Elsőrendű logika

I. Alapfogalmak
1.a. Egy elsőrendű logika L nyelvének ábécéje:
Logikán kívüli rész:
$\langle \mathrm{Srt}, \mathrm{Pr}, \mathrm{Fn}, \mathrm{Cnst} \rangle$

- Srt, nemüres halmaz melynek elemei fajtákat szimbolizálnak, innentől $|\mathrm{Srt}| = 1$ (egyfajtájú eset).
- Pr, predikátumszimbólumok halmaza. ν_1 minden $P \in \mathrm{Pr}$ -re megadja P aritását ($\in \mathbb{N}$)
- Fn, függvényszimbólumok halmaza. ν_2, minden $f \in \mathrm{Fn}$ -re megadja f aritását ($\in \mathbb{N}$)
- Cnst, konstansszimbólumok halmaza, ν_3 megadja a konstansok számát ($\in \mathbb{N}$).

1.b. Logikai jelek:

- Megszámlálható végtelen sok individuum változó $V = \{x, y, x_1, \ldots\}$
- unér és binér logikai műveleti jelek $\neg, \wedge, \vee, \supset$
- kvantorok $\forall, \exists$
- elválasztójelek (,)

Az L nyelv ábécéjére $V[V_v]$-vel hivatkozunk, ahol V_v adja meg a (ν_1, ν_2, ν_3) szignatúrájú $\langle \mathrm{Srt}, \mathrm{Pr}, \mathrm{Fn}, \mathrm{Cnst} \rangle$ halmaznégyest.
2. Term (egyfajtájú eset) ($L_t(V_v)$):

- (alaplépés) minden individuum változó és konstans szimbólum term.
- (rekurzív lépés) Ha $f \in \mathrm{Fn}$ k-aritású függvényszimbólum és $t_1, t_2, \ldots, t_k$ termek, akkor $f(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ is term.
- minden term az 1., 2. szabályok véges sokszori alkalmazásával áll elő.

3. Formula (egyfajtájú eset) ($L_f(V_v)$):

- (alaplépés) Ha $P \in \mathrm{Pr}$ k-aritású predikátumszimbólum és $t_1, t_2, \ldots, t_k$ termek, akkor $P(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ formula.
- (rekurzív lépés)
  - Ha A formula, akkor $\neg A$ is az.
  - Ha A és B formulák, akkor $(A \circ B)$ is formula ($\circ$ a három binér művelet bármelyike).
  - Ha A formula, akkor $\forall x A$ és $\exists x A$ is az.
- Minden elsőrendű formula az 1., 2. szabályok véges sokszori alkalmazásával áll elő.

II. Szemantika (egyfajtájú eset)
1. Interpretáció
Egy elsőrendű logikai nyelv $L(V_v)$ *interpretációja* egy
$\mathcal{I} = \langle \mathcal{I}_{\mathrm{Srt}}, \mathcal{I}_{\mathrm{Pr}}, \mathcal{I}_{\mathrm{Fn}}, \mathcal{I}_{\mathrm{Cnst}} \rangle$ függvénynégyes, ahol

- $\mathcal{I}_{\mathrm{Srt}}$ egy U halmaz (univerzum) megjelölése,
- $\mathcal{I}_{\mathrm{Pr}} : P \mapsto P^{\mathcal{I}}$, minden $P \in$Pr-re, ha P k-aritású, akkor $P^{\mathcal{I}} \subseteq U^k$, (Logikai fv-es megfogalmazás: $P^{\mathcal{I}}(u_1, \ldots, u_k) = i \Leftrightarrow (u_1, \ldots, u_k) \in P^{\mathcal{I}}$)
- $\mathcal{I}_{\mathrm{Fn}} : f \mapsto f^{\mathcal{I}}$, minden $f \in$Fn-re, ha f k-aritású, akkor $f^{\mathcal{I}} : U^k \to U$ egy k változós művelet U-n,

- $\mathcal{I}_{\mathrm{Cnst}} : c \mapsto c^{\mathcal{I}} \in U$.

