

Számítógépes Grafika

Hajder Levente és Baráth Dániel
hajder@inf.elte.hu

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Informatikai Kar

2019/2020. I. félév

Tartalom

- 1 Modellezés feladata
- 2 Koordinátarendszerek
 - Descartes-koordinátarendszer
 - Polárkoordináták
 - Baricentrikus koordináták
 - Homogén koordináta
- 3 Affin transzformációk
 - Eltolás
 - Elforgatás
 - Tükrözés
 - Skálázás
 - Nyírás

Modellezés feladata

- Geometriai modellezés feladata
 - A világunkat modellezni kell a térben.
 - Valamilyen koordinátarendszer szükséges
 - Mozgó (dinamikus) tárgyak esetén a térbeli mozgást le kell írni.
 - Mozognak
 - Pörögnek-forognak
 - Kicsinyednek-nagyobbodnak
- Vetítés feladata
 - A háromdimenziós világot levetíteni a kétdimenziósképsíkra.
 - Képeszerű képet adni.

Tartalom

- 1 Modellezés feladata
- 2 **Koordinátarendszerek**
 - Descartes-koordinátarendszer
 - Polárkoordináták
 - Baricentrikus koordináták
 - Homogén koordináta
- 3 Affin transzformációk
 - Eltolás
 - Elforgatás
 - Tükrözés
 - Skálázás
 - Nyírás

Descartes-koordináta-rendszer

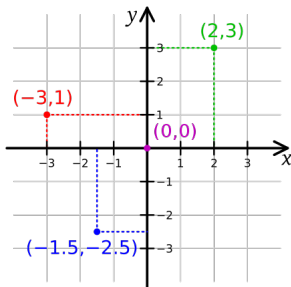
- Descartes, 1637.: *Értekezés a módszerről* (Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences)
- Legtöbbször ezzel találkozunk, ez a legegyszerűbb és legelterjedtebb megadási mód
- A dimenzióknak megfelelő számú koordinátával írjuk le a pontokat

Descartes-koordináta-rendszer

- Az euklidészi sík minden véges pontjához egyértelműen hozzárendel egy rendezett, valós (x, y) számpárt, ahol az x az abszcissza és y az ordináta
- Ehhez válasszunk két, egymásra merőleges, irányított egyenest, az OX (x) és OY (y) koordinátatengelyeket, amelyek egymást az O pontban, az origóban metszik. Ekkor a P pont x és y koordinátái a P pont OX és OY irányított egyenesektől vett előjeles távolsága
- Három dimenzióban hasonló: 3 koordináta, 3 egymásra merőleges koordináta tengely

Geometriai értelmezés

- *Szemléletesebben:* A $P(a,b,c)$ az a pont, amit az origóból az x tengely mentén a egységet lépve, majd az y tengely mentén b egységet lépve, végül a z tengely mentén c egységet lépve kapunk

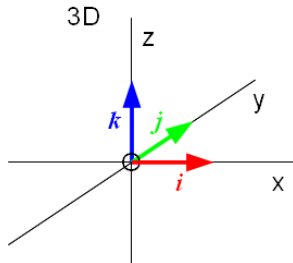
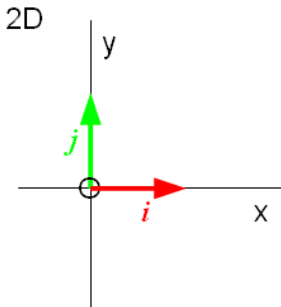


Geometriai értelmezés

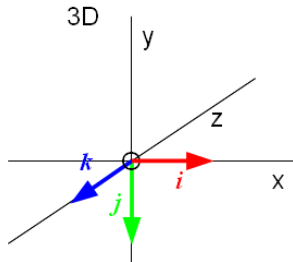
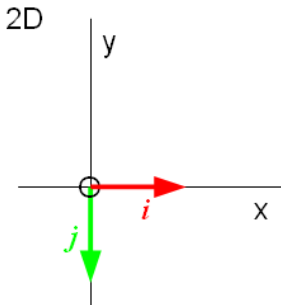
- Vagyis a fenti értelmezés szerint, felhasználva az egységnyi hosszú, koordinátatengelyek irányába mutató \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} bázisvektorokat, az $[a, b, c]^T$ koordináták a következő pontot azonosítják:

$$\begin{aligned} P &= O + a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k} \\ &= O + a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Sodrásirány - jobbsodrású rendszer



Sodrásirány - balsodrású rendszer

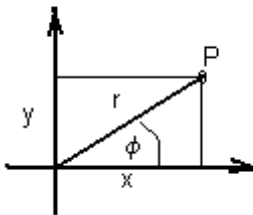


Tartalom

- 1 Modellezés feladata
- 2 Koordinátarendszerek**
 - Descartes-koordinátarendszer
 - **Polárkoordináták**
 - Baricentrikus koordináták
 - Homogén koordináta
- 3 Affin transzformációk
 - Eltolás
 - Elforgatás
 - Tükrözés
 - Skálázás
 - Nyírás

