

Számítógépes Grafika mintafeladatok

Feladat: Forgassunk a 3D-s pontokat 45 fokkal a X tengely körül, majd nyújtsuk az eredményt minden koordinátájában kétszeresére az origóhoz képest, utána forgassunk 90 fokot a Z tengely körül, végül tükrözzük az XY síkra. Mik az elemei a 4 transzformáció együttesét leíró 4x4-es mátrixnak?

Segítség: $\sin(45^\circ) = \cos(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Megoldás:

A négy transzformáció 4 mátrixa:

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Az eredmény T transzformációs mátrix ezeknek a részmátrixoknak a szorzata:

$$T = T_4 T_3 T_2 T_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Feladat: Mi a Descartes koordinátája annak a pontnak, amelyik polárkoordinátás alakjából az derül ki, hogy 60 fokot zár be a vízszintes tengellyel, az origótól két egységre van.

Segítség: $\cos(60^\circ)=0,5$ és $\sin(60^\circ)=\sqrt{3}/2$

Megoldás:

$$\begin{aligned}X &= r * \cos(\alpha) \\Y &= r * \sin(\alpha) \\ \text{ahol } \alpha &= 60^\circ \text{ és } r = 2.\end{aligned}$$

Ezért a megoldás az $(1, \sqrt{3})$ koordinátapáros.

Feladat: Adott egy pont egy baricentrikus (síkbeli) koordináta-rendszerben, melynek 3 súlypontja adott: $P1=(\sqrt{1}, \sqrt{2})$, $P2=(\sqrt{3}, \sqrt{4})$ és $P3=(\sqrt{6}, \sqrt{7})$. Ismerjük egy pont első két baricentrikus koordinátáját, mindkettő értéke 0,25. Mennyi lesz a harmadik koordináta?

Megoldás: Mivel a baricentrikus koordináták összege mindig egy, a harmadik koordináta 0,5.

Feladat: Adott egy pont a síkon homogén koordinátás alakban:

$$P = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Írja fel polárkoordinátás alakban ugyanezt a pontot!

Megoldás: Először átváltjuk descartes-i alakba, ehhez a harmadik koordinátával elosztjuk az első kettőt:

$$P_{desc} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 3/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Utána számíthatjuk a sugarat és a szöveget:

$$r = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$
$$\phi = \text{atan2}(3,1)$$

Megjegyzés: $\text{atan2}(3,1) \approx 71,5^\circ$ de ez nem szükséges a ZH-n a maximális pont eléréséhez.

Feladat:

Írjuk fel az $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ gömb és a $[0, 1, 2]^T$ ponton átmentő, $\frac{1}{\sqrt{3}}[1, 1, 1]^T$ irányvektorú egyenes metszéspontjait!

Megoldás:

Az egyenes pontjai a $[0, 1, 2]^T + \frac{t}{\sqrt{3}}[1, 1, 1]^T$ paraméteres felírással adhatók meg, ebből a három koordináta:

$$\begin{aligned}x &= \frac{t}{\sqrt{3}} \\y &= 1 + \frac{t}{\sqrt{3}} \\z &= 2 + \frac{t}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

Ezt behelyettesítve a gömb egyenletébe:

$$\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(1 + \frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(2 + \frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2 = 9$$

Ez egy másodfokú egyenlet:

$$t^2 + \frac{6}{\sqrt{3}}t - 4 = 0$$

A megoldás a jól ismert megoldóképletből jön:

$$t = \frac{\frac{-6}{\sqrt{3}} \pm \sqrt{12 + 16}}{2}$$

Ebből a két megoldás:

$$t_1 = \frac{-3}{\sqrt{3}} + \sqrt{7} \quad t_2 = \frac{-3}{\sqrt{3}} - \sqrt{7}$$

A megoldásokat a kapott paramétereket visszahelyettesítve kapjuk meg a két metszéspontot:

$$[0, 1, 2]^T + (-1 + \sqrt{7/3})[1, 1, 1]^T$$

és

$$[0, 1, 2]^T + (-1 - \sqrt{7/3})[1, 1, 1]^T$$

Feladat:

Számítsuk ki 2D-ben a $x + 2y + 3 = 0$ és a $4x + 5y + 6 = 0$ implicit egyenlettel megadott egyenesek metszéspontját!

Megoldás:

Amennyiben homogén koordinátákkal számolunk, a megoldás az $A p = 0$ egyenletből jön, ahol

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \text{ és } p = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A feladat

$$A' p' = b' \text{ alakra hozható, ahol } A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad p' = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ és } b' = \begin{bmatrix} -3 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$\text{A megoldás } p' = A'^{-1} b'$$

A mátrix inverze az adjungált és a determináns hányadosa:

$$\det(A') = 1 \cdot 5 - 2 \cdot 4 = -3$$

$$\text{adj}(A') = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(A')} \text{adj}(A') b' = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ -6 \end{bmatrix}$$

A műveletet elvégezve $x = 1$ és $y = -2$ adódik.

