VALÓSZÍNŰSÉGELMÉLETI ÖSSZEFOGLALÓ

1. VÉLETLEN ESEMÉNYEK, MŰVELETEK ESEMÉNYEKKEL, ESEMÉNY (σ-)ALGEBRA.

A valószínűségelmélet véletlentől függő tömegjelenségekkel, tömegesen előforduló véletlen eseményekkel foglalkozik.

Számos olyan jelenséggel találkozunk a természetben, a mindennapi életben, amikor a figyelembe vett, vagy egyáltalán figyelembe vehető körülmények összessége nem határozza meg a jelenség kimenetelét. Ezeket ***véletlen jelenségeknek,*** s a több alkalommal lényegében azonos körülmények között megismétlődő, illetve megismételhető véletlen jelenségeket ***véletlen tömegjelenségnek*** nevezzük. A véletlen jelenséget jellemző eseményeket ***véletlen eseményeknek*** nevezzük.

Az alapvető különbség a ***determinisztikus***, illetve ***véletlen események*** között abban van, hogy míg determinisztikus esetben a körülmények bizonyos összessége mellett egy adott esemény szükségképpen bekövetkezik, addig az utóbbi esetben vagy bekövetkezik, vagy nem, azaz a megadott körülmények esetén nem látható előre az esemény bekövetkezése, vagy be nem következése. Itt fontos megjegyezni, hogy ***adott körülményegyüttes mellett egy esemény lehet véletlen, míg más mellett akár determinisztikus is lehet***.

A természettudományban számos determinisztikus törvény pontosabb vizsgálat esetén sztochasztikusnak bizonyul. Például a Boyle-Mariotte és a Gay-Lussac törvényt általában determinisztikusnak tekintik.

> (B-M) Állandó hőmérsékleten adott mennyiségű tökéletes gáz (a térfogathoz képest elhanyagolható helyet foglal el, nincs belső kölcsönhatás) nyomása fordítottan arányos a térfogatával
>
> (G-L) Állandó nyomáson a tökéletes gázok hő okozta térfogatváltozása egyenesen arányos a hőmérséklet-változással és az eredeti térfogattal. Állandó térfogaton a tökéletes gáz nyomásváltozása egyenesen arányos a hőmérséklet-változással és az eredeti nyomással.
>
> Ebben az esetben a statisztikus törvényszerűség háttere: a gáz átlagos nyomását az időegység alatt az edény falába ütköző molekulák átlagos száma és sebessége határozza meg. Az ingadozások nagy gázmennyiség esetén elhanyagolhatók.

Másik példa: Vizes oldatban egymással kémiai reakcióba lépő A és B anyag reakciósebességét általában determinisztikus törvénynek tekintik, és amely a két anyag koncentrációjának szorzatával arányos.

> A reakciósebesség a két anyag ionjai közötti "véletlen találkozások" számától függ, ennek átlagos száma a koncentrációk szorzatával arányos. A magyarázat itt az, hogy az ionok szabadon mozoghatnak az oldatban és a "véletlen találkozások" alkalmával lépnek egymással reakcióba.

A véletlen tömegjelenség egyes kimeneteleinek megfigyeléseit ***véletlen kísérletnek***, míg egy kísérlet lehetséges, egymástól különböző ω kimeneteleit ***elemi eseménynek*** nevezzük. A kísérlettel kapcsolatos elemi események $\Omega=\{\omega\}$ összessége (halmaza) az ***eseménytér***.

Az elemi események (lehetséges kimenetelek) meghatározása nem mindig magától értetődő, ezért minden esetben tisztázni kell azt, hogy mit tekintünk annak. Általában a vizsgált feladat logikáját követve a legegyszerűbben használható modellt célszerű kiválasztani. Példaként felsorolunk néhány modellt.

1. Egy pénzérme dobásánál megfelelő választás lehet pl. $\Omega = \{F,I\}$ (F = fej, I = írás), vagy $\Omega = \{0,1\}$, (0 = írás, 1 = fej).
2. Egy kocka dobásánál az eseménytérnek megfelel az $\Omega = \{1,2,...,6\}$ választás.

2 kocka dobásánál már más és más modellhez jutunk, ha

3. Felírjuk azt, hogy az egyes kockákkal mit dobunk. Ebben az esetben $\Omega = \{(1,1),(1,2),...,(6,6)\}$, amely összesen 36 elemi eseményt tartalmaz.
4. Csak az összegüket írjuk fel. Az elemi események tere ekkor $\Omega = \{2,3,...,12\}$, összesen 11 elemi eseménnyel.

Megjegyzés. Természetesen sokféle jelölés vezethető be az eseménytérre, pl. a 2. modell esetén választhatnánk az $\Omega = \{1,2,...,36\}$ jelölést, az $(1,1)\to 1$, $(1,2)\to 2$, ..., $(6,6)\to 36$ megfeleltetés mellett, de használhatnánk pl. az $\Omega = \{\omega_1,\omega_2,...,\omega_{36}\}$ jelölést is. Matematikailag célszerű minél egyszerűbben kezelhetően leírni az eseményteret. A nem megfelelően megválasztott jelölés jelentős mértékben megnehezítheti a modellre vonatkozó számításokat.

