# ROBOTIRÁNYÍTÁS

10. előadásÖsszetett gyakorlati példa

Dr. habil. Kovács Levente egyetemi docens

kovacs.levente@nik.uni-obuda.hu

Dr. Haidegger Tamás egyetemi adjunktus

haidegger@irob.uni-obuda.hu











# Az előadás témája és célja

Ebben az előadásban egy összetett gyakorlati példán keresztül mutatjuk be a PI-szabályotótervezést, a rendszer dinamikai modelljének vizsgálatától kezdve a szimulációs eredmények bemutatásáig. Az előadás célja, hogy a hallgatók egészében megismerjék a szabályozótervezés folyamatát. Láthatjuk majd, hogyan fejlődik ki a szabályozótervezés a dinamikai rendszert leíró egyszerű, a középiskolai tanulmányokból is ismert fizikai összefüggésekből. A frekvenciatartományban történő komplex számítások helyett ebben a példában a Bode-diagram átfogóbb értelmezésére lesz szükség, ugyanis a szabályzási paraméterek meghatározása elsősorban grafikus úton, a Bode-diagram manipulációjával történnek. A számításokat a MATLAB programcsomag segítségével ellenőrizzük majd.

## Kulcsszavak

PI-szabályozótervezés, Bode-diagram, dinamikai modell, rendszeregyenlet, grafikus megoldás, műveletek logaritmikus tengelyeken

# Tartalomjegyzék

1	. A modell áttekintése	. 4
	. A rendszer átviteli függvényének levezetése	
	2.1. A DC-motor áramköre	
	2.2. A kormánykerék kapcsolata	. 6
	2.3. A kormánymű mechanikája	. 7
	2.4. A rendszer elemeinek egyesítése	. 8
3	. Soros PI-szabályozó tervezése	. 9

#### 1. A modell áttekintése

Az alábbi gyakorlati példában egy DC-motorral hajtott, autókban található kormánymű leegyszerűsített modelljén mutatjuk be a soros PI-kompenzációt, lépésről lépésre.

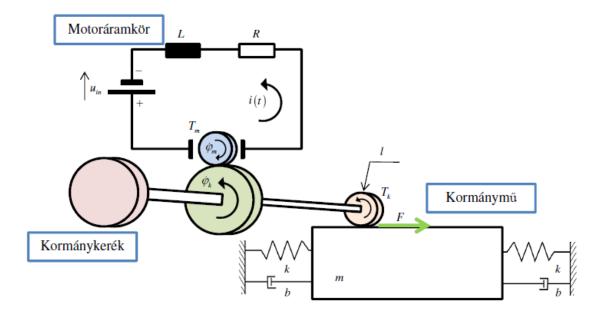
A rendszer bemenete a DC-motorra kapcsolt feszültség, kimenete pedig a kormány szögelfordulása.

A modell két fő komponensből épül fel:

- 1. a DC-motor áramköre
- 2. a motor által meghajtott mechanizmus

A komponensek egyéni viselkedését és kapcsolatát a fizikai törvények alapján matematikai összefüggésekkel írjuk le. A végső összefüggés a rendszer átviteli függvénye, melyhez a konvencionális PI-szabályozótervezési módszerek segítségével tervezünk szabályozót.

A kormánymű dinamikai modellje az 1. ábrán látható.



1. ábra: A kormánymű egyszerűsített dinamikai modellje

#### A rendszer paraméterei:

 $u_{in}$ - a DC-motoráramkörre kapcsolt feszültség, a rendszer bemenete

 $\varphi_k$ - a kormány szöghelyzete, a rendszer kimenete

i- a DC-motoráramkör hurokárama

R- a motoráramkor lineáris ellenállása

L- a motoráramkör induktív ellenállása

 $\varphi_m$ - a DC-motor tengelyének szöghelyzete

Kovács – Haidegger: Robotirányítás

r- a DC-motor és a kormány tengelyei közötti fogaskerék-áttétel

l- a kormánymű fogaslécét meghajtó fogaskerék sugara

*m*- a kormánymű tömege

k- a kormánymű rugalmassága

b- a kormánymű csillapítása

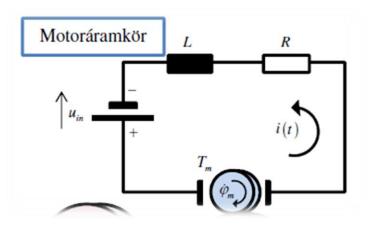
F- a kormányműre a fogasléc által ható erő

 $T_k$ - a kormány tengelyére a kormányműről visszaható nyomaték

### 2. A rendszer átviteli függvényének levezetése

#### 2.1. A DC-motor áramköre

A felhasználandó egyenletek levezetéséta DC-motor áramkörével kezdjük (2. ábra).



