Bevezetés a számításelméletbe

7. előadás

előadó: Tichler Krisztián
ktichler@inf.elte.hu

Algoritmikus problémák

(Emlékeztető:)

Algoritmikus eldöntési probléma:

Adott egy $\mathcal{P}$ eldöntendő kérdés (azaz „igen”/„nem” a lehetséges válaszok). A kérdés azon bemeneteit, amelyekre „igen” a válasz „igen”-példányoknak nevezzük.

Olyan mindig termináló, „igen”/„nem” kimenetű algoritmust keresünk, amelynek a bemenete az inputok lehetséges (végtelen) $\mathcal{I}$ halmazának egy eleme, kimenete pedig pontosan akkor „igen”, ha a bemenet $\mathcal{P}$-nek egy „igen”-példánya.

$\mathcal{I}$ lehet például

- $\mathbb{N}$,
- T^*, ahol T egy ábécé
- $\{G \mid G \text{ grammatika}\}$, stb.

Az „igen” példányok $\mathcal{I}$ egy részhalmazát alkotják és egy alkalmas ábécé felett kódolva tekinthetünk rájuk egy $L(\mathcal{P})$ formális nyelvként.

Algoritmikus problémák és matematikai gépek

Az eddig tanult matematikai gépek (véges automata, veremautomata) nyelvfelismerő eszközök, azaz pontosan a felismert nyelv szavaira adnak „igen” választ.

Mivel ezekre a gépekre úgy is gondolhatunk, hogy adott bemenetre utasítások egy véges sorozatát hajtják végre, valójában ezek a gépek az algoritmus fogalmának különböző mértékben korlátozott modelljeinek tekinthetők.

Amennyiben tehát egy ilyen matematikai géppel fel tudjuk ismerni $L(\mathcal{P})$-t, akkor a $\mathcal{P}$ problémát algoritmikusan eldöntöttük.

Algoritmikus problémák és matematikai gépek

A veremautomata a véges automata általánosítása, így az algoritmusok egy bővebb körét lehet verematomatával modellezni.

Elég általános modell-e a veremautomata egy tetszőleges algoritmus modellezésére?

Nem, a veremautomaták a környezetfüggetlen ($\mathcal{L}_2$-beli) nyelveket ismerik fel. Ugyanakkor $\mathcal{L}_0(\supset \mathcal{L}_2)$ elemei algoritmikusan előállíthatók (például egy 0-típusú grammatika által).

Van-e tehát olyan nagyobb számítási erővel bíró matematikai gép (általánosabban nyelvleíró eszköz, számítási modell), amely éppen az algoritmus fogalmának felel meg?

Az algoritmikus fogalmának modelljei

Az 1930-as évektől egyre nagyobb igény mutatkozott az algoritmus matematikai modelljének megalkotására. Egymástól függetlenül több bíztató kísérlet is született:

- Kurt Gödel: rekurzív függvények
- Alonso Church: λ-kalkulus
- Alan Turing: Turing gép

Melyik az „igazi”, melyiket válasszuk?

Az 1930-as évek második felétől sorra születtek olyan tételek, melyek ezen modellek megegyező számítási erejét mondták ki. A későbbiek során számos további számítási modellről sikerült bebizonyítani, hogy számítási erejük a Turing gépekkel ekvivalens. Például:

- 0. típusú grammatika
- veremautomata 2 vagy több veremmel
- C, Java, stb.

A Church-Turing tézis

Valójában nem ismerünk olyan algoritmikus rendszert, amelyről tudnánk, hogy erősebb a Turing gépnél, és a legtöbb algoritmikus rendszerre bizonyított, hogy gyengébb, vagy ekvivalens.

Már a 30-as években megfogalmazásra került a következő:

Church-Turing tézis

Minden formalizálható probléma, ami megoldható algoritmussal, az megoldható Turing géppel is.

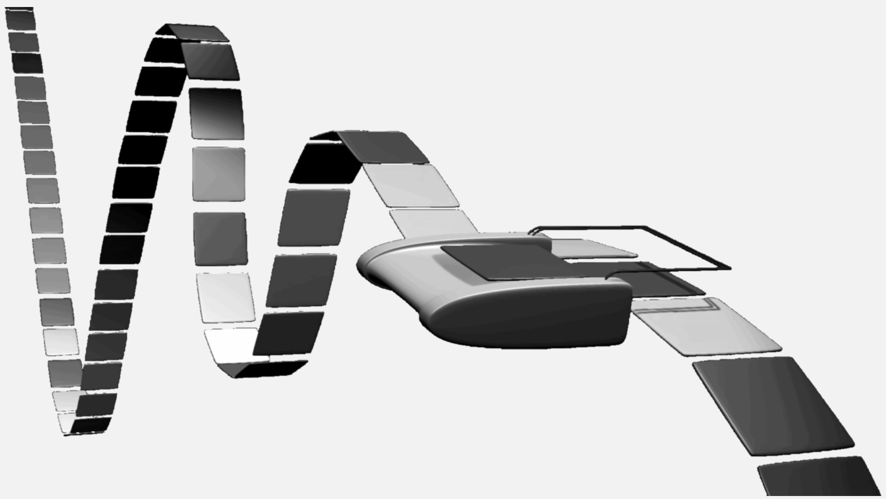
(illetve bármilyen, a Turing géppel azonos számítási teljesítményű absztrakt modellel)

NEM TÉTEL!!!