Az elemi eseményeken kívül általában más eseményeket is lehet, illetve szükséges nézni, például két kocka dobásánál nemcsak a lehetséges $\Omega = \{(i,j),\ 1\le i,j \le 6\}$ elemi eseményeket, hanem azt is, hogy a két dobás összege páros, avagy a két dobás megegyezik-e egymással, stb.?

Az esemény felfogható úgy is, mint a kísérlet eredményére vonatkozó állítás – az esemény bekövetkezik, ha az állítás igaz lesz. Minden eseményhez hozzárendelhető az eseménytér egy részhalmaza, melyhez azok az elemi események tartoznak, melyekre a kísérlet eredményére vonatkozó állítás igaz lesz.

Véletlen esemény, vagy röviden ***esemény*** alatt tehát az elemi események bizonyos halmazait értjük, azzal azonosítjuk és azt mondjuk, hogy egy kísérlet során egy megadott A esemény ***bekövetkezik***, ha a kísérlet ω kimenetele egy olyan elemi esemény, amely az adott eseményhez tartozik, vagyis $\omega \in A$.

Megjegyzés. Matematikailag szigorúan véve, az Ω halmaznak nem feltétlenül minden részhalmaza esemény, csak azok, amelyeket annak tekintünk - általában csak olyanokat, amelyekre nézve a kísérlet eredményéből következtetni lehet arra, hogy az esemény bekövetkezett-e, vagy sem. Ez utóbbiakat ***megfigyelhető eseményeknek*** nevezzük. Előfordulhat azonban az az eset, amikor nem minden eseményt tudunk megfigyelni. A 4. példában csak a 2, illetve 12 összeg esetén tudunk következtetni az (1,1), illetve (6,6) eredmény bekövetkezésére, a többi esetben nem: ezekben az esetben az összegből nem tudjuk megmondani biztosan, hogy melyik (i,j) páros következett be. Így az utóbbi események nem megfigyelhetőek ebben az esetben (ha a példa szerint csak a két szám összegét jegyezzük fel).

ESEMÉNYEK MATEMATIKAI FOGALMA.

Minthogy a valószínűségszámítás absztrakt matematikai elmélet, ezért az esemény fogalmát és alapvető tulajdonságait (melyeket ki kell elégítenie az eseményeknek) megfelelő absztrakt matematikai fogalmakkal kell értelmezni és amelyre az alábbiakban térünk ki.

Adott kísérlet esetén az egymást kölcsönösen kizáró lehetséges ω kimeneteleket ***elemi eseményeknek***, míg az összes elemi esemény (nem üres) Ω halmazát ***eseménytérnek*** nevezzük. Ha az Ω eseménytér véges, vagy megszámlálhatóan végtelen sok elemből áll, akkor azt mondjuk, hogy az elemi eseménytér ***diszkrét***.

Az Ω halmaz bizonyos $A \subseteq \Omega$ részhalmazait ***eseményeknek*** nevezzük. Az Ω halmaz nem feltétlenül minden részhalmazát tekintjük eseménynek, hanem csak azokat, amelyekkel elvégezve adott (halmaz-) műveleteket, újból eseményhez jutunk. Később, az eseményekkel kapcsolatban definiált műveletek bevezetése után adjuk meg a precíz meghatározást. Megjegyezzük, hogy az eseményekkel való műveletek jelölésére a szakirodalomban egyaránt használatos a speciális valószínűségelméleti, mind pedig a szokásos halmazelméleti jelölésrendszer.

Egy ***A esemény bekövetkezésén*** azt értjük, hogy van olyan $\omega \in A$ elemi esemény, amely bekövetkezett.

Az Ω-t, illetve a $\emptyset$ üres halmazt, melyeket mindig eseményekként értelmezünk, a ***biztos eseménynek***, illetve ***lehetetlen eseménynek*** nevezzük.

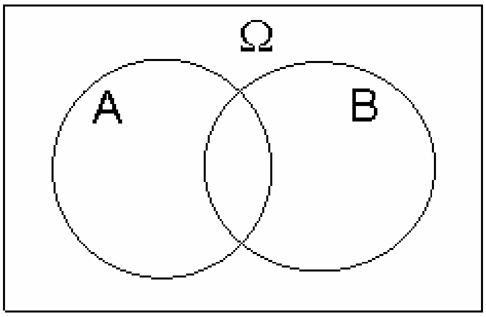
MŰVELETEK ESEMÉNYEKKEL.

Két tetszőleges A és B esemény $A+B$ $(A \cup B)$ ***összegén*** (***egyesítésén,*** vagy ***unióján***) azt az eseményt értjük, melyhez azok az elemi események tartoznak, amelyek az A és B esemény közül legalább az egyiknek eleme. (Lásd 2. ábra.)

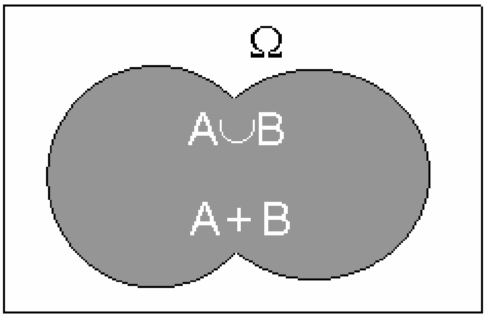
Az A és B esemény $A \cdot B$ $(A \cap B)$ ***szorzata*** (***metszete***) az az esemény, melyhez azok az elemi események tartoznak, amelyek mindkét A és B esemény elemei. (Lásd 3. ábra.)

