ROBOTIRÁNYÍTÁS

5. előadás
A Laplace-transzformáció alkalmazásai, frekvenciatartomány

Dr. habil. Kovács Levente
egyetemi docens

Dr. Haidegger Tamás
egyetemi adjunktus

EKIK
Egyetemi Kutató és Innovációs Központ

ÓBUDAI EGYETEM
Bejczy Antal iRobottechnikai Központ

Élettani Szabályozások Csoport
Óbudai Egyetem

Tartalom

1. A Laplace-transzformáció

A Laplace-transzformációról általában

A Laplace-transzformáció során időtartománybeli (időtől függő) függvényeket operátortartománybeli (komplex frekvenciától függő) függvényekké transzformálunk.

Előnye, hogy az operátortartományban számos, a változókkal és függvényekkel végzendő művelet (deriválás, konvolúció, stb.) leegyszerűsödik.

A transzformáció csak a pozitív időtengelyen értelmezhető, a transzformálandó függvénynek pedig integrálhatónak kell lennie a $t \in [0, \infty)$ intervallumban.

A Laplace-transzformációról általában

A transzformáció formálisan felírva:

$$\boxed{\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt = F(s)} \qquad s = \sigma + j\omega$$

A Laplace-transzformáció tehát a Fourier-transzformációból származtatható:

$$\int_0^{\infty} e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} f(t)\, dt = F(s) \quad \leftrightarrow \quad \int_{\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} f(t)\, dt = F(j\omega)$$

Az időtartományba való visszatérést az inverz Laplace-transzformációval érhetjük el:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\} = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma - j\omega}^{\sigma + j\omega} F(s) e^{st}\, ds = f(t)$$

A Laplace-transzformációról általában

A Laplace-transzformáció fontos tulajdonságai:

Differenciálás: a Laplace-transzformációval a differenciálegyenletek *algebrai egyenletekké* alakíthatók.

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)\right\} = sF(s) - f\left(0^-\right)$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}f(t)\right\} = s^2F(s) - sf\left(0^-\right) - \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)\right|_{t=0}$$

Integrálás:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^\tau f(t)\,\mathrm{d}t\right\} = \frac{1}{s}F(s)$$

A Laplace-transzformációról általában

Linearitás:

$$\mathcal{L}^{-1}\{aF(s)\} = a\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)+F_2(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\}+\mathcal{L}^{-1}\{F_2(s)\}$$

Eltolási tulajdonság:

$$\mathcal{L}\{f(t-T)\} = F(s)e^{-sT}$$

$$\mathcal{L}\{e^{-at}f(t)\} = F(s+a)$$

Konvolúció és határérték

A Lapace-transzformáció két legjelentősebb tétele.

Konvolúciós tétel:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f_1(t) f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\} = F_1(s) F_2(s)$$

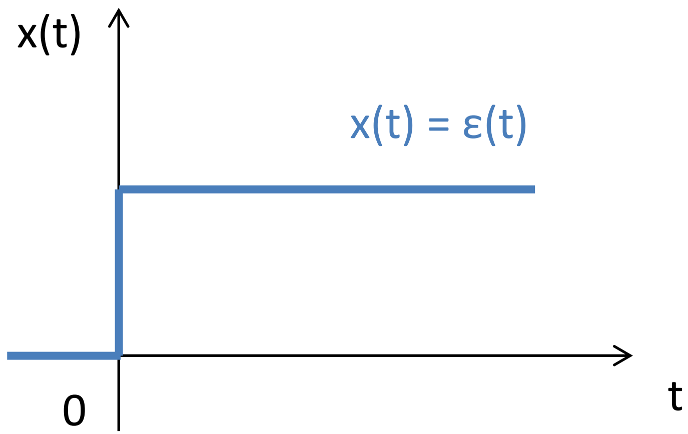
Határérték-tétel:

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

Tipikus vizsgálójelek Laplace-transzformáltja

Egységugrás



$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, ha\ t < 0 \\ 1, ha\ t > 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}\{\varepsilon(t)\} = \int_0^\infty \varepsilon(t) e^{-st} \mathrm{d}t =$$