2. ábra: A DC- motor áramköre

Az áramkörben  $u_{in}$  feszültség hatására i(t) áramerősség jelenik meg. Az áramkör egyes tagjain eső feszültségek előjeles összege zérus, így felírható, hogy

$$u_{in} - u_R - u_L - u_{EMF} = 0 (1)$$

A lineáris ellenálláson eső feszültség Ohm törvénye alapján:

$$u_R(t) = Ri(t) \tag{2}$$

A tekercsen eső feszültség arányos az áramerősség változásával:

$$u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} \tag{3}$$

A Lenz-szabály alapján a motor tekercseiben indukálódó áram a motor fordulatszámával arányos feszültséget (elektromotoros erő) hoz létre:

$$u_{EMF}(t) = \dot{\varphi}_m(t) \cdot K_E \tag{4}$$

 $K_E$  a motorállandó, DC-motorra jellemző, katalógusból leolvasható mennyiség,  $\dot{\varphi}_m$  pedig a motor fordulatszáma.

Behelyettesítve az (1) egyenletbe:

$$u_{in}(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + K_E \dot{\varphi}_m(t)$$
(5)

A motoráramkör kimenete a motor által kifejtett  $T_m$  nyomaték, ez teremti majd meg a kapcsolatot a kormánymű mechanikájával. DC-motorok esetén a motor által kifejtett nyomaték egyenesen arányos a motoráramkör hurokáramával:

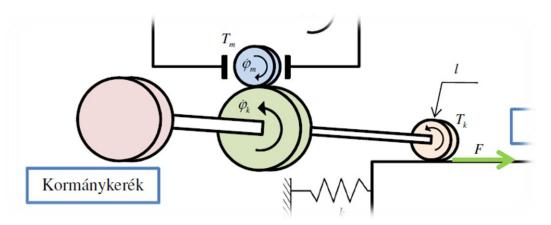
$$T_m(t) = K_M i(t) \tag{6}$$

 $K_M$  motorállandó értéke szintén katalógusból kiolvasható. A mérnöki gyakorlatban a két motorállandó értékét azonosnak vesszük, azaz:

$$K_M = K_E = K (7)$$

#### 2.2. A kormánykerék kapcsolata

A motor kimeneti tengelye fogaskerekeken keresztül (kék) csatlakozik a kormánytengelyhez (zöld). A fogaskerekek közötti áttétel felhasználásával (3. ábra).



3. ábra: A kormánykerék kapcsolata

$$\dot{\varphi}_m = r\dot{\varphi}_k \tag{8}$$

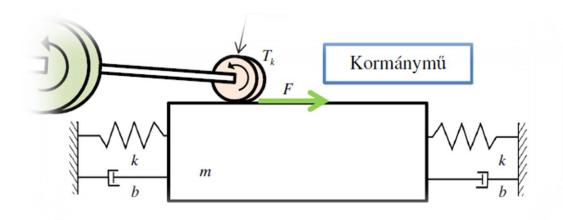
$$T_m = \frac{1}{r} T_k \tag{9}$$

Mivel a kormány tengelye merev, a  $T_k$  nyomaték megjelenik a halványpiros fogaskeréken is, mely a testre F erőt gyakorol. Az erőkar ismeretében ez az erő megegyezik a nyomaték és a kerék sugarának hányadosával:

$$F = \frac{T_k}{l} \tag{10}$$

#### 2.3. A kormánymű mechanikája

Az m tömegű test két-két rugó és csillapítás elemen keresztül kapcsolódik a merev falhoz – ami esetünkben a rugalmas kerekek és a merev talaj kapcsolatát jelenti (4. ábra). Az ismert összefüggéseket felhasználva a rendszer mozgásegyenlete:



