1. Az elsőrendű logika szintaxisa

6.1 Alapelemek

Nyelv=abc + szintaxis + szemantika.

6.1.1 Abc

Logikai rész:

- $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\forall$, $\exists$
- Individúm változók (X, Y, …)
- Elválasztó jelek („(„ „)”)
- (ítélet változók)

Logikán kívüli rész:

- Függvény, predikátum és konstans szimbólumok
- Elemfajták halmaza

Szintaxis - jól formált kifejezés előállításának szabályai

6.1.2 Term - matematikai leképezés szimbolizálása

1. Egy indivíduum változó x jól formált term (jft)
2. Ha f egy n változós függvényszimbólum és $t_1, t_2, ..., t_n$ jft-ek, akkor $f(t_1, t_2, ..., t_n)$ jft.
3. Minden jft az 1., 2 véges sokszori alkalmazásával áll elő.

6.1.3 Formula - logikai leképezés szimbolizálása

1. . Ha P egy n változós predikátumszimbólum és $t_1, t_2, ..., t_n$ jft-ek, akkor $P(t_1, t_2, ..., t_n)$ **jól formált formula (jff).** (atomi formula, primformula)

2. Ha A, B jff-ák, akkor

(A)	jff.,	(zárójeles)
$\neg A$,	jff.	(negációs formula)
$A \wedge B$	jff.,	(konjunkciós formula)
$A \vee B$	jff.,	(diszjunkciós formula)
$A \rightarrow B$	jff.,	(implikációs formula)
$A \leftrightarrow B$	jff.	(ekvivalencia formula)

--0-rendű formulák

3. $\forall$**x**A, $\exists$xA jff-ák. (kvantált formula, prim formula)

--1. rendű formulák

4. Minden jff az 1., 2 és 3 véges sokszori alkalmazásával áll elő.

6.2 Hatáskörök, típusok

6.2.1 Logikai műveleti jelek hatásköre

A kvantorok **(∀, ∃)** prioritása a legerősebb az összes logikai műveletei jel között.
A **∀, ∃** hatásköre a legszűkebb részformula jobbra.

A hatókörök megállapításánál ezt a szabályt kell figyelembe venni, és az Ítéletkalkulusnál megismert szabályokkal együtt kell alkalmazni.

Példa

$$\forall x P(x) \rightarrow \exists y (Q(x,y) \vee P(y) \rightarrow \forall z Q(y,z))$$

hatáskör hatáskör

hatáskör

6.2.2 Változó előfordulás típusa

Egy formulában egy x változó egy előfordulása:

- szabad, ha nem esik x-re vonatkozó kvantor hatáskörébe
- kötött ha x-re vonatkozó kvantor hatáskörébe esik.

Példa
A fenti formulában x első előfordulása kötött, második előfordulása viszont szabad. Y mindegyik előfordulása kötött. Z mindegyik előfordulása kötött (egy van).

6.2.3 Változó minősítése

Egy x változó egy formulában:

- kötött változó ha x minden előfordulása kötött,
- szabad változó ha x minden előfordulása szabad,
- vegyes változó ha x -nek van szabad és kötött előfordulása is.

Példa

A fenti példában: x vegyes, y kötött, z kötött

6.2.4 Formula minősítése

- **Egy formula zárt**, ha minden változója kötött.
- **Egy formula nyitott**, ha legalább egy indivíduum változónak van legalább egy szabad előfordulása.
- **Egy formula kvantormentes**, ha nem tartalmaz kvantort.

Példa
A fenti formula nyitott, mert például x-nek van szabad előfordulása.

Példa

Határozzuk meg a következő formulákban a kvantorok hatáskörét, a változóelőfordulások típusát, a változó minősítéseket, és a formula minősítéseket.