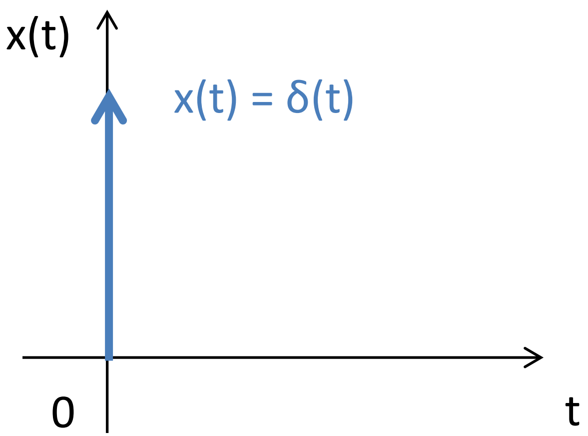
$$= \int_0^\infty 1 \cdot e^{-st} \mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^\infty =$$

$$= -\frac{1}{s} \cdot 0 + \frac{1}{s} \cdot 1 = \frac{1}{s}$$

$$\boxed{\mathcal{L}\{\varepsilon(t)\} = \frac{1}{s}}$$

Tipikus vizsgálójelek Laplace-transzformáltja

Dirac-delta



A Dirac-delta integrálértéke egységnyi, kiterjedése azonban elhanyagolható. Az e^{-st} függvénnyel megszorozva valójában „kiválasztja” a függvény értékét $t = 0$ helyen.

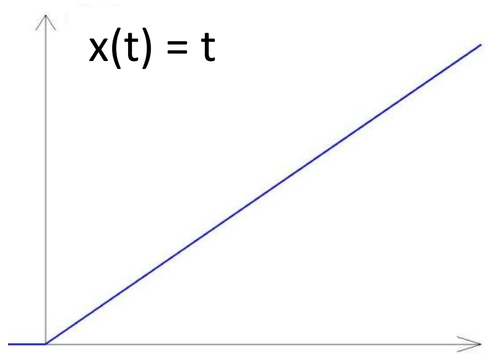
$$e^{-st}\big|_{t=0} = 1$$

$$\delta(t,T) = \begin{cases} \frac{1}{T}, ha\ 0 < t < T \\ 0 \quad egyébként \end{cases}$$

$$\boxed{\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1}$$

Tipikus vizsgálójelek Laplace-transzformáltja

Egység sebességugrás



$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \int_0^\infty t e^{-st} \mathrm{d}t =$$

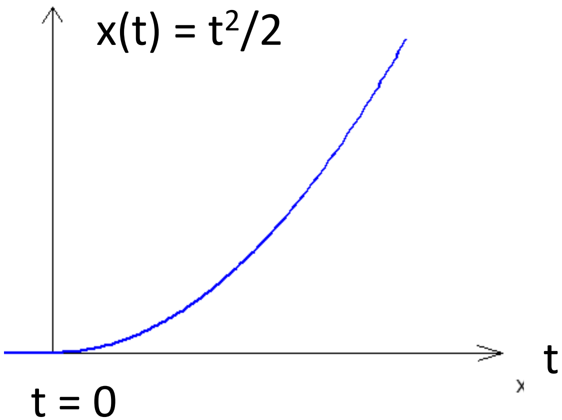
$$= \left[-t \frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^\infty + \int_0^\infty 1 \cdot \frac{1}{s} e^{-st} \mathrm{d}t =$$

$$= 0 - \frac{1}{s^2} \left[e^{-st} \right]_0^\infty = -\frac{1}{s^2}(0-1) = \frac{1}{s^2}$$

$$x(t) = t$$

$$\boxed{\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}}$$

Egység sebességugrás



$$\mathcal{L}\left\{x(t)\right\} = \int_0^\infty t^2 e^{-st}\,\mathrm{d}t =$$

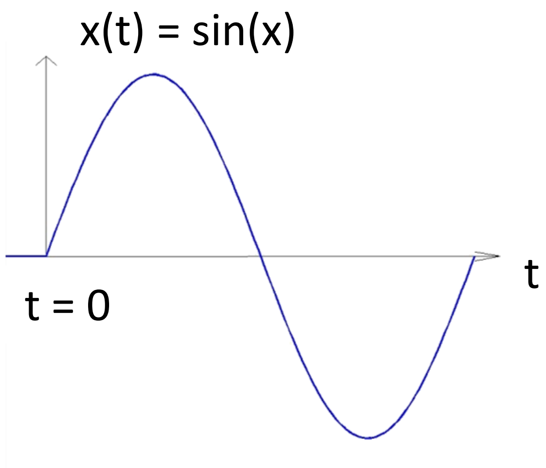
$$= \left[-t^2\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^\infty + \int_0^\infty 2t\cdot\frac{1}{s}e^{-st}\,\mathrm{d}t =$$