4. ábra: A kormánymű mechanikája

$$m\ddot{x} + 2b\dot{x} + 2kx = F \tag{11}$$

A test elmozdulása megegyezik a halványpiros fogaskerék elfordulásához tartozó ívhosszal, ami megteremti a kapcsolatot x elmozdulás és  $\varphi_k$  szögelfordulás között:

$$x = \varphi_k \cdot l \tag{12}$$

#### 2.4. A rendszer elemeinek egyesítése

Felírásra kerültek a szükséges fizikai összefüggések. A feladat: a bemeneti és kimeneti változók kifejezése a modellparaméterek függvényében. A rendelkezésre álló egyenletek:

$$u_{in}(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + K\dot{\varphi}_m(t)$$
(5)

$$T_m(t) = Ki(t) \tag{6}$$

$$\dot{\varphi}_m = r\dot{\varphi}_k \tag{8}$$

$$T_m = -\frac{1}{r}T_k \tag{9}$$

$$F = \frac{T_k}{l} \tag{10}$$

$$m\ddot{x} + 2b\dot{x} + 2kx = F \tag{11}$$

$$x = \varphi_k \cdot l \tag{12}$$

Kifejezhetők a bemenő és kimenő változók:

$$F = l(m\ddot{\varphi}_k + 2b\dot{\varphi}_k + 2k\varphi_k) \ (11,12 \text{ egyenletekből})$$
(13)

$$T_k = l^2(m\ddot{\varphi}_k + 2b\dot{\varphi}_k + 2k\varphi_k) (10,13 \text{ egyenletekből})$$
(14)

$$r \cdot T_m = l^2 \left( m \frac{1}{r} \ddot{\varphi}_m + 2b \frac{1}{r} \dot{\varphi}_m + 2k \frac{1}{r} \varphi_m \right) (8,9,14 \text{ egyenletekből})$$
 (15)

$$K \cdot i = \frac{l^2}{r^2} (m\ddot{\varphi}_m + 2b\dot{\varphi}_m + 2k\varphi_m) \ (6.15 \ egyenletekből)$$
 (16)

A Laplace-transzformációt elvégezzük az (5) és (16) egyenleteken:

$$U(s) = RI(s) + LsI(s) + K\Phi_m(s)s \to I(s) = \frac{U(s) - K\Phi_m(s)s}{Ls + R}$$
(17)

$$KI(s) = \frac{l^2}{r^2} \left( ms^2 \Phi_m(s) + 2bs \Phi_m(s) + 2k \Phi_m(s) \right)$$
 (18)

Az (17) és (18) egyenletekből I(s) kiejthető, így a kifejezés tovább egyszerűsödik:

$$K\frac{U(s) - Ks\Phi_{m}(s)}{Ls + R} = \frac{l^{2}}{r^{2}} \left( ms^{2}\Phi_{m}(s) + 2bs\Phi_{m}(s) + 2k\Phi_{m}(s) \right)$$
(19)

Kovács - Haidegger: Robotirányítás

A kimenő és bemenő jelek arányát kifejezve a rendszer átviteli függvénye meghatározható:

$$W(s) = \frac{\Phi_k(s)}{U(s)} = \frac{\frac{Kr}{l^2}}{(Ls+R)(ms^2+2bs+2k) + \frac{K^2r^2}{l^2}s}$$
(20)

Legyenek a rendszer fizikai paraméterei a következők:

$$K = 0.15 [Vs]$$
  
 $r = 100 [-]$   
 $l = 0.1 [m]$   
 $L = 10 [H]$   
 $R = 350 [\Omega]$   
 $m = 80 [kg]$   
 $b = 25 [Ns/m]$   
 $k = 1 [N/m]$ 

Behelyettesítve az átviteli függvénybe, ismerős alakra hozható a kifejezés:

$$W(s) = \frac{\Phi_k(s)}{U(s)} = \frac{1500}{800s^3 + 28500s^2 + 40000s + 700}$$
(21)

## 3. Soros PI-szabályozó tervezése

A rendszer pólusai meghatározhatóak a MATLAB vagy más numerikus számításokat végző programcsomag, segítségével, ennek hiányában pedig más közelítő módszerek, pl. a Newton-Rhapson módszer segítségével.

A rendszer pólusai azok az s értékek, melyekre a nevező értéke zérus. Ezek az értékek a következők:

$$p_1 = -0.0177$$

$$p_2 = -1.4451$$

$$p_3 = -34.1621$$

Az átviteli függvény tehát felírható a következő alakban:

$$W(s) = \frac{1500}{800} \frac{1}{(s+34.1621)(s+1.4451)(s+0.0177)}$$
(22)

A gyakorlatban célszerű a rendszer *időállandós* alakját alkalmazni, melynek lényege, hogy a nevezőben található szorzat tagjainak konstans tagja (ha van) egységnyi legyen:

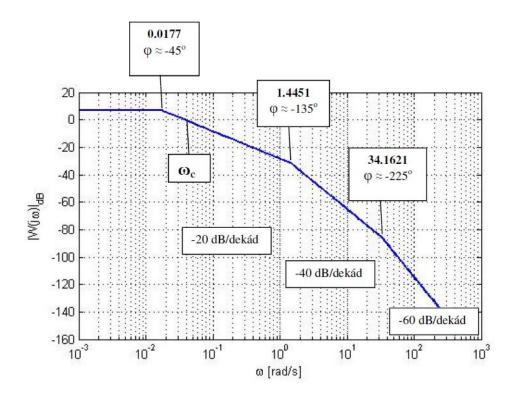
$$W(s) = \frac{1.875}{34.1621 \cdot \left(\frac{1}{34.1621}s + 1\right) \cdot 1.4451 \cdot \left(\frac{1}{1.4451}s + 1\right) \cdot 0.0177 \cdot \left(\frac{1}{0.0177}s + 1\right)}$$
(23)

$$W(s) = \frac{2.146}{(0.0273s + 1)(0.692s + 1)(56.4s + 1)}$$
(24)

Az időállandók:

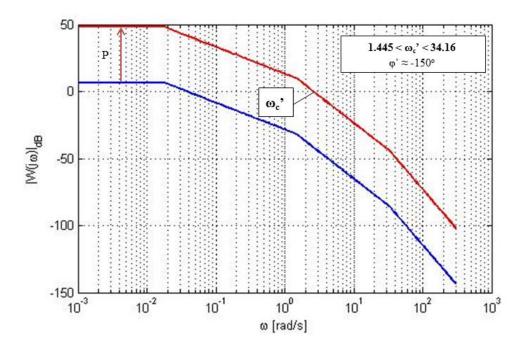
$$T_1 = 56.4 \text{ sec}$$
  
 $T_2 = 0.692 \text{ sec}$   
 $T_3 = 0.0273 \text{ sec}$ 

A rendszer Bode-diagramja megszerkeszthető a szokásos módon, közelítő integráló tagok segítségével. A bekeretezett értékek a törési frekvenciákat mutatják,  $\omega_c$  a vágási körfrekvencia.



5. ábra: A rendszer közelítő Bode-diagramja

A cél egy olyan PI szabályzó tervezése, mely a Bode-diagramot párhuzamosan eltolja önmagával úgy, hogy a 0 dB értéket  $\phi'=150^\circ$  értéknél metssze (fázistartalék:  $\phi'=150^\circ$ ). Először a *P-szabályzót* tervezzük meg a 6. ábrán látható módon.

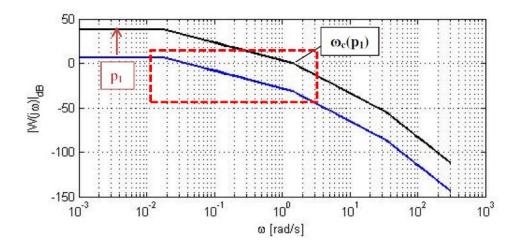


6. ábra: A P-szabályozóval elérni kívánt állapot

A P-szabályozóval piros színnel jelzett görbét kívánjuk előállítani. Az új vágási körfrekvencia,  $\omega_c$  a második és a harmadik töréspont között helyezkedik el, hiszen a második töréspontban a fázis elméleti értéke csak  $\varphi=135^\circ$ , a második töréspontban pedig már  $\varphi=255^\circ$ .

Az elérni kívánt fázis azonban  $\phi'=150^\circ$ . A feladat megoldásához nincs közvetlenül szükség a Bode-fázisdiagram megszerkesztésére, de érdemes ellenőrzésképpen felrajzolni azt.

A P értékkel való eltolás a kétszeres törés miatt két lépésben kerül elvégzésre. Először a Bode-diagramot önmagával párhuzamosan eltoljuk felfelé addig, amíg a második töréspont rá nem fekszik a 0 dB tengelyre, mint ahogyan az a 7. ábrán is látható:

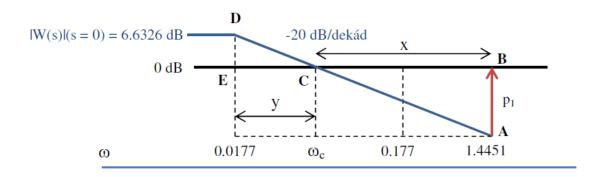


7. ábra: A Bode-diagram eltolásának első fázisa

Az így meghatározott új vágási körfrekvencia:

$$\omega_c^{p_1} = \frac{1}{T_2} = 1.445 \, \frac{rad}{s} \tag{25}$$

Az eltolás valójában egy arányos taggal való szorzást jelent. Kérdés: mekkora legyen  $p_1$ ? A meghatározáshoz szükség lesz a piros szaggatott vonallal jelzett terület külön vizsgálatára:



8. ábra: A 7. ábrán piros szaggatott vonallal jelzett terület vizsgálata

Első lépésként a **DEC** háromszöget vizsgáljuk. **C** pont a vágási körfrekvencia, melynek pontos értékét nem ismerjük, de kiszámíthatjuk. **D** pontban a nagyítás értéke kiszámítható a megfelelő behelyettesítéssel:

$$\overline{DE} = |W(j\omega)||_{\omega = 0.0177 \, rad/s} \tag{26}$$

A számítást könnyebbé tehetjük, ha a közelítő értéket határozzuk meg, hiszen a nagyítás állandó az  $\omega < 0.0177 \ rad/s$  tartományban (a Bode-diagram itt vízszintesen fut). Tehát közelítve:

$$\overline{DE} \approx |W(j\omega)||_{\omega=0} = 2.146 = 6.6326 \, dB$$
 (27)

Fontos megjegyezni, hogy a két érték némileg eltérhet egymástól, hiszen jelen esetben a Bode-diagramot tört vonalakkal helyettesítettük, holott a valóságban az átmenet a töréspontoknál "lekerekített".

A logaritmikus skálán a vágási körfrekvencia értékét a következőképpen kell kifejeznünk:

$$\omega_c = 0.0177 \cdot 10^y \tag{28}$$

y az **EC** szakasz hossza, a **DEC** háromszög **DC** oldalának meredeksége pedig  $20 \, dB$ . Ebből következik, hogy a **DE** szakasz hossza az **EC** oldal hosszának és a **DC** meredekségének szorzata, azaz:

$$\overline{DE} = 6.6326 \, dB = 20 \frac{dB}{dek\acute{a}d} \cdot y = 20 \cdot log\left(\frac{\omega_c}{0.0177}\right) \tag{29}$$

A szabályozatlan rendszer közelítő vágási körfrekvenciája tehát:

$$\omega_c = 0.0177 \cdot 10^{\frac{6.6326}{20}} = 0.0379 \, \frac{rad}{s} \tag{30}$$

A  $p_1$  arányos nagyítással, ami valójában a W(s) átviteli függvény elé kerülő konstans szorzó, a Bode-diagramot úgy toljuk el, hogy az **A** pont a **B** pontba kerüljön. Ehhez most az **ABC** háromszög vizsgálatára van szükség. **A** vágási körfrekvencia ismeretében már ismert az **AB** távolság, ha a **B** pont frekvenciáját az **A** pontban levő frekvenciával fejezzük ki:

$$\omega(B) = 1.4451 \ rad/s = \omega(C) \cdot 10^x = 0.0379 \cdot 10^x \tag{31}$$

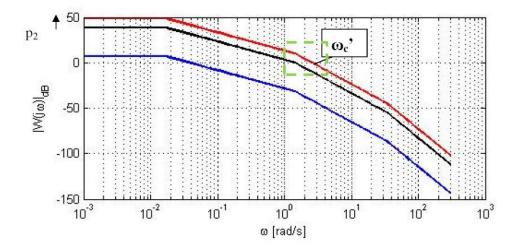
x azt fejezi ki, hogy hány dekád távolságra van  ${\bf C}$  pont  ${\bf B}$  ponttól. Egy dekád (x=1) esetén  $\omega({\cal C})$  pontosan tízszerese lenne  $\omega(B)$  értékének, két dekád (x=2) esetén százszorosa, stb. Ha megoldjuk a fenti egyenletet, x értékére a következő adódik:

$$1.4451 = 0.0379 \cdot 10^{x} \to x = log\left(\frac{1.4451}{0.0379}\right) = log(38.1293) = 1.5813$$
 (32)

Az AB szakasz hossza a korábbiakkal összhangban, mely egyben a  $p_1$  erősítés értéke is, a következőképpen számolható:

$$\overline{AB} = p_1 = 20 \frac{dB}{dek\acute{a}d} \cdot 1.5813 \, dek\acute{a}d = 31.626 \, dB \tag{33}$$

A következő lépésben  $p_2$  értéke kerül meghatározásra. Ebben az esetben a fekete színnel jelzett görbét toljuk el párhuzamosan a piros színnel jelzett görbének fedésébe úgy, hogy a  $0\,dB$  tengelyt a kívánt  $\omega'_{\,c}$  körfrekvenciában vágja át:



9. ábra: A Bode-diagram eltolásának második fázisa

Mielőtt meghatároznánk  $p_2$  értékét, szükségünk van  $\omega'_c$  értékére, melyet mi határozunk meg a kijelölt fázistartalék alapján. Mivel a függőleges eltolás nem módosítja a Bodefázisdiagram alakját, ezért  $\omega'_c$  értékét az eredeti rendszer alapján, pontosabban annak egy jó közelítésének alapján számítjuk ki.

