Bevezetés a számításelméletbe

11. előadás

3 színezhetőség

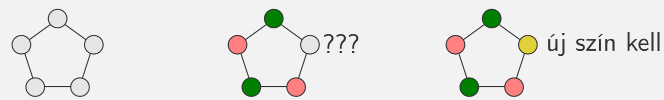
Definíció

Legyen $k \geqslant 1$ egész szám. Egy (irányítatlan) gráf ***k*-színezhető**, ha kiszínezhetők a csúcsai k színnel úgy, hogy bármely két szomszédos csúcsnak a színe különböző.

Formálisan: $G = (V, E)$ k-színezhető, ha $\exists\, f : V \to \{1, \dots, k\}$ leképezés, melyre $\forall x, y \in V : f(x) = f(y) \Rightarrow \{x, y\} \notin E$.

1. Példa: Jelölje K_n a teljes n csúcsú gráfot. Ekkor K_n k-színezhető minden $k \geqslant n$-re, de nem $(n-1)$-színezhető (semelyik 2 csúcs sem lehet azonos színű).

2. Példa: Egy 5 csúcsú kör 3-színezhető, de nem 2-színezhető.



3 színezhetőség

kSZÍNEZÉS:=$\{\langle G\rangle \mid G$ k-színezhető$\}$

Itt $\langle G\rangle$ a G gráf kódját jelöli $\{0,1\}$ felett, mondjuk a szomszédsági mátrixa sorfolytonosan.

Tétel

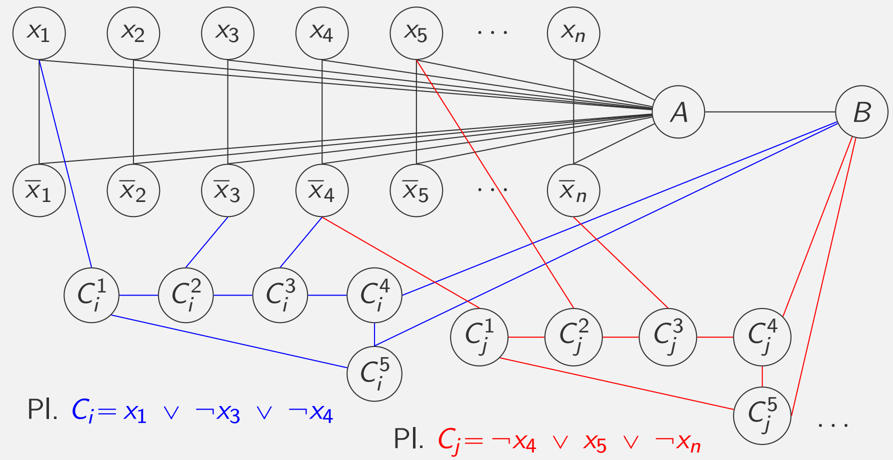
3SZÍNEZÉS NP-teljes.

- kSZÍNEZÉS NP-beli: egy $\langle G\rangle$ inputra az M NTG egy számítási ága állítson elő egy $f : V(G) \to \{1, \dots, k\}$ k-színezést. Mind egy konkrét k-színezés előállítása, mind pedig a konkrét színezés helyességének ellenőrzése polinom időben megtehető. M egy számítása végződjön q_i-ben, ha az egy jó k-színezés.

  G k-színezhető $\Leftrightarrow \exists$ jó k-színezése $\Leftrightarrow$ M elfogadja $\langle G\rangle$ -t.
- 3SAT $\leqslant_p$ 3SZÍNEZÉS: elegendő minden φ 3KNF formulához polinom időben elkészíteni egy G_φ gráfot úgy, hogy φ kielégíthető $\Leftrightarrow$ G_φ 3-színezhető.

3 színezhetőség

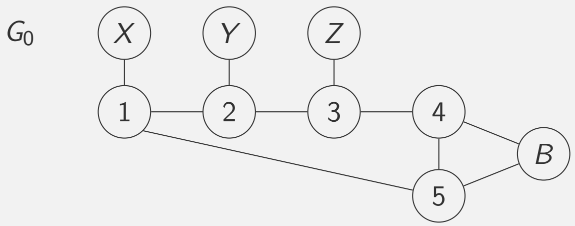
Legyenek $x_1, \dots, x_n$ a φ-ben előforduló ítéletváltozók. Továbbá $\varphi = C_1 \wedge \ldots \wedge C_m$, azaz $C_1, \dots C_m$ φ pontosan 3 literálból álló klózai. G_φ konstrukciója:



Minden klózhoz tartozik egy ötszög a fenti módon.