$$= 0 - \frac{2}{s}\int_0^\infty t\cdot\frac{1}{s}e^{-st}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{s}\left(\frac{1}{s^2}\right) = \frac{2}{s^3}$$

$$x(t) = t^2$$

$$\boxed{\mathcal{L}\left\{t^2\right\} = \frac{2}{s^3}}$$

Harmonikus gerjesztés



$$x(t) = \sin(\omega t)$$

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \overbrace{\int_0^{\infty} \sin(\omega t) e^{-st} \mathrm{d}t}^{\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\}} =$$

$$= \left[-\frac{1}{\omega} \cos(\omega t) e^{-st} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{1}{\omega} \cos(\omega t) \cdot s e^{-st} \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{\omega} - \frac{s}{\omega} \left[\frac{1}{\omega} \sin(\omega t) e^{-st} \right]_0^{\infty} - \frac{s^2}{\omega^2} \underbrace{\int_0^{\infty} \sin(\omega t) \cdot e^{-st} \mathrm{d}t}_{\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\}}$$

$$\boxed{\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} = \frac{1}{\omega} - \frac{s^2}{\omega^2} \mathcal{L}\{\sin(\omega t)\}}$$

$$\boxed{\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}}$$

Nevezetes függvények Laplace-transzformáltjai

Időfüggvény	Laplace-transzformált
$F(t) \quad t>0$	$F(s)$
$\delta(t)$	1
$\delta(t-\tau)$	$e^{-s\tau}$
$1(t)$	$\frac{1}{s}$
$1(t-\tau)$	$\frac{1}{s}e^{-s\tau}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$e^{-a \cdot t}$	$\frac{1}{a+s}$
$\frac{1}{T}e^{-t/T}$	$\frac{1}{1+Ts}$
$1-e^{-t/T}$	$\frac{1}{s(1+Ts)}$

Nevezetes függvények Laplace-transzformáltjai

Időfüggvény	Laplace-transzformált
$\frac{1}{T^2} t e^{-t/T}$	$\frac{1}{(1+Ts)^2}$
$\frac{1}{T_1 - T_2}\left(e^{-t/T_1} - e^{-t/T_2}\right)$	$\frac{1}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)}$
$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{s^{n+1}}$
$\sin\alpha t$	$\frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}$
$\cos\alpha t$	$\frac{s}{s^2+\alpha^2}$
$-\frac{1}{T}\mathrm{sh}\left(\frac{t}{T}\right)$	$\frac{1}{1-T^2 s^2}$
$\frac{1}{T^3}(T-t)e^{-t/T}$	$\frac{s}{(1+Ts)^2}$
$T\left(e^{-t/T} + \frac{t}{T} - 1\right)$	$\frac{1}{s^2(1+Ts)}$
$1 - \frac{T+t}{t} e^{-t/T}$	$\frac{1}{s(1+Ts)^2}$

2. Stabilitás és a frekvenciatartomány

2.1. A stabilitás alaptétele

2.2. A Hurwitz-kritérium

2.3. Frekvenciatartomány

A stabilitás alaptétele

Egy zárt hatásláncú, lineáris dinamikus rendszer átviteli függvénye felírható a következő formában:

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{W_0(s)}{1 + W_0(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$ a rendszer *karakterisztikus polinomja*

A $a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$ egyenlet megoldásai a rendszer pólusai: $p_i,\ i = 1 \ldots n$

A stabilitás alaptétele

A stabilitás feltétele, hogy a rendszer pólusainak valós része negatív legyen, azaz