- $\forall x P(x) \to \exists y (Q(x,y) \vee P(y) \to \forall z Q(y,z))$
- $\exists x \, \forall y \, Q(x,y) \to \exists y \forall \, x \, (P(x) \to \neg \, P(z) \to \neg \, Q(w,y))$
- $\forall x \, \exists v \forall y \, Q(x,y) \to \neg \exists v P(v) \, \neg \, \vee \, P(z)$

6.3 Mit értünk matematikai struktúrán. Mi a struktúra típusa.

6.3.1 Matematikai struktúra

Az **(*U; R; M; C*)** négyes ***matematikai struktúra*** vagy modell, ahol:

- *U* nem üres halmaz, az értelmezési tartomány, **univerzum** , vagy indivíduumhalmaz**,**
- *R* az *U*-n értelmezett relációk, (alap) **relációk** (logikai függvények/leképezések $U^n \to \{i,h\}$)
- *M* az *U*-n értelmezett műveletek halmaza, (alap)**műveletek** (matematikai függvények/leképezések, $U^n \to U$**).**
- *C* pedig *U*-beli elemek halmaza

6.3.2 A struktúra szignatúrája

A struktúra **szignatúrája** a ν_1,ν_2,ν_3 hármassal jellemezhető, ahol:

- ha $R \in \mathcal{R}$ és R: $U^n \to \{i,h\}$, akkor $\nu_1(R)=n$
- ha $F \in \mathcal{F}$ és F: $U^n \to U$, akkor $\nu_2(F)=n$
- a ν_3 megadja *C* elemeinek számát.

6.3.3 A struktúra típusa

A struktúra típusa- a szignatúra egy másik megadási módja.

A típus megadásának az a módja, hogy az univerzum megadása után az alapműveletek, és az alaprelációk aritásának, majd pedig a konstansoknak a felsorolása történik meg :

$$<U, F_1, F_2, \ldots, F_k; R_1, R_2, \ldots, R_n; m_1, m_2, \ldots, m_s; c_1, c_2, \ldots, c_q>$$

6.4 Mi a matematikai logika nyelve

6.4.1 A leíró nyelv ábécéje (V_v)

A logikai jelkészlet:

- az **indivíduumváltozók**,
- az egyenlőségreláció neve (=),
- a **logikai összekötőjelek** és a
- **kvantorok**
- kiegészítő elemek az **elválasztójelek**.

A nem logikai jelkészlet a relációk, műveletek és a konstansok nevei.

Az Ω = <Tp, Kn, Fn, Pr > struktúra egy logikai nyelv megadását jelenti, ahol

- Tp: típusok halmaza
- Kn: konstansok halmaza (kitüntetett U-beli elemek)
-
- Fn: függvényszimbólumok halmaza
- Pr: Predikátum szimbólumok halmaza

(ν_1,ν_2,ν_3): a struktúra szignatúrája

6.4.2 A matematikai logika nyelve

V_v abc feletti elsőrendű nyelv a matematikai logika nyelve.
Jele: $L(V_v)$

A matematikai logika nyelve olyan nyelv, mellyel bármely matematikai struktúra szimbolizálható.
Pl. az elemi aritmetika, ill. a részhalmaz nyelv is matematikai struktúrákat leíró nyelvek.

6.4.3 Hogyan lehet egy matematikai struktúrát nyelvként felfogni

(Könyv: 42.o)

Az $L(V_v)$ elsőrendű logikai nyelv modellje vagy interpretációja egy általános matematikai struktúra, ha szignatúrájuk megegyezik. Ilyenkor a matematikai struktúra megfelel a logikai nyelvnek.