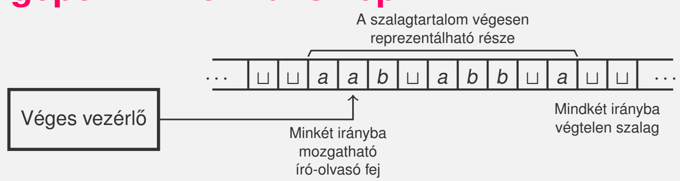
A Church-Turing tézis nem bizonyítható, hiszen nem egy formális matematikai állítás, az algoritmus intuitív fogalmát használja.

Ha elfogadjuk a tézis igazságát, a Turing gép (illetve bármely a Turing gépekkel ekvivalens modell) informálisan tekinthető az algoritmus matematikai modelljének.

Turing gépek

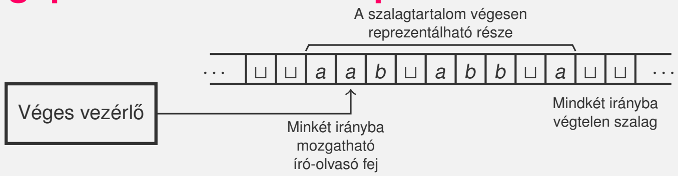


Turing gépek – Informális kép



- a Turing gép (TG) az algoritmus egyik lehetséges modellje
- a TG egyetlen programot hajt végre (de bármely inputra!!!), azaz tekinthető egy célszámítógépnek.
- informálisan a gép részei a vezérlőegység (véges sok állapottal), egy mindkét irányba végtelen szalag, és egy mindkét irányba lépni képes író-olvasó fej
- kezdetben egy input szó van a szalagon (ε esetén üres), a fej ennek első betűjéről indul, majd a szabályai szerint működik. Ha eljut az elfogadó állapotába elfogadja, ha eljut az elutasító állapotába elutasítja az inputot. Van egy harmadik lehetőség is: nem jut el soha a fenti két állapotába, "végtelen ciklusba" kerül.

Turing gépek – Informális kép



- a gép alapértelmezetten determinisztikus, minden (nem megállási) konfigurációnak van és egyértelmű a rákövetkezője.
- végtelen szalag: potenciálisan végtelen tár
- egy $\mathcal{P}$ probléma példányait egy megfelelő ábécé felett elkódolva a probléma „igen"-példányai egy $L(\mathcal{P})$ formális nyelvet alkotnak. $L(\mathcal{P})$ (és így a probléma maga is) algoritmikusan eldönthető, ha van olyan mindig termináló Turing gép, mely pontosan $L(\mathcal{P})$ szavait fogadja el.
- a Church-Turing tézis értelmében informálisan úgy gondolhatjuk, hogy éppen a TG-pel eldönthető problémák (nyelvek) az algoritmikusan eldönthető eldöntési problémák.

Turing gépek

Definíció

A **Turing gép** (továbbiakban sokszor röviden TG) egy $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n \rangle$ rendezett hetes, ahol

- Q az állapotok véges, nemüres halmaza,
- $q_0, q_i, q_n \in Q$, q_0 a kezdő- q_i az elfogadó- és q_n az elutasító állapot,
- Σ és Γ ábécék, a bemenő jelek illetve a szalagszimbólumok ábécéje úgy, hogy $\Sigma \subseteq \Gamma$ és $\sqcup \in \Gamma \setminus \Sigma$.
- $\delta : (Q \setminus \{q_i, q_n\}) \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, S, R\}$ az átmenet függvény. δ az egész $(Q \setminus \{q_i, q_n\}) \times \Gamma$-n értelmezett függvény.

$\{L, S, R\}$ elemeire úgy gondolhatunk mint a TG lépéseinek irányai (balra, helyben marad, jobbra). (Valójában elég lenne 2 irány: A helyben maradó lépések helyettesíthetők egy jobbra és egy balra lépéssel egy, csak erre az átmenetre használt új állapoton keresztül.)

A Turing gépek konfigurációi

A TG működtetését a gép konfigurációival írhatjuk le.

Definíció

Az uqv szó az $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n \rangle$ Turing gép egy **konfigurációja** ha $q \in Q$, $u, v \in \Gamma^*$ és $v \neq \varepsilon$.

Az uqv konfiguráció egy tömör leírás a TG aktuális helyzetéről, mely a gép további működése szempontjából minden releváns információt tartalmaz:

- a szalag tartalma uv (uv előtt és után a szalagon már csak $\sqcup$ van),
- a gép a q állapotban van és
- az író-olvasó fej a v szó első betűjén áll.

Két konfigurációt azonosnak tekintünk, ha csak balra/jobbra hozzáírt $\sqcup$-ekben térnek el egymástól. (Például $\sqcup abq_2\sqcup$ és $abq_2\sqcup\sqcup$.)