$$\mathrm{Re}\{p_i\} < 0,\ i = 1 \dots n$$

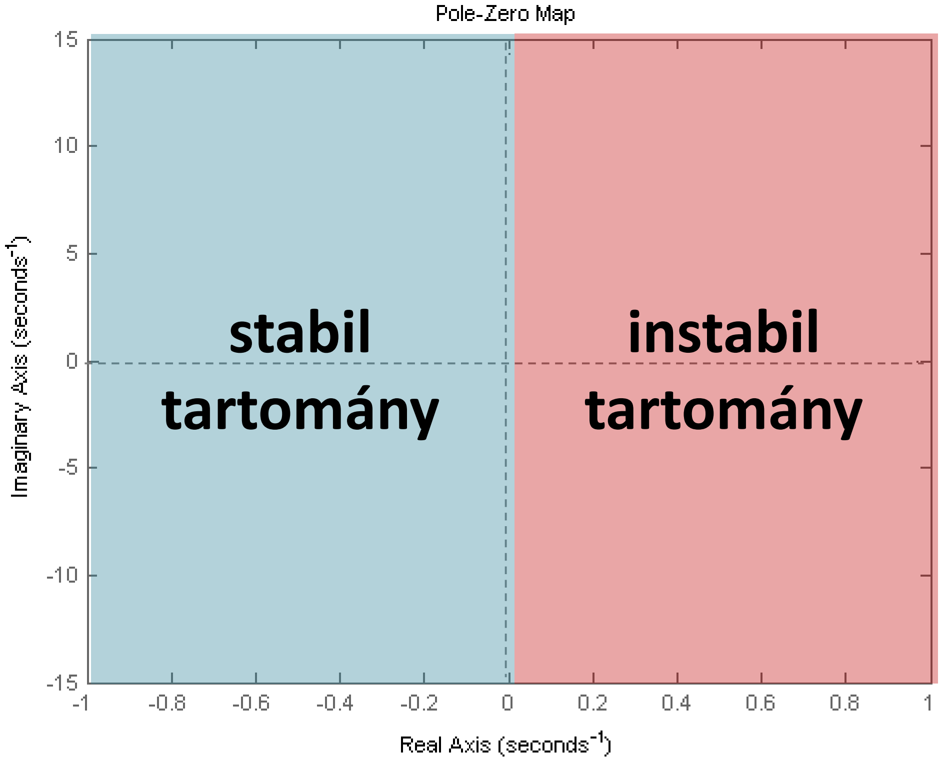
Megjegyzés

$\mathrm{Re}\{p_i\} = 0$ esetén a rendszer a stabilitás határára kerül. Ilyenek például a csillapítással nem rendelkező rendszerek.