3 színezhetőség

Lemma: Legyen G_0 az alábbi gráf és tegyük fel, hogy az X, Y, Z, B csúcsokat 2 színnel kiszíneztük. Akkor és csak akkor létezik ehhez a parciális színezéshez az egész G_0-ra kiterjeszthető 3-színezés, ha X, Y, Z, B nem mind egyszínű.



A lemma bizonyítása:

- Ha X, Y, Z, B egyszínű, akkor a maradék 2 színnel kéne az ötszöget kiszínezni, amit nem lehet.

3 színezhetőség

- Ha X, Y, Z, B nem egyszínű, akkor megadható egy színezés.

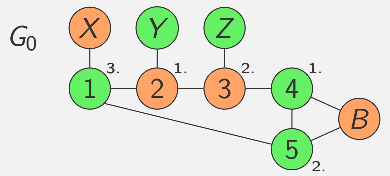
  1. lépés: első körben 2 színt használunk, 1,2,3,4,5-öt színezzük az $\{X, Y, Z, B\}$-beli szomszédjával ellentétes színűre.

  Ez persze még nem jó, lehetnek azonos színű szomszédok.

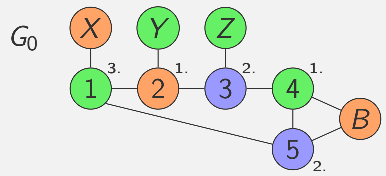
  2. lépés: bevetjük a 3. színt: ha 1,2,3,4,5 között van valahány egymás utáni azonos színű csúcs (az óramutató járása szerint és ciklikusan), akkor ezen egymás utáni azonos színű csúcsok közül minden párosadikat színezzük át a 3. színre.

Példa:

1. lépés utáni színezés



2. lépés utáni színezés



3 színezhetőség

A visszavezetés bizonyítása:

- Tegyük fel hogy φ kielégíthető, ekkor meg kell adnunk G_φ egy 3-színezését. Legyenek a színek piros, zöld és kék. Ha x_i igaz, akkor legyen az x_i csúcs zöld, az $\overline{x}_i$ csúcs piros. Ha hamis, akkor épp fordítva. A legyen kék és B legyen piros. Mivel minden klóz ki van elégítve, így minden ötszöghöz van zöld (az igaz literál) és piros szomszéd (B) is, így a lemma miatt a színezés minden ötszögre kiterjeszthető.
- Tegyük fel most, hogy G_φ jól ki van színezve 3 színnel. Feltehető, hogy A kék. Mivel $x_1, \ldots, x_n, \overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n$ mind A szomszédai, így egyikük se lehet kék. Továbbá az $(x_i, \overline{x}_i)$ párok össze vannak kötve, így minden párban pontosan egy piros és pont egy zöld csúcs van. Ámnfth. B piros (a zöld eset analóg). Mivel az ötszögek ki vannak színezve, ezért a lemma miatt minden ötszögnek van zöld szomszédja. Az "x_i:=igaz $\Leftrightarrow$ x_i csúcs zöld" interpretáció tehát kielégíti φ-t.

2 színezhetőség

Beláttuk tehát, hogy $\varphi \mapsto G_\varphi$ visszavezetés. Mivel G_φ φ ismeretében az input méretének polinomja időben legyártható, ezért a visszavezetés polinom idejű.

Mivel 3SAT NP-teljes, korábbi tételünk miatt 3Színezés is az. □

A 2-színezhető gráfok éppen a páros gráfok (a páros gráf két csúcsosztálya a két színosztály). Lineáris időben eldönthető, hogy egy gráf páros-e:

Tétel

2SZÍNEZÉS ∈ P

Bizonyítás:
Indítsunk egy szélességi bejárást G egy tetszőleges x csúcsából. Ez az x-szel egy komponensben lévő csúcsokat szintekre particionálja az x-től való távolságuk (legrövidebb út hossza) szerint. Ha a gráf nem összefüggő, akkor minden komponensre végezzük ezt el. Az algoritmus $O(|V| + |E|)$ idejű.

2 színezhetőség

Állítás: G 2-színezhető $\Leftrightarrow$ a szélességi bejárás G semelyik komponensében se talál élt két azonos szintű csúcs között.