Amennyiben a fej egy u szó utáni első üres cellán áll a q állapotban, akkor ennek az $uq\sqcup$ konfiguráció felel meg.

A Turing gépek konfigurációi

A gép egy $u \in \Sigma^*$-beli szóhoz tartozó **kezdőkonfigurációja** a $q_0u\sqcup$ szó. (Vagyis q_0u, ha $u \neq \varepsilon$ és $q_0\sqcup$, ha $u = \varepsilon$).

Elfogadó konfigurációi azon konfigurációk, melyre $q = q_i$.

Elutasító konfigurációi azon konfigurációk, melyre $q = q_n$.

Az elfogadó és elutasító konfigurációkat együttesen **megállási konfigurációknak** nevezzük.

Megjegyzés: Miért $q_0u\sqcup$ és nem q_0u a kezdőkonfiguráció?

Azért, hogy ne legyen két eset. $u = \varepsilon$ esetén ugyanis $q_0u = q_0$ nem is konfiguráció. Ha $u = \varepsilon$, akkor a fej egy tetszőleges üres celláról indulhat, azaz $q_0\sqcup$ a kezdőkonfiguráció. Ha $u \neq \varepsilon$, akkor a $q_0u\sqcup$ és q_0u ugyanaz a konfiguráció.

Egylépéses konfigurácóátmenet

Jelölje C_M egy M TG-hez tartozó lehetséges konfigurációk halmazát.

Definíció

Egy $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n \rangle$ Turing gép $\vdash \subseteq C_M \times C_M$ **egylépéses konfigurációátmenet** relációját az alábbiak szerint definiáljuk.

Legyen $uqav$ egy konfiguráció, ahol $a \in \Gamma$, $u, v \in \Gamma^*$.

- Ha $\delta(q, a) = (r, b, R)$, akkor $uqav \vdash ubrv'$, ahol $v' = v$, ha $v \neq \varepsilon$, különben $v' = \sqcup$,
- ha $\delta(q, a) = (r, b, S)$, akkor $uqav \vdash urbv$,
- ha $\delta(q, a) = (r, b, L)$, akkor $uqav \vdash u'rcbv$, ahol $c \in \Gamma$ és $u'c = u$, ha $u \neq \varepsilon$, különben $u' = u$ és $c = \sqcup$.

Példa: Tegyük fel, hogy $\delta(q_2, a) = (q_5, b, L)$ és $\delta(q_5, c) = (q_1, \sqcup, R)$. Legyen továbbá $C_1 = bcq_2a\sqcup b$, $C_2 = bq_5cb\sqcup b$, $C_3 = b\sqcup q_1b\sqcup b$.
Ekkor $C_1 \vdash C_2$ és $C_2 \vdash C_3$.

Többlépéses konfigurációátmenet

Többlépéses konfigurációátmenet: $\vdash$ reflexív, tranzitív lezártja, azaz:

Definíció

A $\vdash^* \subseteq C_M \times C_M$ **többlépéses konfigurációátmenet** relációját a következőképpen definiáljuk: $C \vdash^* C' \Leftrightarrow$

- ha $C = C'$ vagy
- ha $\exists\, n > 0 \wedge C_1, C_2, \ldots C_n \in C_M$, hogy $\forall\, 1 \leq i \leq n-1$-re $C_i \vdash C_{i+1}$ valamint $C_1 = C$ és $C_n = C'$.

Ekvivalens definíció:
$C \vdash^* C' \;\Leftrightarrow\; (C = C') \vee (\exists\, C''$ konfiguráció: $(C \vdash^* C'') \wedge (C'' \vdash C'))$

Példa: (folytatás) Legyen C_1, C_2, C_3 ugyanaz, mint a fenti példában. Mivel $C_1 \vdash C_2$ és $C_2 \vdash C_3$ is teljesült, ezért $C_1 \vdash^* C_1$, $C_1 \vdash^* C_2$, $C_1 \vdash^* C_3$ is fennállnak.

A Turing gépek felismert nyelve

Az M TG által felismert nyelv

$L(M) = \left\{u \in \Sigma^* \,|\, q_0u\sqcup \vdash^* xq_iy \text{ valamely } x, y \in \Gamma^*, y \neq \varepsilon \text{ -ra}\right\}$.

Figyeljük meg, hogy $L(M)$ csak Σ feletti szavakat tartalmaz.

Felismerhetőség és eldönthetőség

Definíció

Egy $L \subseteq \Sigma^*$ nyelv **Turing-felismerhető**, ha $L = L(M)$ valamely M TG-re.

Definíció

Egy $L \subseteq \Sigma^*$ nyelv **eldönthető**, ha létezik olyan M TG, mely minden bemeneten megállási konfigurációba jut és $L(M) = L$.

A Turing-felismerhető nyelveket szokás rekurzívan felsorolhatónak (vagy *parciálisan rekurzívnak*, vagy *félig eldönthetőnek*) az eldönthető nyelveket pedig rekurzívnak is nevezni.

RE és R

A rekurzívan felsorolható nyelvek osztályát *RE* -vel, a rekurzív nyelvek osztályát pedig *R*-rel jelöljük:

Definíció

RE=$\{L \mid \exists M$ Turing gép, amelyre $L(M) = L\}$.

