Bevezetés a számításelméletbe

12. előadás

NP lehetséges szerkezete

Definíció

L **NP-köztes**, ha $L \in \mathrm{NP}$, $L \notin \mathrm{P}$ és L nem NP-teljes.

NP lehetséges szerkezete

Definíció

L **NP-köztes**, ha $L \in \mathrm{NP}$, $L \notin \mathrm{P}$ és L nem NP-teljes.

Ladner tétele

Ha $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$, akkor létezik NP-köztes nyelv.

NP lehetséges szerkezete

Definíció

L **NP-köztes**, ha $L \in \mathrm{NP}$, $L \notin \mathrm{P}$ és L nem NP-teljes.

Ladner tétele

Ha $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$, akkor létezik NP-köztes nyelv.

(biz. nélkül)

Mivel nem tudjuk, hogy $\mathrm{P} \stackrel{?}{=} \mathrm{NP}$, ezért nem tudjuk, hogy léteznek-e NP-köztes nyelvek. Valószínűleg igen, hiszen azt gondoljuk, hogy $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$.

NP lehetséges szerkezete

Definíció

L **NP-köztes**, ha $L \in \mathrm{NP}$, $L \notin \mathrm{P}$ és L nem NP-teljes.

Ladner tétele

Ha $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$, akkor létezik NP-köztes nyelv.

(biz. nélkül)

Mivel nem tudjuk, hogy $\mathrm{P} \stackrel{?}{=} \mathrm{NP}$, ezért nem tudjuk, hogy léteznek-e NP-köztes nyelvek. Valószínűleg igen, hiszen azt gondoljuk, hogy $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$.

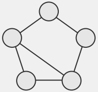
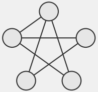
Vannak azonban olyan nyelvek, amelyeknek se a P-beliségét, se az NP-teljességét nem sikerült eddig igazolni, így erős NP-köztes jelölteknek számítanak.

NP-köztes jelöltek

- GRÁFIZOMORFIZMUS $= \{\langle G_1, G_2\rangle \mid$ G_1 és G_2 irányítatlan izomorf gráfok$\}$.

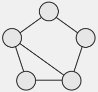
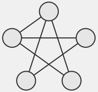
NP-köztes jelöltek

- $\textsc{Gráfizomorfizmus} = \{\langle G_1, G_2\rangle \mid G_1$ és G_2 irányítatlan izomorf gráfok$\}$.

Példa:  és  izomorfak.

NP-köztes jelöltek

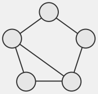
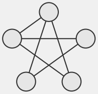
- GRÁFIZOMORFIZMUS $= \{\langle G_1, G_2\rangle \mid G_1$ és G_2 irányítatlan izomorf gráfok$\}$.

Példa:  és  izomorfak.

Egy új eredmény: Babai László, magyar matematikus 2017-es eredménye: GRÁFIZOMORFIZMUS $\in$ QP,

NP-köztes jelöltek

- GRÁFIZOMORFIZMUS $= \{\langle G_1, G_2\rangle \mid G_1$ és G_2 irányítatlan izomorf gráfok$\}$.

  Példa:  és  izomorfak.

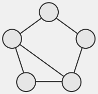
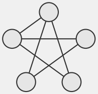
  Egy új eredmény: Babai László, magyar matematikus 2017-es eredménye: GRÁFIZOMORFIZMUS $\in$ QP, ahol

  $$\mathrm{QP} = \bigcup_{c\in\mathbb{N}} \mathrm{TIME}(2^{(\log n)^c})$$

  a „kvázipolinom időben” megoldható problémák osztálya.

NP-köztes jelöltek

- GRÁFIZOMORFIZMUS $= \{\langle G_1, G_2\rangle \mid$ G_1 és G_2 irányítatlan izomorf gráfok$\}$.

  Példa:  és  izomorfak.

  Egy új eredmény: Babai László, magyar matematikus 2017-es eredménye: GRÁFIZOMORFIZMUS $\in$ QP, ahol

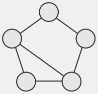
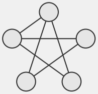
  $$\mathrm{QP} = \bigcup_{c \in \mathbb{N}} \mathrm{TIME}(2^{(\log n)^c})$$

  a „kvázipolinom időben” megoldható problémák osztálya.

- Prímfaktorizáció: adjuk meg egy egész szám prímtényezős felbontását! [számítási feladat]

NP-köztes jelöltek

- GRÁFIZOMORFIZMUS $= \{\langle G_1, G_2\rangle \mid$ G_1 és G_2 irányítatlan izomorf gráfok$\}$.

  Példa:  és  izomorfak.

  Egy új eredmény: Babai László, magyar matematikus 2017-es eredménye: GRÁFIZOMORFIZMUS $\in$ QP, ahol

  $$\mathrm{QP} = \bigcup_{c \in \mathbb{N}} \mathrm{TIME}(2^{(\log n)^c})$$

  a „kvázipolinom időben” megoldható problémák osztálya.

- Prímfaktorizáció: adjuk meg egy egész szám prímtényezős felbontását! [számítási feladat]

  A probléma eldöntési változata:

  PRÍMFAKTORIZÁCIÓ $=$

  $\{\langle n, k\rangle \mid n$-nek van k-nál kisebb prímtényezője$\}$

co$\mathcal{C}$ bonyolutsági osztályok

Definíció

Ha $\mathcal{C}$ egy bonyolultsági osztály co$\mathcal{C} := \{L \mid \bar{L} \in \mathcal{C}\}$.

co$\mathcal{C}$ bonyolultsági osztályok

Definíció

Ha $\mathcal{C}$ egy bonyolultsági osztály co$\mathcal{C} := \{L \mid \bar{L} \in \mathcal{C}\}$.

Definíció

$\mathcal{C}$ **zárt a polinomidejű visszavezetésre nézve**, ha minden esetben ha $L_2 \in \mathcal{C}$ és $L_1 \leqslant_p L_2$ teljesül következik, hogy $L_1 \in \mathcal{C}$.

co$\mathcal{C}$ bonyolultsági osztályok

Definíció

Ha $\mathcal{C}$ egy bonyolultsági osztály co$\mathcal{C} := \{L \mid \overline{L} \in \mathcal{C}\}$.

Definíció

$\mathcal{C}$ **zárt a polinomidejű visszavezetésre nézve**, ha minden esetben ha $L_2 \in \mathcal{C}$ és $L_1 \leqslant_p L_2$ teljesül következik, hogy $L_1 \in \mathcal{C}$.

Volt: P és NP zártak a polinomidejű visszavezetésre nézve.

co$\mathcal{C}$ bonyolultsági osztályok

Definíció

Ha $\mathcal{C}$ egy bonyolultsági osztály co$\mathcal{C}$ $:= \{L \mid \overline{L} \in \mathcal{C}\}$.

Definíció

$\mathcal{C}$ **zárt a polinomidejű visszavezetésre nézve**, ha minden esetben ha $L_2 \in \mathcal{C}$ és $L_1 \leqslant_p L_2$ teljesül következik, hogy $L_1 \in \mathcal{C}$.

Volt: P és NP zártak a polinomidejű visszavezetésre nézve.

Tétel

Ha $\mathcal{C}$ zárt a polinomidejű visszavezetésre nézve, akkor co$\mathcal{C}$ is.

co$\mathcal{C}$ bonyolultsági osztályok

Definíció

Ha $\mathcal{C}$ egy bonyolultsági osztály co$\mathcal{C}$ $:= \{L \mid \bar{L} \in \mathcal{C}\}$.

Definíció

$\mathcal{C}$ **zárt a polinomidejű visszavezetésre nézve**, ha minden esetben ha $L_2 \in \mathcal{C}$ és $L_1 \leqslant_p L_2$ teljesül következik, hogy $L_1 \in \mathcal{C}$.

Volt: P és NP zártak a polinomidejű visszavezetésre nézve.

Tétel

Ha $\mathcal{C}$ zárt a polinomidejű visszavezetésre nézve, akkor co$\mathcal{C}$ is.

Bizonyítás: Legyen $L_2 \in \mathrm{co}\mathcal{C}$ és L_1 tetszőleges nyelvek, melyekre $L_1 \leqslant_p L_2$.

co$\mathcal{C}$ bonyolutsági osztályok

Definíció

Ha $\mathcal{C}$ egy bonyolultsági osztály co$\mathcal{C} := \{L \mid \overline{L} \in \mathcal{C}\}$.

Definíció

$\mathcal{C}$ **zárt a polinomidejű visszavezetésre nézve**, ha minden esetben ha $L_2 \in \mathcal{C}$ és $L_1 \leqslant_p L_2$ teljesül következik, hogy $L_1 \in \mathcal{C}$.

Volt: P és NP zártak a polinomidejű visszavezetésre nézve.

Tétel

Ha $\mathcal{C}$ zárt a polinomidejű visszavezetésre nézve, akkor co$\mathcal{C}$ is.

Bizonyítás: Legyen $L_2 \in \mathrm{co}\mathcal{C}$ és L_1 tetszőleges nyelvek, melyekre $L_1 \leqslant_p L_2$. Utóbbiból következik, hogy $\overline{L}_1 \leqslant_p \overline{L}_2$ (ugyananaz a visszavezetés jó!).

co$\mathcal{C}$ bonyolultsági osztályok

Definíció

Ha $\mathcal{C}$ egy bonyolultsági osztály co$\mathcal{C} := \{L \mid \overline{L} \in \mathcal{C}\}$.

Definíció

$\mathcal{C}$ **zárt a polinomidejű visszavezetésre nézve**, ha minden esetben ha $L_2 \in \mathcal{C}$ és $L_1 \leqslant_p L_2$ teljesül következik, hogy $L_1 \in \mathcal{C}$.

Volt: P és NP zártak a polinomidejű visszavezetésre nézve.

Tétel

Ha $\mathcal{C}$ zárt a polinomidejű visszavezetésre nézve, akkor co$\mathcal{C}$ is.

Bizonyítás: Legyen $L_2 \in$ co$\mathcal{C}$ és L_1 tetszőleges nyelvek, melyekre $L_1 \leqslant_p L_2$. Utóbbiból következik, hogy $\overline{L}_1 \leqslant_p \overline{L}_2$ (ugyananaz a visszavezetés jó!). Mivel $\overline{L}_2 \in \mathcal{C}$, ezért a tétel feltétele miatt $\overline{L}_1 \in \mathcal{C}$.

co$\mathcal{C}$ bonyolultsági osztályok

Definíció

Ha $\mathcal{C}$ egy bonyolultsági osztály co$\mathcal{C} := \{L \mid \overline{L} \in \mathcal{C}\}$.

Definíció

$\mathcal{C}$ **zárt a polinomidejű visszavezetésre nézve**, ha minden esetben ha $L_2 \in \mathcal{C}$ és $L_1 \leqslant_p L_2$ teljesül következik, hogy $L_1 \in \mathcal{C}$.

Volt: P és NP zártak a polinomidejű visszavezetésre nézve.

Tétel

Ha $\mathcal{C}$ zárt a polinomidejű visszavezetésre nézve, akkor co$\mathcal{C}$ is.

Bizonyítás: Legyen $L_2 \in \text{co}\mathcal{C}$ és L_1 tetszőleges nyelvek, melyekre $L_1 \leqslant_p L_2$. Utóbbiból következik, hogy $\overline{L_1} \leqslant_p \overline{L_2}$ (ugyananaz a visszavezetés jó!). Mivel $\overline{L_2} \in \mathcal{C}$, ezért a tétel feltétele miatt $\overline{L_1} \in \mathcal{C}$. Azaz $L_1 \in \text{co}\mathcal{C}$.

co$\mathcal{C}$ bonyolultsági osztályok

Következmény

coNP zárt a polinom idejű visszavezetésre nézve.

co$\mathcal{C}$ bonyolutsági osztályok

Következmény

coNP zárt a polinom idejű visszavezetésre nézve.

Igaz-e, hogy P = coP?

co$\mathcal{C}$ bonyolultsági osztályok

Következmény

coNP zárt a polinom idejű visszavezetésre nézve.

Igaz-e, hogy P = coP? Igen. (L-et polinom időben eldöntő TG q_i és q_n állapotát megcseréljük: $\overline{L}$-t polinom időben eldöntő TG.)

co$\mathcal{C}$ bonyolultsági osztályok

Következmény

coNP zárt a polinom idejű visszavezetésre nézve.

