Számítógépes Grafika

Hajder Levente és Baráth Dániel
hajder@inf.elte.hu

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Informatikai Kar

2019/2020. I. félév

Tartalom

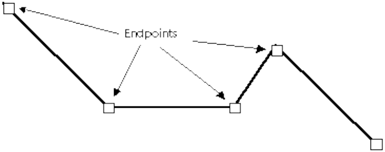
Geometriai modellezés

- Görbéket, felületeket számatalan módszerrel le tudunk írni
  - Explicit egyenlet
  - Implicit egyenlet
  - Parametrikus megadás
- A leírható görbék felületek köre korlátos, leírás sokszor nehézkes.
- Cél: általános görbét felületet matematikailag leírni.

Tartalom

Törtvonal (polyline)

- Az elv egyszerű:
  - Adottak a görbe pontjai
  - Egyenes szakaszokkal összekötjük
- Meglehetősen ”szögletes” érzést kelt



Törtvonal (polyline)

- A görbe matematikai összefüggésekkel is megadható.
- t paraméter $[0, 1]$ intervallumba esik.
- Pontok számát N-nel jelöljük.

$$\mathbf{poly(t)} = \sum_{i=1}^{N-1} a_i \mathbf{p_i} + b_i \mathbf{p_{i+1}}$$

$$a_i = \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} \quad ha \quad t_i < t < t_{i+1}$$
$$b_i = \frac{t_{i+1} - t}{t_{i+1} - t_i} \quad ha \quad t_i < t < t_{i+1}$$

- ahol például $t_i = i/N$

Tartalom

Felületi folytonosságok

- Törtvonal szögletes, esztétikai érzékünket bántja a sok törés.
- A görbékre különböző folytonossági kategóriákat definiálhatunk:
  - C^0: folytonos a görbe, a pontjai kapcsolódnak egymáshoz
  - C^1: folytonos az első deriváltja a görbének: nincsen ugrás a deriváltakban
  - C^2: folytonos a második deriváltja a görbének: nincsen ugrás a deriváltakban
    - Emberi szem számára kellemes látványt nyújt.
    - Meghajlított ág C^2-folytonos.

Tartalom

Bezier-görbe

- Pierre Bézier (Renault-mérnök) találta ki.
- Folytonos felületet ad
- Bezier görbe alapja a Bernstein polinom.

$$(t + (1 - t))^m = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} t^i (1 - t)^{m-i}$$

- Ennek pedig a binomiális tétel:

$$(a + b)^m = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} a^i b^{m-i}$$

Bezier-görbe

- A Bernstein polinomok adják az egyes kontrollpontokhoz tartozó súlyokat
- Mintha baricentrikus koordináták lennének
- Teljes görbe (parametrikus)

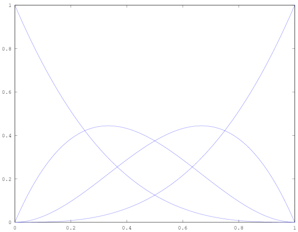
$$\mathbf{p}(t) = \sum_{i=0}^{m} B_{i,m}^{Bezier} \mathbf{p_i}$$

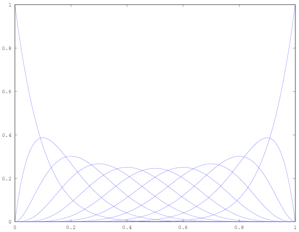
- ahol

$$B_{i,m}^{Bezier} = \binom{m}{i} t^i (1-t)^{(m-i)}$$

Bezier-görbe tulajdonságai

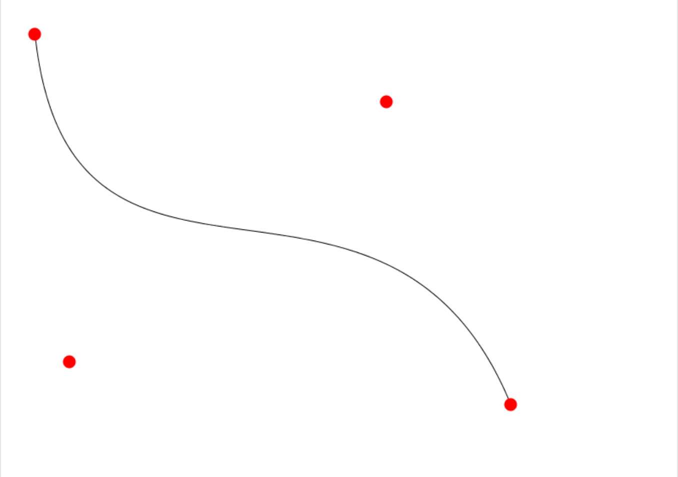
- ”Végtelenül” folytonos
  - Hiszen polinomokból áll, $\rightarrow$ bárhányszor differenciálható
- Mindegyik kontrollpont súlya pozitív $t \in (0, 1)$ tartományban
  - Végpontot leszámítva mindegyik kontrollpont ”beleszól” a görbe alakulásába