A stabilitás alaptétele

Stabilitás alaptétele: minden pólusnak negatív valós részűnek kell lennie

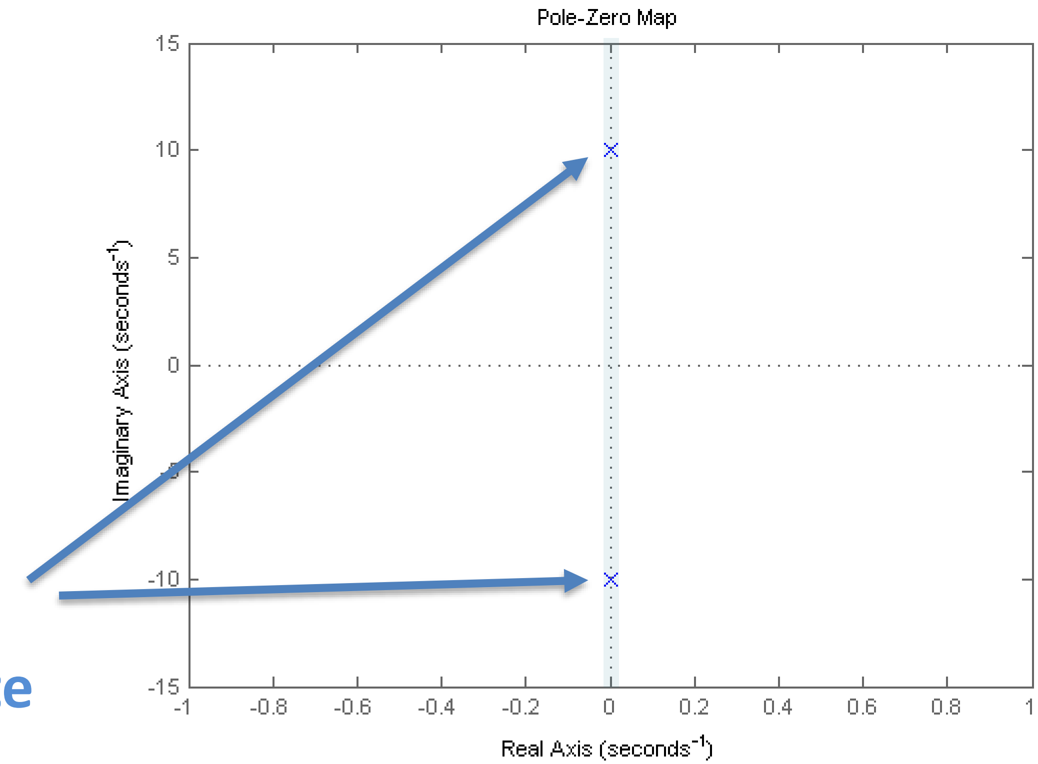
$Re\{p_i\}<0$



A stabilitás alaptétele

Stabilitás alaptétele:
$Re\{p_i\}<0$

minden pólusnak negatív valós részűnek kell lennie