Az A és B esemény $A-B$ $(A \setminus B)$ ***különbségén*** egy olyan eseményt értünk, melyhez azok az elemi események tartoznak, amelyek elemei A-nak, de nem elemei B-nek. (Lásd 4. ábra.)

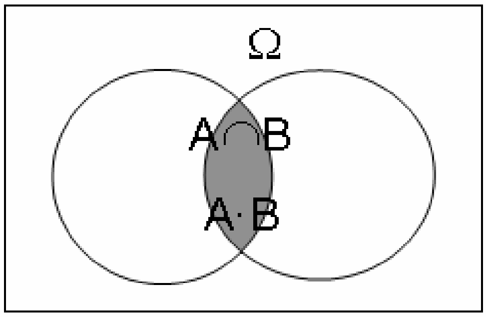
Az $\overline{A} = \Omega - A$ eseményt az ***A esemény komplementerének*** nevezzük. (Lásd 5. ábra.)



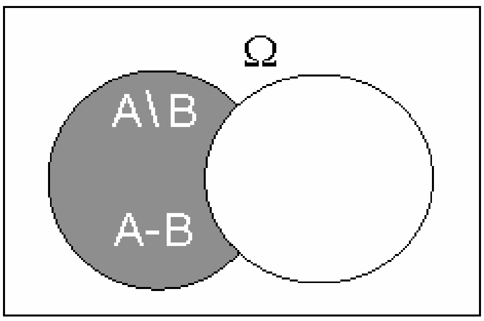
1. ábra



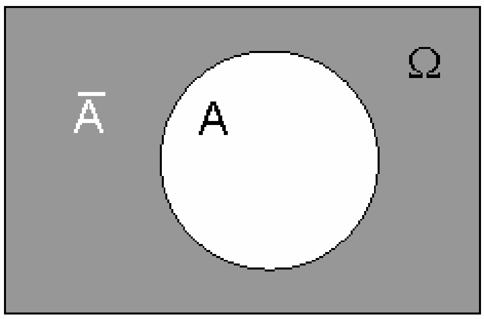
2. ábra



3. ábra



4. ábra



5. ábra

Ha az A és B eseményre $A \cdot B = \emptyset$, akkor azt mondjuk, hogy az ***A és B esemény diszjunkt***.

Az események komplementereire érvényesek a de Morgan-féle azonosságok:

$$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B},$$
$$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$$

Bármely A, B, C esemény mellett fennállnak az alábbi összefüggések:

$$
\begin{array}{ll}
A + A = A, & A \cdot A = A, \\
A + B = B + A, & A \cdot B = B \cdot A, \\
A + (B + C) = (A + B) + C, & A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C, \\
A + (BC) = (A + B)(A + C), & A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C), \\
A + \overline{A} = \Omega, & A \cdot \overline{A} = \emptyset, \\
A + \emptyset = A, & A \cdot \Omega = A, \\
A + \Omega = \Omega & A \cdot \emptyset = \cdot\emptyset.
\end{array}
$$

ESEMÉNYALGEBRA ÉS σ-ALGEBRA A most bevezetett műveletek segítségével megadhatjuk az ***esemény (σ-) algebra*** fogalmát, amely a valószínűségelmélet alapvető algebrai struktúrája.

Definíció. Legyen Ω tetszőleges nem üres (absztrakt) halmaz. Legyen $\mathcal{A}$ az Ω bizonyos részhalmazaiból alkotott események halmaza, amely eleget tesz az alábbi tulajdonságoknak:

1) $\Omega \in \mathcal{A}$,

2) Ha $A \in \mathcal{A}$ és $B \in \mathcal{A}$, akkor egyidejűleg az $A + B$, $A \cdot B$ és az $A - B$ halmazok mindegyike is eleme $\mathcal{A}$ -nak.

Az 1) és 2) tulajdonságokkal rendelkező $\mathcal{A}$ eseményrendszert (halmazrendszert) ***eseményalgebrának*** (***halmazalgebrának***) nevezzük.

Véges Ω halmaz esetén a most definiált eseményalgebra teljesen megfelel a valószínűség matematikai fogalmának bevezetéséhez. Ha az Ω halmaz nem véges, akkor az eseményalgebrával kapcsolatban még egy kiegészítő tulajdonságot kell megkövetelnünk.

Definíció. Legyen Ω tetszőleges nem üres halmaz és legyen $\mathcal{A}$ az Ω bizonyos részhalmazaiból alkotott események halmaza. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{A}$ egy ***esemény σ-algebra***, ha eseményalgebra és tetszőleges, legfeljebb megszámlálhatóan végtelen sok $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ események mellett

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}.$$

Az $\mathcal{A}$ esemény (σ-)algebra elemeit ***eseményeknek*** nevezzük. Az ilyen tulajdonsággal rendelkező $(\Omega, \mathcal{A})$ páros képezi az általános valószínűségfogalom alapját.