A formalizált vagy többfajtájú Ω nyelv és a matematikai struktúra ABC-je közötti kapcsolat.

struktúra	struktúra ábécé	L mat. log. nyelv ábécé	jelölés	minőség	összefoglaló jel
az U univerzum elemei és a fajták halmaza (k-féle)	individuum változók	individuum változók az egyes fajtákhoz rendelve	x^{f1},y^{f1}, ..., ... x^{fk},y^{fk}, ...,	logikai	Tp
alapműveletek. arg. szám (0,1...) és fajták.	Alapműveletek nevei.	függvény szimbólumok (a konstansok is) arg. szám (0,1...) és fajták.	$f^{(ti1, ..., tin, tf)}$, $g^{(tj1, ..., tjn, tg)}$,	logikán	Fn
alaprelációk arg. szám.(1,2...)	alaprelációk nevei	predikátum szimbólumok arg. szám.(1,2...) és	$P^{(tk1, ..., tkn)}$, $Q^{(ts1, ..., tsn,)}$, ...	kívüli	Pr

		fajták			
egyenlőség reláció	=	az egyenlőség predikátum	=	logikai	

6.5 Néhány matematikai diszciplína (struktúra) leíró (logikai) nyelve.

6.5.1 Az elemi aritmetika nyelve (Ar nyelv)

1. A matemarikai struktúra:
   - -Univerzum: N_0
   - - alapreláció: = (kétváltozós)
   - - műveletek: s(x) (rákövetkezés, egyváltozós), +, * (összeadás, szorzás)
   - - szignatúra: v1(=): 2, v2(s): 1, v2(+): 2, v2(*): 2, v3: 1
2. A struktúrát leíró logikai nyelv: az Ar nyelv
   - - a nyelv logikán kívüli része: ábécé: (=; s, +, *; 0),
     szignatúra: (2; 1, 2, 2; 1)
   - - logikai része: individuumváltozók, logikai összekötőjelek, kvantorok, elválasztó-jelek

Szintaxisa: megmondja, hogyan lehet az ábécé segítségével aritmetikai kifejezéseket leírni;

<u>termek</u>

- a 0 konstans
- individuumváltozók,
- és ezekből az alapműveletekkel (függvény szimbólumokkal) felírt további termek

<u>formulák</u>

- atomi formula: két term alaprelációval (predikátum szimbólumokkal) összekapcsolása
- további formulák a logikai összekötőkkel és kvantorokkal írhatók fel

Szemantikája

- egy n-változós term egy $N_0^{n.} \to N_0$ műveletet ír le,
- egy n-változós formula egy $N_0^{n} \to \{i,h\}$ logikai fgv-t ír le.

Ezeket az alapműveletek és alaprelációk ismeretében határozhatjuk meg.

Példa

Adjuk meg a következő kifejezések közül melyek jólformált termek ill. formulák

- **x =y**
- **s(s(x))**
- **0 * s(s(0)) + 0**
- **x=y ∧ s(s(0)) =x**
- **∀x(s(s(x))∧ y=z)**
- **s(s(x))= s(y) =0**

- **$x*y+s(s(y))+$**
- **$s(s(x)) \wedge y < x$**

Példa:

(27. o. –2005.)

Formalizálni relációkat és műveleteket, amelyek nem szerepelnek mint alaprelációk és alapműveletek.

- **$x \geq y$**
- **x osztója y-nak**
- **x prímszám**
- **$x=y+z$**

$x \geq y =_{def} \exists z(y+z)=x$

x osztója y-nak $=_{def} \exists z(x * z)=y$

x prímszám $=_{def} x \neq 0 \wedge x \neq s(0) \wedge \forall z(z \mid x \rightarrow (z=s(0) \vee z=x))$

$x=y+z =_{def} \forall y(z=s(0) \rightarrow x= s(y)) \wedge \forall y(x=y+z \rightarrow s(x)=y+s(z))$

6.5.2 A Részhalmaz Nyelv

A Részhalmaz nyelv: $<P(H); \subseteq; \quad ; \quad >$

Szignatura: $< 2; \quad ; 0 >$

Példa

Formalizáljuk a következő relációkat

- **$x=y$**
- **$x \neq y$**
- **$x \subset y$**
- **$x = y \cap z$**

Néhány fontosabb reláció formalizálása:

$x=y =_{def} x \subseteq y \wedge y \subseteq x$

$x \neq y =_{def} \neg\, x=y$

$x \subset y =_{def} x \subseteq y \wedge x \neq y$

$x = y \cap z =_{def} x \subseteq y \wedge x \subseteq z \wedge \forall v(v \subseteq y \wedge v \subseteq z \rightarrow v \subseteq x)$

Hf.: D(x,y)= i, ha x, y diszjunkt halmazok

6.6 Prímformula, prímkomponens, szerkezeti fa

6.6.1 Alapkifejezés (alapterm, alapatom, alapformula):

Kifejezés: termek + formulák

Azokat a kifejezéseket, melyekben nincs individúmváltozó alapkifejezéseknek nevezzük.

- alapterm: f(t1, ..., tn)
- alapatom: p(t1, ..., tn)
- alapformula: tettszőleges formula, melyben nincs individúm változó

Nem alapkifejezés például a kvantoros formula, mert ott legalább egy vátozónak kell lenni, amire a kvantor vonatkozik.

6.6.2 Prímformula, prímkomponens

Def.:

Egy 1. rendű formula **primformulái**

- az atomi formulák (p(t1, ..., tn)) és a
- kvantált formulák

Egy 1. rendű formula **primkomponensei** a formula azon primformulái, amelyekből a formula logikai összekötőjelek segítségével épül fel.

Példa:

P(X) prímformula, de csak akkor prímkomponens, ha magában szerepel a formulában:

P(X) ∧ Q(X) ben: P(X) prímkomponens is

∀xP(x) ∧ Q(X) ben: P(X) nem prímkomponens, csak prímformula

Példa:

Határozzuk meg a következő formula prímformuláit és prímkomponenseit. Van-e olyan köztük, amelyik nem esik kvantor hatáskörébe?

- **∀zR(z, g(z)) ∧(Q(g(x)) ∨ ∀xR(x,x))**

Prímformulák: **R(z, g(z)), R(x,x), <u>Q(g(x),</u> ∀zR(z, g(z)), ∀xR(x,x)**

Prímkomponensek: **∀zR(z, g(z)), <u>Q(g(x)),</u> ∀ xR(x,x)**

Nem esik kvantor hatáskörébe<u>:</u>

6.6.3 Term és formula szekezeti fája

(Könyv 116.-117. o.)

Egy t term szerkezeti fája egy olyan véges rendezett fa, melynek csúcsai termek

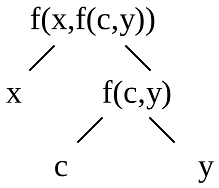
1. gyökere t
2. a f(t1, ..., tn) termet tartalmazó csúcsnak pontosan n gyermeke van, ezek rendre a t1, ..., tn termek
3. levelei pedig változók vagy konstans szimbólumok

Egy C formula szerkezeti fája egy olyan véges rendezett fa, melynek csúcsai formulák gyökere C

1. ¬A csúcsának egy gyermeke van az A formula
2. (A○B) csúcsának két gyermeke van, rendre az A és a B formulák

3. egy QxA csúcsának is egy gyermek van, az A
4. levelei atomi formulák

Példa: Határozzuk meg a következő term szerkezeti fáját**.**



Példa: Házi feladat

Határozzuk meg a következő formula szerkezeti fáját.

- $\forall x \exists y Q(g(f(x), y)) \to \exists z P(z, z) \vee \forall x \forall y P(x, g(x, y))$
- $\forall z R(z, g(z)) \wedge (Q(g(x)) \vee \forall x R(x,x))$

2. Az elsőrendű logika szemantikája

Alapkifejezés (alapterm, alapatom, alapformula):

Kifejezés: termek + formulák

Azokat a kifejezéseket, melyekben nincs indivídumváltozó alapkifejezéseknek nevezzük.