Igaz-e, hogy P = coP? Igen. (L-et polinom időben eldöntő TG q_i és q_n állapotát megcseréljük: $\overline{L}$-t polinom időben eldöntő TG.)
Igaz-e, hogy NP = coNP?

co$\mathcal{C}$ bonyolultsági osztályok

Következmény

coNP zárt a polinom idejű visszavezetésre nézve.

Igaz-e, hogy P = coP? Igen. (L-et polinom időben eldöntő TG q_i és q_n állapotát megcseréljük: $\overline{L}$-t polinom időben eldöntő TG.)
Igaz-e, hogy NP = coNP? A fenti konstrukció NTG-re nem feltétlen $\overline{L}$-t dönti el.

co$\mathcal{C}$ bonyolultsági osztályok

Következmény

coNP zárt a polinom idejű visszavezetésre nézve.

Igaz-e, hogy P = coP? Igen. (L-et polinom időben eldöntő TG q_i és q_n állapotát megcseréljük: $\overline{L}$-t polinom időben eldöntő TG.)
Igaz-e, hogy NP = coNP? A fenti konstrukció NTG-re nem feltétlen $\overline{L}$-t dönti el. Valójában azt sejtjük, hogy NP$\neq$coNP.

Tétel

L $\mathcal{C}$-teljes $\Longleftrightarrow$ $\overline{L}$ co$\mathcal{C}$-teljes.

co$\mathcal{C}$ bonyolultsági osztályok

Következmény

coNP zárt a polinom idejű visszavezetésre nézve.

Igaz-e, hogy P = coP? Igen. (L-et polinom időben eldöntő TG q_i és q_n állapotát megcseréljük: $\overline{L}$-t polinom időben eldöntő TG.)
Igaz-e, hogy NP = coNP? A fenti konstrukció NTG-re nem feltétlen $\overline{L}$-t dönti el. Valójában azt sejtjük, hogy NP$\neq$coNP.

Tétel

L $\mathcal{C}$-teljes $\Longleftrightarrow$ $\overline{L}$ co$\mathcal{C}$-teljes.

Bizonyítás:

- Ha $L \in \mathcal{C}$, akkor $\overline{L} \in$ co$\mathcal{C}$.

co$\mathcal{C}$ bonyolultsági osztályok

Következmény

coNP zárt a polinom idejű visszavezetésre nézve.

Igaz-e, hogy P = coP? Igen. (L-et polinom időben eldöntő TG q_i és q_n állapotát megcseréljük: $\overline{L}$-t polinom időben eldöntő TG.) Igaz-e, hogy NP = coNP? A fenti konstrukció NTG-re nem feltétlen $\overline{L}$-t dönti el. Valójában azt sejtjük, hogy NP$\neq$coNP.

Tétel

L $\mathcal{C}$-teljes $\Longleftrightarrow$ $\overline{L}$ co$\mathcal{C}$-teljes.

Bizonyítás:

- Ha $L \in \mathcal{C}$, akkor $\overline{L} \in$ co$\mathcal{C}$.
- Legyen $L' \in \mathcal{C}$, melyre $L' \leqslant_p L$. Ekkor $\overline{L'} \leqslant_p \overline{L}$.

co$\mathcal{C}$ bonyolultsági osztályok

Következmény

coNP zárt a polinom idejű visszavezetésre nézve.

Igaz-e, hogy P $=$ coP? Igen. (L-et polinom időben eldöntő TG q_i és q_n állapotát megcseréljük: $\overline{L}$-t polinom időben eldöntő TG.)
Igaz-e, hogy NP $=$ coNP? A fenti konstrukció NTG-re nem feltétlen $\overline{L}$-t dönti el. Valójában azt sejtjük, hogy NP$\neq$coNP.

Tétel

L $\mathcal{C}$-teljes $\Longleftrightarrow$ $\overline{L}$ co$\mathcal{C}$-teljes.

Bizonyítás:

- Ha $L \in \mathcal{C}$, akkor $\overline{L} \in$ co$\mathcal{C}$.
- Legyen $L' \in \mathcal{C}$, melyre $L' \leqslant_p L$. Ekkor $\overline{L'} \leqslant_p \overline{L}$.
  Ha L' befutja $\mathcal{C}$-t akkor $\overline{L'}$ befutja co$\mathcal{C}$-t.

co$\mathcal{C}$ bonyolutsági osztályok

Következmény

coNP zárt a polinom idejű visszavezetésre nézve.

Igaz-e, hogy P = coP? Igen. (L-et polinom időben eldöntő TG q_i és q_n állapotát megcseréljük: $\overline{L}$-t polinom időben eldöntő TG.)
Igaz-e, hogy NP = coNP? A fenti konstrukció NTG-re nem feltétlen $\overline{L}$-t dönti el. Valójában azt sejtjük, hogy NP$\neq$coNP.

Tétel

L $\mathcal{C}$-teljes $\Longleftrightarrow$ $\overline{L}$ co$\mathcal{C}$-teljes.

Bizonyítás:

- Ha $L \in \mathcal{C}$, akkor $\overline{L} \in$ co$\mathcal{C}$.
- Legyen $L' \in \mathcal{C}$, melyre $L' \leqslant_p L$. Ekkor $\overline{L'} \leqslant_p \overline{L}$.
  Ha L' befutja $\mathcal{C}$-t akkor $\overline{L'}$ befutja co$\mathcal{C}$-t. Azaz minden co$\mathcal{C}$-beli nyelv polinom időben visszavezethető $\overline{L}$-re.

co$\mathcal{C}$ bonyolutsági osztályok

Következmény

coNP zárt a polinom idejű visszavezetésre nézve.

Igaz-e, hogy P = coP? Igen. (L-et polinom időben eldöntő TG q_i és q_n állapotát megcseréljük: $\overline{L}$-t polinom időben eldöntő TG.)
Igaz-e, hogy NP = coNP? A fenti konstrukció NTG-re nem feltétlen $\overline{L}$-t dönti el. Valójában azt sejtjük, hogy NP$\neq$coNP.

Tétel

L $\mathcal{C}$-teljes $\Longleftrightarrow$ $\overline{L}$ co$\mathcal{C}$-teljes.

Bizonyítás:

- Ha $L \in \mathcal{C}$, akkor $\overline{L} \in$ co$\mathcal{C}$.
- Legyen $L' \in \mathcal{C}$, melyre $L' \leqslant_p L$. Ekkor $\overline{L'} \leqslant_p \overline{L}$.
  Ha L' befutja $\mathcal{C}$-t akkor $\overline{L'}$ befutja co$\mathcal{C}$-t. Azaz minden co$\mathcal{C}$-beli nyelv polinom időben visszavezethető $\overline{L}$-re.

Tehát $\overline{L}$ co$\mathcal{C}$-beli és co$\mathcal{C}$-nehéz, így co$\mathcal{C}$-teljes.

Példák coNP teljes nyelvekre

$\textsc{Unsat} := \{\langle\varphi\rangle \,|\, \varphi$ kielégíthetetlen nulladrendű formula$\}$.

$\textsc{Taut} := \{\langle\varphi\rangle \,|\,$ a φ nulladrendű formula tautológia$\}$.

Tétel

Unsat és Taut coNP-teljesek.

Bizonyítás: $\textsc{Áltsat} = \{\langle\varphi\rangle \,|\, \varphi$ kielégíthető nulladrendű formula$\}$ is NP-teljes (NP-beli és Sat speciális esete neki.)

Példák coNP teljes nyelvekre

$\textsc{Unsat} := \{\langle\varphi\rangle \mid \varphi$ kielégíthetetlen nulladrendű formula$\}$.

$\textsc{Taut} := \{\langle\varphi\rangle \mid$ a φ nulladrendű formula tautológia$\}$.

Tétel

$\textsc{Unsat}$ és $\textsc{Taut}$ coNP-teljesek.

Bizonyítás: $\textsc{Áltsat} = \{\langle\varphi\rangle \mid \varphi$ kielégíthető nulladrendű formula$\}$ is NP-teljes (NP-beli és $\textsc{Sat}$ speciális esete neki.)

$\overline{\textsc{Áltsat}} := \textsc{Unsat}$, az előző tétel alapján $\textsc{Unsat}$ coNP-teljes.

Példák coNP teljes nyelvekre

$\textsc{Unsat} := \{\langle\varphi\rangle \,|\, \varphi$ kielégíthetetlen nulladrendű formula$\}$.

$\textsc{Taut} := \{\langle\varphi\rangle \,|\,$ a φ nulladrendű formula tautológia$\}$.

Tétel

$\textsc{Unsat}$ és $\textsc{Taut}$ coNP-teljesek.

Bizonyítás: $\textsc{Áltsat} = \{\langle\varphi\rangle \,|\, \varphi$ kielégíthető nulladrendű formula$\}$ is NP-teljes (NP-beli és $\textsc{Sat}$ speciális esete neki.)

$\overline{\textsc{Áltsat}} := \textsc{Unsat}$, az előző tétel alapján $\textsc{Unsat}$ coNP-teljes.
$\textsc{Unsat} \leqslant_p \textsc{Taut}$, hiszen $\varphi \mapsto \neg\varphi$ polinom idejű visszavezetés.

Példák coNP teljes nyelvekre

$\textsc{Unsat} := \{\langle\varphi\rangle \,|\, \varphi$ kielégíthetetlen nulladrendű formula$\}$.

$\textsc{Taut} := \{\langle\varphi\rangle \,|\,$ a φ nulladrendű formula tautológia$\}$.

Tétel

$\textsc{Unsat}$ és $\textsc{Taut}$ coNP-teljesek.

Bizonyítás: $\textsc{Áltsat} = \{\langle\varphi\rangle \,|\, \varphi$ kielégíthető nulladrendű formula$\}$ is NP-teljes (NP-beli és $\textsc{Sat}$ speciális esete neki.)

$\overline{\textsc{Áltsat}} := \textsc{Unsat}$, az előző tétel alapján $\textsc{Unsat}$ coNP-teljes.
$\textsc{Unsat} \leqslant_p \textsc{Taut}$, hiszen $\varphi \mapsto \neg\varphi$ polinom idejű visszavezetés.

Informálisan: coNP tartalmazza a polinom időben **cáfolható** problémákat.

Példák coNP teljes nyelvekre

$\textsc{Unsat} := \{\langle\varphi\rangle \,|\, \varphi$ kielégíthetetlen nulladrendű formula$\}$.

$\textsc{Taut} := \{\langle\varphi\rangle \,|$ a φ nulladrendű formula tautológia$\}$.

Tétel

$\textsc{Unsat}$ és $\textsc{Taut}$ coNP-teljesek.

Bizonyítás: $\textsc{Áltsat} = \{\langle\varphi\rangle \,|\, \varphi$ kielégíthető nulladrendű formula$\}$ is NP-teljes (NP-beli és $\textsc{Sat}$ speciális esete neki.)

$\overline{\textsc{Áltsat}} := \textsc{Unsat}$, az előző tétel alapján $\textsc{Unsat}$ coNP-teljes.
$\textsc{Unsat} \leqslant_p \textsc{Taut}$, hiszen $\varphi \mapsto \neg\varphi$ polinom idejű visszavezetés.

Informálisan: coNP tartalmazza a polinom időben **cáfolható** problémákat.

Megjegyzések: Sejtés, hogy NP $\neq$ coNP.

Példák coNP teljes nyelvekre

$\textsc{Unsat} := \{\langle\varphi\rangle \,|\, \varphi$ kielégíthetetlen nulladrendű formula$\}$.

$\textsc{Taut} := \{\langle\varphi\rangle \,|\,$ a φ nulladrendű formula tautológia$\}$.

Tétel

$\textsc{Unsat}$ és $\textsc{Taut}$ coNP-teljesek.

Bizonyítás: $\textsc{Áltsat} = \{\langle\varphi\rangle \,|\, \varphi$ kielégíthető nulladrendű formula$\}$ is NP-teljes (NP-beli és $\textsc{Sat}$ speciális esete neki.)