2. A VALÓSZÍNŰSÉG FOGALMA.

GYAKORISÁG ÉS RELATÍV GYAKORISÁG. Végezzünk el egy kísérletet n-szer egymás után, egymástól függetlenül, melynek során vizsgáljuk egy adott A esemény bekövetkezéseinek a számát.

Jelölje $S_n(A)$ az n számú kísérletben az A esemény bekövetkezéseinek számát, vagyis az A esemény ***gyakoriságát***, míg $\overline{S}_n(A) = S_n(A)/n$ az A esemény bekövetkezésének ***relatív gyakoriságát***. Megfigyelhető, hogy a megfigyelésszám növekedtével a relatív gyakoriság egy csak az A eseménytől függő p_A számhoz tart:

$$\overline{S}_n(A) \to p_A, \; n \to \infty .$$

Ez jelenti a valószínűség intuitív fogalmát. Egyszerűen látható fontosabb összefüggések:

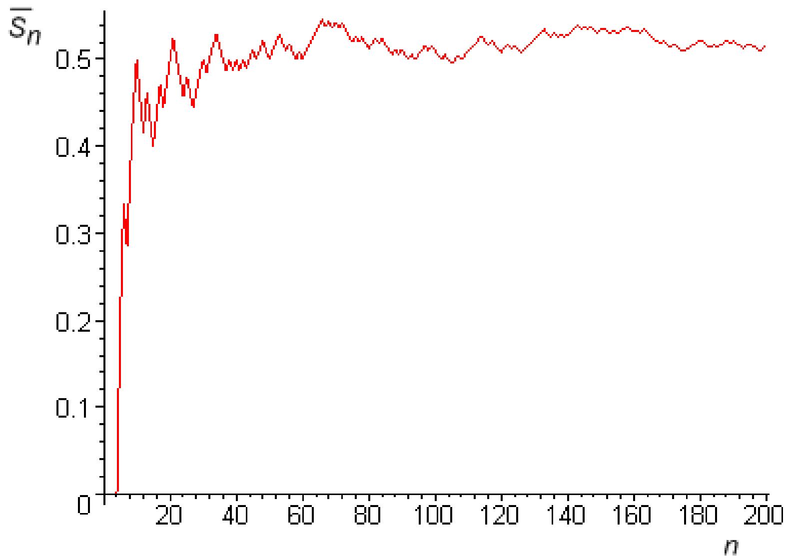
$$0 \le S_n(A) \le n, \qquad 0 \le \overline{S}_n(A) \le 1, \qquad 0 \le p_A \le 1$$

ha A és B tetszőleges egymást kizáró események, akkor

$$S_n(A+B) = S_n(A) + S_n(B), \qquad \overline{S}_n(A+B) = \overline{S}_n(A) + \overline{S}_n(B), \qquad p_{A+B} = p_A + p_B$$

$$S_n(\emptyset) = 0, \; S_n(\Omega) = n, \qquad S_n(\emptyset) = 0, \; S_n(\Omega) = n, \qquad p_\emptyset = 0, \; p_\Omega = 1$$

PÉLDA: Egy pénzérme dobásának véletlen kísérletekor ($\Omega = \{0,1\}$, 0 = írás, 1 = fej) a fej bekövetkezésének relatív gyakoriságát $n=200$ számú kísérlet elvégzése után az alábbi ábra szemlélteti:



6. ábra

A VALÓSZÍNŰSÉG MATEMATIKAI FOGALMA: A VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS AXIÓMÁI, KOLMOGOROV-FÉLE VALÓSZÍNŰSÉGI MEZŐ.

Legyen Ω (nem üres halmaz) az elemi események tere, $\mathcal{A}$ pedig az Ω bizonyos részhalmazaiból alkotott esemény σ-algebra, vagyis tekintsük a fenti tulajdonsággal rendelkező $(\Omega, \mathcal{A})$ párost. Az $\mathcal{A}$ esemény σ-algebra tetszőleges $A \in \mathcal{A}$ eleméhez (eseményéhez) hozzárendelünk egy számértéket az alábbi tulajdonságokkal:

1) $0 \le P(A) \le 1, \; A \in \mathcal{A}$,

2) $P(\Omega) = 1$,

3) $P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$, tetszőleges egymást páronként kizáró $A_i \in \mathcal{A}$, $i = 1,2,\ldots$ eseményekre, azaz $A_i \cdot A_j = \emptyset,\ i \neq j$ (véges eseménytér esetén ezt az összefüggést tetszőleges véges számú eseményre követeljük meg).

Ekkor a $P(A),\ A \in \mathcal{A}$ számot az ***A* esemény valószínűségének**, a *P* függvényt ***valószínűség-eloszlásnak***, vagy röviden ***valószínűségnek***, az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ hármast ***Kolmogorov-féle valószínűségi mezőnek***, míg az 1), 2) és 3) tulajdonságokat a valószínűség axiómáinak nevezzük.