Az állítás bizonyítása:

$(\Leftarrow)$ Legyenek a páros szinteken lévő csúcsok kékek, a páratlan szinteken lévők pirosak. Ekkor nincs két azonos színű csúcs között él. A feltétel és a színezés miatt ilyen csak úgy lehetne ha azonos komponensben legalább 2 szintkülönbségű csúcsokról lenne szó. Azonban irányítatlan gráfok szélességi bejárása során ilyen nincs.

$(\Rightarrow)$ Ha van két azonos szintű x és y csúcs között él, akkor legyen a k szinttel feljebb levő z az a csúcs, ami x és y legnagyobb szintszámú (azaz legelső) közös őse a szélességi feszítőfában. Ekkor kaptunk egy x, y, z-t tartalmazó $2k+1$ hosszú kört, hiszen z elsősége miatt a szélességi feszítőfában a $z \rightsquigarrow x$ és $z \rightsquigarrow y$ utaknak z-n kívül nem lehet közös pontja. Így G nem 2-színezhető, mivel páratlan hosszú körök nyilván nem 2-színezhetők.

Az állítás feltételét a szélességi bejárás menet közben ellenőrzheti. $\square$

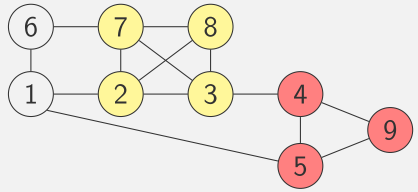
Klikk

Definíció

Egy G egyszerű, irányítatlan gráf egy teljes részgráfját **klikknek** nevezzük.

KLIKK:= $\{\langle G, k\rangle \mid G\text{-nek van } k \text{ méretű klikkje}\}$

Példa:



$\{2,3,7,8\}$ és $\{4,5,9\}$ klikk. $\{1,2,6,7\}$ nem klikk.

Észrevétel: Ha G-nek van k méretű klikkje, akkor bármely kisebb k-ra is van.

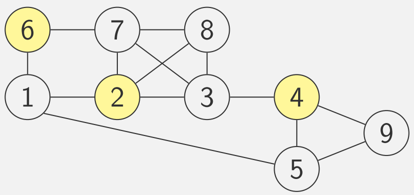
Független ponthalmaz

Definíció

Egy G egyszerű, irányítatlan gráf egy üres részgráfját **független ponthalmaznak** mondjuk.

FÜGGETLEN PONTHALMAZ:=
$\{\langle G, k\rangle \mid G\text{-nek van } k \text{ méretű független ponthalmaza}\}$

Példa:



$\{2,6,4\}$ független. $\{1,7,3,9\}$ nem független a $\{3,7\}$ él miatt.

Észrevétel: Ha G-nek van k méretű független ponthalmaza, akkor bármely kisebb k-ra is van.

Lefogó ponthalmaz

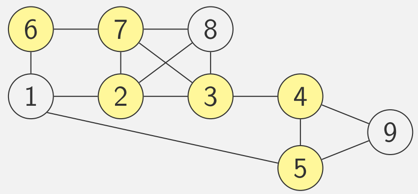
Definíció

Legyen $S \subseteq V(G)$ és $E \in E(G)$. Ha $S \cap E \neq \emptyset$, akkor a csúcshalmaz **lefogja** E-t. Ha S minden $E \in E(G)$ élt lefog, akkor S egy **lefogó ponthalmaz**.

Megjegyzés: A fenti fogalom csúcsfedés néven is ismeretes.

LEFOGÓ PONTHALMAZ:=
$\{\langle G, k\rangle \mid G\text{-nek van } k \text{ méretű lefogó ponthalmaza}\}$

Példa:



$\{2,3,4,5,6,7\}$ lefogó ponthalmaz.

Észrevétel: Ha G-nek van k méretű lefogó ponthalmaza, akkor bármely $k \leqslant k' \leqslant |V(G)|$-re is van.

Független ponthalmaz

Tétel

Klikk, Független ponthalmaz, Lefogó ponthalmaz NP-teljes.