R=$\{L \mid \exists M$ minden inputra megálló Turing gép, melyre $L(M) = L\}$.

Nyilván $R \subseteq RE$.

- Igaz-e hogy minden nyelv *RE*-beli?
- Igaz-e hogy $R \subset RE$?

Válasz: későbbi előadáson.

A Turing gépek futási ideje

Definíció

Egy M TG **futási ideje** (időigénye) az u szóra t ($t \geq 0$), ha M az u-hoz tartozó kezdőkonfigurációból t lépésben (konfigurációátmenettel) jut el megállási konfigurációba. Ha nincs ilyen szám, akkor M futási ideje az u szóra végtelen.

Definíció

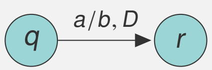
Legyen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ egy függvény. Azt mondjuk, hogy M egy $\boldsymbol{f(n)}$ **időkorlátos** gép (vagy M $f(n)$ időigényű), ha minden $u \in \Sigma^*$ input szóra M futási ideje az u szón legfeljebb $f(|u|)$.

Gyakran megelégszünk azzal, hogy a pontos időkorlát helyett jó aszimptotikus felső korlátot adjunk az időigényre.

Turing gépek – Példa

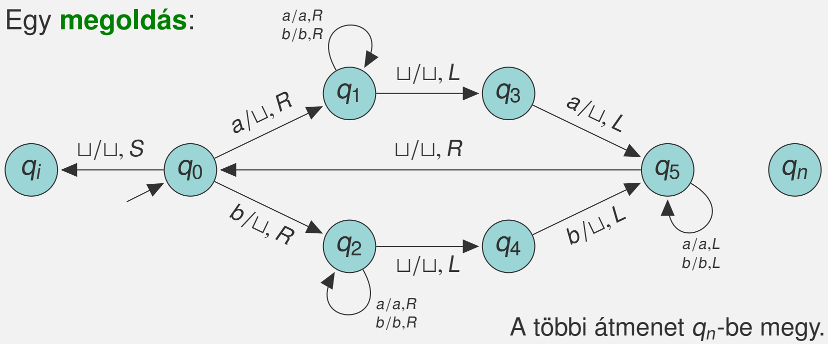
Feladat: Készítsünk egy M Turing gépet, melyre $L(M) = \{ww^{-1} \mid w \in \{a,b\}^*\}$!

Az **átmenetdiagram**.



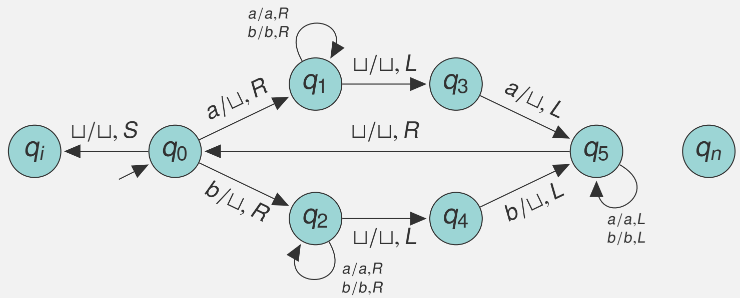
megfelel a $\delta(q,a) = (r,b,D)$ átmenetnek
$(q, r \in Q, a, b \in \Gamma, D \in \{L, S, R\})$

Egy **megoldás**:



A többi átmenet q_n-be megy.

Turing gépek – Példa (folyt.)



Példa. Konfigurációátmenetek sorozata az *aba* inputra:
$q_0aba \vdash q_1ba \vdash bq_1a \vdash baq_1\sqcup \vdash bq_3a \vdash q_5b \vdash q_5\sqcup b \vdash q_0b \vdash q_2\sqcup \vdash q_4\sqcup \vdash q_n\sqcup$.
Az *aba* inputra 10 lépésben jut a gép megállási konfigurációba. Ebben a példában tetszőleges n-re ki tudjuk számolni a pontos időigényt is, de egyszerűbb (és gyakran elegendő) egy jó aszimptotikus felső korlát megadása.

Függvények aszimptotikus nagyságrendje

Legyenek $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_0^+$ függvények, ahol $\mathbb{N}$ a természetes számok, $\mathbb{R}_0^+$ pedig a nemnegatív valós számok halmaza.

- f-nek g aszimptotikus felső korlátja (jelölése: $f(n) = O(g(n))$; ejtsd: $f(n)$ = nagyordó $g(n)$) ha létezik olyan $c > 0$ konstans és $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy $f(n) \leq c \cdot g(n)$ minden $n \geq N$-re.
- f-nek g aszimptotikus alsó korlátja (jelölése: $f(n) = \Omega(g(n))$) ha létezik olyan $c > 0$ konstans és $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy $f(n) \geq c \cdot g(n)$ minden $n \geq N$-re.
- f-nek g aszimptotikus éles korlátja (jelölése: $f(n) = \Theta(g(n))$) ha léteznek olyan $c_1, c_2 > 0$ konstansok és $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy $c_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot g(n)$ minden $n \geq N$-re.