- alapterm: f(t1, ..., tn)
- alapatom: p(t1, ..., tn)
- alapformula: tettszőleges formula, melyben nincs indivídum változó

Nem alapkifejezés például a kvantoros formula, mert ott legalább egy vátozónak kell lenni, amire a kvantor vonatkozik.

A σ *L*-értékelés. Ez egy leképezés, amely egy formulához hozzárendeli annak jelentését.

8.1 Informális definíció.

A formula valamely $L(P_1, P_2,..., P_n; f_1, f_2,..., f_k)$ formalizált nyelven íródott, (ahol ($r_1, r_2, ..., r_n; s_1, s_2, ..., s_k$) az *L* nyelv típusa).

<u>1. lépés</u>. Választunk egy $S= U(R_1, R_2,..., R_n; o_1, o_2,..., o_k)$ matematikai struktúrát, amelynek a típusa
($r_1, r_2, ..., r_n; s_1, s_2, ..., s_k$) megegyezik a nyelvével és a logikán kívüli szimbólumokat a megfelelő relációkkal illetve műveletekkel azonosítjuk: $R_i= P_i^\sigma$, $o_k=f_k^\sigma$, ha az interpretáló struktúrának nincs leíró nyelve, vagy nem akarjuk azt használni. Ha felhasználjuk az interpretáló struktúra leíró nyelvét, akkor $P_i^\sigma =R_i$ és $f_k^\sigma = o_k$. Ez a nyelv szimbólumainak interpretációja, ahol R_i és o_k.jelentése egyértelmű.

<u>2. lépés</u> A nem kötött indivíduum változók értékelése (x_s^σ) és a kifejezések helyettesítési értékeinek kiszámítása.

8.2 Formális definíció.

- Termek:

1. $\mathbf{x_s^\sigma \in U}$
2. $\mathbf{(f(t_1, t_2, ..., t_n))^\sigma = f^\sigma (t_1^\sigma, t_2^\sigma, ..., t_n^\sigma)}$

- Formulák:

1. $\mathbf{(P(t_1, t_2, ..., t_n))^\sigma}$ **=i, ha** $\mathbf{(t_1^\sigma, t_2^\sigma, ..., t_n^\sigma) \in P^\sigma}$ **, a** $\mathbf{P^\sigma}$ **jelöli a** $\mathbf{P^\sigma}$ **reláció igaz halmazát**

2. $\mathbf{(\neg A)^\sigma}$**=i, ha** $\mathbf{A^\sigma}$**=h** $\qquad$ $\mathbf{(\neg A)^\sigma}$**=h, ha** $\mathbf{A^\sigma}$**=i**

$\mathbf{(A \wedge B)^\sigma}$**=i, ha** $\mathbf{A^\sigma}$**=i és** $\mathbf{B^\sigma}$**=i** $\qquad$ $\mathbf{(A \wedge B)^\sigma}$**=h, ha** $\mathbf{A^\sigma}$**=h vagy** $\mathbf{B^\sigma}$**=h**

$\mathbf{(A \vee B)^\sigma}$**=i, ha** $\mathbf{A^\sigma}$**=i vagy** $\mathbf{B^\sigma}$**=i** $\qquad$ $\mathbf{(A \vee B)^\sigma}$**=h, ha** $\mathbf{A^\sigma}$**=h és** $\mathbf{B^\sigma}$**=h**

$\mathbf{(A \rightarrow B)^\sigma}$**=i, ha** $\mathbf{A^\sigma}$**=h vagy** $\mathbf{B^\sigma}$**=i** $\qquad$ $\mathbf{(A \rightarrow B)^\sigma}$**=h, ha** $\mathbf{A^\sigma}$**=i és** $\mathbf{B^\sigma}$**=h**

$\mathbf{(A \leftrightarrow B)^\sigma}$**=i, ha** $\mathbf{A^\sigma = B^\sigma}$ $\qquad$ $\mathbf{(A \leftrightarrow B)^\sigma}$**=h, ha** $\mathbf{A^\sigma \neq B^\sigma}$