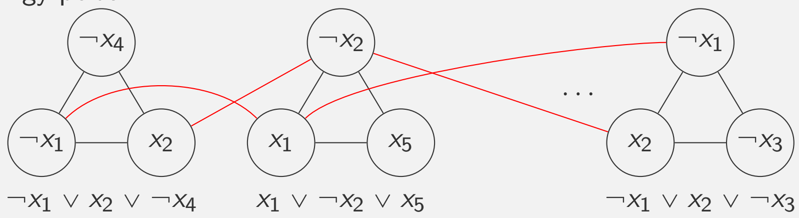
- Egy NTG egy számítási ágán vizsgálja meg a csúcsoknak egy konkrét, k elemű részhalmazát. Egy k elemű ponthalmaz előállítása illetve annak ellenőrzése, hogy ez egy klikk/független ponthalmaz/lefogó ponthalmaz az input méretének polinomiális függvénye. Tehát mindhárom nyelv NP-ben van.
- 3SAT $\leqslant_p$ Független csúcshalmaz

  Kell: $f : \varphi \mapsto (G_\varphi, k)$, φ 3KNF, G_φ-ben van k független csúcs akkor és csak akkor ha φ kielégíthető.

  (G_φ, k) konstrukciója: minden egyes $\ell_1 \vee \ell_2 \vee \ell_3$ klózhoz vegyünk fel egy a többitől diszjunkt háromszöget, a csúcsokhoz rendeljük hozzá a literálokat. Így m darab klóz esetén $3m$ csúcsot kapunk. Kössük össze éllel ezen felül a komplemens párokat is. $k := m$.

Független ponthalmaz

Egy példa:



$*$ Ha φ kielégíthető, akkor minden klózban van kielégített literál, válasszunk klózonként egyet, ezeknek megfelelő csúcsok m elemű független csúcshalmazt alkotnak.

$*$ Ha G_φ-ben van m független csúcs, akkor ez csak úgy lehet, ha háromszögenként 1 van. Vegyünk egy ilyet, ezen csúcsoknak megfelelő literálok között nem lehet komplemens pár, hiszen azok össze vannak kötve. Így a független halmaznak megfelelő, (esetleg csak parciális) interpretáció kielégít minden klózt. Ha nincs minden változó kiértékelve, egészítsük ki tetszőlegesen egy teljes interpretációvá.

Klikk, Lefogó ponthalmaz

- Független ponthalmaz $\leqslant_p$ Klikk

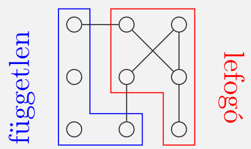
  $f : (G, k) \mapsto (\bar{G}, k)$

  Ez egy jó visszavezetés, hiszen ami G-ben klikk az $\bar{G}$-ben független ponthalmaz és fordítva, ami G-ben független ponthalmaz az $\bar{G}$-ben klikk.
- Független ponthalmaz $\leqslant_p$ Lefogó ponthalmaz

  $f : (G, k) \mapsto (G, |V(G)| - k)$

  Ha G-ben van k méretű F független ponthalmaz, akkor van $|V(G)| - k$ méretű lefogó ponthalmaz (F komplementere). Ha G-ben van $|V(G)| - k$ méretű L lefogó ponthalmaz, akkor van k méretű független ponthalmaz (L komplementere).

  Mindkét visszavezetés polinom időben kiszámítható.



Lefogó ponthalmaz hipergráfokban

$\mathcal{S}$ egy **hipergráf** (vagy halmazrendszer), ha $\mathcal{S} = \{A_1, \ldots, A_n\}$, ahol $A_i \subseteq U$, $(1 \leqslant i \leqslant n)$ valamely U alaphalmazra. $H \subseteq U$ egy **hipergráf lefogó ponthalmaz**, ha $\forall 1 \leqslant i \leqslant n : H \cap A_i \neq \emptyset$.

Hipergráf lefogó ponthalmaz:=
$\{\langle \mathcal{S}, k \rangle \,|\, \mathcal{S}$ egy hipergráf és van k elemű $\mathcal{S}$-et lefogó ponthalmaz$\}$.

Tétel

Hipergráf lefogó ponthalmaz NP-teljes.

Bizonyítás: A nyelv NP-beli, hiszen polinom időben előállítható U egy tetszőleges H részhalmaza és szintén polinom időben ellenőrizhető, hogy H minden $\mathcal{S}$-beli halmazt metsz-e.