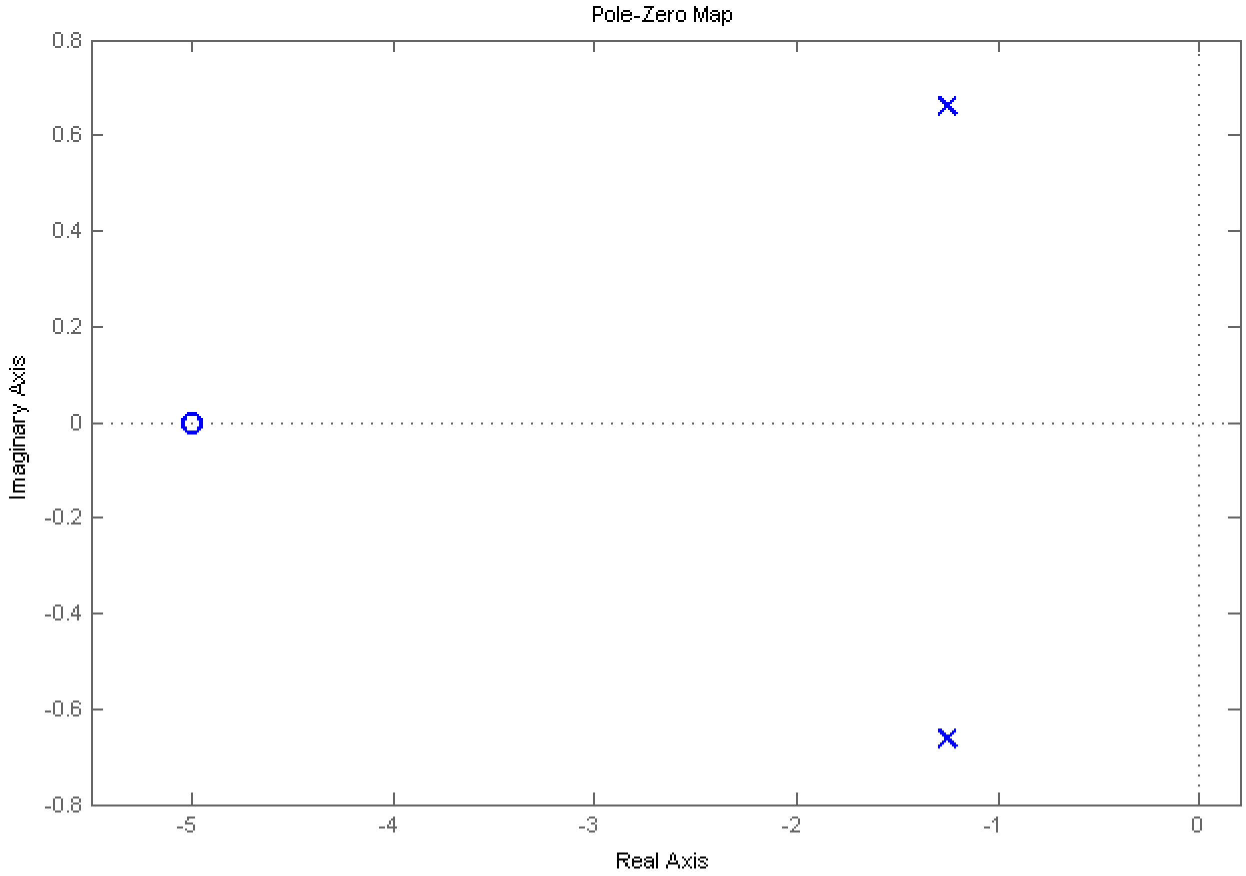
stabilitás határhelyzete

A stabilitás alaptétele

stabil rendszer

× : pólus

O : zérus

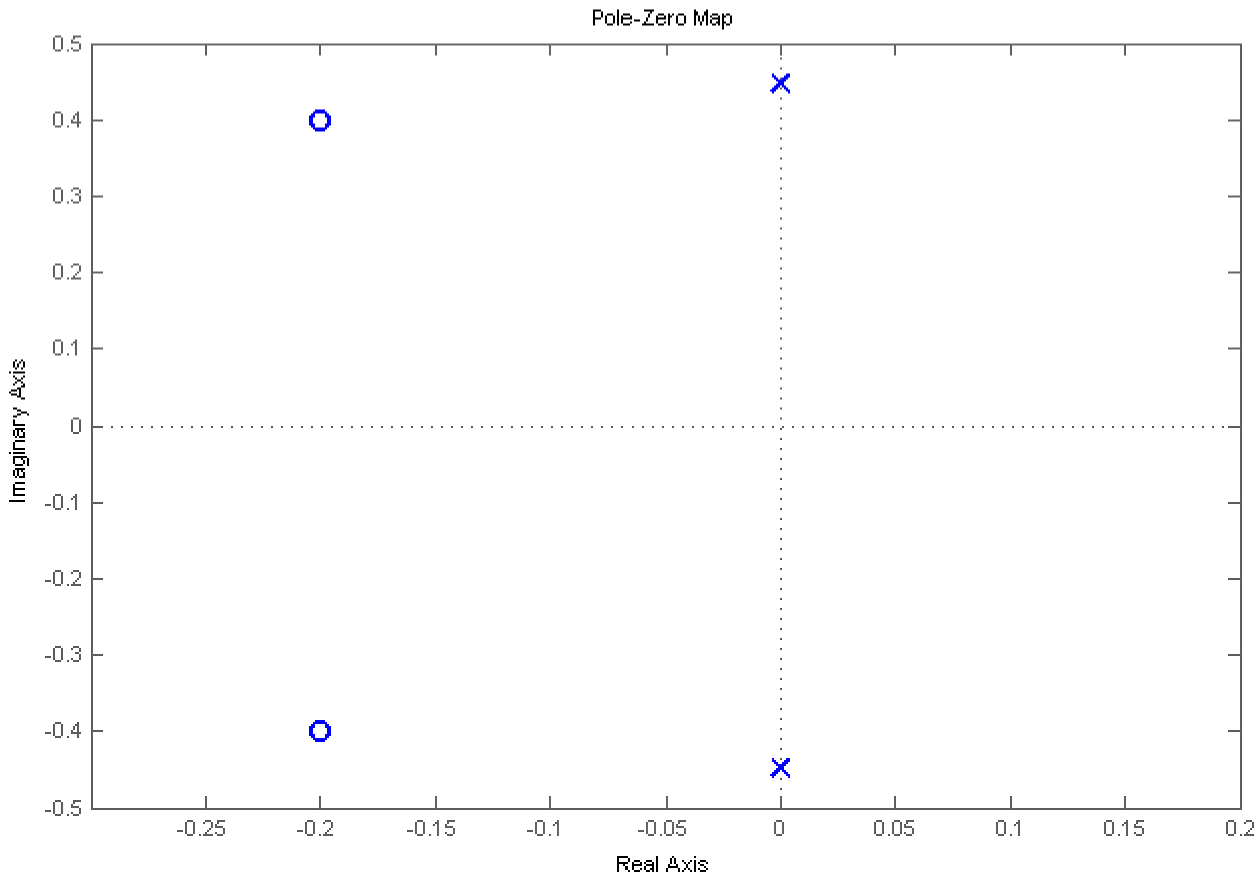


A stabilitás alaptétele

stabilitás határán lévő rendszer

× : pólus

O : zérus

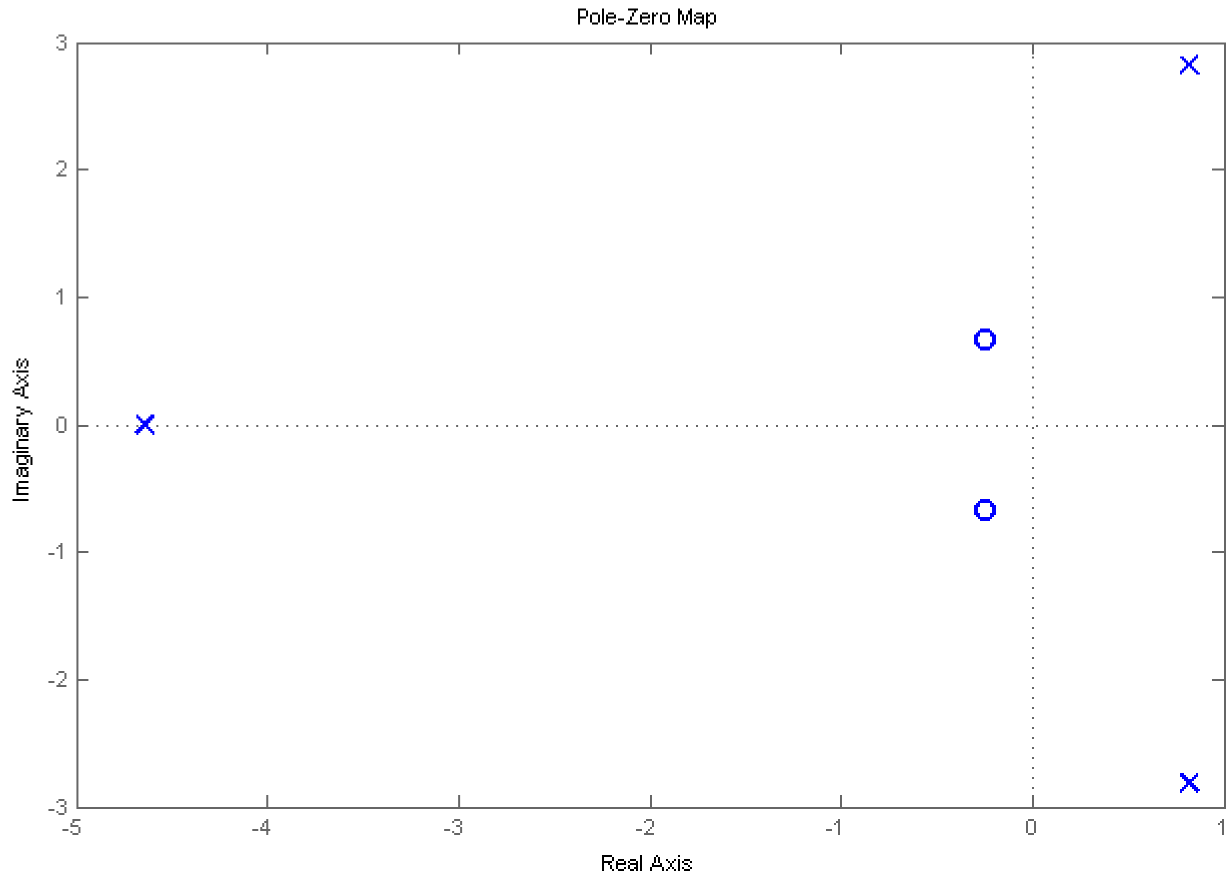