Bezier-görbe tulajdonságai

- Végponton átmegy a görbe



Bezier-görbe tulajdonságai

- Bázisfüggvény fontos tulajdonsága

$$B_{i+1,m}^{Bezier} = tB_{i,m-1}^{Bezier} + (1-t)B_{i+1,m-1}^{Bezier}$$

- Tehát az m-edfokú polinom a két szomszédos $(m-1)$-edfokú polinomból kiszámítható.
- Mindez a de Casteljau algoritmus alapja.
  - Adott t paraméternél a Bezier-görbe pontja megszerkeszthető
  - Fokszámnak megfelelő iterációt használunk
  - Első lépés: kontollpontokból törtvonalat készítve, t / $(1-t)$ aránynak megfelelően a törtvonal éleit osztjuk.
  - Iteráció: Előző szakaszpontokból újra törtvonalat készítve, az új törtvonalakat újra arányosan felosztjuk.
  - Utolsó lépés: ha a törtvonal már csak egy szakaszból áll, megkapjuk a Bezier-görbe adott pontját.

Tartalom

B-spline

- A spline C^2 folytonos felület
- Előállítása: törtvonalból kiindulva, súlyozással
- Bezier-görbéhez hasonlóan a kontrollpontok súlyozásával állítjuk elő
- Súlyok előállítás rekurzióval:

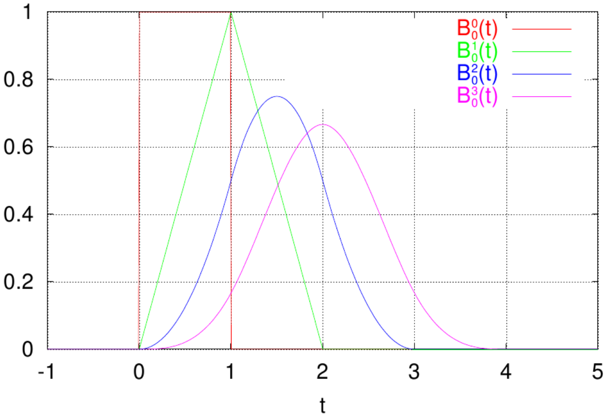
$$B_i^k(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+k-1} - t_i} B_i^{k-1}(t) + \frac{t_{i+k} - t}{t_{i+k} - t_{i+1}} B_{i+1}^{k-1}(t)$$

$$B_i^0(t) = \begin{cases} 1 & if \quad t_i < t < t_{i+1} \\ 0 & else \end{cases}$$

- $t_1, \ldots, t_m$ a kontrollpontokhoz tartozó paraméterek.

B-spline

- A rekurzió alatt a súlyok ”lekerekednek”



Tartalom

Spline variánsok

- Ha a t_i paraméterek egymástól azonos távolságra vannak: uniform B-Spline
- Ha a t_i paraméterek változó távolságban vannak: non-uniform B-Spline (NUBS)
- Ha két súlyhoz tartozó paraméter megegyezik , azaz $t_i = t_{i+1}$ non-uniform rational B-Spline (NURBS)
  - Két kontrollpont egymásra helyezésével a ponthoz közelebb lehet húzni a spline-t.

Spline variánsok

- A spline pontjai nem mennek át a kontrollpontokon.
- Megoldás: válasszuk úgy ki a vezérlő pontokat, hogy a megadott pontokon átmenjen a spline.
- Lineáris egyenlet, ismeretlenek a $\mathbf{p_i}$ vezérlő pontok.

$$\mathbf{q_j} = \sum_i a_i(t)\mathbf{p_i}$$

- 2D-ben két egyenlet pontonként.
  - Végpontra irányt (első derivált t szerint) is megköthetünk.
  - Irány meghatározása egyszerű: $\mathbf{v}(t) = \sum_i a_i^{'}(t)\mathbf{p_i}$
  - Több független spline is összeköthető, ha a végpontoknál az irány megegyezik.