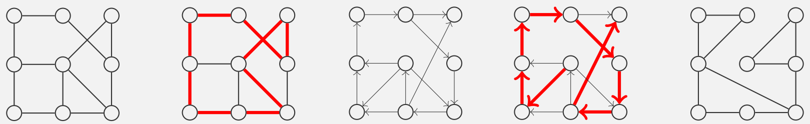
Lefogó ponthalmaz a Hipergráf lefogó ponthalmaz speciális esete. Minden gráf hipergráf is egyben, a megfeleltetés $U = V(G)$, $\mathcal{S} = E(G)$. k ugyanaz, mivel a lefogó ponthalmaz szintén speciális esete a hipergráf lefogó ponthalmaznak.

Irányítatlan/irányított Hamilton út/kör

Definíció

Adott egy G gráf. Egy a G összes csúcsát pontosan egyszer tartalmazó utat **Hamilton útnak**, egy a G összes csúcsát pontosan egyszer tartalmazó kört **Hamilton körnek** nevezünk. Ha a gráf irányított, a Hamilton útnak/körnek irányítottnak kell lennie.

Rövidítés: H-út/ H-kör: Hamilton út/ Hamilton kör.



G H-kör G-ben G' H-út G'-ben nincs H-kör

HÚ=$\{\langle G, s, t\rangle \mid$ van a G irányított gráfban s-ből t-be H-út$\}$.

IHÚ=$\{\langle G, s, t\rangle \mid$ van a G irányítatlan gráfban s és t végpontokkal H-út$\}$.

IHK=$\{\langle G\rangle \mid$ van a G irányítatlan gráfban H-kör$\}$.

Irányított $s \rightsquigarrow t$ Hamilton út NP teljessége

Tétel

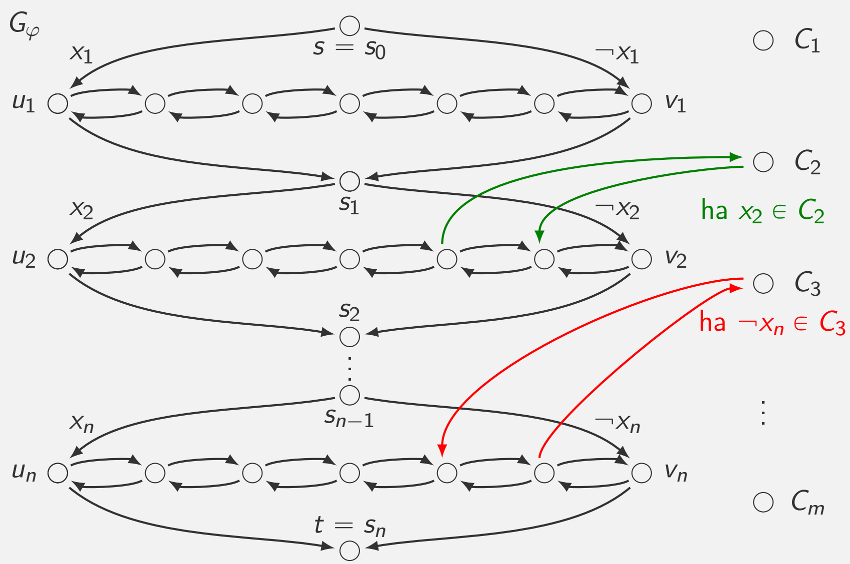
HÚ NP-teljes

Bizonyítás: NP-beli, hiszen polinom időben előállítható n darab csúcs egy P felsorolása. P-ről polinom időben ellenőrizhető, hogy a csúcsok egy permutációja-e és hogy tényleg H-út-e.

SAT $\leqslant_p$ HÚ. Elég bármely φ KNF-hez konstruálni (G_φ, s, t)-t azzal a tulajdonsággal, hogy φ kielégíthető $\Leftrightarrow$ a G_φ-ben van s-ből t-be H-út.

Legyenek $x_1, \dots x_n$ a φ-ben előforduló ítéletváltozók és $C_1, \dots C_m$ φ klózai.

