B*K)
```

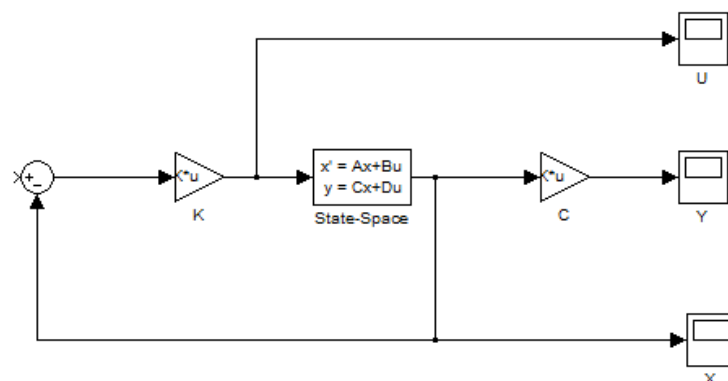
```
-2.5000
```

```
-1.2500
```

```
-0.7143
```

8. Megvalósítás Simulinkben

A Simulinkes blokkdiagramot a 3. ábra mutatja.



3. ábra: Állapotviszacsatolás megvalósítása Simulinkben

- A szabályozó a Matlabban `acker` paranccsal számított  $K$ .
- A  $C$  mátrix értékét a `state-space` blokkban egységmátrixra állítjuk, hogy a blokk kimenetén az állapotváltozókat kapjuk meg.
- Az állapotokból ezután egy külön  $C$  mátrix-szorzással határozzuk meg a kimenetet. Ez a  $C$  mátrix eredetileg a rendszer része!

## Az előadás összefoglalása

A modelljeinket reprezentálhatjuk időtartományban és Laplace tartományban is. Időtartományban az állapotteres leírást használtuk, Laplace tartományban pedig az átviteli függvényt. A két reprezentáció közötti áttérés lehetséges mind a két irányban, de csak az állapotteres leírásról az átviteli függvényre történő áttérés egyértelmű. Abban az esetben, amikor átviteli függvényről állapottérbe lépünk át, a rendszerünket végtelen sok, egymásba hasonlósági transzformációval átalakítható állapot-és kimeneti egyenlettel írhatjuk le. A sok állapotteres leírás közül kiemelkednek az úgynevezett kanonikus alakok, melyekből az átviteli függvény nevezőjének gyökei (a pólusok) vagy a karakterisztikus polinom együtthatói közvetlenül leolvashatók. Matlabban olyan kanonikus alakot is előállíthatunk, amelyben az  $A$  állapotmátrix numerikus tartományát redukáljuk a numerikus számítások javítsa céljából.

Pólusáthelyezéssel állapotviszacsatolás esetén a rendszerünk állapotteres alakban adott. A rendszer pólusai vagy instabilak, vagy stabilak, de lassúak. A szabályozási cél az, hogy az általunk előírt értékekre gyorsítsuk a rendszer pólusait, így stabilizálva és gyorsítva a zárt kört. Ezt úgy tudjuk elérni, hogy az állapotváltozókat negatívan visszacsatoljuk egy  $K$  állapotviszacsatolási vektor segítségével. Arra, hogy ezt a  $K$  vektort hogyan lehet kiszámítani, az Ackermann-formula ad választ.

## Ellenőrző kérdések

1. Mi a kanonikus alak?
2. Mi az állapotviszacsatolás lényege, hogy néz ki az állapotviszacsatolás blokk diagramja?
3. Mi az irányíthatóság és a megfigyelhetőség feltétele?
4. Pólusáthelyezéssel állapotviszacsatolás esetén mik azok a paraméterek, amiket nekünk kell megválasztani?
5. Pólusáthelyezéssel állapotviszacsatolás esetén hogy számítjuk a  $K$  állapotviszacsatolási vektort?