3. $(\forall x A)^{\sigma}$**=i, ha** $A^{\sigma(x/u)}$**=i minden** $u \in U$

$(\exists x A)^{\sigma}$**=i, ha** $A^{\sigma(x/u)}$**=i legalább egy** $u \in U$ **(A a formula törzse/matrixa)**

Példa: logikai nyelv — struktúra nyelve

$L = (=, P_1, P_2 ; a, b, f_1, f_2)$ — $S = N(=, <, > ; 0, 1, +, *)$

$(2, 2, 2 ; 0, 0, 2, 2)$ — $(2, 2, 2 ; 0, 0, 2, 2)$

Term interpretációja:

$t^{\sigma} = (f_1(x, f_2(x,y)))^{\sigma} = f_1^{\sigma}(x, f_2^{\sigma}(x,y)) = +(x, *(x,y)) = x + x*y$

x	y	x+ x*y
1	1	2
2	3	8
0	4	0

Kvantormentes formula interpretációja

$$(P_1(t, f_1(y, f_2(x,y))))^{\sigma} = P_1^{\sigma}(t^{\sigma}, (f_1(y, f_2(x,y)))^{\sigma}) = P_1^{\sigma}(t^{\sigma}, f_1^{\sigma}(y, f_2^{\sigma}(x,y))) =$$
$$< (+(x,*(x,y)), +(y,*(x,y)) =$$
$$<(x+ x*y, y+ x*y) =$$

Egy kvantormentes formula kiértékelése	x	y	(x+ x*y)<(y+ x*y)
A formula minden alap előfordulását generáljuk	1	1	h
és így minden állítás előáll	2	3	i

Egzisztenciális formula interpretálása

$(\exists x\, P_1(a, f_1(x,x)))^{\sigma}$=i, ha $(P_1(a, f_1(x,x)))^{\sigma(x/u)}$=i legalább egy $u \in U$
ebben az interpretációban, ha $0<(x+x)$ =i legalább egy $u \in N$

Nézzük meg az értéktábláját	x	0<(x+x)
	0	h
	1	i

Mivel az x=1-re a formula törzse i, ezért a
$\exists x(0<(x+x))$ formula is i.

Univerzális formula interpretálása

$(\forall x\, P_1(a, f_1(b,x)))^{\sigma}$= i, ha $(P_1(a, f_1(b,x)))^{\sigma(x/u)}$=i minden $u \in U$

Nézzük meg az értéktábláját	x	0<(1+x)
	0	i
	1	i

Mivel minden egészre a formula törzse i, ezért a
$\forall x(0<(1+x))$ formula értéke i.

8.3 Egy formula értéktáblája

Egy 1. rendű formula **primformulái**

- az atomi formulák ($p(t_1, ..., t_n)$) és a
- kvantált formulák

Egy 1. rendű formula **primkomponensei** a formula azon primformulái, amelyekből a formula logikai összekötőjelek segítségével épül fel.

Példa:

P(X) prímformula, de csak akkor prímkomponens, ha magában szerepel a formulában:

$P(X) \wedge Q(X)$ ben: P(X) prímkomponens is

$\forall x P(x) \wedge Q(X)$ ben: P(X) nem prímkomponens, csak prímformula

Az igazságtáblában (0. rendű logika) az első sorba az állításváltozók (ezek a formula prímkomponensei) és a formula kerülnek. A változók alá igazságértékeiket írjuk. A formula alatt a megfelelő helyettesítési értékek találhatók.