Irányított $s \rightsquigarrow t$ Hamilton út NP teljessége



Irányított $s \rightsquigarrow t$ Hamilton út NP teljessége

G_φ konstrukciója

- $\forall 1 \leqslant i \leqslant n : (s_{i-1}, u_i), (s_{i-1}, v_i), (u_i, s_i), (v_i, s_i) :\in E(G_\varphi)$
- $s := s_0, t := s_n$
- $\forall 1 \leqslant i \leqslant n$-re u_i és v_i között $2m$ belső pontú kétirányú út $w_{i,1}, \dots, w_{i,2m}$.
- Minden $w_{i,k}$ legfeljebb egy C_j-vel lehet összekötve.
- Ha $x_i \in C_j$, akkor $(w_{i,2j-1}, C_j)$ és $(C_j, w_{i,2j}) :\in E(G_\varphi)$. (pozitív bekötés)
- Ha $\neg x_i \in C_j$, akkor $(w_{i,2j}, C_j)$ és $(C_j, w_{i,2j-1}) :\in E(G_\varphi)$. (negatív bekötés)

Az $u_i v_i$ út pozitív bejárása: $u_i \rightsquigarrow v_i$.
Az $u_i v_i$ út negatív bejárása: $u_i \leftsquigarrow v_i$.

Irányított $s \rightsquigarrow t$ Hamilton út NP teljessége

- Egy $s \rightsquigarrow t$ H-út $\forall 1 \leqslant i \leqslant n$-re az (s_{i-1}, u_i) és (s_{i-1}, v_i) közül pontosan egyiket tartalmazza, előbbi esetben az $u_i v_i$ utat pozitív, utóbbi esetben negatív irányban járja be.
- Egy $s \rightsquigarrow t$ H-út minden C_j-t pontosan egyszer köt be. Az $u_i v_i$ út pozitív bejárása esetén csak pozitív, negatív bejárása esetén csak negatív bekötés lehetséges.
- Ha van H-út, akkor az $u_i v_i$ utak pozitív/negatív bejárása meghatároz egy I változókiértékelést. A C_j klóz bekötése mutat C_j-ben egy igaz literált ($\forall 1 \leqslant j \leqslant m$). Tehát I kielégíti φ-t.
- Fordítva, ha φ kielégíthető, válasszunk egy φ-t igazra kiértékelő I interpretációt és φ minden klózához egy I-ben igaz literált. Az $u_i v_i$ utat $I(x_i) = i$ esetén pozitívan, $I(x_i) = h$ esetén negatívan járjuk be. Ha a kiválasztott literálokhoz rendre bekötjük a C_j csúcsokat H-utat kapunk.

G_φ polinom időben megkonstruálható így SAT $\leqslant_p$ HÚ, azaz HÚ NP-nehéz, de láttuk, hogy NP-beli, így NP-teljes is.

Irányítatlan $s \leftrightsquigarrow t$ Hamilton út NP teljessége

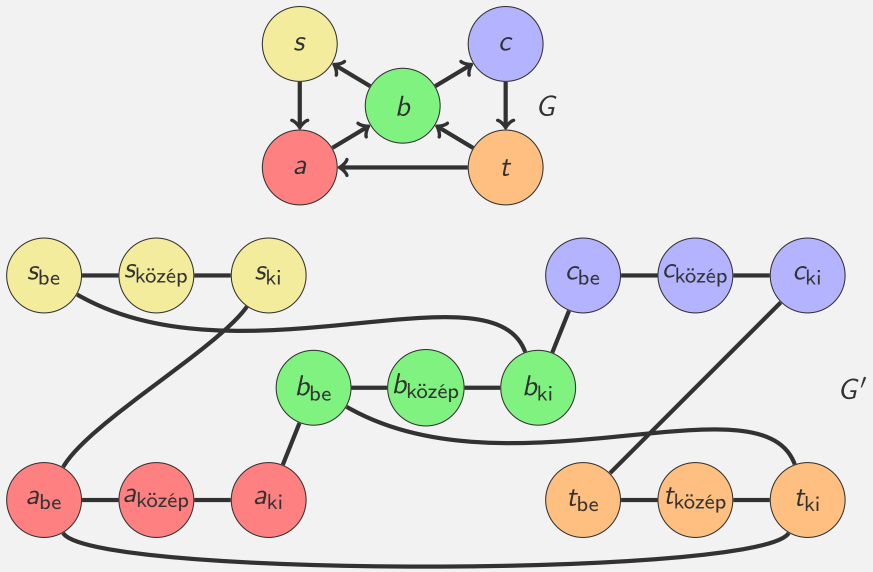
Megjegyzés: IHÚ és IHK NP-belisége az előzőekhez hasonlóan adódik.