Feladat:

Számítsuk ki a $[0,1,2]^T$ pont és a $\frac{1}{\sqrt{3}}[1,1,1]^T$ irányvektorú egyenes metszéspontját a $x+2y+3z+4=0$ síkkal!

Megoldás:

Az irányvektornak nem kell feltétlen egységvektornak lenni ezért az egyenest $[0,1,2]^T + t[1,1,1]^T$ alakban írjuk fel. A koordináták így alakulnak a paraméter függvényében:

$$\begin{aligned}x &= t \\ y &= 1 + t \\ z &= 2 + t\end{aligned}$$

Ezt behelyettesítve az egyenes egyenletébe kapjuk, hogy

$$t + 2(1 + t) + 3(2 + t) + 4 = 0$$

Ebből $t=-2$ adódik. Ezt visszahelyettesítve az egyenes parametrikus egyenesére kijön, hogy $x=-2$, $y=-1$ és $z=0$.

Feladat:

Határozzuk meg a $p_e = [0, 1, 2]^T$ ponttal és $v_e = \frac{1}{\sqrt{2}}[1, 0, 1]^T$ irányvektorral meghatározott egyenes metszéspontját azzal a síkkal, melynek egy pontja $p_s = [3, 4, 5]^T$, normálvektora

$$n = \frac{1}{\sqrt{2}}[1, 1, 0]^T$$

Megoldás:

Egy p pont akkor van rajta a síkon, ha igaz, hogy $n^T(p - p_s) = 0$

Az egyenes paraméteres alakja: ($\sqrt{2}$ skalárokat szokásos módon elhagyva):

$$p = [0, 1, 2]^T + t[1, 0, 1]^T$$

Ez visszahelyettesítve:

$$n^T(p - p_s) = [1, 1, 0]^T([0, 1, 2]^T + t[1, 0, 1]^T - [3, 4, 5]^T) = 0$$

$$[1, 1, 0]^T(+t[1, 0, 1]^T - [3, 3, 3]) = 0$$

$$t - 6 = 0$$

$$t = 6$$

Ebből pedig a pontra adódik, hogy

$$p = [0, 1, 2]^T + t[1, 0, 1]^T = [6, 1, 8]$$

Feladat:

Adott egy felület pontja $x=[0,1,2]^T$ és normálvektora $n=\frac{1}{\sqrt{3}}[1,1,1]^T$. Beérkezik egy fénysugár a felületi pontba, a fénysugár irányvektora $v=\frac{1}{\sqrt{2}}[1,0,1]^T$. A felületen a fény tükröződik. Visszaverődés után mi lesz az új fény egyenese (ponttal és irányvektorral ábrázolva)?

Megoldás:

A visszaverődés után az egyenes átmegy az x ponton. Irányvektorát így számoljuk:

n normálvektor és v irányvektor skaláris szorzata: $n \cdot v = \frac{2}{\sqrt{6}}$ A visszaverődés összefüggése:

$$v_r = v - 2n(n \cdot v)$$

Behelyettesítve:

$$v_r = \frac{1}{\sqrt{2}}[1,0,1]^T - \frac{2}{\sqrt{3}}[1,1,1]^T \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{2}}[1,0,1]^T - \frac{4}{\sqrt{18}}[1,0,1]^T$$

$$\left[-\sqrt{\frac{1}{18}}, -\frac{4}{\sqrt{18}}, -\sqrt{\frac{1}{18}} \right]^T$$

Feladat:

Adott egy felület pontja $x=[0,0,0]^T$ és normálvektora $n=[0,1,0]^T$. Beérkezik egy fénysugár a felületi pontba, a fénysugár irányvektora $v=\frac{1}{\sqrt{2}}[1,1,0]^T$. A felületen a fény megtörik, a törésmutató $\eta=1,5$. Törés után mi lesz az új fény egyenese (ponttal és irányvektorral ábrázolva)?

Megoldás:

A visszaverődés után az egyenes átmegy az x ponton (origón), ez lesz a fényegyenes egyik pontja.

A megtört fény irányát a Snellius-Descartes törvény segítségével írhatjuk le. A beeső fény szögét az irányvektor és a normálvektor skaláris szorzatából számíthatjuk ki:

$$\cos \alpha = n \cdot v = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Azaz 45° -os a beeső szög. A törés utáni szög: $\sin \beta = \frac{\sin \alpha}{\eta} = \frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$

Ebből a szög koszinuszára megkapjuk: $\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \frac{\sqrt{7}}{3}$

$$v_t = \sin \beta n_{mer} - n \cos \beta = \frac{\sqrt{2}}{3}[1,0,0]^T - \frac{\sqrt{7}}{3}[0,1,0]^T = \left[\frac{\sqrt{2}}{3}, -\frac{\sqrt{7}}{3}, 0 \right]$$