Megjegyzés: a definíció könnyen kiterjeszthető aszimptotikusan nemnegatív, azaz egy korlát után nemnegatív értékű függvényekre. Ilyenek például a pozitív főegyütthatójú polinomok.

Függvények aszimptotikus nagyságrendje

O, Ω, Θ 2-aritású relációnak is tekinthető az $\mathbb{N} \to \mathbb{R}_0^+$ függvények univerzumán, ekkor

- O, Ω, Θ tranzitív (pl. $f = O(g),\ g = O(h) \ \Rightarrow\ f = O(h)$)
- O, Ω, Θ reflexív
- Θ szimmetrikus
- O, Ω fordítottan szimmetrikus ($f = O(g) \ \Leftrightarrow g = \Omega(f)$)
- (köv.) Θ ekvivalenciareláció, az $\mathbb{N} \to \mathbb{R}_0^+$ függvények egy osztályozását adja. Az egyes függvényosztályokat általában "legegyszerűbb" tagjukkal reprezentáljuk. Pl. 1 (korlátos függvények), n (lineáris függvények), n^2 (négyzetes függvények), stb. Persze a négyzetes függvények osztálya nem csak másodfokú polinomokat tartalmaz. Pl. $2n^2 + 3\log_2 n = \Theta(n^2)$.

Függvények aszimptotikus nagyságrendje

- $f, g = O(h) \ \Rightarrow\ f + g = O(h)$, hasonlóan Ω-ra, Θ-ra. (Összeadásra való zártság)
- Legyen $c > 0$ konstans $f = O(g) \ \Rightarrow\ c \cdot f = O(g)$, hasonlóan Ω-ra, Θ-ra. (Pozitív konstanssal szorzásra való zártság)
- $f + g = \Theta(\max\{f, g\})$ (szekvencia tétele). A domináns tag határozza meg egy összeg aszimptotikus nagyságrendjét.
- Ha létezik az f/g határérték

  ha $f(n)/g(n) \to +\infty \Rightarrow f(n) = \Omega(g(n))$ és $f(n) \neq O(g(n))$

  ha $f(n)/g(n) \to c \quad (c > 0) \Rightarrow f(n) = \Theta(g(n))$

  ha $f(n)/g(n) \to 0 \quad \Rightarrow f(n) = O(g(n))$ és $f(n) \neq \Omega(g(n))$

Függvények aszimptotikus nagyságrendje

- $p(n) = a_k n^k + \cdots + a_1 n + a_0$ $(a_k > 0)$, ekkor $p(n) = \Theta(n^k)$,
- Minden $p(n)$ polinomra és $c > 1$ konstansra $p(n) = O(c^n)$, de $p(n) \neq \Omega(c^n)$,
- Minden $c > d > 1$ konstansokra $d^n = O(c^n)$, de $d^n \neq \Omega(c^n)$,
- Minden $a, b > 1$-re $\log_a n = \Theta(\log_b n)$,
- Minden $c > 0$ -ra $\log n = O(n^c)$, de $\log n \neq \Omega(n^c)$.

Megjegyzés:

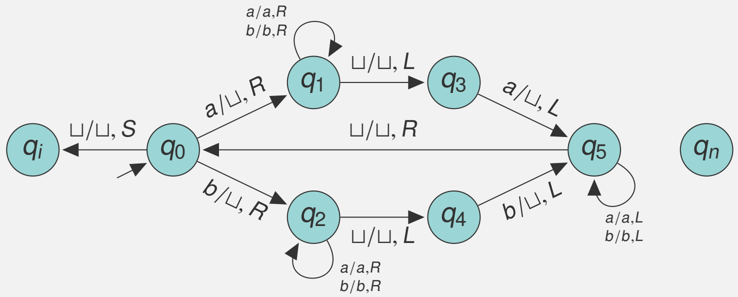
A jelölés Edmund Landau német matematikustól származik.

Matematikailag precízebb például $f = O(g)$ helyett a következő:

$O(g) := \{f \mid \exists c > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N : f(n) \leq c \cdot g(n)\}$.

Ilyenkor ha f-nek g aszimptotikus felső korlátja $f \in O(g)$-t írhatunk.

Turing gépek – Példa (folyt.)



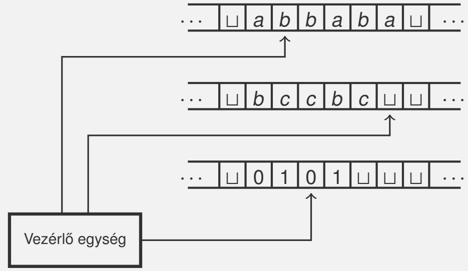
A TG időigénye $O(n^2)$, hiszen $O(n)$ iteráció mindegyikében $O(n)$-et lépünk, +1 lépés q_i-be vagy q_n-be.

Van-e jobb aszimptotikus felső korlát? Nincs, mert van végtelen sok szó, melyre $\Omega(n^2)$-et lép.

Eldönti $L = \{ww^{-1} \mid w \in \{a, b\}^*\}$-et vagy „csak” felismeri? Eldönti.

Van-e olyan TG, ami nem dönti el, de azért felismeri L-et? Igen, a q_n-be menő átmeneteket vezessük végtelen ciklusba.