$\overline{\textsc{Áltsat}} := \textsc{Unsat}$, az előző tétel alapján $\textsc{Unsat}$ coNP-teljes.
$\textsc{Unsat} \leqslant_p \textsc{Taut}$, hiszen $\varphi \mapsto \neg\varphi$ polinom idejű visszavezetés.

Informálisan: coNP tartalmazza a polinom időben **cáfolható** problémákat.

Megjegyzések: Sejtés, hogy NP $\neq$ coNP. Egy érdekes osztály ekkor az NP $\cap$ coNP.

Példák coNP teljes nyelvekre

$\textsc{Unsat} := \{\langle\varphi\rangle \,|\, \varphi$ kielégíthetetlen nulladrendű formula$\}$.

$\textsc{Taut} := \{\langle\varphi\rangle \,|\,$ a φ nulladrendű formula tautológia$\}$.

Tétel

$\textsc{Unsat}$ és $\textsc{Taut}$ coNP-teljesek.

Bizonyítás: $\textsc{Áltsat} = \{\langle\varphi\rangle \,|\, \varphi$ kielégíthető nulladrendű formula$\}$ is NP-teljes (NP-beli és $\textsc{Sat}$ speciális esete neki.)

$\overline{\textsc{Áltsat}} := \textsc{Unsat}$, az előző tétel alapján $\textsc{Unsat}$ coNP-teljes.
$\textsc{Unsat} \leqslant_p \textsc{Taut}$, hiszen $\varphi \mapsto \neg\varphi$ polinom idejű visszavezetés.

Informálisan: coNP tartalmazza a polinom időben **cáfolható** problémákat.

Megjegyzések: Sejtés, hogy NP $\neq$ coNP. Egy érdekes osztály ekkor az NP $\cap$ coNP. Nyilván P $\subseteq$ NP $\cap$ coNP.

Példák coNP teljes nyelvekre

$\textsc{Unsat} := \{\langle\varphi\rangle \mid \varphi$ kielégíthetetlen nulladrendű formula$\}$.

$\textsc{Taut} := \{\langle\varphi\rangle \mid$ a φ nulladrendű formula tautológia$\}$.

Tétel

$\textsc{Unsat}$ és $\textsc{Taut}$ coNP-teljesek.

Bizonyítás: $\textsc{Áltsat} = \{\langle\varphi\rangle \mid \varphi$ kielégíthető nulladrendű formula$\}$ is NP-teljes (NP-beli és $\textsc{Sat}$ speciális esete neki.)

$\overline{\textsc{Áltsat}} := \textsc{Unsat}$, az előző tétel alapján $\textsc{Unsat}$ coNP-teljes.
$\textsc{Unsat} \leqslant_p \textsc{Taut}$, hiszen $\varphi \mapsto \neg\varphi$ polinom idejű visszavezetés.

Informálisan: coNP tartalmazza a polinom időben **cáfolható** problémákat.

Megjegyzések: Sejtés, hogy $\mathrm{NP} \neq \mathrm{coNP}$. Egy érdekes osztály ekkor az $\mathrm{NP} \cap \mathrm{coNP}$. Nyilván $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP} \cap \mathrm{coNP}$. Sejtés: $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP} \cap \mathrm{coNP}$.

Példák coNP teljes nyelvekre

$\textsc{Unsat} := \{\langle\varphi\rangle \mid \varphi$ kielégíthetetlen nulladrendű formula$\}$.

$\textsc{Taut} := \{\langle\varphi\rangle \mid$ a φ nulladrendű formula tautológia$\}$.

Tétel

$\textsc{Unsat}$ és $\textsc{Taut}$ coNP-teljesek.

Bizonyítás: $\textsc{Áltsat} = \{\langle\varphi\rangle \mid \varphi$ kielégíthető nulladrendű formula$\}$ is NP-teljes (NP-beli és $\textsc{Sat}$ speciális esete neki.)

$\overline{\textsc{Áltsat}} := \textsc{Unsat}$, az előző tétel alapján $\textsc{Unsat}$ coNP-teljes. $\textsc{Unsat} \leqslant_p \textsc{Taut}$, hiszen $\varphi \mapsto \neg\varphi$ polinom idejű visszavezetés.

Informálisan: coNP tartalmazza a polinom időben **cáfolható** problémákat.

Megjegyzések: Sejtés, hogy NP $\neq$ coNP. Egy érdekes osztály ekkor az NP $\cap$ coNP. Nyilván P $\subseteq$ NP $\cap$ coNP. Sejtés: P $\neq$ NP $\cap$ coNP. Bizonyított, hogy ha egy coNP-teljes problémáról kiderülne, hogy NP-beli, akkor NP $=$ coNP.

A tárbonyolultság mérésének problémája

Első megközelítésben a tárigény a működés során felhasznált, pontosabban a fejek által meglátogatott cellák száma.

A tárbonyolultság mérésének problémája

Első megközelítésben a tárigény a működés során felhasznált, pontosabban a fejek által meglátogatott cellák száma.

Probléma: Hiába "takarékoskodik" a felhasznált cellákkal a gép, az input hossza így mindig alsó korlát lesz a tárigényre.

A tárbonyolultság mérésének problémája

Első megközelítésben a tárigény a működés során felhasznált, pontosabban a fejek által meglátogatott cellák száma.

Probléma: Hiába "takarékoskodik" a felhasznált cellákkal a gép, az input hossza így mindig alsó korlát lesz a tárigényre.

Egy megoldási javaslat: Bevezethetjük az többlet tárigény fogalmát, ami az **input tárolására használt cellákon felül** igénybevett cellák száma.

A tárbonyolultság mérésének problémája

Első megközelítésben a tárigény a működés során felhasznált, pontosabbban a fejek által meglátogatott cellák száma.

Probléma: Hiába "takarékoskodik" a felhasznált cellákkal a gép, az input hossza így mindig alsó korlát lesz a tárigényre.

Egy megoldási javaslat: Bevezethetjük az többlet tárigény fogalmát, ami az **input tárolására használt cellákon felül** igénybevett cellák száma.

Vannak olyan TG-ek, melyek csak az input területét használják, ám azt akár többször is átírják. Ezt beszámítsuk?

A tárbonyolultság mérésének problémája

Első megközelítésben a tárigény a működés során felhasznált, pontosabban a fejek által meglátogatott cellák száma.

Probléma: Hiába "takarékoskodik" a felhasznált cellákkal a gép, az input hossza így mindig alsó korlát lesz a tárigényre.

Egy megoldási javaslat: Bevezethetjük az többlet tárigény fogalmát, ami az **input tárolására használt cellákon felül** igénybevett cellák száma.

Vannak olyan TG-ek, melyek csak az input területét használják, ám azt akár többször is átírják. Ezt beszámítsuk?

Eldöntési problémáknál beszámítjuk.

Számítási problémáknál viszont ne számítsanak bele a tárigénybe a csak a kimenet előállításához felhasznált cellák.

Az offline Turing gép

Definíció

Az **offline Turing gép** (OTG) egy olyan TG, melynek az első szalagja csak olvasható, a többi írható is. Első szalagját bemeneti szalagnak, további szalagjait munkaszalagoknak nevezzük.

Az offline Turing gép

Definíció

Az **offline Turing gép** (OTG) egy olyan TG, melynek az első szalagja csak olvasható, a többi írható is. Első szalagját bemeneti szalagnak, további szalagjait munkaszalagoknak nevezzük.

Megjegyzés: Egy k munkaszalaggal rendelkező OTG állapotátmenetfüggvénye tehát
$\delta : (Q \backslash \{q_i, q_n\}) \times \Gamma^{k+1} \to Q \times \Gamma^k \times \{L, S, R\}^{k+1}$.

Az offline Turing gép

Definíció

Az **offline Turing gép** (OTG) egy olyan TG, melynek az első szalagja csak olvasható, a többi írható is. Első szalagját bemeneti szalagnak, további szalagjait munkaszalagoknak nevezzük.

Megjegyzés: Egy k munkaszalaggal rendelkező OTG állapotátmenetfüggvénye tehát $\delta : (Q\backslash\{q_i, q_n\}) \times \Gamma^{k+1} \to Q \times \Gamma^k \times \{L, S, R\}^{k+1}$.

Tétel

Minden TG-hez megadható vele ekvivalens offline TG.

Az offline Turing gép

Definíció

Az **offline Turing gép** (OTG) egy olyan TG, melynek az első szalagja csak olvasható, a többi írható is. Első szalagját bemeneti szalagnak, további szalagjait munkaszalagoknak nevezzük.

Megjegyzés: Egy k munkaszalaggal rendelkező OTG állapotátmenetfüggvénye tehát
$\delta : (Q\backslash\{q_i, q_n\}) \times \Gamma^{k+1} \to Q \times \Gamma^k \times \{L, S, R\}^{k+1}$.

Tétel

Minden TG-hez megadható vele ekvivalens offline TG.

Bizonyítás: Legyen M tetszőleges k szalagos TG. Az M' OTG-nak legyen $k+1$ szalagja. M' másolja át az inputját a $k+1$. szalagra és utána működjön úgy a $2-(k+1)$. szalagján, mint M. A $k+1$. szalag felel meg M 1. szalagjának. Ekkor nyilván $L(M') = L(M)$.

Az offline Turing gép

Definíció

Az **offline Turing gép** (OTG) egy olyan TG, melynek az első szalagja csak olvasható, a többi írható is. Első szalagját bemeneti szalagnak, további szalagjait munkaszalagoknak nevezzük.

Megjegyzés: Egy k munkaszalaggal rendelkező OTG állapotátmenetfüggvénye tehát
$\delta : (Q\backslash\{q_i, q_n\}) \times \Gamma^{k+1} \to Q \times \Gamma^k \times \{L, S, R\}^{k+1}$.

Tétel

Minden TG-hez megadható vele ekvivalens offline TG.

Bizonyítás: Legyen M tetszőleges k szalagos TG. Az M' OTG-nak legyen $k+1$ szalagja. M' másolja át az inputját a $k+1$. szalagra és utána működjön úgy a $2-(k+1)$. szalagján, mint M. A $k+1$. szalag felel meg M 1. szalagjának. Ekkor nyilván $L(M') = L(M)$.

Megjegyzés: Fordítva is igaz, az offline TG-ek speciális TG-ek.

Offline Turing gép verziók

Definíció

A **nemdeterminisztikus offline Turing gép** (NOTG) egy nemdeterminisztikusan működő offline Turing gép.

Offline Turing gép verziók

Definíció

A **nemdeterminisztikus offline Turing gép** (NOTG) egy nemdeterminisztikusan működő offline Turing gép.

Definíció

A **számító offline Turing gép** olyan legalább 2 szalagos számító Turing gép, amelynek az első szalagja csak olvasható, az utolsó szalagja csak írható. Az első szalagot bemeneti szalagnak, utolsó szalagot kimeneti szalagnak, a többi szalagot munkaszalagnak nevezzük.

Offline Turing gép verziók

Definíció

A **nemdeterminisztikus offline Turing gép** (NOTG) egy nemdeterminisztikusan működő offline Turing gép.

Definíció

A **számító offline Turing gép** olyan legalább 2 szalagos számító Turing gép, amelynek az első szalagja csak olvasható, az utolsó szalagja csak írható. Az első szalagot bemeneti szalagnak, utolsó szalagot kimeneti szalagnak, a többi szalagot munkaszalagnak nevezzük.

Megjegyzés: Egy $k+2$ szalagos, azaz k munkaszalaggal rendelkező OTG állaptotátmenetfüggvénye tehát $\delta : (Q \backslash \{q_i, q_n\}) \times \Gamma^{k+1} \rightarrow Q \times \Gamma^{k+1} \times \{L, S, R\}^{k+2}$.

A bal oldalon a Γ^{k+1} az $1-(k+1)$. szalagoknak, a jobboldalon $2-(k+2)$. szalagoknak felel meg.

Az offline Turing gépek tárigénye

Definíció

Egy offline TG **többlet tárigénye** egy adott inputra azon celláknak a száma, amelyeken a működés során valamelyik munkaszalag feje járt.

Az offline Turing gépek tárigénye

Definíció

Egy offline TG **többlet tárigénye** egy adott inputra azon celláknak a száma, amelyeken a működés során valamelyik munkaszalag feje járt.

Egy offline TG $f(n)$ **többlet tárkorlátos**, ha bármely u inputra legfeljebb $f(|u|)$ a többlet tárigénye.