X	Y	Z	$(Z \wedge \neg X \rightarrow Y \vee \neg Z)$
i	i	i	i
i	i	h	i
i	h	i	i

és így tovább

Egy 1. rendű formula **értéktáblájában** az első sorba a szabad indivíduum változók, a primkomponensek és a formula kerülnek. Mivel a primformulák több esetben paraméteres állítások, ezért az interpretációban az indivíduum változók kiértékelése után válnak állításokká. Ezért az értéktábla első sorába még a formulában lévő indivíduum változókat is felsoroljuk a primformulák elé. A indivíduum változók alá azok lehetséges kiértékelései , a primformulák alá a megfelelő helyettesítési értékek kerülnek. A formula alatt a prímformulák értékeinek megfelelő helyettesítési értékek találhatók.

Példa

A formula $\forall x P(x) \rightarrow \exists y Q(w,y) \vee P(v) \rightarrow \forall z Q(w,z)$

A primkomponensek: $\forall x P(x)$, $\exists y(Q(w,y)$, $P(v)$, $\forall z Q(w,z))$. A szabad indivíduum változók v, w.

Legyen az interpretáló struktúra: $U=\{1, 2, 3\}$, $P^\sigma=\{1,3\}$, $Q^\sigma=\{(1,2),(1,3), (2,1), (2,2), 2,3)\}$,

Ekkor $(\forall x P(x))^\sigma = h$, a többiek paraméteres állítások.

Az értéktábla**:**

v	w	$(\forall x P(x))^\sigma$	$(\exists y(Q(w,y))^\sigma$	$P(v)^\sigma$	$(\forall z Q(w,z)))^\sigma$	$(\forall x P(x) \rightarrow \exists y Q(w,y) \vee P(v) \rightarrow \forall z Q(w,z))^\sigma$
1	1	h	$\exists y(Q^\sigma(1,y))=i$	$P^\sigma(1)=i$	$\forall z Q^\sigma(1,z)=h$	i mivel a feltételrész hamis

……...

Példa:

Írjuk fel a következő formulák értéktábláját a megadott interpretációban

a. $\exists x(P(x) \supset Q(y,x)) \supset \forall z Q(y, f(z))$, *ahol*
$U = \{a,b,c\}$, $P^I \equiv i$, $f^I(a) = f^I(b) = a$ *és* $f^I(c) = b$, $Q^I(a,a) = Q^I(b,a) = Q^I(b,b) = i$ *és h különben*

b. $\forall y \exists x(P(x) \wedge f(x,z) = y \vee \neg P(y)) \supset \exists y(\neg g(y) = c() \wedge f(g(z), y) = c())$, *ahol*
$U = Z_4 = \{0,1,2,3\}$, $c^I = 0$, $g^I(x) = x + 1 \ (mod\ 4)$, $f^I(x,y) = x + y \ (mod\ 4)$, $=^I \ = \ =$ *és* $P^I(x) = paros(x)$

c. $\exists z Q(z) \vee \forall y(P(y,z) \supset \forall x Q(s(x, f(x))) \wedge R(g(z), f(z)))$, *ahol*
$U = \{a,b\}$, $Q^I = h$, $P^I(x,y) = (x = y)$, $R^I(x,y) = (x \neq y)$, $f^I(x) = a$, $g^I(y) = b$ *és* $s^I(x,y) = y$

a). $\exists x(P(x) \rightarrow Q(y, x)) \rightarrow \forall z Q(y, f(z))$, ahol
U = {a; b; c}, $P^\sigma \equiv i$, $f^{\sigma}{}_I(a) = f^\sigma(b) = a$ és $f^\sigma(c) = b$,
$Q^\sigma(a; a) = Q^\sigma(b; a) = Q^\sigma(a; a) = i$ és h különben.
b. $\forall y \exists x(P(x) \wedge f(x, z) = y \vee \neg P(y)) \rightarrow \exists y(\neg g(y) = c() \wedge f(g(z), y) = c())$, ahol
$U = Z_4 =$ f0; 1; 2; 3g, $c_I = 0$, $g_I(x) = x + 1$ (mod 4), $f_I(x; y) = x + y$ (mod 4),