Síkbeli polárkoordináta-rendszer

- Egy O kezdőpontból (referenciapontból) induló félegyenes (polártengely) határozza meg.
- Egy P pont helyét két adat azonosítja: (r, ϕ)
 - $r \geq 0$: a P pont O -tól vett távolsága
 - $\phi \in [0, 2\pi)$: az O -n és P -n átmenő egyenes polártengellyel bezárt szöge
- $r = 0$ esetén a felírás nem egyértelmű



Konverziók

- Polár \rightarrow Descartes:

$$x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi$$

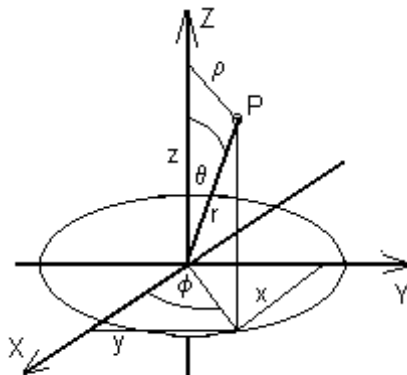
- Descartes \rightarrow polár:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\phi = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x}, & x > 0 \wedge y \geq 0 \\ \arctan \frac{y}{x} + 2\pi, & x > 0 \wedge y < 0 \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi, & x < 0 \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0 \wedge y > 0 \\ \frac{3\pi}{2}, & x = 0 \wedge y < 0 \\ ???, & x = 0 \wedge y = 0 \end{cases}$$

- $\arctan()$ nem egyértelmű (π – *periodikus*) ezért programozásban az $\phi = \text{atan2}(y, x)$ függvényt használjuk

Gömbi koordináták



Gömbi koordináták

- Térbeli polár-koordináták; egy alapsík (és annak PKR-e) illetve egy arra merőleges "Z tengely"
- Egy térbeli P pontot három adat reprezentál: (r, ϕ, θ)
 - r, ϕ : a P pont alapsíkra vett vetületének polárkoordinátái
 - $\theta \in [0, \pi]$: az O és P-t összekötő egyenes Z tengellyel bezárt szöge

Konverziók

- A síkban látott esethez hasonló feltételek mellett:
- Gömbi \rightarrow Descartes:

$$x = r \cos \phi \sin \theta, \quad y = r \sin \phi \sin \theta, \quad z = r \cos \theta$$

- Descartes \rightarrow gömbi:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\phi = \text{atan2}(y, x)$$

$$\theta = \arccos \frac{z}{r}, \quad r \neq 0$$

- Az $x=y=z=0$ eset itt is többértelmű!

Tartalom

- 1 Modellezés feladata
- 2 Koordináta-rendszerek**
 - Descartes-koordináta-rendszer
 - Polárkoordináták
 - Baricentrikus koordináták**
 - Homogén koordináta
- 3 Affin transzformációk
 - Eltolás
 - Elforgatás
 - Tükrözés
 - Skálázás
 - Nyírás

Baricentrikus koordináták

- August Ferdinand Möbius [1827]
- Motiváció: sokszor egy konkrét, véges része érdekes csak számunkra a térnek. Ennek a Descartes-félénél egy "kiegyensúlyozottabb" reprezentációját keressük.
- A baricentrikus koordináták nem függenek egy pont önkényes origónak választásától

Tömegközéppont

- Mechanikai analógia: pontrendszer tömegközéppontja
- Legyen $n + 1$ pontunk és helyezzünk minden P_i pontba $m_i \in \mathbb{R}$ súlyt. Ekkor a tömegközéppont:

$$M = \frac{1}{\sum_{i=0}^n m_i} \sum_{i=0}^n m_i P_i$$

Baricentrikus koordináták

- Ha \mathbb{E}^n -ben az A_0, \dots, A_n pontok kifeszítik a teret (nem egy $n - 1$ dimenziós altérbe esnek), akkor a tér bármely X pontjához találhatóak $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ valós számok úgy, hogy

$$X = \sum_{i=0}^n \lambda_i A_i,$$

ahol a λ_i baricentrikus koordinátákra teljesül, hogy

$$\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1.$$

Megjegyzés

- Ha $\forall i$ -re $\lambda_i \geq 0$, akkor konvex kombinációról beszélünk és a pontok konvex burkába esnek a kombináció eredményei.
- Az affin transzformációk nem változtatják meg a baricentrikus koordinátákat
- *Homogén jellegű* koordináták: egy $h \neq 0$ számmal megszorozva a koordinátákat ugyanazt a pontot kapjuk.

Tartalom

- 1 Modellezés feladata
- 2 Koordinátarendszerek**
 - Descartes-koordinátarendszer
 - Polárkoordináták
 - Baricentrikus koordináták
 - **Homogén koordináta**
- 3 Affin transzformációk
 - Eltolás
 - Elforgatás
 - Tükrözés
 - Skálázás
 - Nyírás

Homogén koordináták

- Az euklideszi tér minden pontjához hozzárendelünk egy számnégyest, *homogén koordinátákat*: $P_{hom} = [x, y, z, w]^T$
- Átváltás $P_{real} = [x', y', z']$ Descartes-i és $P_{hom} = [x, y, z, w]^T$ homogén koordinátákkal megadott pontok között:
 - "Odafelé:" $x' = x/w$, $y' = y/w$, és $z' = z/w$
 - "Visszafelé:" $x = hx'$, $y = hy'$, $z = hz'$, és $w = h$, ahol $h \in \mathbb{R}$
- A megfeleltetés többértelmű, hiszen h értéke tetszőleges lehet (zérust kivéve): egy valós koordináta-hoz végtelen sok homogén koordináták tartoznak.