A stabilitás alaptétele

instabil rendszer

× : pólus

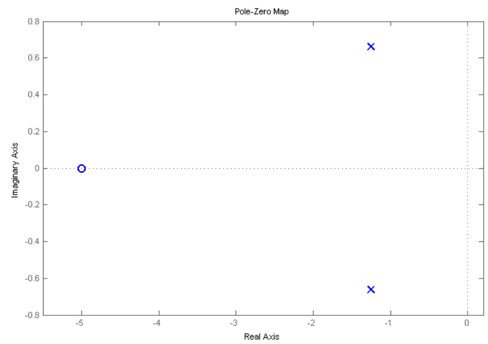
O : zérus

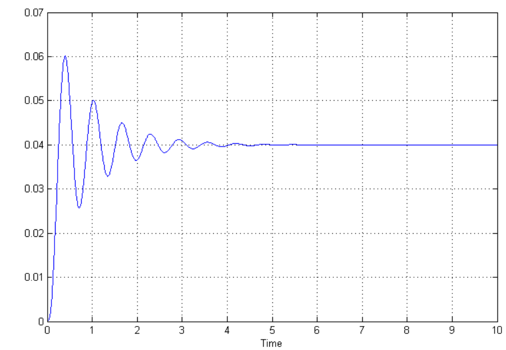


A stabilitás alaptétele

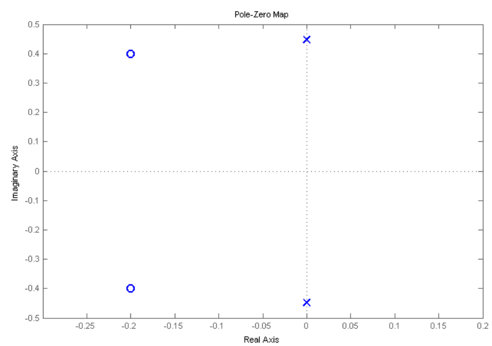
Az ugrásválasz és a stabilitás kapcsolata