A  $\varphi_t=30^\circ$  fázistartalék értéke, azaz a rendszer fázisa ebben a pontban:

$$\varphi = \varphi_t - 180^\circ = 30^\circ - 180^\circ = 150^\circ \tag{34}$$

Az átviteli függvény ismeretében a fázis a körfrekvencia függvényében kiszámítható:

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{Im\{W(j\omega)\}}{Re\{W(j\omega)\}}$$
(35)

Belátható, hogy ez a kifejezés kézzel kiszámítva hosszadalmas folyamat, hiszen a  $W(j\omega)$  rendszer nevezőjében harmadfokú polinom áll. A számítás kivitelezhető, de a kifejezésben megjelenő  $\omega^3$  nehézkessé teszi a zárt alakú megoldás megtalálását.

Ha a rendszer két legkisebb időállandóhoz tartozó törése, ebben az esetben  $T_2$  és  $T_3$  kellően messze vannak egymástól (a "kellően" szó némi mérnöki intuíciót is takar, a valóságban egymásnak legalább kétszerese a két érték), akkor a kisebbik időállandójú tagot egyszerűen elhagyhatjuk a számítások egyszerűsítésének érdekében.

A módosított átviteli függvény ezért így alakul:

$$W'(s) = \frac{2.146}{(0.0273s + 1)(0.692s + 1)(56.4s + 1)} = \frac{2.146}{(0.692s + 1)(56.4s + 1)}$$
(36)

Feltételezve, hogy a közelítés nem befolyásolja a számítások eredményét számottevően, a fázisra vonatkozó összefüggés a következő:

$$W'(s) = tan\varphi(\omega'_c) = \frac{Im\{W'(j\omega'_c)\}}{Re\{W'(j\omega'_c)\}}$$
(37)

A kifejezésből csak  $\omega'_c$  értéke ismeretlen. Az átviteli függvény átírható a következő alakra:

$$W(j\omega) = \frac{2.146}{(0.692j\omega + 1)(56.4j\omega + 1)} = \frac{2.146}{-39.03\omega^2 + 57.092j\omega + 1}$$
$$= \frac{2.146}{(1 - 39.03\omega^2) + j \cdot 57.092\omega}$$
(37)

A valós és a képzetes részek különválasztandók:

$$W(j\omega) = \frac{2.146}{(1-39.03\omega^{2}) + j \cdot 57.092\omega} = \frac{(1-39.03\omega^{2}) - j \cdot 57.092\omega}{(1-39.03\omega^{2}) - j \cdot 57.092\omega} \cdot \frac{2.146}{(1-39.03\omega^{2}) + j \cdot 57.092\omega} = \frac{2.146 - 83.7584\omega^{2} - j \cdot 122.3842\omega}{(1-39.03\omega^{2})^{2} + 57.092^{2}} = \frac{2.146 - 83.7584\omega^{2}}{(1-39.03\omega^{2})^{2} + 57.092^{2}} + j \cdot \frac{-122.3842\omega}{(1-39.03\omega^{2})^{2} + 57.092^{2}}$$

$$\operatorname{Re}\{W(j\omega)\} = \frac{2.146 - 83.7584\omega^{2}}{(1-39.03\omega^{2})^{2} + 57.092^{2}} + j \cdot \frac{-122.3842\omega}{(1-39.03\omega^{2})^{2} + 57.092^{2}}$$

$$\operatorname{Re}\{W(j\omega)\} = \frac{2.146 - 83.7584\omega^{2}}{(1-39.03\omega^{2})^{2} + 57.092^{2}} + j \cdot \frac{-122.3842\omega}{(1-39.03\omega^{2})^{2} + 57.092^{2}}$$

$$\operatorname{Re}\{W(j\omega)\} = \frac{2.146 - 83.7584\omega^{2}}{(1-39.03\omega^{2})^{2} + 57.092\omega^{2}} + j \cdot \frac{-122.3842\omega}{(1-39.03\omega^{2})^{2} + 57.092\omega^{2}}$$