KLASSZIKUS (KOMBINATORIKUS) VALÓSZÍNŰSÉGI MEZŐK. Legyen az Ω elemi eseménytér véges, azaz valamilyen pozitív egész *n* szám és $\omega_1,\ldots,\omega_n$ elemi események mellett $\Omega = \{\omega_1,\ldots,\omega_n\}$. Az $\mathcal{A}$-t definiáljuk úgy, mint az Ω összes lehetséges részhalmazaiból álló véges halmazrendszert (eseményalgebrát) és a *P* valószínűséget pedig a következő módon: tetszőleges $A \in \mathcal{A}$ esetén legyen

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{n} \ ,$$

ahol $|A|$ az A halmaz elemszámát jelöli, azaz mindazon ω_i-k számát, amelyekre teljesül az $\omega_i \in A$ feltétel (nyilvánvalóan fennáll $|\Omega| = n$).

Ezt a $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőt ***klasszikus***, vagy ***kombinatorikus valószínűségi mezőnek*** nevezzük. Tetszőleges $1 \le k \le n$ esetén $P(\{\omega_k\}) = 1/n$. Bármely *A* esemény valószínűsége megadható úgy, mint a benne foglalt elemi események száma osztva az összes elemi események számával:

"egy esemény valószínűsége = a kedvező esetek száma osztva az összes esetek számával".

PÉLDA. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy kitöltött lottószelvénnyel 5-ös találatot érünk el?

Megoldás. Az elemi események tere a következő rendezett számötösökből áll ($\mathcal{A}$ és *P* a fentiek szerint)

$$\Omega = \{(k_1, k_2, \ldots, k_5) :\ 1 \le k_1 < k_2 < \ldots < k_5 \le 90\}.$$

Ekkor az összes esetszám, vagyis az Ω elemeinek száma (az összes lehetséges módon kitöltött lottószelvények száma)

$$n = \binom{90}{5} = \frac{90!}{5!\,95!} = \frac{86\cdot 87\cdot 88\cdot 89\cdot 90}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}.$$

Minthogy a kedvező esetek száma 1 (mind az öt számot eltaláljuk), így a keresett valószínűség:

$$p = \frac{1}{n} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{86\cdot 87\cdot 88\cdot 89\cdot 90} = 0.00000000853$$

VALÓSZÍNŰSÉGEK MEGHATÁROZÁSA GEOMETRIAI MÓDSZEREKKEL.

A gyakorlatban sokszor felmerülnek olyan kérdések, mint pl. mennyi annak a valószínűsége, hogy a (0,1) intervallumon véletlenszerűen választott pont egy megadott $(a,b) \subseteq (0,1)$ részintervallumba esik; a céltáblára véletlenszerűen leadott lövés a 10-es körbe esik, stb.? Itt az alapfeladat a megfelelő módon értelmezett $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ Kolmogorov-féle valószínűségi mező megadása.

Ezeket a kérdéseket a klasszikus valószínűségi mező fogalmának felhasználásával nem tudjuk megválaszolni, mivel itt az elemi eseménytér elemeinek a száma végtelen és hasonló megközelítéssel nem élhetünk. Ezekben az esetekben, ha a véletlenszerűen választott pontok a geometriai alakzatban "egyenletesen" helyezkedhetnek el, általában ésszerű azt feltételezni, hogy egy esemény, amely egy geometriai alakzattal (vagy másképpen mondva a geometriai alakzatba eséssel) azonosítható, olyan valószínűséggel rendelkezik, amely arányos az alakzat geometriai mértékével (hosszával, területével, térfogatával, stb.).

Ebben az esetben az Ω eseménytérnek megfeleltethető egy véges alap geometriai alakzat (pl. intervallum, kör, kocka, stb.), az $\mathcal{A}$ esemény σ-algebrának az Ω bizonyos részhalmazaiból alkotott halmazrendszer, melynek minden A elemére értelmezhető a véges $\mu(A)$ geometriai mérték (hosszúság, terület, térfogat, stb.). Ekkor a P valószínűséget a $P(A) = \mu(A)/\mu(\Omega)$ hányadossal értelmezzük (az Ω biztos esemény valószínűségére nyilvánvalóan $P(\Omega) = \mu(\Omega)/\mu(\Omega) = 1$). Az így értelmezett $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn egy esemény valószínűségének a meghatározása geometriai módszerekkel történik.

PÉLDA: Tekintsük azt az esetet, amikor egy $r_0 = 1$ méter sugarú kör alakú céltáblára adunk le lövéseket. Feltesszük, hogy minden leadott lövés eltalálja a céltáblát és annak valószínűsége, hogy a lövedék a céltábla megadott tartományába esik, arányos a tartomány területével. Kérdés: mekkora annak a valószínűsége, hogy egy leadott lövés esetén a céltábla egy kisebb, $r_1 = ½$ m sugarú körébe esik?

Megoldás. A keresett p valószínűség megegyezik a kisebb kör és a céltábla területének hányadosával, azaz

$$p = \frac{r_1^2 \pi}{r_0^2 \pi} = \frac{(1/2)^2 \pi}{1^2 \pi} = \frac{1}{4}$$

A VALÓSZÍNŰSÉG ALAPVETŐ ÖSSZEFÜGGÉSEI.

ELEMI TULAJDONSÁGOK. Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ egy tetszőlegesen adott valószínűségi mező.

Tétel. Érvényesek az alábbi összefüggések.