Tétel

IHÚ NP-teljes

Bizonyítás: HÚ $\leqslant_p$ IHÚ. Adott G, s, t, ahol G irányított. Kell G', s', t', ahol G' irányítatlan és akkor és csak akkor van G-ben s-ből t-be H-út, ha G'-ben van s'-ből t'be.
G minden v csúcsának feleljen meg G'-ben 3 csúcs v_{be}, $v_{\text{közép}}$ és v_{ki}. és G' élei közé vegyük be a $\{v_{\text{be}}, v_{\text{közép}}\}$ és $\{v_{\text{közép}}, v_{\text{ki}}\}$ éleket. Továbbá minden $E = (u, v)$ G-beli él estén adjuk hozzá $E(G')$-höz $\{u_{\text{ki}}, v_{\text{be}}\}$-t. $s' := s_{\text{be}}, t' := t_{\text{ki}}$.

Irányítatlan $s \leftrightsquigarrow t$ Hamilton út NP teljessége



Irányítatlan $s \leftrightsquigarrow t$-Hamilton út NP teljessége

Könnyen meggondolható, hogy ez egy polinomiális visszavezetés:

- G' mérete G méretének polinomja és G' G-ből nyilván polinom időben előállítható.
- ha G-ben van egy $P : s \rightsquigarrow t$ irányított H-út, akkor G' konstrukciója miatt a következő G'-beli csúcssorozat H-út G'-ben: P szerint haladva minden v csúcsot sorra a v_{be}, $v_{\text{közép}}$, v_{ki} csúcsokkal helyettesítsük.
- ha G'-ben van egy $P' : s' \leftrightsquigarrow t'$ H-út, akkor P'-ben minden v-re v_{be}, $v_{\text{közép}}$, v_{ki} egymást követő csúcsok, hiszen $v_{\text{közép}}$ 2-fokú csúcs és máskülönben nem lehetne rajta P'-n. Ezen csúcshármasokat $\{u_{\text{ki}}, v_{\text{be}}\}$ típusú élek kötik össze, melyekhez definíció szerint van $u \to v$ él G-ben.
  Tehát ha minden v-re a P'-ben egymást követő v_{be}, $v_{\text{közép}}$, v_{ki} csúcshármast v-vel helyettesítjük egy G-beli irányított H-útat kapunk.

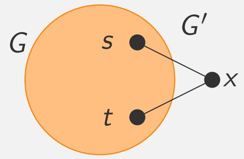
Irányítatlan Hamilton kör NP teljessége

Tétel

IHK NP-teljes

Bizonyítás: IHÚ $\leqslant_p$ IHK. Adott G, s, t. G' konstrukciója: adjunk hozzá G csúcshalmazához egy új x csúcsot és élhalmazához két új élt $\{s, x\}$-et és $\{t, x\}$-t.
Könnyen meggondolható, hogy ez egy polinomiális visszavezetés:

- G' G-ből nyilván polinom időben előállítható.
- ha G-ben van $P : s \rightsquigarrow t$ H-út, akkor G'-ben van H-kör: egészítsük ki P-t az $\{s, x\}$ és $\{t, x\}$ élekkel.



- ha G'-ben van C H-kör, akkor G-ben van $s \rightsquigarrow t$ H-út: C-nek tartalmaznia kell az $\{s, x\}$ és $\{t, x\}$ éleket, mivel x 2-fokú. C-ből $\{s, x\}$-et, $\{t, x\}$-et és x-et elhagyva egy G-beli $s \rightsquigarrow t$ H-út marad.

Az utazóügynök probléma

Számítási (optimalizálási) verzió: Adott egy G élsúlyozott irányítatlan gráf nemnegatív élsúlyokkal. Határozzuk meg a legkisebb összsúlyú H-kört (ha van).

Eldöntési verzió:
TSP=$\{\langle G, K\rangle \mid G$-ben van $\leqslant K$ súlyú H-kör$\}$.

Tétel

TSP NP-teljes

Bizonyítás: TSP $\in$ NP, hasonló érvek miatt, mint HÚ, az összköltség feltétel is polinom időben ellenőrizhető.

IHK $\leqslant_p$ TSP. Adott egy G gráf. G függvényében konstruálunk egy G' élsúlyozott gráfot és megadunk egy K számot. $G' := G$, minden élsúly legyen 1 és $K := |V|$. Könnyen látható, hogy G-ben van H-kör $\Leftrightarrow$ G'-ben van legfeljebb K összsúlyú H-kör.

A visszavezetés nyilvánvalóan polinom idejű.