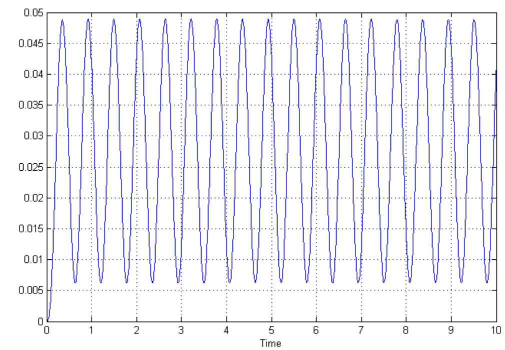
stabil



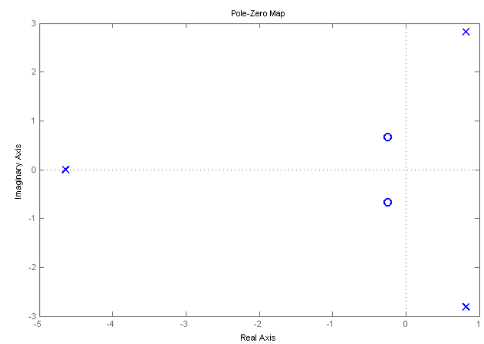


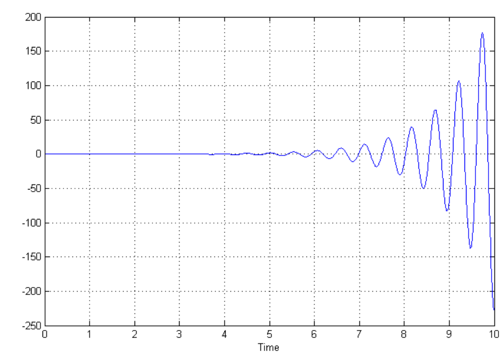
stabilitás határán





instabil





A Hurwitz-kritérium

A Hurwitz-kritérium telesülése a lineáris rendszerek stabilitásának szükséges és elégséges feltétele.
A szabályozástechnikában zárt szabályzási rendszerekre alkalmazzák a rendszer átviteli függvényének ismeretében:

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{W_0(s)}{1 + W_0(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$ a rendszer
karakterisztikus polinomja

A Hurwitz-kritérium

A rendszer stabilitásához a következő kritériumoknak *együttesen* kell teljesülniük:

$$a_i > 0 \qquad i = 1 \dots n$$
$$H_i > 0 \qquad i = 1 \dots n$$

H_i a H Hurwitz-mátrixhoz tartozó, főátló menti aldeterminánsokat jelöli, melyek a következőképpen számítandók:

H_1 H_2 H_3

$$H = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

$$H_1 = a_{n-1}$$
$$H_2 = a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}$$
$$H_3 = a_{n-1}(a_{n-2}a_{n-3} - a_{n-1}a_{n-4}) - \\ -a_n(a_{n-3}^2 - a_{n-1}a_{n-5})$$
$$H_4 = \cdots$$

A frekvenciatartomány

A frekvenciatartomány bevezetésének célja a rendszer átfogóbb értelmezése, stabilitásvizsgálat.

Lényege, hogy a Laplace-transzformációban használt *s* operátort komplex frekvenciával helyettesítjük:

$$s = j\omega$$

Az áttérés eredményeképp az átviteli függvény komplex szám lesz, melyet a komplex síkon annak *nagyságával* (abszolút érték) és *irányával* jellemezhetünk, ω körfrekvencia függvényében.

A frekvenciatartomány

$$W(s) \to W(j\omega)$$

$$W(j\omega) = \mathrm{Re}\{W(j\omega)\} + j\mathrm{Im}\{W(j\omega)\}$$

A komplex síkon a következőképpen írható fel a függvény:

$$W(j\omega) = |W(j\omega)|e^{j\arg\{W(j\omega)\}}$$

$$|W(j\omega)| = \sqrt{\mathrm{Re}\{W(j\omega)\}^2 + \mathrm{Im}\{W(j\omega)\}^2}$$

$$\arg\{W(j\omega)\} = \arctan\frac{\mathrm{Im}\{W(j\omega)\}}{\mathrm{Re}\{W(j\omega)\}}$$

Videó

[Laplace transzformáció]

Köszönöm a figyelmet!

Dr. habil. Kovács Levente
egyetemi docens

kovacs.levente@nik.uni-obuda.hu

Dr. Haidegger Tamás
egyetemi adjunktus

haidegger@irob.uni-obuda.hu

EKIK Egyetemi Kutató és Innovációs Központ

K-MOOC

Óbudai Egyetem Bejczy Antal iRobottechnikai Központ

Élettani Szabályozások Csoport
Óbudai Egyetem