A lehetetlen esemény valószínűsége 0, azaz $P(\emptyset) = 0$.

Tetszőleges $A \in \mathcal{A}$ eseményre $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Tetszőleges $A \subseteq B$ eseményekre (azaz az A esemény maga után vonja a B eseményt) fennáll

1) $P(A) \le P(B)$,
2) $P(B - A) = P(B) - P(A)$.

Az események tetszőleges véges, vagy megszámlálhatóan végtelen sok $A_1, A_2, \ldots$ eseményből álló rendszerét ***teljes eseményrendszernek*** nevezzük, ha egymást páronként kizárják és összegük a biztos esemény, azaz

$$A_i \cdot A_j = \emptyset, \text{ ha } i \ne j \quad \text{és} \quad \sum_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega .$$

Itt az események összege véges sok tagra terjed ki, ha a teljes eseményrendszer véges.

Tétel. Ha az $A_1, A_2, \ldots$ események teljes eseményrendszert alkotnak, akkor

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = 1 .$$

Tétel. Tetszőleges *A* és *B* eseményre fennáll

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) .$$

Ennek a tételnek a felhasználásával könnyen nyerhető az általánosabb, un. *Poincaré-formula*.

Tétel. Legyen *n* tetszőleges pozitív egész szám és $A_1, \ldots, A_n$ pedig tetszőleges események. Ekkor

$$P(A_1 + \ldots + A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} S_k^{(n)} ,$$

ahol

$$S_k^{(n)} = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n} P(A_{i_1} \cdot A_{i_2} \cdot \ldots \cdot A_{i_k}) .$$

Tétel. Legyenek $A_1, \ldots, A_n$ tetszőleges események. Ekkor fennáll

$$P(A_1 + \ldots + A_n) \le P(A_1) + \ldots + P(A_n) .$$

Legyenek $A_1, A_2, \ldots$ tetszőleges események. Ekkor mindenféle megkötés nélkül igaz

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) \le \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) .$$

3. FELTÉTELES VALÓSZÍNŰSÉG, ESEMÉNYEK FÜGGETLENSÉGE.

A FELTÉTELES VALÓSZÍNŰSÉG ÉS TULAJDONSÁGAI.

A gyakorlatban természetes módon merül fel az a kérdés, hogy egy B esemény bekövetkezésének ismeretében mit tudunk mondani egy másik A esemény valószínűségére, azaz egy esemény bekövetkezése milyen mértékű befolyást gyakorol egy másik esemény bekövetkezésére. Ez a kérdés ahhoz vezet, hogy értelmezni kell egy A eseménynek egy másik B eseményre vonatkozó $P(A|B)$ feltételes valószínűségét.

Ha visszatérünk az intuitív módon bevezetett valószínűségfogalomhoz, akkor ez a kérdés azzal ekvivalens, hogy mennyi az A esemény $P(A|B)$-vel jelölt feltételes valószínűsége egy olyan kísérletben, amelyben tudjuk, hogy a B esemény bekövetkezett?

Végezzünk el n független kísérletet és jelölje $S_n(B)$ a B esemény bekövetkezéseinek a számát a kísérletsorozatban, míg $S_n(A \cdot B)$ azt a számot, ahányszor a B esemény mellett az A esemény is bekövetkezett. Az A eseménynek a B eseményre vonatkozó ***feltételes relatív gyakoriságán*** az

$$\frac{S_n(A \cdot B)}{S_n(B)}$$

hányadost értjük. Ez a kifejezés átírható

$$\frac{S_n(A \cdot B)/n}{S_n(B)/n} = \frac{\overline{S}_n(A \cdot B)}{\overline{S}_n(B)}$$

alakba, ahonnan n minden határon túl történő növekedésével kapjuk (az itt érvényes konvergenciafogalom később kerül tisztázásra), hogy

$$\frac{S_n(A \cdot B)}{S_n(B)} \to \frac{P(AB)}{P(B)}, \quad n \to \infty$$

Ezzel az intuitív módon bevezetett határértékkel fogjuk értelmezni a $P(A|B)$ feltételes valószínűséget.

A matematikailag precíz tárgyaláshoz tekintsünk egy tetszőleges $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőt. Legyen A és B két tetszőleges esemény és tegyük fel még, hogy $P(B) > 0$.

Definíció. A $P(A|B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)}$ formulával definiált értéket az ***A esemény B eseményre vonatkozó feltételes valószínűségének*** nevezzük.

A feltételes valószínűség rendelkezik az alábbi, könnyen ellenőrizhető tulajdonságokkal.

1) $0 \le P(A|B) \le 1, \quad A \in \mathcal{A}$,
2) $P(B|B) = 1$,
3) tetszőleges egymást páronként kizáró $A_1, A_2, \ldots$ eseménysorozatra teljesül
$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i | B\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i | B).$$

PÉLDA FELTÉTELES VALÓSZÍNŰSÉGRE. Tekintsünk egy urnát, amelyben 3 piros és 6 fehér golyó van. Véletlenszerűen, visszatevés nélkül kihúzunk két golyót. Mi annak a valószínűsége, hogy a második golyó fehér színű feltéve, hogy az első piros volt? (minden kihúzott sorrend egyformán valószínű.)