Ha a fázisértéket behelyettesítjük, a körfrekvenciára a következő egyenlet adódik:

$$\tan \varphi = \tan \left(-150^{\circ}\right) = 0.5774 = \frac{\frac{-122.3842\omega}{\left(1 - 39.03\omega^{2}\right)^{2} + 57.092^{2}}}{\frac{2.146 - 83.7584\omega^{2}}{\left(1 - 39.03\omega^{2}\right)^{2} + 57.092^{2}}} = \frac{-122.3842\omega}{2.146 - 83.7584\omega^{2}}$$
(39)

Átrendezve:

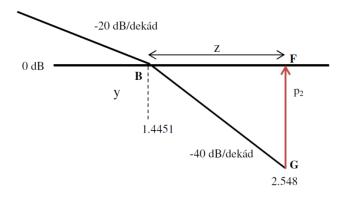
$$\frac{-122.3842\omega}{2.146 - 83.7584\omega^2} = 0.5774 \rightarrow -48.3621\omega^2 + 122.3842\omega + 1.2391 = 0 \tag{40}$$

A másodfokú egyenlet megoldóképletét alkalmazzuk:

$$\omega_{1,2} = \frac{-122.3842 \pm \sqrt{122.3842^2 + 4 \cdot 1.2391 \cdot 48.3621}}{-2 \cdot 48.3621} = \begin{cases} 2.548 \\ -0.0174 \end{cases} rad/s \tag{41}$$

$$\omega'_c = 2.548 \ rad/s \tag{42}$$

Az új vágási körfrekvencia ismeretében már meghatározható a  $p_2$  érték, melyet az alábbi ábrából olvashatunk le:



10. ábra: A 9. ábrán zöld szaggatott vonallal jelzett terület vizsgálata

 $p_2$  valójában az **FG** szakasz hossza, mely a **BGF** háromszög egyik befogója. A befogó hossza a korábbiakhoz hasonlóan a **BF** szakasz z hosszának és a **BG** szakasz meredekségének szorzata, ahol z az **F** pont távolságát adja meg **B**-től dekádban. Így:

$$\overline{FG} = p_2 = z \cdot 40 \frac{dB}{dek\acute{a}d} \tag{43}$$

$$1.4551 \cdot 10^{z} = 2.548 \rightarrow z = \log \frac{2.548}{1.4551} = 0.2433 \, dek \acute{a}d \tag{44}$$

$$p_2 = 40 \cdot 0.2433 = 9.732 \, dB \tag{45}$$

A rendszer végső nagyítása  $p_1$  és  $p_2$  nagyítások összege (decibelben):

$$P = p_{1dB} + p_{2dB} = 31.626 dB + 9.732 dB = 41.3580 dB = 10^{\frac{41.3580}{20}} = 116.923$$
 (46)

A P-szabályzót a következő alakú PI-szabályzóra bővítjük:

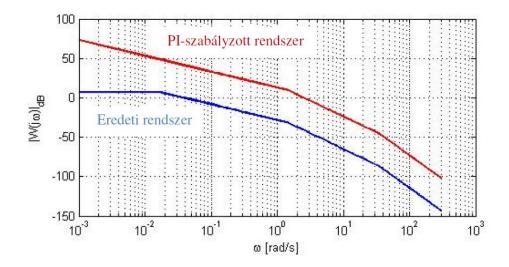
$$W_c(s) = P \frac{T_I s + 1}{T_I s} \tag{47}$$

Ökölszabály szerint  $T_I$  értékét úgy választjuk meg, hogy  $T_I s + 1$  megegyezzen a szabályozni kívánt rendszer legnagyobb időállandójú tagjával (a legkisebb frekvenciájú töréshez köthető taggal), mely esetünkben  $T_1 = 56.4 \, \mathrm{sec}$ .

Ennek felhasználásával a szabályzó végleges alakja a következő:

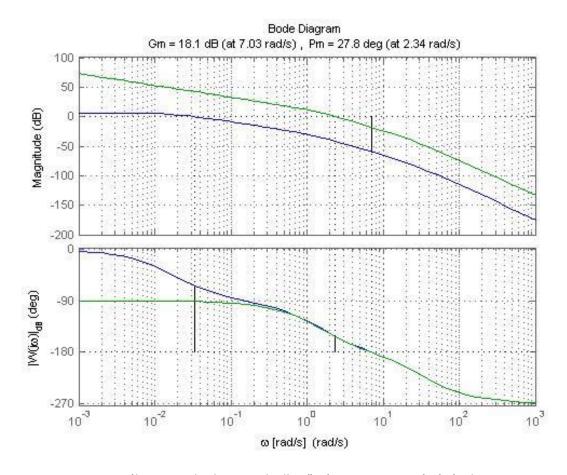
$$W_c(s) = P \frac{T_1 s + 1}{T_1 s} = 116.923 \cdot \frac{56.4 s + 1}{56.4 s} = \frac{56.4 s + 1}{0.4824 s}$$
 (48)

