

Számítógépes Grafika

Hajder L. és Baráth D.
hajdere@inf.elte.hu

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Informatikai Kar

2019/2020. I. félév

Tartalom

- 1 Vetítési transzformációk
 - Párhuzamos (merőleges) vetítés
 - Skálázottan párhuzamos vetítés
 - Perspektív vetítés
 - Homogén osztás
 - Perspektív transzformáció alakja
 - Homogén osztás hatása
 - Speciális esetek
- 2 Transzformációk összehasonlítása

Tartalom

- 1 Vetítési transzformációk
 - Párhuzamos (merőleges) vetítés
 - Skálázottan párhuzamos vetítés
 - Perspektív vetítés
 - Homogén osztás
 - Perspektív transzformáció alakja
 - Homogén osztás hatása
 - Speciális esetek
- 2 Transzformációk összehasonlítása

Motiváció

- A színterünk képét akarjuk előállítani: vetíteni egy síkra
- Az ember által látott képet nem lehet előállítani affin transzformációk segítségével. A "távolodó" párhuzamosok összetartanak, nem maradnak párhuzamosak.
- Ez a látvány előállítható *központi vetítéssel*. Ez a transzformáció a *homogén térben* lineáris transzformáció.
- Az affin transzformációk nem "bántották" az ideális elemeket, a fentiekhez azonban ez "kell"

Általános eset

Ha egy *homogén* transzformációs mátrix utolsó sora nem $[0, 0, 0, 1]$, akkor az olyan *homogén lineáris transzformáció*, ami az eukleidészi térnek nem lineáris transzformációja.

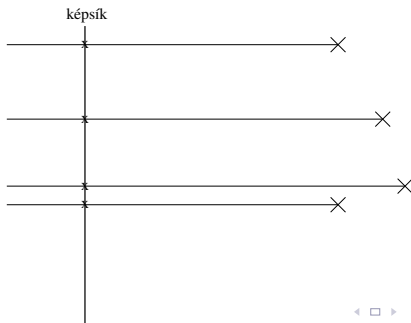
Tartalom

- 1 Vetítési transzformációk
 - Párhuzamos (merőleges) vetítés
 - Skálázottan párhuzamos vetítés
 - Perspektív vetítés
 - Homogén osztás
 - Perspektív transzformáció alakja
 - Homogén osztás hatása
 - Speciális esetek
- 2 Transzformációk összehasonlítása

Párhuzamos (merőleges) vetítés

- A mátrix ami megadja egyszerű, például az XY síkra való vetítés

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$



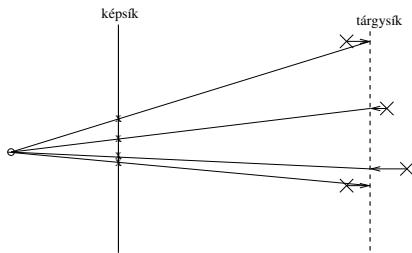
Tartalom

- 1 Vetítési transzformációk
 - Párhuzamos (merőleges) vetítés
 - Skálázottan párhuzamos vetítés
 - Perspektív vetítés
 - Homogén osztás
 - Perspektív transzformáció alakja
 - Homogén osztás hatása
 - Speciális esetek
- 2 Transzformációk összehasonlítása

Skálázottan párhuzamos vetítés

- A párhuzamos vetítéssel majdnem megegyezik.
- A mátrix ami megadja egyszerű, például az XY síkra való vetítés

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$



Tartalom

- 1 Vetítési transzformációk
 - Párhuzamos (merőleges) vetítés
 - Skálázottan párhuzamos vetítés
 - **Perspektív vetítés**
 - Homogén osztás
 - Perspektív transzformáció alakja
 - Homogén osztás hatása
 - Speciális esetek
- 2 Transzformációk összehasonlítása

Ismétlés: homogén osztás

- Mivel egy \mathbf{T} "valódi" projektív transzformáció utolsó sora nem $[0, 0, 0, 1]^T$, ezért

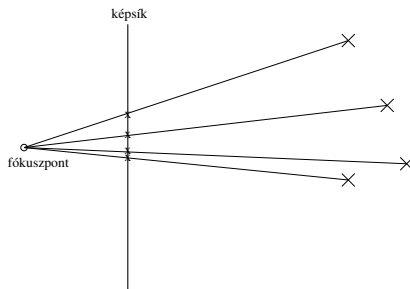
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

transzformáció után, $w \neq 1$ általános esetben.

- Ha ezt a pontot az eukleidészi térbe szeretnénk átvinni (mert pl. meg akarjuk jeleníteni), akkor végig kell osztanunk w -vel.
- (Persze csak akkor, ha $w \neq 0$)
- Ezt nevezzünk homogén osztásnak.
- Értelmezhető alacsonyabb dimenzióban is.

Perspektív transzformáció

- Fókuszpontba gyűjti a sugarakat.
- Fókusztávolság: fókuszpont és a képsík távolsága
- Hívják projektív (vetítő) transzformációnak és középpontos vetítésnek is.