Tartalom

Felosztott (subdivision) görbék

- Cél: Törtvonalas közelítésből szép ”sima” görbe előállítása
- Ötlet: iteratív algoritmus
  - Törtvonalból kiindulva, új pontokat adjunk hozzá
  - Pontok helyét finomítsuk

Felosztott (subdivision) görbe: algoritmus

- Bementet: N pontot tartalmazó törtvonal $\mathbf{p_i}$ koordinátákkal
- Subdivision algoritmus két lépésből áll
  1. Felezőpontok hozzáadása. Új pont: $\mathbf{q_i} = (\mathbf{p_i} + \mathbf{p_{i+1}})/2$
  2. Pontok finomítása: $\mathbf{p_i} = \mathbf{p_i}/2 + (\mathbf{q_{i-1}} + \mathbf{q_i})/4$

Tartalom

Felosztott (subdivision) felületek

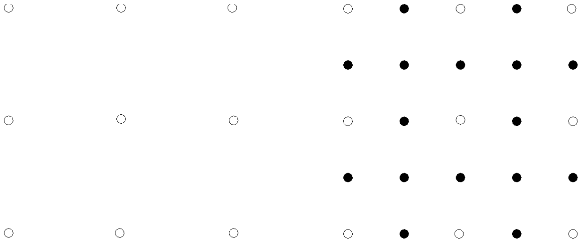
- Elve megegyezik a felosztott görbék előállításával.
- Iteratív az algoritmus
  - Térbeli pontokat sokszorozza
  - Pontokat helyét finomítja

Catmull-Clarc felosztott felület

- Pontokat négyzetrácsként képzeljük el (dupla index)
- Algoritmus lépései:
  1. Térbeli pontokat sokszorozza
  2. Új pontok kiszámítása
     1. Határpontok
     2. Belső pontok #1
     3. Belső pontok #2
  3. Régi pontok pontosítása

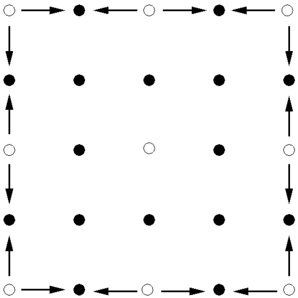
Catmull-Clarc felosztott felület

- $N \times N$ rácsból $(2N-1) \times (2N-1)$ rácsot készítünk.
- Oszlopokat/sorokat kell beszúrni.



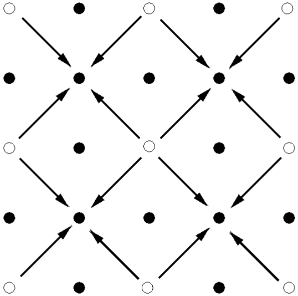
Catmull-Clarc felosztott felület

- Beszúrt pontoknak még nincsen értéke.
- Új szélső (határ) pontok: szomszéd határpontok átlaga



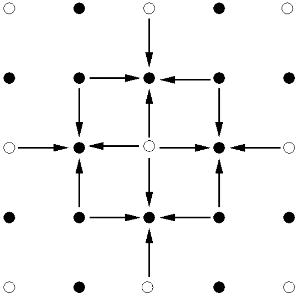
Catmull-Clarc felosztott felület

- Belső beszúrt pontoknak még nincsen értéke
- Interpoláljuk a négy (előző iteráció óta meglévő) szomszédos pont átlagával, ahol az átlóban vannak az ismert pontok



Catmull-Clarc felosztott felület

- Pontoknak még mindig nincsen értéke
- Interpoláljuk a négy szomszédos pont átlagával
  - Kettő szomszédot előző iterációban számoltuk.
  - Másik két szomszédot a jelenlegi iterációban.



Catmull-Clarc felosztott felület

- Régi pont: nem ebben az iterációban szúrtuk be.
- Új érték itt is két szám átlaga
  - Első szám: A pontban meglevő (régi) érték
  - Második szám: nyolc szomszédjának átlaga