Az offline Turing gépek tárigénye

Definíció

Egy offline TG **többlet tárigénye** egy adott inputra azon celláknak a száma, amelyeken a működés során valamelyik munkaszalag feje járt.

Egy offline TG $f(n)$ **többlet tárkorlátos**, ha bármely u inputra legfeljebb $f(|u|)$ a többlet tárigénye.

Számító OTG-re hasonlóan.

Az offline Turing gépek tárigénye

Definíció

Egy offline TG **többlet tárigénye** egy adott inputra azon celláknak a száma, amelyeken a működés során valamelyik munkaszalag feje járt.

Egy offline TG $f(n)$ **többlet tárkorlátos**, ha bármely u inputra legfeljebb $f(|u|)$ a többlet tárigénye.

Számító OTG-re hasonlóan.

Definíció

Egy nemdeterminisztikus offline TG **többlet tárigénye** egy adott inputra a legnagyobb többlet tárigényű számításának az többlet tárigénye.

Az offline Turing gépek tárigénye

Definíció

Egy offline TG **többlet tárigénye** egy adott inputra azon celláknak a száma, amelyeken a működés során valamelyik munkaszalag feje járt.

Egy offline TG $f(n)$ **többlet tárkorlátos**, ha bármely u inputra legfeljebb $f(|u|)$ a többlet tárigénye.

Számító OTG-re hasonlóan.

Definíció

Egy nemdeterminisztikus offline TG **többlet tárigénye** egy adott inputra a legnagyobb többlet tárigényű számításának az többlet tárigénye.

Egy nemdeterminisztikus offline TG $f(n)$ **többlet tárkorlátos**, ha bármely u inputra legfeljebb $f(|u|)$ az többlet tárigénye.

Determinisztikus és nemdeterminisztikus tárbonyolultsági osztályok

- $\text{SPACE}(f(n)) := \{L \mid L$ eldönthető $O(f(n))$ többlet tárkorlátos determinisztikus offline TG-pel$\}$

Determinisztikus és nemdeterminisztikus tárbonyolultsági osztályok

- $\mathrm{SPACE}(f(n)) := \{L \mid L$ eldönthető $O(f(n))$ többlet tárkorlátos determinisztikus offline TG-pel$\}$
- $\mathrm{NSPACE}(f(n)) := \{L \mid L$ eldönthető $O(f(n))$ többlet tárkorlátos nemdeterminisztikus offline TG-pel$\}$

Determinisztikus és nemdeterminisztikus tárbonyolultsági osztályok

- $\mathrm{SPACE}\,(f(n)) := \{L \mid L$ eldönthető $O(f(n))$ többlet tárkorlátos determinisztikus offline TG-pel$\}$
- $\mathrm{NSPACE}\,(f(n)) := \{L \mid L$ eldönthető $O(f(n))$ többlet tárkorlátos nemdeterminisztikus offline TG-pel$\}$
- $\mathrm{PSPACE} := \bigcup_{k \geqslant 1} \mathrm{SPACE}\,(n^k)$.

Determinisztikus és nemdeterminisztikus tárbonyolultsági osztályok

- $\mathrm{SPACE}\,(f(n)) := \{L \mid L$ eldönthető $O(f(n))$ többlet tárkorlátos determinisztikus offline TG-pel$\}$
- $\mathrm{NSPACE}\,(f(n)) := \{L \mid L$ eldönthető $O(f(n))$ többlet tárkorlátos nemdeterminisztikus offline TG-pel$\}$
- $\mathrm{PSPACE} := \bigcup_{k \geqslant 1} \mathrm{SPACE}\,(n^k)$.
- $\mathrm{NPSPACE} := \bigcup_{k \geqslant 1} \mathrm{NSPACE}\,(n^k)$.

Determinisztikus és nemdeterminisztikus tárbonyolultsági osztályok

- $\mathrm{SPACE}(f(n)) := \{L \mid L$ eldönthető $O(f(n))$ többlet tárkorlátos determinisztikus offline TG-pel$\}$
- $\mathrm{NSPACE}(f(n)) := \{L \mid L$ eldönthető $O(f(n))$ többlet tárkorlátos nemdeterminisztikus offline TG-pel$\}$
- $\mathrm{PSPACE} := \bigcup_{k \geqslant 1} \mathrm{SPACE}(n^k)$.
- $\mathrm{NPSPACE} := \bigcup_{k \geqslant 1} \mathrm{NSPACE}(n^k)$.
- $\mathrm{L} := \mathrm{SPACE}(\log n)$.

Determinisztikus és nemdeterminisztikus tárbonyolultsági osztályok

- $\text{SPACE}\,(f(n)) := \{L \mid L$ eldönthető $O(f(n))$ többlet tárkorlátos determinisztikus offline TG-pel$\}$
- $\text{NSPACE}\,(f(n)) := \{L \mid L$ eldönthető $O(f(n))$ többlet tárkorlátos nemdeterminisztikus offline TG-pel$\}$
- $\text{PSPACE}{:=}\bigcup_{k\geqslant 1}\text{SPACE}\,(n^k)$.
- $\text{NPSPACE}{:=}\bigcup_{k\geqslant 1}\text{NSPACE}\,(n^k)$.
- $\text{L}{:=}\text{SPACE}\,(\log n)$.
- $\text{NL}{:=}\text{NSPACE}\,(\log n)$.

Determinisztikus és nemdeterminisztikus tárbonyolultsági osztályok

- SPACE $(f(n)) := \{L \mid L$ eldönthető $O(f(n))$ többlet tárkorlátos determinisztikus offline TG-pel$\}$
- NSPACE $(f(n)) := \{L \mid L$ eldönthető $O(f(n))$ többlet tárkorlátos nemdeterminisztikus offline TG-pel$\}$
- PSPACE:=$\bigcup_{k \geqslant 1}$SPACE (n^k).
- NPSPACE:=$\bigcup_{k \geqslant 1}$NSPACE (n^k).
- L:=SPACE $(\log n)$.
- NL:=NSPACE $(\log n)$.

Megjegyzés: Így tehát az offline TG-pel **szublineáris** (lineáris alatti) tárbonyolultságot is mérhetünk. Legalább lineáris tárigények esetén nem lenne szükség az offline TG fogalmára, használhattuk volna az eredeti TG fogalmat is.

Elér determinisztikus tárbonyolultsága

$\textsc{Elér} = \{\langle G, s, t\rangle \mid \text{A } G \text{ irányított gráfban van } s\text{-ből } t\text{-be út}\}.$

ELÉR determinisztikus tárbonyolultsága

ELÉR $= \{\langle G, s, t\rangle \mid$ A G irányított gráfban van s-ből t-be út$\}$.
Algo 2-ből, tudjuk, hogy ELÉR P-ben van (szélességi bejárás).

ELÉR determinisztikus tárbonyolultsága

ELÉR $= \{\langle G, s, t\rangle \mid$ A G irányított gráfban van s-ből t-be út$\}$.
Algo 2-ből, tudjuk, hogy ELÉR P-ben van (szélességi bejárás).

Tétel

ELÉR $\in$ TIME(n^2).

Elér determinisztikus tárbonyolultsága

$\textsc{Elér} = \{\langle G, s, t\rangle \mid \text{A } G \text{ irányított gráfban van } s\text{-ből } t\text{-be út}\}$.
Algo 2-ből, tudjuk, hogy Elér P-ben van (szélességi bejárás).

Tétel

$\textsc{Elér} \in \mathrm{TIME}(n^2)$.

Tétel

$\textsc{Elér} \in \mathrm{SPACE}(\log^2 n)$.

ELÉR determinisztikus tárbonyolultsága

$\text{ELÉR} = \{\langle G, s, t\rangle \mid \text{A } G \text{ irányított gráfban van } s\text{-ből } t\text{-be út}\}$.
Algo 2-ből, tudjuk, hogy ELÉR P-ben van (szélességi bejárás).

Tétel

$\text{ELÉR} \in \text{TIME}(n^2)$.

Tétel

$\text{ELÉR} \in \text{SPACE}(\log^2 n)$.

Bizonyítás:

- Rögzítsük a csúcsok egy tetszőleges sorrendjét.

ELÉR determinisztikus tárbonyolultsága

ELÉR $= \{\langle G, s, t\rangle \mid$ A G irányított gráfban van s-ből t-be út$\}$.
Algo 2-ből, tudjuk, hogy ELÉR P-ben van (szélességi bejárás).

Tétel

ELÉR $\in$ TIME(n^2).

Tétel

ELÉR $\in$ SPACE$(\log^2 n)$.

Bizonyítás:

- Rögzítsük a csúcsok egy tetszőleges sorrendjét.
- ÚT(x, y, i) :=igaz, ha $\exists$ x-ből y-ba legfeljebb 2^i hosszú út.

ELÉR determinisztikus tárbonyolultsága

ELÉR $= \{\langle G, s, t\rangle \mid$ A G irányított gráfban van s-ből t-be út$\}$.
Algo 2-ből, tudjuk, hogy ELÉR P-ben van (szélességi bejárás).

Tétel

ELÉR $\in$ TIME(n^2).

Tétel

ELÉR $\in$ SPACE$(\log^2 n)$.

Bizonyítás:

- Rögzítsük a csúcsok egy tetszőleges sorrendjét.
- ÚT(x, y, i) :=igaz, ha $\exists$ x-ből y-ba legfeljebb 2^i hosszú út.
- s-ből van t-be út G-ben $\iff$ ÚT$(s, t, \lceil \log_2 n \rceil)$=igaz.

ELÉR determinisztikus tárbonyolultsága

ELÉR $= \{\langle G, s, t\rangle \mid$ A G irányított gráfban van s-ből t-be út$\}$.
Algo 2-ből, tudjuk, hogy ELÉR P-ben van (szélességi bejárás).

Tétel

ELÉR $\in$ TIME(n^2).

Tétel

ELÉR $\in$ SPACE$(\log^2 n)$.

Bizonyítás:

- Rögzítsük a csúcsok egy tetszőleges sorrendjét.
- ÚT(x, y, i) :=igaz, ha $\exists$ x-ből y-ba legfeljebb 2^i hosszú út.
- s-ből van t-be út G-ben $\iff$ ÚT$(s, t, \lceil \log_2 n \rceil)$=igaz.
- ÚT(x, y, i)=igaz $\iff$ $\exists z($ ÚT$(x, z, i-1)$=igaz $\wedge$ ÚT$(z, y, i-1)$=igaz $)$.

ELÉR determinisztikus tárbonyolultsága

ELÉR = $\{\langle G, s, t\rangle \mid$ A G irányított gráfban van s-ből t-be út$\}$.
Algo 2-ből, tudjuk, hogy ELÉR P-ben van (szélességi bejárás).

Tétel

ELÉR $\in$ TIME(n^2).

Tétel

ELÉR $\in$ SPACE($\log^2 n$).

Bizonyítás:

- Rögzítsük a csúcsok egy tetszőleges sorrendjét.
- ÚT(x, y, i) :=igaz, ha $\exists$ x-ből y-ba legfeljebb 2^i hosszú út.
- s-ből van t-be út G-ben $\iff$ ÚT($s, t, \lceil \log_2 n \rceil$)=igaz.
- ÚT(x, y, i)=igaz $\iff$ $\exists z$(ÚT($x, z, i-1$)=igaz $\wedge$ ÚT($z, y, i-1$)=igaz).
- Ez alapján egy rekurzív algoritmust készítünk, melynek persze munkaszalagján tárolnia kell, hogy a felsőbb szinteken milyen (x, y, i)-kre létezik folyamatban lévő hívás.

ELÉR determinisztikus tárbonyolultsága

- ha $i = 0$, akkor $2^0 = 1$ hosszú út kéne: ez az input alapján megválaszolható

ELÉR determinisztikus tárbonyolultsága

- ha $i = 0$, akkor $2^0 = 1$ hosszú út kéne: ez az input alapján megválaszolható
- A munkaszalagon (x, y, i) típusú hármasok egy legfeljebb $\lceil \log_2 n \rceil$ hosszú sorozata áll. A hármasok 3. attribútuma 1-esével csökkenő sorozatot alkot $\lceil \log_2 n \rceil$-től.