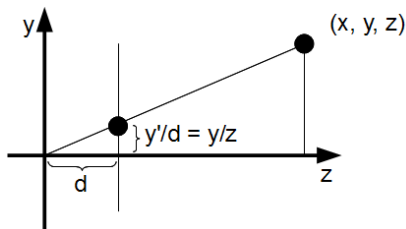


Középpontos vetítés

- Perspektív transzformáció képlete:

$$x' = d \frac{x}{z}$$
$$y' = d \frac{y}{z}$$

- d neve: fókusztávolság



Perspektív transzformáció 2D-s homogén transzformációval

- Perspektív transzformáció alakja:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ \frac{Z}{d} \end{bmatrix}$$

- Homogén osztást elvégezve:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ \frac{Z}{d} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} d \frac{X}{Z} \\ d \frac{Y}{Z} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Perspektív transzformáció 3D-s homogén transzformációval

- Perspektív transzformáció módosul:

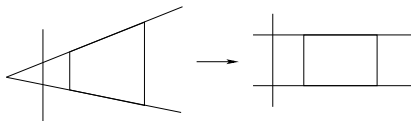
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ \frac{Z}{d} \end{bmatrix}$$

- Homogén osztást elvégezve:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ \frac{Z}{d} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} d \frac{X}{Z} \\ d \frac{Y}{Z} \\ d \\ 1 \end{bmatrix}$$

Homogén osztás hatása

- A homogén osztás a vetítő egyeneseken levő pontokat ugyanabba a képpontba viszi.
- Felfogható úgy, hogy a perspektív transzformációból párhuzamos vetítést csinál.



Speciális eset: pontok a $Z = 0$ síkon

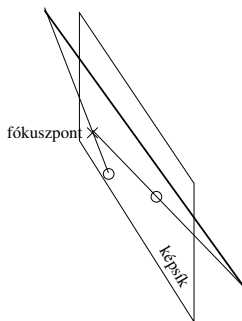
- Homogén osztás:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z/d \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} d \frac{X}{Z} \\ d \frac{Y}{Z} \\ 1 \end{bmatrix}$$

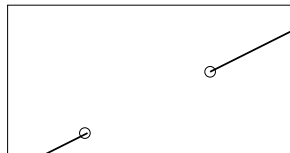
- $Z = 0$ esetén nullával osztunk: pont a végtelenben
- A végtelennek iránya van: (X, Y) .

Speciális eset: $Z = 0$ síkot metsző egyenes

- Eredmény: egyenes (szakasz) kifordul



Kép a vetítés után:

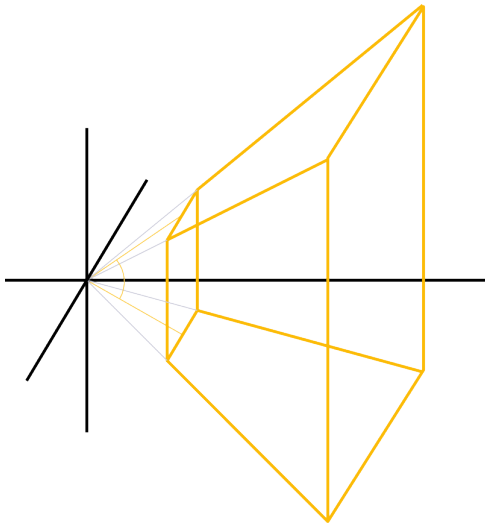


- Következmény:
 - $Z = 0$ síkkal metszést figyelni kell vagy
 - Ki kell dobni ezeket az éleket.

Perspektív transzformáció

- Központi vetítést valósít meg.
- Az origóból a z tengely mentén "nézünk" a térre.
- A látótérnek egy csongagúla felel meg.
- A transzformáció a szem pozícióban találkozó vetítő egyenesekből párhuzamosokat csinál.
- Paraméterei:
 - a gúla függőleges nyílásszöge (d fókusztávolság szabályozza)
 - a gúla alapjának az oldalainak az aránya,
 - a közeli vágósík távolsága
 - a távoli vágósík távolsága
 - A távoli vágósíkra a sok tárgy miatt van szükség (számítások csökkentése).

Láthatósági gúla



Összegzés: transzformációs mátrixok

$$\left[\begin{array}{c|c} \begin{array}{c} 3 \times 3 \\ \text{lineáris rész} \end{array} & \begin{array}{c} \text{eltolás} \end{array} \\ \hline \text{projektív rész} & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} x \\ y \\ z \\ \hline 1 \end{array} \right]$$

Megjegyzések

- Mi történik, ha a vektorunk negyedik koordinátája nulla (vagyis ha vektort azonosít a számnégyes)?
- Az eltolás rész nem hat rá!

Megjegyzések

- Figyeljünk: nem mindenhol szoroznak jobbról a vektorokkal, balról is lehet:

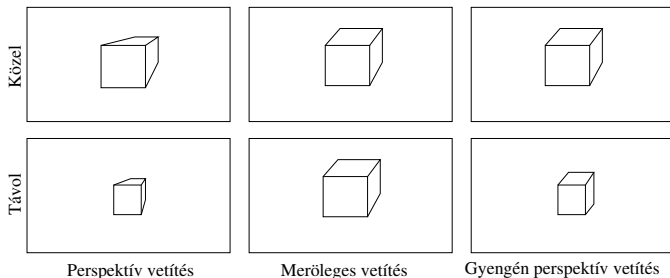
$$\begin{bmatrix} x, y, z & | & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{array}{c|c} \mathbf{A}^T: 3 \times 3 & \text{projektív} \\ \hline \text{eltolás rész} & 1 \end{array} \end{bmatrix}$$

Tartalom

- 1 Vetítési transzformációk
 - Párhuzamos (merőleges) vetítés
 - Skálázottan párhuzamos vetítés
 - Perspektív vetítés
 - Homogén osztás
 - Perspektív transzformáció alakja
 - Homogén osztás hatása
 - Speciális esetek
- 2 Transzformációk összehasonlítása

Transzformációk összehasonlítása

- Véggkövetkeztetés: a perspektív transzformáció "verhetetlen".



- Megjegyzés: valódi kameráknak vannak torzításai is