Megoldás. Jelölje $\Omega = \{$*A 9 golyó közül egymás után kihúzott két golyó lehetséges esetei*$\}$. Ebben az esetben $|\Omega| = 9 \cdot 8 = 72$.

$A = \{$a második golyó piros$\}$
$B = \{$az első golyó fehér$\}$

Ekkor

$$P(AB) = \frac{6 \cdot 3}{72} = \frac{1}{4}, \quad P(B) = \frac{6 \cdot 8}{72} = \frac{2}{3}, \text{ továbbá } \; P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)},$$

így

$$P(A|B) = (1/4)/(2/3) = 3/8.$$

Érvényes a feltételes valószínűségre a következő un. ***szorzási szabály***, amely a definícióból közvetlenül adódik

$$P(A \cdot B) = P(A|B)P(B).$$

Ezt az összefüggést egymás után (n–1)-szer alkalmazva, egyszerűen kapjuk tetszőleges pozitív valószínűségű $A_1, \ldots, A_n$ események mellett a következő szorzási szabályt:

$$P(A_1 \ldots A_n) = P(A_n \mid A_1 \ldots A_{n-1})P(A_1 \ldots A_{n-1}) = \ldots = P(A_n \mid A_1 \ldots A_{n-1}) \ldots P(A_2 \mid A_1)P(A_1).$$

PÉLDÁK A SZORZÁSI SZABÁLYRA.

1. PÉLDA. Egy urnában van 35 piros és 5 fehér golyó [más megfogalmazásban: egy dobozban van 35 hibátlan és 5 selejtes árú]. Egymás után véletlenszerűen – visszatevés nélkül – kihúzunk két golyót (minden sorrend egyformán valószínű). Mi a valószínűsége annak, hogy elsőre pirosat (A), másodikra pedig fehéret (B) [elsőre hibátlant, másodikra selejtest] húzunk?

Megoldás.

$$P(A) = \frac{35}{40} = \frac{7}{8}, \quad P(B|A) = \frac{5}{39},$$
$$P(AB) = P(A)P(B \mid A) = \frac{7}{8} \cdot \frac{5}{39}.$$

2. PÉLDA. Egy 52 lapos francia kártyából kihúzunk egymás után 5 lapot véletlenszerűen. Mi a valószínűsége annak, hogy mind az 5 lap pikk lesz?

Megoldás. Jelölje A_i, $i = 1,2,\ldots 5$ azt az eseményt, hogy az i–edik kihúzott lap pikk. Ekkor

$$P(A_1) = \frac{13}{52}, \quad P(A_2|A_1) = \frac{12}{51}, \quad P(A_3|A_2A_1) = \frac{11}{50},$$
$$P(A_4|A_3A_2A_1) = \frac{10}{49}, \quad P(A_5|A_4A_3A_2A_1) = \frac{9}{48},$$

így a szorzási szabály szerint

$$P(A_1A_2A_3A_4A_5)=\frac{13}{52}\cdot\frac{12}{51}\cdot\frac{11}{50}\cdot\frac{10}{49}\cdot\frac{9}{48}.$$

ESEMÉNYEK FÜGGETLENSÉGE.

A függetlenség a valószínűségelmélet egyik legfontosabb fogalma, amely matematikai fogalom és amelyet a következőképpen definiálunk.

Legyen A és B két tetszőleges pozitív valószínűségű esemény. Azt mondjuk, hogy az ***A* *esemény független a B eseménytől***, vagyis a B esemény bekövetkezése nincs befolyással az A esemény bekövetkezésére, ha fennáll a következő összefüggés

$$P(A|B)=P(A).$$

Látható, hogy ha az A esemény független B-től, akkor

$$P(B\mid A)=\frac{P(BA)}{P(A)}=\frac{P(B)}{P(A)}\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(B)}{P(A)}P(A\mid B)=\frac{P(B)}{P(A)}P(A)=P(B),$$

vagyis az események függetlensége kölcsönös, a B esemény is független az A eseménytől. Ez az összefüggés – felhasználva a feltételes valószínűség definícióját – átírható az egyszerűbb és az A és B eseményekben szimmetrikus $P(AB)=P(A)P(B)$ alakba, amely jól definiált akkor is, amikor valamelyik esemény valószínűsége 0. Ez vezet a következő, az események függetlenségének általános definíciójához.

Definíció. Azt mondjuk, hogy az ***A és B események függetlenek*** egymástól, ha teljesül a

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

összefüggés.

PÉLDA FÜGGETLEN ESEMÉNYEKRE.

PÉLDA. Tegyük fel, hogy két szabályos pénzérmét feldobva a lehetséges (I,I), (I,F), (F,I), (F,F) eredmények egyformán valószínűek. Jelölje A , illetve B azokat az eseményeket, hogy az első dobás eredménye F, illetve a második dobásé I. Kérdés: függetlenek-e az A és B események?

Megoldás.

$$P(A)=P(B)=\frac{1}{2},\quad P(AB)=P(\{(F,I)\})=\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=P(A)\cdot P(B),$$

vagyis az A és B események függetlenek.

Az előbb megadott függetlenségi fogalom két eseményre vonatkozik. A későbbiek folyamán szükség lesz tetszőleges számú esemény függetlenségére is.