Affin transzformációk

- Lineáris transzformációk 4×4 -es mátrixszal leírhatóak
 - A transzformációkat $P = [x, y, z, 1]$ alakú pontokon végezzük
 - $P' = TP$ alakban kapjuk az eredményt
- Transzformációk típusai:
 - Egybevágósági transzformációk
 - Eltolás (T_{elt})
 - Elforgatás (T_{forg})
 - Tükrözés (T_{tukor})
 - Hasonlósági transzformációk
 - Skálázás (T_s)
 - Egyéb transzformációk
 - Nyírás (T_{ny})
 - A transzformációk egymás után elvégezhetőek, ebben az esetben (jobbról balra haladva) szorzatot kell felírni. Például:
$$T = T_{forg1} T_s T_{forg2} T_{elt1} T_{ny} T_{s2}$$

Tartalom

- 1 Modellezés feladata
- 2 Koordináta-rendszerek
 - Descartes-koordináta-rendszer
 - Polárkoordináták
 - Baricentrikus koordináták
 - Homogén koordináta
- 3 Affin transzformációk
 - **Eltolás**
 - Elforgatás
 - Tükrözés
 - Skálázás
 - Nyírás

Eltolás

- $d = [d_x, d_y, d_z]$ vektorral való eltolást valósít meg

- Alakja $T_{elt} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

- Az eredmény vektor $P' = T_{elt}P$ hossza megegyezik az eredeti P vektor hosszával $\rightarrow T_{elt}$ egybevágósági transzformáció

Tartalom

- 1 Modellezés feladata
- 2 Koordináta rendszerek
 - Descartes-koordináta rendszer
 - Polárkoordináták
 - Baricentrikus koordináták
 - Homogén koordináta
- 3 Affin transzformációk**
 - Eltolás
 - Elforgatás**
 - Tükrözés
 - Skálázás
 - Nyírás

Elforgatás

- X , Y , Z tengely körüli elforgatás szögét jelöljük rendre α -val, β -val és γ -val.
- A forgatási mátrixok alakjai:

$$T_{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$T_{\beta} = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ és}$$

Elforgatás

- Továbbá:

$$T_\gamma = \begin{bmatrix} \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) & 0 & 0 \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- A teljes 3D-s forgatás a három forgatás szorzataként adható meg: $T_{forg} = T_\alpha T_\beta T_\gamma$
- Az eredmény vektor $P' = T_{forg}P$ hossza megegyezik az eredeti P vektor hosszával $\rightarrow T_{forg}$ egybevágósági transzformáció

Tartalom

- 1 Modellezés feladata
- 2 Koordináta rendszerek
 - Descartes-koordináta rendszer
 - Polárkoordináták
 - Baricentrikus koordináták
 - Homogén koordináta
- 3 Affin transzformációk**
 - Eltolás
 - Elforgatás
 - Tükrözés**
 - Skálázás
 - Nyírás

Tükrözés

- $d = [d_x, d_y, d_z]$ vektorral való eltolást valósít meg

- Alakja (tükrözés az X tengelyre) $T_{tukor} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

- Az eredmény vektor $P' = T_{tukor}P$ hossza megegyezik az eredeti P vektor hosszával, ezért T_{tukor} egybevágósági transzformáció
- A tükrözés a többi tengely esetében is lehetséges, de az X tengelyre tükrözéssel + forgatással tetszőleges forgatás + tükrözés helyettesíthető.

Tartalom

- 1 Modellezés feladata
- 2 Koordinátarendszerek
 - Descartes-koordinátarendszer
 - Polárkoordináták
 - Baricentrikus koordináták
 - Homogén koordináta
- 3 Affin transzformációk**
 - Eltolás
 - Elforgatás
 - Tükrözés
 - Skálázás**
 - Nyírás

Skálázás

- A skálázás a P vektor hosszát nyújtja meg s -szeresére

- Alakja $T_s = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

- A transzformáció a méretet megváltoztatja, de a szögeket nem \rightarrow hasonlósági transzformáció

Skálázás

- Koordinátánként lehet saját skálát is alkalmazni:

- $$T_s = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- A hasonlósági tulajdonságot ezzel elveszítjük

Tartalom

- 1 Modellezés feladata
- 2 Koordinátarendszerek
 - Descartes-koordinátarendszer
 - Polárkoordináták
 - Baricentrikus koordináták
 - Homogén koordináta
- 3 Affin transzformációk**
 - Eltolás
 - Elforgatás
 - Tükrözés
 - Skálázás
 - **Nyírás**

Nyírás

- A nyírás a tárgy szögeit is megváltoztatja

- Alakja $T_{ny} = \begin{bmatrix} 1 & a & b & 0 \\ 0 & 1 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$