ELÉR determinisztikus tárbonyolultsága

- ha $i = 0$, akkor $2^0 = 1$ hosszú út kéne: ez az input alapján megválaszolható
- A munkaszalagon (x, y, i) típusú hármasok egy legfeljebb $\lceil \log_2 n \rceil$ hosszú sorozata áll. A hármasok 3. attribútuma 1-esével csökkenő sorozatot alkot $\lceil \log_2 n \rceil$-től.
- Az ÚT(x, y, i) függvény meghívásakor az utolsó hármas (x, y, i) a munkaszalagon. Az algoritmus felírja az $(x, z, i-1)$ hármast a munkaszalagra az (x, y, i) utáni helyre majd kiszámítja ÚT$(x, z, i-1)$ értékét.

ELÉR determinisztikus tárbonyolultsága

- ha $i = 0$, akkor $2^0 = 1$ hosszú út kéne: ez az input alapján megválaszolható
- A munkaszalagon (x, y, i) típusú hármasok egy legfeljebb $\lceil \log_2 n \rceil$ hosszú sorozata áll. A hármasok 3. attribútuma 1-esével csökkenő sorozatot alkot $\lceil \log_2 n \rceil$-től.
- Az ÚT(x, y, i) függvény meghívásakor az utolsó hármas (x, y, i) a munkaszalagon. Az algoritmus felírja az $(x, z, i-1)$ hármast a munkaszalagra az (x, y, i) utáni helyre majd kiszámítja ÚT$(x, z, i-1)$ értékét.
- Ha hamis, akkor kitörli $(x, z, i-1)$-et és z értékét növeli.

ELÉR determinisztikus tárbonyolultsága

- ha $i = 0$, akkor $2^0 = 1$ hosszú út kéne: ez az input alapján megválaszolható
- A munkaszalagon (x, y, i) típusú hármasok egy legfeljebb $\lceil \log_2 n \rceil$ hosszú sorozata áll. A hármasok 3. attribútuma 1-esével csökkenő sorozatot alkot $\lceil \log_2 n \rceil$-től.
- Az ÚT(x, y, i) függvény meghívásakor az utolsó hármas (x, y, i) a munkaszalagon. Az algoritmus felírja az $(x, z, i-1)$ hármast a munkaszalagra az (x, y, i) utáni helyre majd kiszámítja ÚT$(x, z, i-1)$ értékét.
- Ha hamis, akkor kitörli $(x, z, i-1)$-et és z értékét növeli.
- Ha igaz, akkor is kitörli $(x, z, i-1)$-et és $(z, y, i-1)$-et írja a helyére (y-t tudja az előző (x, y, i) hármasból).
    - Ha ÚT$(z, y, i-1)$ igaz, akkor ÚT(x, y, i) igaz (ezt (x, y, i) és $(z, y, i-1)$ 2. argumentumának egyezéséből látja)
    - Ha ÚT$(z, y, i-1)$ hamis akkor kitörli a $(z, y, i-1)$-t és z értékét eggyel növelve ÚT$(x, z, i-1)$-en dolgozik tovább.

ELÉR determinisztikus tárbonyolultsága

- ha $i = 0$, akkor $2^0 = 1$ hosszú út kéne: ez az input alapján megválaszolható
- A munkaszalagon (x, y, i) típusú hármasok egy legfeljebb $\lceil \log_2 n \rceil$ hosszú sorozata áll. A hármasok 3. attribútuma 1-esével csökkenő sorozatot alkot $\lceil \log_2 n \rceil$-től.
- Az ÚT(x, y, i) függvény meghívásakor az utolsó hármas (x, y, i) a munkaszalagon. Az algoritmus felírja az $(x, z, i-1)$ hármast a munkaszalagra az (x, y, i) utáni helyre majd kiszámítja ÚT$(x, z, i-1)$ értékét.
- Ha hamis, akkor kitörli $(x, z, i-1)$-et és z értékét növeli.
- Ha igaz, akkor is kitörli $(x, z, i-1)$-et és $(z, y, i-1)$-et írja a helyére (y-t tudja az előző (x, y, i) hármasból).
  - Ha ÚT$(z, y, i-1)$ igaz, akkor ÚT(x, y, i) igaz (ezt (x, y, i) és $(z, y, i-1)$ 2. argumentumának egyezéséből látja)
  - Ha ÚT$(z, y, i-1)$ hamis akkor kitörli a $(z, y, i-1)$-t és z értékét eggyel növelve ÚT$(x, z, i-1)$-en dolgozik tovább.
- Ha egyik z se volt jó, akkor ÚT(x, y, i) hamis.

ELÉR determinisztikus tárbonyolultsága

A főprogram, tehát $(s, t, \lceil \log_2 n \rceil)$ feírásából és az $\text{ÚT}(s, t, \lceil \log n \rceil)$ függvény meghívásából áll. Pontosan akkor lesz igaz a kimenet, ha t elérhető s-ből.

Az algoritmus a munkaszalagján végig legfeljebb $\lceil \log_2 n \rceil$ darab rendezett hármast tárol.

Egy szám tárolásához legfeljebb a szám adott számrendszer alapú logaritmusa $+1$ darab számjegy szükséges.

Így a rendezett hármasokból mindvégig $O(\log n)$ van és egyenként $O(\log n)$ hosszúak, így $\text{ELÉR} \in \text{SPACE}(\log^2 n)$.

Konfigurációs gráf, elérhetőségi módszer

Definíció

Egy M NTG G_M **konfigurációs gráfjának** csúcsai M konfigurációi és $(C, C') \in E(G_M) \Leftrightarrow C \vdash_M C'$.

Konfigurációs gráf, elérhetőségi módszer

Definíció

Egy M NTG G_M **konfigurációs gráfjának** csúcsai M konfigurációi és $(C, C') \in E(G_M) \Leftrightarrow C \vdash_M C'$.

Elérhetőségi módszer: az $\text{ELÉR} \in \text{TIME}(n^2)$ vagy $\text{ELÉR} \in \text{SPACE}(\log^2 n)$ tételek valamelyikét alkalmazva a konfigurációs gráfra (vagy annak egy részgráfjára) bonyolultsági osztályok közötti összefüggéseket lehet bizonyítani.

Lássunk erre egy példát!

Savitch tétele

Savitch tétele

Ha $f(n) \geqslant \log n$, akkor $\mathrm{NSPACE}(f(n)) \subseteq \mathrm{SPACE}(f^2(n))$.

Bizonyítás: Legyen M egy $f(n)$ tárigényű NOTG és w az M egy n hosszú bemenete.

Savitch tétele

Savitch tétele

Ha $f(n) \geqslant \log n$, akkor $\mathrm{NSPACE}(f(n)) \subseteq \mathrm{SPACE}(f^2(n))$.

Bizonyítás: Legyen M egy $f(n)$ tárigényű NOTG és w az M egy n hosszú bemenete. Kell egy vele ekvivalens, $O(f^2(n))$ táras OTG.

Savitch tétele

Savitch tétele

Ha $f(n) \geqslant \log n$, akkor $\mathrm{NSPACE}(f(n)) \subseteq \mathrm{SPACE}(f^2(n))$.

Bizonyítás: Legyen M egy $f(n)$ tárigényű NOTG és w az M egy n hosszú bemenete. Kell egy vele ekvivalens, $O(f^2(n))$ táras OTG. M egy konfigurációját $O(f(n) + \log n)$ tárral eltárolhatjuk (aktuális állapot, a munkaszalagok tartalma, fejek pozíciója, az első szalag fejének pozíciója n féle lehet, ezért $\geqslant \log n$ tár kell ennek eltárolásához).

Savitch tétele

Savitch tétele

Ha $f(n) \geqslant \log n$, akkor $\mathrm{NSPACE}(f(n)) \subseteq \mathrm{SPACE}(f^2(n))$.

Bizonyítás: Legyen M egy $f(n)$ tárigényű NOTG és w az M egy n hosszú bemenete. Kell egy vele ekvivalens, $O(f^2(n))$ táras OTG.
M egy konfigurációját $O(f(n) + \log n)$ tárral eltárolhatjuk (aktuális állapot, a munkaszalagok tartalma, fejek pozíciója, az első szalag fejének pozíciója n féle lehet, ezért $\geqslant \log n$ tár kell ennek eltárolásához). Ha $f(n) \geqslant \log n$, akkor $O(f(n) + \log n) = O(f(n))$.

Savitch tétele

Savitch tétele

Ha $f(n) \geqslant \log n$, akkor $\mathrm{NSPACE}(f(n)) \subseteq \mathrm{SPACE}(f^2(n))$.

Bizonyítás: Legyen M egy $f(n)$ tárigényű NOTG és w az M egy n hosszú bemenete. Kell egy vele ekvivalens, $O(f^2(n))$ táras OTG. M egy konfigurációját $O(f(n) + \log n)$ tárral eltárolhatjuk (aktuális állapot, a munkaszalagok tartalma, fejek pozíciója, az első szalag fejének pozíciója n féle lehet, ezért $\geqslant \log n$ tár kell ennek eltárolásához). Ha $f(n) \geqslant \log n$, akkor $O(f(n) + \log n) = O(f(n))$. Feltehető, hogy M-nek csak egyetlen C_{elf} elfogadó konfigurációja van.

Savitch tétele

Savitch tétele

Ha $f(n) \geqslant \log n$, akkor $\mathrm{NSPACE}(f(n)) \subseteq \mathrm{SPACE}(f^2(n))$.

Bizonyítás: Legyen M egy $f(n)$ tárigényű NOTG és w az M egy n hosszú bemenete. Kell egy vele ekvivalens, $O(f^2(n))$ táras OTG.
M egy konfigurációját $O(f(n) + \log n)$ tárral eltárolhatjuk (aktuális állapot, a munkaszalagok tartalma, fejek pozíciója, az első szalag fejének pozíciója n féle lehet, ezért $\geqslant \log n$ tár kell ennek eltárolásához). Ha $f(n) \geqslant \log n$, akkor $O(f(n) + \log n) = O(f(n))$.
Feltehető, hogy M-nek csak egyetlen C_{elf} elfogadó konfigurációja van. (Törölje le a TG a munkaszalagjait, mielőtt q_i-be lép!)

Savitch tétele

Savitch tétele

Ha $f(n) \geqslant \log n$, akkor $\mathrm{NSPACE}(f(n)) \subseteq \mathrm{SPACE}(f^2(n))$.

Bizonyítás: Legyen M egy $f(n)$ tárigényű NOTG és w az M egy n hosszú bemenete. Kell egy vele ekvivalens, $O(f^2(n))$ táras OTG.
M egy konfigurációját $O(f(n) + \log n)$ tárral eltárolhatjuk (aktuális állapot, a munkaszalagok tartalma, fejek pozíciója, az első szalag fejének pozíciója n féle lehet, ezért $\geqslant \log n$ tár kell ennek eltárolásához). Ha $f(n) \geqslant \log n$, akkor $O(f(n) + \log n) = O(f(n))$.
Feltehető, hogy M-nek csak egyetlen C_{elf} elfogadó konfigurációja van. (Törölje le a TG a munkaszalagjait, mielőtt q_i-be lép!)
A legfeljebb $O(f(n))$ méretű konfigurációkat tartalmazó konfigurációs gráf mérete $2^{d \cdot f(n)}$ valamely $d > 0$ konstansra.

Savitch tétele

Savitch tétele

Ha $f(n) \geqslant \log n$, akkor $\mathrm{NSPACE}(f(n)) \subseteq \mathrm{SPACE}(f^2(n))$.

Bizonyítás: Legyen M egy $f(n)$ tárigényű NOTG és w az M egy n hosszú bemenete. Kell egy vele ekvivalens, $O(f^2(n))$ táras OTG.
M egy konfigurációját $O(f(n) + \log n)$ tárral eltárolhatjuk (aktuális állapot, a munkaszalagok tartalma, fejek pozíciója, az első szalag fejének pozíciója n féle lehet, ezért $\geqslant \log n$ tár kell ennek eltárolásához). Ha $f(n) \geqslant \log n$, akkor $O(f(n) + \log n) = O(f(n))$.
Feltehető, hogy M-nek csak egyetlen C_{elf} elfogadó konfigurációja van. (Törölje le a TG a munkaszalagjait, mielőtt q_i-be lép!)
A legfeljebb $O(f(n))$ méretű konfigurációkat tartalmazó konfigurációs gráf mérete $2^{d \cdot f(n)}$ valamely $d > 0$ konstansra. Így az előző tétel szerint van olyan M' determinisztikus OTG, ami $O(\log^2(2^{df(n)})) = O(f^2(n))$ tárral el tudja dönteni, hogy a kezdőkonfigurációból elérhető-e C_{elf}.