Többszalagos Turing gép – Informális kép



- Véges vezérlő egység, $k(\geq 1)$ darab kétirányba végtelen szalag, minden szalaghoz egy-egy saját író-olvasó fej.
- Egy ütem: Minden szalagról a fejek által mutatott betűk egyszerre történő beolvasása, átírása és a fejek léptetése egyszerre, de egymástól független irányokba.
- Az egyszalagos géppel analóg elfogadás fogalom.
- Az egyszalagos géppel analóg időigény fogalom (1 lépés = 1 ütem).

k-szalagos Turing gép

Definíció

Adott egy $k \geq 1$ egész szám. A ***k*-szalagos Turing gép** egy olyan $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n \rangle$ rendezett hetes, ahol

- Q az állapotok véges, nemüres halmaza,
- $q_0, q_i, q_n \in Q$, q_0 a kezdő- q_i az elfogadó- és q_n az elutasító állapot,
- Σ és Γ ábécék, a bemenő jelek illetve a szalagszimbólumok ábécéje úgy, hogy $\Sigma \subseteq \Gamma$ és $\sqcup \in \Gamma \setminus \Sigma$,
- $\delta : (Q \setminus \{q_i, q_n\}) \times \Gamma^k \to Q \times \Gamma^k \times \{L, S, R\}^k$ az átmenet függvény.

δ az egész $(Q \setminus \{q_i, q_n\}) \times \Gamma^k$-n értelmezett függvény.

k-szalagos Turing gépek konfigurációi

Definíció

k-szalagos TG **konfigurációja** egy $(q, u_1, v_1, \ldots, u_k, v_k)$ szó, ahol $q \in Q$ és $u_i, v_i \in \Gamma^*, v_i \neq \varepsilon$ $(1 \leq i \leq k)$.

Ez azt reprezentálja, hogy

- az aktuális állapot q és
- az i. szalag tartalma $u_i v_i$ $(1 \leq i \leq k)$ és
- az i. fej v_i első betűjén áll $(1 \leq i \leq k)$.

Definíció

Az u szóhoz tartozó **kezdőkonfiguráció**: $u_i = \varepsilon$ $(1 \leq i \leq k)$, $v_1 = u\sqcup$, és $v_i = \sqcup$ $(2 \leq i \leq k)$.

Azaz, az input szó az első szalagon van, ennek az első betűjéről indul az első szalag feje. A többi szalag kezdetben üres.

k-szalagos Turing gépek megállási konfigurációi

Definíció

A $(q, u_1, v_1, \ldots, u_k, v_k)$ konfiguráció, ahol $q \in Q$ és $u_i, v_i \in \Gamma^*$, $v_i \neq \varepsilon$ $(1 \leq i \leq k)$,

- **elfogadó konfiguráció**, ha $q = q_i$,
- **elutasító konfiguráció**, ha $q = q_n$,
- **megállási konfiguráció**, ha $q = q_i$ vagy $q = q_n$.

k-szalagos TG-ek egylépéses konfigurációátmenete

Definíció

Egy $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n \rangle$ k-szalagos Turing gép $\vdash \subseteq C_M \times C_M$ **egylépéses konfigurációátmenet** relációját az alábbiak szerint definiáljuk.

Legyen A $C = (q, u_1, a_1 v_1, \ldots, u_k, a_k v_k)$ egy konfiguráció, ahol $a_i \in \Gamma$, $u_i, v_i \in \Gamma^*$ $(1 \leq i \leq k)$. Legyen továbbá $\delta(q, a_1, \ldots, a_k) = (r, b_1, \ldots, b_k, D_1, \ldots, D_k)$, ahol $q, r \in Q$, $b_i \in \Gamma, D_i \in \{L, S, R\}$ $(1 \leq i \leq k)$. Ekkor $C \vdash (r, u'_1, v'_1, \ldots, u'_k, v'_k)$, ahol minden $1 \leq i \leq k$-ra

- ha $D_i = R$, akkor $u'_i = u_i b_i$ és $v'_i = v_i$, ha $v_i \neq \varepsilon$, különben $v'_i = \sqcup$,
- ha $D_i = S$, akkor $u'_i = u_i$ és $v'_i = b_i v_i$,
- ha $D_i = L$, akkor $u_i = u'_i c$ $(c \in \Gamma)$ és $v'_i = c b_i v_i$ ha $u_i \neq \varepsilon$, különben $u'_i = \varepsilon$ és $v'_i = \sqcup b_i v_i$.

k-szalagos TG-ek többlépéses konfigurációátmenete

Tehát egy szalagjára vetítve a többszalagos TG pont úgy működik, mint az egyszalagos TG.

Példa:

Legyen k=2 és $\delta(q, a_1, a_2) = (r, b_1, b_2, R, S)$ a TG egy átmenete. Ekkor $(q, u_1, a_1 v_1, u_2, a_2 v_2) \vdash (r, u_1 b_1, v'_1, u_2, b_2 v_2)$, ahol $v'_1 = v_1$, ha $v_1 \neq \varepsilon$, különben $v'_1 = \sqcup$.

Vegyük észre, hogy a fejek nem kell, hogy egyazon irányba lépjenek.