2. Változókiértékelés
   $\kappa : V \to U$.
3. Termek értéke egy $\mathcal{I}$ interpretációban, egy κ változókiértékelés mellett:

   - Ha x_s individuumváltozó, $|x_s|^{\mathcal{I},\kappa}$ a $\kappa(x) \in U$ individuum.
     Ha c konstansszimbólum $|c|^{\mathcal{I},\kappa}$ az U-beli $c^{\mathcal{I}}$ individuum.
   - $|f(t_1, t_2, \ldots, t_n)|^{\mathcal{I},\kappa} = f^{\mathcal{I}}(|t_1|^{\mathcal{I},\kappa}, |t_2|^{\mathcal{I},\kappa}, \ldots, |t_n|^{\mathcal{I},\kappa})$.

4. Formulák igazságértéke egy $\mathcal{I}$ interpretációban, egy κ változókiértékelés mellett:

   - $|P(t_1, t_2, \ldots, t_n))|^{\mathcal{I},\kappa} = i, \Leftrightarrow (|t_1|^{\mathcal{I},\kappa}, |t_2|^{\mathcal{I},\kappa}, \ldots, |t_n|^{\mathcal{I},\kappa}) \in P^{\mathcal{I}}$
   - $|\neg A|^{\mathcal{I},\kappa} = \neg|A|^{\mathcal{I},\kappa}$
     $|A \circ B|^{\mathcal{I},\kappa} = |A|^{\mathcal{I},\kappa} \circ |B|^{\mathcal{I},\kappa} \qquad \circ \in \{\wedge, \vee, \supset\}$
   - $|\forall x A|^{\mathcal{I},\kappa} = i$, ha $|A|^{\mathcal{I},\kappa^*} = i$ minden κ^* x variánsára
     $|\exists x A|^{\mathcal{I},\kappa} = i$, ha $|A|^{\mathcal{I},\kappa^*} = i$ legalább egy κ^* x variánsára

(κ^* a κ x-variánsa, ha $\kappa^*(y) = \kappa(y)$, ha $y \neq x$.)

III. Elsőrendű formulák szemantikus tulajdonságai

- Egy A elsőrendű logikai formula *kielégíthető*, ha van az elsőrendű logika nyelvének olyan $\mathcal{I}$ interpretációja, és $\mathcal{I}$-ben olyan κ változókiértékelés, melyre $|A|^{\mathcal{I},\kappa} = i$, egyébként *kielégíthetetlen*.
- A *logikailag igaz*, ha minden $\mathcal{I}, \kappa$-ra, $|A|^{\mathcal{I},\kappa} = i$, ennek jelölése $\models A$.
- A és B elsőrendű logikai formulák *logikailag ekvivalensek*, ha ha minden $\mathcal{I}, \kappa$-ra, $|A|^{\mathcal{I},\kappa} = |B|^{\mathcal{I},\kappa}$. Jelölése $A \sim B$.
- *Quine-táblázat*: A prímkomponenseket ítéletváltozónak tekintő ítélettábla.
- Egy A elsőrendű logikai formula *tautologikusan igaz*, ha Quine-táblázatában A oszlopában csupa i áll. Jelölése $\models_0 A$.

IV. Elsőrendű logikai törvények

- ha $x \notin \mathrm{Par}(A)$:
  $\forall x A \sim A$ és $\exists x A \sim A$,
- $\forall x \forall y A \sim \forall y \forall x A$ és $\exists x \exists y A \sim \exists y \exists x A$,
- $\neg \exists x A \sim \forall x \neg A$ és $\neg \forall x A \sim \exists x \neg A$,
- ha $x \notin \mathrm{Par}(A)$:
  $A \wedge \forall x B \sim \forall x(A \wedge B)$ és $A \wedge \exists x B \sim \exists x(A \wedge B)$,
  $A \vee \forall x B \sim \forall x(A \vee B)$ és $A \vee \exists x B \sim \exists x(A \vee B)$,
  $A \supset \forall x B \sim \forall x(A \supset B)$ és $A \supset \exists x B \sim \exists x(A \supset B)$,
  $\forall x B \supset A \sim \exists x(B \supset A)$ és $\exists x B \supset A \sim \forall x(B \supset A)$,
- $\forall x A \wedge \forall x B \sim \forall x(A \wedge B)$ és $\exists x A \vee \exists x B \sim \exists x(A \vee B)$.