Savitch tétele

Savitch tétele

Ha $f(n) \geqslant \log n$, akkor $\mathrm{NSPACE}(f(n)) \subseteq \mathrm{SPACE}(f^2(n))$.

Bizonyítás: Legyen M egy $f(n)$ tárigényű NOTG és w az M egy n hosszú bemenete. Kell egy vele ekvivalens, $O(f^2(n))$ táras OTG.
M egy konfigurációját $O(f(n) + \log n)$ tárral eltárolhatjuk (aktuális állapot, a munkaszalagok tartalma, fejek pozíciója, az első szalag fejének pozíciója n féle lehet, ezért $\geqslant \log n$ tár kell ennek eltárolásához). Ha $f(n) \geqslant \log n$, akkor $O(f(n) + \log n) = O(f(n))$.
Feltehető, hogy M-nek csak egyetlen C_{elf} elfogadó konfigurációja van. (Törölje le a TG a munkaszalagjait, mielőtt q_i-be lép!)
A legfeljebb $O(f(n))$ méretű konfigurációkat tartalmazó konfigurációs gráf mérete $2^{d \cdot f(n)}$ valamely $d > 0$ konstansra. Így az előző tétel szerint van olyan M' determinisztikus OTG, ami $O(\log^2(2^{df(n)})) = O(f^2(n))$ tárral el tudja dönteni, hogy a kezdőkonfigurációból elérhető-e C_{elf}. M' lépjen pontosan ekkor az elfogadó állapotába, így $L(M') = L(M)$.

Determinisztikus/nemdeterminisztikus polinom tár

Következmény

PSPACE = NPSPACE

Determinisztikus/nemdeterminisztikus polinom tár

Következmény

PSPACE = NPSPACE

Bizonyítás: $L \in \mathrm{NSPACE}(n^k) \stackrel{\text{Savitch}}{\Longrightarrow} L \in \mathrm{SPACE}(n^{2k})$.

Determinisztikus/nemdeterminisztikus polinom tár

Következmény

PSPACE = NPSPACE

Bizonyítás: $L \in \mathrm{NSPACE}(n^k) \overset{\text{Savitch}}{\Longrightarrow} L \in \mathrm{SPACE}(n^{2k})$.

Tétel

$\mathrm{NL} \subseteq \mathrm{P}$

Determinisztikus/nemdeterminisztikus polinom tár

Következmény

PSPACE = NPSPACE

Bizonyítás: $L \in \mathrm{NSPACE}(n^k) \overset{\text{Savitch}}{\Longrightarrow} L \in \mathrm{SPACE}(n^{2k})$.

Tétel

$\mathrm{NL} \subseteq \mathrm{P}$

Bizonyítás

Legyen $L \in \mathrm{NL}$ és M L-et $f(n) = O(\log n)$ tárral eldöntő NOTG.

Determinisztikus/nemdeterminisztikus polinom tár

Következmény

PSPACE = NPSPACE

Bizonyítás: $L \in \mathrm{NSPACE}(n^k) \overset{\text{Savitch}}{\Longrightarrow} L \in \mathrm{SPACE}(n^{2k})$.

Tétel

$\mathrm{NL} \subseteq \mathrm{P}$

Bizonyítás

Legyen $L \in \mathrm{NL}$ és M L-et $f(n) = O(\log n)$ tárral eldöntő NOTG. Meggondolható, hogy egy n méretű inputra M legfeljebb $f(n)$ méretű szalagtartalmakat tartalmazó konfigurációinak a száma legfeljebb $cnd^{\log n}$ alkalmas c, d konstansokkal, ami egy $p(n)$ polinommal felülről becsülhető.

Determinisztikus/nemdeterminisztikus polinom tár

Következmény

PSPACE = NPSPACE

Bizonyítás: $L \in \mathrm{NSPACE}(n^k) \stackrel{\text{Savitch}}{\Longrightarrow} L \in \mathrm{SPACE}(n^{2k})$.

Tétel

$\mathrm{NL} \subseteq \mathrm{P}$

Bizonyítás

Legyen $L \in \mathrm{NL}$ és M L-et $f(n) = O(\log n)$ tárral eldöntő NOTG. Meggondolható, hogy egy n méretű inputra M legfeljebb $f(n)$ méretű szalagtartalmakat tartalmazó konfigurációinak a száma legfeljebb $cnd^{\log n}$ alkalmas c, d konstansokkal, ami egy $p(n)$ polinommal felülről becsülhető. Így a G konfigurációs gráfnak legfeljebb $p(n)$ csúcsa van. G polinom időben megkonstruálható.

Determinisztikus/nemdeterminisztikus polinom tár

Következmény

PSPACE = NPSPACE

Bizonyítás: $L \in \mathrm{NSPACE}(n^k) \overset{\text{Savitch}}{\Longrightarrow} L \in \mathrm{SPACE}(n^{2k})$.

Tétel

$\mathrm{NL} \subseteq \mathrm{P}$

Bizonyítás

Legyen $L \in \mathrm{NL}$ és M L-et $f(n) = O(\log n)$ tárral eldöntő NOTG. Meggondolható, hogy egy n méretű inputra M legfeljebb $f(n)$ méretű szalagtartalmakat tartalmazó konfigurációinak a száma legfeljebb $cnd^{\log n}$ alkalmas c, d konstansokkal, ami egy $p(n)$ polinommal felülről becsülhető. Így a G konfigurációs gráfnak legfeljebb $p(n)$ csúcsa van. G polinom időben megkonstruálható. Feltehető, hogy G-ben egyetlen elfogadó konfiguráció van. G-ben a kezdőkonfigurációból az elfogadó konfiguráció elérhetősége $O(p^2(n))$ idejű determinisztikus TG-pel eldönthető, azaz $L \in \mathrm{P}$.

ELÉR eldöntése nemdeterminisztikus log. tárral

ELÉR fontos szerepet tölt be az $\mathrm{L} \stackrel{?}{=} \mathrm{NL}$ kérdés vizsgálatában is.

Tétel

ELÉR $\in$ NL

ELÉR eldöntése nemdeterminisztikus log. tárral

ELÉR fontos szerepet tölt be az L$\stackrel{?}{=}$NL kérdés vizsgálatában is.

Tétel

ELÉR $\in$ NL

Bizonyítás: Az M 3-szalagos NOTG a (G, s, t) inputra $(n = |V(G)|)$ a következőt teszi:

- ráírja s-t a második szalagra

ELÉR eldöntése nemdeterminisztikus log. tárral

ELÉR fontos szerepet tölt be az $L \stackrel{?}{=} NL$ kérdés vizsgálatában is.

Tétel

ELÉR $\in$ NL

Bizonyítás: Az M 3-szalagos NOTG a (G, s, t) inputra $(n = |V(G)|)$ a következőt teszi:

- ráírja s-t a második szalagra
- ráírja a 0-t a harmadik szalagra

ELÉR eldöntése nemdeterminisztikus log. tárral

ELÉR fontos szerepet tölt be az L$\stackrel{?}{=}$NL kérdés vizsgálatában is.

Tétel

ELÉR $\in$ NL

Bizonyítás: Az M 3-szalagos NOTG a (G, s, t) inputra $(n = |V(G)|)$ a következőt teszi:

- ráírja s-t a második szalagra
- ráírja a 0-t a harmadik szalagra
- Amíg a harmadik szalagon n-nél kisebb szám áll

ELÉR eldöntése nemdeterminisztikus log. tárral

ELÉR fontos szerepet tölt be az $L \stackrel{?}{=} NL$ kérdés vizsgálatában is.

Tétel

ELÉR $\in$ NL

Bizonyítás: Az M 3-szalagos NOTG a (G, s, t) inputra $(n = |V(G)|)$ a következőt teszi:

- ráírja s-t a második szalagra
- ráírja a 0-t a harmadik szalagra
- Amíg a harmadik szalagon n-nél kisebb szám áll
  - Legyen u a második szalagon lévő csúcs

ELÉR eldöntése nemdeterminisztikus log. tárral

ELÉR fontos szerepet tölt be az $L \stackrel{?}{=} NL$ kérdés vizsgálatában is.

Tétel

ELÉR $\in$ NL

Bizonyítás: Az M 3-szalagos NOTG a (G, s, t) inputra ($n = |V(G)|$) a következőt teszi:

- ráírja s-t a második szalagra
- ráírja a 0-t a harmadik szalagra
- Amíg a harmadik szalagon n-nél kisebb szám áll
  – Legyen u a második szalagon lévő csúcs
  – Nemdeterminisztikusan kiválasztja v egy ki-szomszédját és felírja u helyére a második szalagra

ELÉR eldöntése nemdeterminisztikus log. tárral

ELÉR fontos szerepet tölt be az $\mathrm{L} \stackrel{?}{=} \mathrm{NL}$ kérdés vizsgálatában is.

Tétel

ELÉR $\in$ NL

Bizonyítás: Az M 3-szalagos NOTG a (G, s, t) inputra $(n = |V(G)|)$ a következőt teszi:

- ráírja s-t a második szalagra
- ráírja a 0-t a harmadik szalagra
- Amíg a harmadik szalagon n-nél kisebb szám áll
  – Legyen u a második szalagon lévő csúcs
  – Nemdeterminisztikusan kiválasztja v egy ki-szomszédját és felírja u helyére a második szalagra
  – Ha $v = t$, akkor elfogadja a bemenetet, egyébként növeli a harmadik szalagon lévő számot (binárisan) eggyel

ELÉR eldöntése nemdeterminisztikus log. tárral

ELÉR fontos szerepet tölt be az $\mathrm{L} \stackrel{?}{=} \mathrm{NL}$ kérdés vizsgálatában is.

Tétel

ELÉR $\in$ NL

Bizonyítás: Az M 3-szalagos NOTG a (G, s, t) inputra $(n = |V(G)|)$ a következőt teszi:

- ráírja s-t a második szalagra
- ráírja a 0-t a harmadik szalagra
- Amíg a harmadik szalagon n-nél kisebb szám áll
  – Legyen u a második szalagon lévő csúcs
  – Nemdeterminisztikusan kiválasztja v egy ki-szomszédját és felírja u helyére a második szalagra
  – Ha $v = t$, akkor elfogadja a bemenetet, egyébként növeli a harmadik szalagon lévő számot (binárisan) eggyel
- Ha n-nél nagyobb szám áll a 3. szalagon, akkor elutasítja a bemenetet.

Elér eldöntése nemdeterminisztikus log. tárral

Elér fontos szerepet tölt be az $L \stackrel{?}{=} NL$ kérdés vizsgálatában is.

Tétel

Elér $\in$ NL

Bizonyítás: Az M 3-szalagos NOTG a (G, s, t) inputra $(n = |V(G)|)$ a következőt teszi:

- ráírja s-t a második szalagra
- ráírja a 0-t a harmadik szalagra
- Amíg a harmadik szalagon n-nél kisebb szám áll
  – Legyen u a második szalagon lévő csúcs
  – Nemdeterminisztikusan kiválasztja v egy ki-szomszédját és felírja u helyére a második szalagra
  – Ha $v = t$, akkor elfogadja a bemenetet, egyébként növeli a harmadik szalagon lévő számot (binárisan) eggyel
- Ha n-nél nagyobb szám áll a 3. szalagon, akkor elutasítja a bemenetet.

Mindkét szalag tartalmát $O(\log n)$ bittel kódolhatjuk.

Logaritmikus táras visszavezetés, NL-teljesség

Definíció

Egy $L_1 \subseteq \Sigma^*$ nyelv **logaritmikus tárral visszavezethető** egy $L_2 \subseteq \Delta^*$ nyelvre, ha $L_1 \leqslant L_2$ és a visszavezetéshez használt függvény kiszámítható logaritmikus többlet tárkorlátos determinisztikus offline Turing géppel. Jelölése: $L_1 \leqslant_\ell L_2$.