A szabályozott rendszer közelítő Bode-diagramja:



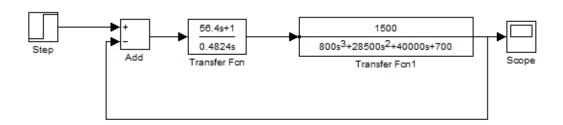
11. ábra: A Szabályozott rendszer közelítő Bode-diagramja

A pontos Bode amplitúdó- és fázisdiagramok a MATLAB programcsomaggal előállíthatóak és ellenőrizhetőek:



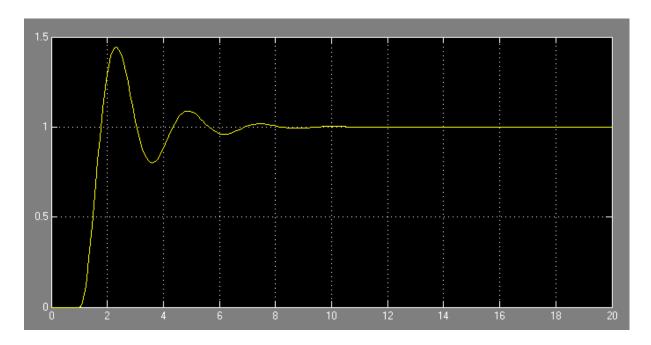
12. ábra: A Bode-diagramok ellenőrzése MATLAB segítségével

Hogy a PI-kompenzációs szabályzás valóban működik, ellenőrzésképpen MATLAB Simulink környezetben megépíthető a szabályozókör modellje:



13. ábra: A rendszer modellje a MATLAB Simulink programban

A rendszer bemenetére egységugrást megadva a 14. ábrán látható, hogy rendszer jól követi a referenciajelet. A szabályzó paraméterei ezek után módosíthatóak a szabályzás minőségi követelményeinek (túllövés, szabályozási idő stb.) figyelembe vételével.



14. ábra: A szabályozott rendszer válasza az egységugrás-referenciajelre

## Az előadás összefoglalása

Ebben az előadásban láthattuk, hogyan tervezhetünk meg kézzel egy egyszerű PI-szabályzót a feltüntetett dinamikai rendszerhez. Fontos kiemelni, hogy a rendszer átviteli függvényének maghatározása csak a szabályozótervezés első, szükséges lépése, így az alapvető fizikai ismeretek elengedhetetlenek a sikeres szabályozótervezéshez. Láthattuk, hogyan kapcsolódnak az elektronikai és mechanikai rendszerek egymáshoz, hogyan határozhatjuk meg a rendszer bemenetének hatását a kimenetre, hogyan áll össze egy, a már korábbi előadásokban is tárgyalt alakú átviteli függvény, és hogyan tervezhetünk PI-szabályozót a levezetett rendszerhez "kézi" módszerekkel. A szabályozótervezésnek természetesen más, kidolgozottabb módszerei is léteznek, melyekről a következő előadásokban lesz szó.

## Ellenőrző kérdések

- 1. A vázolt feladatban hol kapcsolódnak a DC-motor áramkörét és a mechanikai rendszer mozgását leíró egyenletek?
- 2. Milyen közelítésekkel élünk a Bode-diagram kézi megrajzolásakor? Milyen esetekben jelentkeznek nagy hibaértékek a Bode-diagram ilyen módú megrajzolása esetén?
- 3. PI-szabályozótervezés esetén az I tagot miért a legnagyobb időállandójú taghoz igazítjuk? Milyen veszélyeket rejthet az I tag hozzáadása a rendszer stabilitásának szempontjából?
- 4. Hogyan ellenőrizhetjük legegyszerűbben (számítógép nélkül), hogy a vágási körfrekvenciát jól számoltuk-e?
- 5. Hogyan módosulna a fenti szabályozótervezési módszer, ha PI szabályozó helyett PD vagy PID szabályozót terveznénk a rendszerhez? Mi lenne a Bode-diagram "mozgatásának" sorrendje?