A k-szalagos TG-ek **többlépéses konfigurációátmenet** relációját ugyanúgy definiáljuk, mint az egyszalagos esetben. Jelölés: $\vdash^*$.

k-szalagos TG által felismert nyelv, a TG időigénye

k-szalagos Turing gép által felismert nyelv

$L(M) = \Big\{ u \in \Sigma^* \,|\, (q_0, \varepsilon, u\sqcup, \varepsilon, \sqcup, \ldots, \varepsilon, \sqcup) \vdash^* (q_i, x_1, y_1, \ldots x_k, y_k)$, valamely $x_1, y_1 \ldots, x_k, y_k \in \Gamma^*, y_1, \ldots, y_k \neq \varepsilon$ -ra$\Big\}$.

Azaz, csakúgy mint az egyszalagos esetben, azon inputábécé feletti szavak halmaza, melyekkel (az első szalagján) a TG-et indítva az az elfogadó, q_i állapotában áll le.
A k-szalagos TG-ek által **felismerhető** illetve **eldönthető** nyelvek fogalma szintén analóg az egyszalagos esettel.

k-szalagos Turing gép futási ideje adott szóra

Egy k-szalagos Turing gép **futási ideje** egy u szóra a hozzá tartozó kezdőkonfigurációból egy megállási konfigurációba megtett lépések száma.

Ezek után az **időigény** definíciója megegyezik az egyszalagos esetnél tárgyalttal.

k-szalagos Turing gép – átmenetdiagram

A k-szalagos TG-ek **átmenetdiagramja** egy csúcs- és élcímkézett irányított gráf, melyre

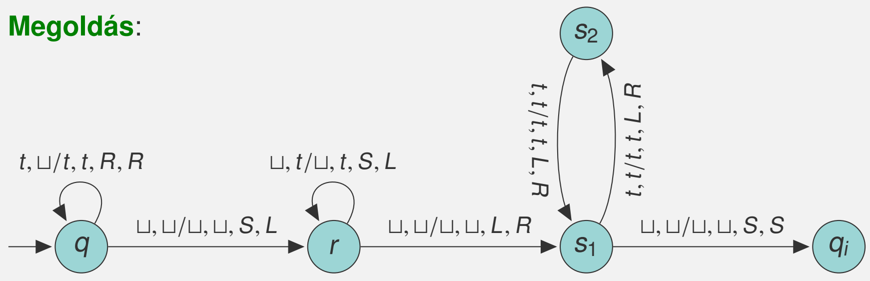
$$q \xrightarrow{a_1,\dots,a_k/b_1,\dots,b_k,D_1,\dots,D_k} r$$

$$\iff \delta(q,a_1,\dots,a_k) = (r,b_1,\dots,b_k,D_1,\dots,D_k)$$
$$(q,r\in Q, a_1,\dots,a_k,b_1,\dots,b_k\in\Gamma, D_1,\dots,D_k\in\{L,S,R\})$$

Feladat: Készítsünk egy M kétszalagos Turing gépet, melyre $L(M)=\{ww^{-1}\,|\,w\in\{a,b\}^*\}$!

k-szalagos Turing gép – példa

Megoldás:



$t\in\{a,b\}$ tetszőleges. A többi átmenet q_n-be megy.

Például $(q,\varepsilon,abba,\varepsilon,\sqcup)\vdash(q,a,bba,a,\sqcup)\vdash(q,ab,ba,ab,\sqcup)\vdash$ $(q,abb,a,abb,\sqcup)\vdash(q,abba,\sqcup,abba,\sqcup)\vdash(r,abba,\sqcup,abb,a)\vdash$ $(r,abba,\sqcup,ab,ba)\vdash(r,abba,\sqcup,a,bba)\vdash(r,abba,\sqcup,\varepsilon,abba)\vdash$ $(r,abba,\sqcup,\varepsilon,\sqcup abba)\vdash(s_1,abb,a,\varepsilon,abba)\vdash(s_2,ab,ba,a,bba)\vdash$ $(s_1,a,bba,ab,ba)\vdash(s_2,\varepsilon,abba,abb,a)\vdash$ $(s_1,\varepsilon,\sqcup abba,abba,\sqcup)\vdash(q_i,\varepsilon,\sqcup abba,abba,\sqcup)$

Mennyi a TG időigénye? Ez egy $O(n)$ időkorlátos TG, mivel egy n hosszú inputra legfeljebb $3n+3$ lépést tesz.

k-szalagos TG szimulálása egyszalagossal

Definíció

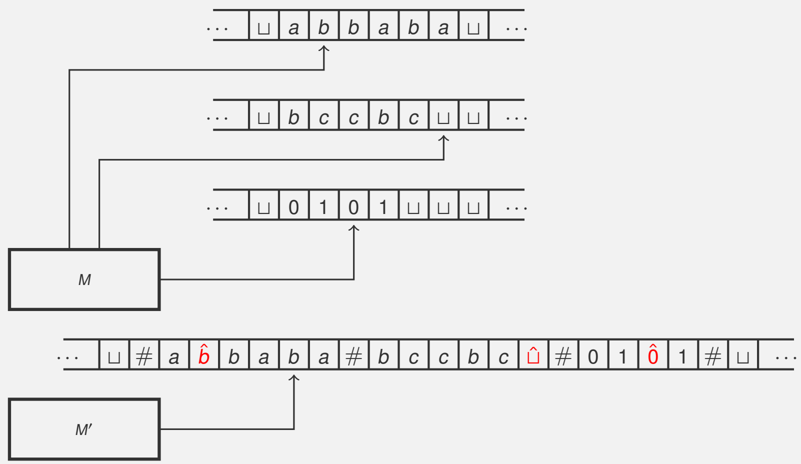
Két TG **ekvivalens**, ha ugyanazt a nyelvet ismerik fel.