Logaritmikus táras visszavezetés, NL-teljesség

Definíció

Egy $L_1 \subseteq \Sigma^*$ nyelv **logaritmikus tárral visszavezethető** egy $L_2 \subseteq \Delta^*$ nyelvre, ha $L_1 \leqslant L_2$ és a visszavezetéshez használt függvény kiszámítható logaritmikus többlet tárkorlátos determinisztikus offline Turing géppel. Jelölése: $L_1 \leqslant_\ell L_2$.

Definíció

Egy L nyelv **NL-nehéz** (a log. táras visszavezetésre nézve), ha minden $L' \in \mathrm{NL}$ nyelvre, $L' \leqslant_\ell L$. Ha ezen felül $L \in \mathrm{NL}$ is teljesül, akkor L **NL-teljes** (a log. táras visszavezetésre nézve)

Logaritmikus táras visszavezetés, NL-teljesség

Definíció

Egy $L_1 \subseteq \Sigma^*$ nyelv **logaritmikus tárral visszavezethető** egy $L_2 \subseteq \Delta^*$ nyelvre, ha $L_1 \leqslant L_2$ és a visszavezetéshez használt függvény kiszámítható logaritmikus többlet tárkorlátos determinisztikus offline Turing géppel. Jelölése: $L_1 \leqslant_\ell L_2$.

Definíció

Egy L nyelv **NL-nehéz** (a log. táras visszavezetésre nézve), ha minden $L' \in \mathrm{NL}$ nyelvre, $L' \leqslant_\ell L$. Ha ezen felül $L \in \mathrm{NL}$ is teljesül, akkor L **NL-teljes** (a log. táras visszavezetésre nézve)

Tétel

Az L osztály zárt a logaritmikus tárral való visszavezetésre nézve.

Logaritmikus táras visszavezetés, NL-teljesség

Definíció

Egy $L_1 \subseteq \Sigma^*$ nyelv **logaritmikus tárral visszavezethető** egy $L_2 \subseteq \Delta^*$ nyelvre, ha $L_1 \leqslant L_2$ és a visszavezetéshez használt függvény kiszámítható logaritmikus többlet tárkorlátos determinisztikus offline Turing géppel. Jelölése: $L_1 \leqslant_\ell L_2$.

Definíció

Egy L nyelv **NL-nehéz** (a log. táras visszavezetésre nézve), ha minden $L' \in \mathrm{NL}$ nyelvre, $L' \leqslant_\ell L$. Ha ezen felül $L \in \mathrm{NL}$ is teljesül, akkor L **NL-teljes** (a log. táras visszavezetésre nézve)

Tétel

Az L osztály zárt a logaritmikus tárral való visszavezetésre nézve.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy $L_1 \leqslant_\ell L_2$ és $L_2 \in \mathrm{L}$.

Logaritmikus táras visszavezetés, NL-teljesség

Definíció

Egy $L_1 \subseteq \Sigma^*$ nyelv **logaritmikus tárral visszavezethető** egy $L_2 \subseteq \Delta^*$ nyelvre, ha $L_1 \leqslant L_2$ és a visszavezetéshez használt függvény kiszámítható logaritmikus többlet tárkorlátos determinisztikus offline Turing géppel. Jelölése: $L_1 \leqslant_\ell L_2$.

Definíció

Egy L nyelv **NL-nehéz** (a log. táras visszavezetésre nézve), ha minden $L' \in \mathrm{NL}$ nyelvre, $L' \leqslant_\ell L$. Ha ezen felül $L \in \mathrm{NL}$ is teljesül, akkor L **NL-teljes** (a log. táras visszavezetésre nézve)

Tétel

Az L osztály zárt a logaritmikus tárral való visszavezetésre nézve.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy $L_1 \leqslant_\ell L_2$ és $L_2 \in \mathrm{L}$.
Legyen M_2 az L_2-t eldöntő, M pedig a visszavezetésben használt f függvényt kiszámoló logaritmikus táras determinisztikus OTG.

L logaritmikus táras visszavezetésre való zártsága

Az M_1 OTG egy tetszőleges u szóra a következőképpen működik

L logaritmikus táras visszavezetésre való zártsága

Az M_1 OTG egy tetszőleges u szóra a következőképpen működik

- A második szalagján egy bináris számlálóval nyomon követi, hogy M_2 feje hányadik betűjét olvassa az $f(u)$ szónak; legyen ez a szám i (kezdetben 1)

L logaritmikus táras visszavezetésre való zártsága

Az M_1 OTG egy tetszőleges u szóra a következőképpen működik

- A második szalagján egy bináris számlálóval nyomon követi, hogy M_2 feje hányadik betűjét olvassa az $f(u)$ szónak; legyen ez a szám i (kezdetben 1)
- Amikor M_2 lépne egyet, akkor M_1 az M-et szimulálva előállítja a harmadik szalagon $f(u)$ i-ik betűjét (de csak ezt a betűt!!!)

L logaritmikus táras visszavezetésre való zártsága

Az M_1 OTG egy tetszőleges u szóra a következőképpen működik

- A második szalagján egy bináris számlálóval nyomon követi, hogy M_2 feje hányadik betűjét olvassa az $f(u)$ szónak; legyen ez a szám i (kezdetben 1)
- Amikor M_2 lépne egyet, akkor M_1 az M-et szimulálva előállítja a harmadik szalagon $f(u)$ i-ik betűjét (de csak ezt a betűt!!!)
- Ezután M_1 szimulálja M_2 aktuális lépését a harmadik szalagon lévő betű felhasználásával és aktualizálja a második szalagon M_2 fejének újabb pozícióját

L logaritmikus táras visszavezetésre való zártsága

Az M_1 OTG egy tetszőleges u szóra a következőképpen működik

- A második szalagján egy bináris számlálóval nyomon követi, hogy M_2 feje hányadik betűjét olvassa az $f(u)$ szónak; legyen ez a szám i (kezdetben 1)
- Amikor M_2 lépne egyet, akkor M_1 az M-et szimulálva előállítja a harmadik szalagon $f(u)$ i-ik betűjét (de csak ezt a betűt!!!)
- Ezután M_1 szimulálja M_2 aktuális lépését a harmadik szalagon lévő betű felhasználásával és aktualizálja a második szalagon M_2 fejének újabb pozícióját
- Ha M_2 elfogadó vagy elutasító állapotba lép, akkor M_1 lépjen a saját elfogadó vagy elutasító állapotába, egyébként folytassa a szimulációt a következő lépéssel

L logaritmikus táras visszavezetésre való zártsága

Az M_1 OTG egy tetszőleges u szóra a következőképpen működik

- A második szalagján egy bináris számlálóval nyomon követi, hogy M_2 feje hányadik betűjét olvassa az $f(u)$ szónak; legyen ez a szám i (kezdetben 1)
- Amikor M_2 lépne egyet, akkor M_1 az M-et szimulálva előállítja a harmadik szalagon $f(u)$ i-ik betűjét (de csak ezt a betűt!!!)
- Ezután M_1 szimulálja M_2 aktuális lépését a harmadik szalagon lévő betű felhasználásával és aktualizálja a második szalagon M_2 fejének újabb pozícióját
- Ha M_2 elfogadó vagy elutasító állapotba lép, akkor M_1 lépjen a saját elfogadó vagy elutasító állapotába, egyébként folytassa a szimulációt a következő lépéssel

L logaritmikus táras visszavezetésre való zártsága

Az M_1 OTG egy tetszőleges u szóra a következőképpen működik

- A második szalagján egy bináris számlálóval nyomon követi, hogy M_2 feje hányadik betűjét olvassa az $f(u)$ szónak; legyen ez a szám i (kezdetben 1)
- Amikor M_2 lépne egyet, akkor M_1 az M-et szimulálva előállítja a harmadik szalagon $f(u)$ i-ik betűjét (de csak ezt a betűt!!!)
- Ezután M_1 szimulálja M_2 aktuális lépését a harmadik szalagon lévő betű felhasználásával és aktualizálja a második szalagon M_2 fejének újabb pozícióját
- Ha M_2 elfogadó vagy elutasító állapotba lép, akkor M_1 lépjen a saját elfogadó vagy elutasító állapotába, egyébként folytassa a szimulációt a következő lépéssel

Belátható, hogy M_1 L_1-et dönti el és a működése során csak logaritmikus méretű tárat használ, azaz $L_1 \in$ L.

ELÉR NL-teljessége

Következmény

Ha egy L nyelv NL-teljes és $L \in \mathsf{L}$, akkor $\mathsf{L} = \mathsf{NL}$.

ELÉR NL-teljessége

Következmény

Ha egy L nyelv NL-teljes és $L \in$ L, akkor L $=$ NL.

Bizonyítás: Legyen $L' \in$ NL tetszőleges, ekkor L NL-teljessége miatt $L' \leqslant_\ell L$. $L \in$ L, így L logaritmikus tárral való visszavezetésre való zártsága miatt $L' \in$ L. Tehát NL $\subseteq$ L. A másik irány a definíciókból következik.

ELÉR NL-teljessége

Következmény

Ha egy L nyelv NL-teljes és $L \in$ L, akkor L $=$ NL.

Bizonyítás: Legyen $L' \in$ NL tetszőleges, ekkor L NL-teljessége miatt $L' \leqslant_\ell L$. $L \in$ L, így L logaritmikus tárral való visszavezetésre való zártsága miatt $L' \in$ L. Tehát NL $\subseteq$ L. A másik irány a definíciókból következik.

Tétel

ELÉR NL-teljes a logaritmikus tárral történő visszavezetésre nézve.

ELÉR NL-teljessége

Következmény

Ha egy L nyelv NL-teljes és $L \in$ L, akkor L $=$ NL.

Bizonyítás: Legyen $L' \in$ NL tetszőleges, ekkor L NL-teljessége miatt $L' \leqslant_\ell L$. $L \in$ L, így L logaritmikus tárral való visszavezetésre való zártsága miatt $L' \in$ L. Tehát NL $\subseteq$ L. A másik irány a definíciókból következik.

Tétel

ELÉR NL-teljes a logaritmikus tárral történő visszavezetésre nézve.

Bizonyítás:

- Korábban láttuk, hogy ELÉR $\in$ NL

ELÉR NL-teljessége

Következmény

Ha egy L nyelv NL-teljes és $L \in$ L, akkor L = NL.

Bizonyítás: Legyen $L' \in$ NL tetszőleges, ekkor L NL-teljessége miatt $L' \leqslant_\ell L$. $L \in$ L, így L logaritmikus tárral való visszavezetésre való zártsága miatt $L' \in$ L. Tehát NL $\subseteq$ L. A másik irány a definíciókból következik.

Tétel

ELÉR NL-teljes a logaritmikus tárral történő visszavezetésre nézve.

Bizonyítás:

- Korábban láttuk, hogy ELÉR $\in$ NL
- Legyen $L \in$ NL, megmutatjuk, hogy $L \leqslant_\ell$ ELÉR

ELÉR NL-teljessége

Következmény

Ha egy L nyelv NL-teljes és $L \in$ L, akkor L $=$ NL.

Bizonyítás: Legyen $L' \in$ NL tetszőleges, ekkor L NL-teljessége miatt $L' \leqslant_\ell L$. $L \in$ L, így L logaritmikus tárral való visszavezetésre való zártsága miatt $L' \in$ L. Tehát NL $\subseteq$ L. A másik irány a definíciókból következik.

Tétel

ELÉR NL-teljes a logaritmikus tárral történő visszavezetésre nézve.

Bizonyítás:

- Korábban láttuk, hogy ELÉR $\in$ NL
- Legyen $L \in$ NL, megmutatjuk, hogy $L \leqslant_\ell$ ELÉR
- Legyen M egy L-et eldöntő $O(\log n)$ táras NOTG és $|u| = n$

ELÉR NL-teljessége

Következmény

Ha egy L nyelv NL-teljes és $L \in$ L, akkor L = NL.

Bizonyítás: Legyen $L' \in$ NL tetszőleges, ekkor L NL-teljessége miatt $L' \leqslant_\ell L$. $L \in$ L, így L logaritmikus tárral való visszavezetésre való zártsága miatt $L' \in$ L. Tehát NL $\subseteq$ L. A másik irány a definíciókból következik.