Tétel

Minden M k-szalagos Turing géphez megadható egy vele ekvivalens M' egyszalagos Turing gép. Továbbá, ha M legalább lineáris időigényű $f(n)$ időkorlátos gép (azaz $f(n)=\Omega(n)$), akkor M' $O(f(n)^2)$ időkorlátos.

k-szalagos TG szimulálása egyszalagossal

Bizonyítás (vázlat): A szimuláció alapötlete



k-szalagos TG szimulálása egyszalagossal

A szimuláció menete egy $a_1 \cdots a_n$ bemeneten:

1. M' kezdőkonfigurációja legyen $q'_0 \# \hat{a}_1 a_2 \cdots a_n \# \hat{\sqcup} \# \cdots \hat{\sqcup} \#$
2. M' először végigmegy a szalagon (számolja a $\#$-okat) és eltárolja a $\hat{}$ -pal megjelölt szimbólumokat az állapotában (Például az ábrán látható esetben ha M a q állapotában van akkor M' a $(q), (q, b), (q, b, \sqcup)$ állapotokon keresztül a $(q, b, \sqcup, 0)$ állapotába kerül.)
3. M' mégegyszer végigmegy a szalagján és M átmenetfüggvénye alapján aktualizálja azt
4. ha M valamelyik szalagján nő a szalagtartalmat leíró szó hossza, akkor M'-nek az adott ponttól egy cellával jobbra kell mozgatnia a szalagja tartalmát, hogy legyen hely az új betű számára
5. Ha M elfogadó vagy elutasító állapotba lép, akkor M' is belép a saját elfogadó vagy elutasító állapotába
6. Egyébként M' folytatja a szimulációt a 2-ik ponttal

k-szalagos TG szimulálása egyszalagossal

Meggondolható, hogy M egyetlen lépésének szimulálásakor

- a lépések számára aszimptotikus felső korlát az M' által addig felhasznált cellaterület (tár). (Kétszer végigmegy M' a szalagján, legfeljebb k-szor kell egy $\sqcup$-nek helyet csinálni, ami szintén O(felhasznált cellaterület) lépésben megoldható.)
- a felhasznált cellaterület $O(1)$-el nőtt. ($\leq k$-val, hiszen $\leq k$-szor kellhet egy $\sqcup$-t beszúrni.)

Az M' által felhasznált cellaterület mérete kezdetben $\Theta(n)$, lépésenként $O(1)$-gyel nőhet, így $\leq f(n)$ darab lépés után az M' szalagján lévő szó hossza $O(n + f(n)O(1)) = O(n + f(n))$.
Tehát M minden egyes lépésének M' általi szimulációja $O(n + f(n))$ lépés.
Mivel bármely n hosszú szóra az M gép $\leq f(n)$ lépést tesz, ezt az M' gép összesen $f(n) \cdot O(n + f(n))$ lépéssel tudja szimulálni, azaz $f(n) \cdot O(n + f(n))$ időkorlátos. Ez $O(f(n)^2)$, ha $f(n) = \Omega(n)$.

Turing gép egy irányban végtelen szalaggal

- Az egy irányban végtelen szalagos Turing gép egy, a bal oldalán zárt szalaggal rendelkezik
- A fej nem tud "leesni" a bal oldalon, még ha az állapot-átmeneti függvény balra lépést ír is elő a legbaloldalibb cellán, ilyenkor a fej helyben marad.

Tétel

Minden egyszalagos M Turing géphez van vele ekvivalens egyirányban végtelen szalagos M'' Turing gép.

Turing gép egy irányban végtelen szalaggal

Tétel

Minden egyszalagos M Turing géphez van vele ekvivalens egyirányban végtelen szalagos M'' Turing gép.

Bizonyítás (vázlat):

1. Szimuláljuk M-et egy olyan M' TG-pel, ami két darab egy irányban végtelen szalaggal rendelkezik:
   M' megjelöli mindkét szalagjának első celláját egy speciális szimbólummal. Ezután M'
   – az első szalagján szimulálja M-et akkor, amikor az a fej kezdőpozícióján vagy attól jobbra dolgozik,
   – a második szalagján pedig akkor, amikor az M a fej kezdőpozíciótól balra dolgozik (ezen a szalagon az ettől a pozíciótól balra lévő szó tükörképe van)
2. Szimuláljuk M'-t egy egyirányban végtelen szalagos M'' Turing géppel (az előző tételben látott bizonyításhoz hasonlóan)