Tétel

ELÉR NL-teljes a logaritmikus tárral történő visszavezetésre nézve.

Bizonyítás:

- Korábban láttuk, hogy ELÉR $\in$ NL
- Legyen $L \in$ NL, megmutatjuk, hogy $L \leqslant_\ell$ ELÉR
- Legyen M egy L-et eldöntő $O(\log n)$ táras NOTG és $|u| = n$
- Az $O(\log n)$ tárat használó konfigurációk $\leqslant c \cdot \log n$ hosszúak (alkalmas c-re)

ELÉR NL-teljessége; Immerman-Szelepcsényi

- A G_M konfigurációs gráfban akkor és csak akkor lehet a kezdőkonfigurációból az elfogadóba jutni (feltehető, hogy csak egy ilyen van), ha $u \in L(M)$. Így $L \leqslant$ ELÉR.

ELÉR NL-teljessége; Immerman-Szelepcsényi

- A G_M konfigurációs gráfban akkor és csak akkor lehet a kezdőkonfigurációból az elfogadóba jutni (feltehető, hogy csak egy ilyen van), ha $u \in L(M)$. Így $L \leqslant$ ELÉR.

Kell még, hogy a visszavezetés log. tárat használ, azaz G_M megkonstruálható egy log. táras N determinisztikus OTG-pel:

Elér NL-teljessége; Immerman-Szelepcsényi

- A G_M konfigurációs gráfban akkor és csak akkor lehet a kezdőkonfigurációból az elfogadóba jutni (feltehető, hogy csak egy ilyen van), ha $u \in L(M)$. Így $L \leqslant$ Elér.

Kell még, hogy a visszavezetés log. tárat használ, azaz G_M megkonstruálható egy log. táras N determinisztikus OTG-pel:

- N sorolja fel a hossz-lexikografikus rendezés szerint az összes legfeljebb $c \cdot \log n$ hosszú szót az egyik szalagján, majd tesztelje, hogy az legális konfigurációja-e M-nek, ha igen, akkor a szót írja ki a kimenetre

ELÉR NL-teljessége; Immerman-Szelepcsényi

- A G_M konfigurációs gráfban akkor és csak akkor lehet a kezdőkonfigurációból az elfogadóba jutni (feltehető, hogy csak egy ilyen van), ha $u \in L(M)$. Így $L \leqslant$ ELÉR.

Kell még, hogy a visszavezetés log. tárat használ, azaz G_M megkonstruálható egy log. táras N determinisztikus OTG-pel:

- N sorolja fel a hossz-lexikografikus rendezés szerint az összes legfeljebb $c \cdot \log n$ hosszú szót az egyik szalagján, majd tesztelje, hogy az legális konfigurációja-e M-nek, ha igen, akkor a szót írja ki a kimenetre
- Az élek (konfiguráció párok) hasonlóképpen felsorolhatók, tesztelhetők és a kimenetre írhatók

ELÉR NL-teljessége; Immerman-Szelepcsényi

- A G_M konfigurációs gráfban akkor és csak akkor lehet a kezdőkonfigurációból az elfogadóba jutni (feltehető, hogy csak egy ilyen van), ha $u \in L(M)$. Így $L \leqslant$ ELÉR.

Kell még, hogy a visszavezetés log. tárat használ, azaz G_M megkonstruálható egy log. táras N determinisztikus OTG-pel:

- N sorolja fel a hossz-lexikografikus rendezés szerint az összes legfeljebb $c \cdot \log n$ hosszú szót az egyik szalagján, majd tesztelje, hogy az legális konfigurációja-e M-nek, ha igen, akkor a szót írja ki a kimenetre
- Az élek (konfiguráció párok) hasonlóképpen felsorolhatók, tesztelhetők és a kimenetre írhatók

Immerman-Szelepcsényi tétel

NL = coNL

(biz. nélkül)

Hierarchia tétel

EXPTIME:=$\bigcup_{k\in\mathbb{N}}$TIME(k^n).

Hierarchia tétel

EXPTIME:=$\bigcup_{k\in\mathbb{N}}$TIME(k^n).

Hierarchia tétel

(I) NL $\subset$ PSPACE és P $\subset$ EXPTIME.

Hierarchia tétel

EXPTIME:=$\bigcup_{k\in\mathbb{N}}$TIME(k^n).

Hierarchia tétel

(I) NL $\subset$ PSPACE és P $\subset$ EXPTIME.

(II) L $\subseteq$ NL=coNL $\subseteq$ P $\subseteq$ NP $\subseteq$ NPSPACE=PSPACE $\subseteq$ EXPTIME

Hierarchia tétel

EXPTIME:=$\bigcup_{k\in\mathbb{N}}$TIME(k^n).

Hierarchia tétel

(I) NL $\subset$ PSPACE és P $\subset$ EXPTIME.

(II) L $\subseteq$ NL=coNL $\subseteq$ P $\subseteq$ NP $\subseteq$ NPSPACE=PSPACE $\subseteq$ EXPTIME

Sejtés: A fenti tartalmazási lánc minden tartalmazása valódi.

Hierarchia tétel

(I)-et nem bizonyítjuk.

Hierarchia tétel

(I)-et nem bizonyítjuk.

(II) bizonyítása:

$$\mathrm{L} \overset{(1)}{\subseteq} \mathrm{NL} \overset{(2)}{=} \mathrm{coNL} \overset{(3)}{\subseteq} \mathrm{P} \overset{(4)}{\subseteq} \mathrm{NP} \overset{(5)}{\subseteq} \mathrm{NPSPACE} \overset{(6)}{=} \mathrm{PSPACE} \overset{(7)}{\subseteq} \mathrm{EXPTIME}$$

(1) és (4): a nemdeterminisztikusság definíciójából következik

Hierarchia tétel

(I)-et nem bizonyítjuk.

(II) bizonyítása:

$$\mathsf{L} \overset{(1)}{\subseteq} \mathsf{NL} \overset{(2)}{=} \mathsf{coNL} \overset{(3)}{\subseteq} \mathsf{P} \overset{(4)}{\subseteq} \mathsf{NP} \overset{(5)}{\subseteq} \mathsf{NPSPACE} \overset{(6)}{=} \mathsf{PSPACE} \overset{(7)}{\subseteq} \mathsf{EXPTIME}$$

(1) és (4): a nemdeterminisztikusság definíciójából következik

(2): Immerman- Szelepcsényi

Hierarchia tétel

(I)-et nem bizonyítjuk.

(II) bizonyítása:

$$\mathrm{L} \overset{(1)}{\subseteq} \mathrm{NL} \overset{(2)}{=} \mathrm{coNL} \overset{(3)}{\subseteq} \mathrm{P} \overset{(4)}{\subseteq} \mathrm{NP} \overset{(5)}{\subseteq} \mathrm{NPSPACE} \overset{(6)}{=} \mathrm{PSPACE} \overset{(7)}{\subseteq} \mathrm{EXPTIME}$$

(1) és (4): a nemdeterminisztikusság definíciójából következik

(2): Immerman- Szelepcsényi

(3),(6): előbb bizonyítottuk

Hierarchia tétel

(I)-et nem bizonyítjuk.

(II) bizonyítása:

$$\mathrm{L} \overset{(1)}{\subseteq} \mathrm{NL} \overset{(2)}{=} \mathrm{coNL} \overset{(3)}{\subseteq} \mathrm{P} \overset{(4)}{\subseteq} \mathrm{NP} \overset{(5)}{\subseteq} \mathrm{NPSPACE} \overset{(6)}{=} \mathrm{PSPACE} \overset{(7)}{\subseteq} \mathrm{EXPTIME}$$

(1) és (4): a nemdeterminisztikusság definíciójából következik

(2): Immerman- Szelepcsényi

(3),(6): előbb bizonyítottuk

(5): Ha egy NTG egy számítására adott egy időkorlát, akkor ennél a korlátnál több új cellát nincs ideje egyik fejnek sem felfedezni.

Hierarchia tétel

(I)-et nem bizonyítjuk.

(II) bizonyítása:

$$\mathrm{L} \overset{(1)}{\subseteq} \mathrm{NL} \overset{(2)}{=} \mathrm{coNL} \overset{(3)}{\subseteq} \mathrm{P} \overset{(4)}{\subseteq} \mathrm{NP} \overset{(5)}{\subseteq} \mathrm{NPSPACE} \overset{(6)}{=} \mathrm{PSPACE} \overset{(7)}{\subseteq} \mathrm{EXPTIME}$$

(1) és (4): a nemdeterminisztikusság definíciójából következik

(2): Immerman- Szelepcsényi

(3),(6): előbb bizonyítottuk

(5): Ha egy NTG egy számítására adott egy időkorlát, akkor ennél a korlátnál több új cellát nincs ideje egyik fejnek sem felfedezni. Így ez az időkorlát egyben tárkorlát is.

Hierarchia tétel

(I)-et nem bizonyítjuk.

(II) bizonyítása:

$\mathrm{L} \overset{(1)}{\subseteq} \mathrm{NL} \overset{(2)}{=} \mathrm{coNL} \overset{(3)}{\subseteq} \mathrm{P} \overset{(4)}{\subseteq} \mathrm{NP} \overset{(5)}{\subseteq} \mathrm{NPSPACE} \overset{(6)}{=} \mathrm{PSPACE} \overset{(7)}{\subseteq} \mathrm{EXPTIME}$

(1) és (4): a nemdeterminisztikusság definíciójából következik

(2): Immerman- Szelepcsényi

(3),(6): előbb bizonyítottuk

(5): Ha egy NTG egy számítására adott egy időkorlát, akkor ennél a korlátnál több új cellát nincs ideje egyik fejnek sem felfedezni. Így ez az időkorlát egyben tárkorlát is.

(7): Elérhetőségi módszerrel: a használt tár méretének exponenciális függvénye a konfigurációs gráf mérete.

Hierarchia tétel

(I)-et nem bizonyítjuk.

(II) bizonyítása:

$$\mathrm{L} \overset{(1)}{\subseteq} \mathrm{NL} \overset{(2)}{=} \mathrm{coNL} \overset{(3)}{\subseteq} \mathrm{P} \overset{(4)}{\subseteq} \mathrm{NP} \overset{(5)}{\subseteq} \mathrm{NPSPACE} \overset{(6)}{=} \mathrm{PSPACE} \overset{(7)}{\subseteq} \mathrm{EXPTIME}$$

(1) és (4): a nemdeterminisztikusság definíciójából következik

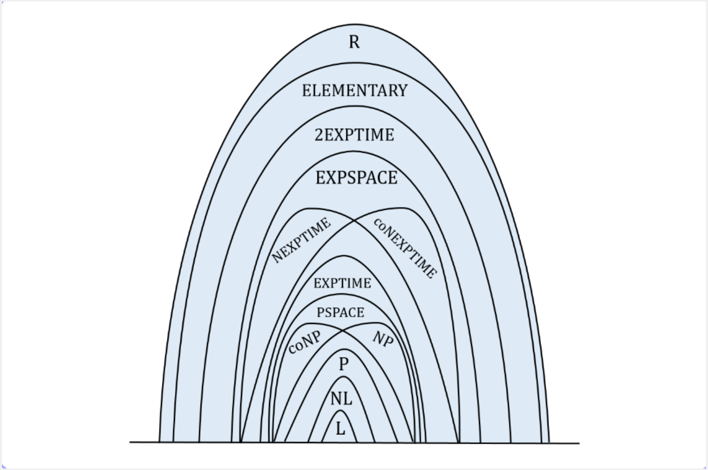
(2): Immerman- Szelepcsényi

(3),(6): előbb bizonyítottuk

(5): Ha egy NTG egy számítására adott egy időkorlát, akkor ennél a korlátnál több új cellát nincs ideje egyik fejnek sem felfedezni. Így ez az időkorlát egyben tárkorlát is.

(7): Elérhetőségi módszerrel: a használt tár méretének exponenciális függvénye a konfigurációs gráf mérete. A konfigurációs gráf méretében négyzetes (azaz összességében a tár méretében exponenciális) időben tudja egy determinisztikus TG az elérhetőséget tesztelni a kezdőkonfigurációból az elfogadó konfigurációba.

R szerkezete



R szerkezete (a tartalmazások valódisága nem mindenütt bizonyított)
[ábra: Gazdag Zs. e-jegyzet]