Definíció. Azt mondjuk, hogy az ***események egy megadott együttese (teljesen) független*** egymástól, ha tetszőleges módon kiválasztva véges számút közülük, a kiválasztott események szorzatának a valószínűsége megegyezik a valószínűségeik szorzatával. Ha a kiválasztás során csak eseménypárokra követeljük meg ezt a tulajdonságot, akkor ***páronkénti függetlenségről*** beszélünk.

A (teljes) függetlenségi fogalom erősebb a páronkénti függetlenségnél, ui. könnyű olyan példát konstruálni, amikor a páronkénti függetlenség fennáll, a teljes függetlenség azonban nem.

PÉLDA. Dobjunk fel két szabályos kockát véletlenszerűen. Jelölje A, B, illetve C azt az eseményt, hogy

A = {az első kocka eredménye páros},
B = {a második szám páratlan},
C = {a két kocka paritása megegyezik}.

Megmutatjuk, hogy az A, B és C események páronként függetlenek, de nem teljesen függetlenek.

Bizonyítás. A feladatban $\Omega = \{(i,j),\ 1\le i,j\le 6\}$, $|\Omega| = 36$. Látható, hogy

$A = \{(2,1),\ldots,(2,6),(4,1),\ldots,(4,6),(6,1),\ldots,(6,6)\}$,
$B = \{(1,1),\ldots,(6,1),(1,3),\ldots,(6,3),(1,5),\ldots,(6,5)\}$,
$C = \{(1,1),(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(2,6),(3,1),(3,3),(3,5),\ldots,(6,2),(6,4)(6,6)\}$,

így $|A| = 3\cdot 6 = 18$, $|B| = 6\cdot 3 = 18$, $|C| = 6\cdot 3 = 18$. Ekkor $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$ és fennáll a páronkénti függetlenséget jelentő

$$P(AB) = \frac{1}{4} = P(A)P(B),\ \ P(AC) = \frac{1}{4} = P(A)P(C),\ \ P(BC) = \frac{1}{4} = P(B)\,P(C).$$

összefüggés. Másrészről világos, hogy

$$P(ABC) = 0 \neq P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{8},$$

vagyis a teljes függetlenség nem állhat fenn.

A TELJES VALÓSZÍNŰSÉG TÉTELE, BAYES-TÉTEL

A szorzási szabály egyszerű alkalmazásával nyerhető a teljes valószínűség tétele és a Bayes-tétel. A két tétel egyszerűsége ellenére sokszor igen hatékony eszközt jelent a különböző vizsgálatok során.

Tétel. (***Teljes valószínűség tétele***) Legyen $A_1, A_2, \ldots$ tetszőleges, véges, vagy megszámlálhatóan végtelen sok pozitív valószínűségű eseményekből álló teljes eseményrendszer és B pedig tetszőleges esemény. Ekkor igaz

$$P(B) = \sum_i P(B|A_i)P(A_i).$$

Bizonyítás. Világos, hogy $B = \sum_i A_i B$ és az $\{A_i\}$ események diszjunktak, így

$$P(B) = \sum_i P(A_i B).$$

Másrészről a szorzási szabály szerint $P(A_i B) = P(B|A_i)P(A_i)$, $i = 1,2,\ldots$ ahonnan a tétel állítása már következik.

PÉLDA A TELJES VALÓSZÍNŰSÉG TÉTELÉRE

Példa. Legyen adva három urna: I., II., III. és az egyes urnákban

I. 2 piros + 3 fehér
II. 2 piros + 4 fehér
III. 2 piros + 5 fehér

golyó van. Véletlenszerűen választunk egy urnát az I. – III. urnák közül

$\frac{1}{8}, \frac{3}{8}$, illetve $\frac{4}{8}$

valószínűségekkel és abból véletlenszerűen egy golyót. Mi a valószínűsége annak, hogy piros golyót húzunk?

Megoldás. Jelölje

A = {piros golyót húzunk},
B_i = {az i–edik urnából húzunk}, i = I., II., III.

Ekkor

$$P(B_{\mathrm{I}})=\frac{1}{8},\quad P(B_{\mathrm{II}})=\frac{3}{8},\quad P(B_{\mathrm{III}})=\frac{4}{8},$$
$$P(A|B_{\mathrm{I}})=\frac{2}{5},\quad P(A|B_{\mathrm{II}})=\frac{2}{6},\quad P(A|B_{\mathrm{III}})=\frac{2}{7},$$

így a teljes valószínűség tétele szerint

$$P(A)=\sum_{i=\mathrm{I}}^{\mathrm{III}}P(A|B_i)P(B_i)=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{8}+\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{8}+\frac{2}{7}\cdot\frac{4}{8}.$$

Tétel. (***Bayes-tétel***) Az előző tétel feltételei mellett tetszőleges $n\geq 1$ egész szám esetén igaz

$$P(A_n|B)=\frac{P(B|A_n)P(A_n)}{\sum_i P(B|A_i)P(A_i)}.$$

Bizonyítás. Felhasználva az előző tétel bizonyítását, kapjuk, hogy

$$P(B)=\sum_i P(B|A_i)P(A_i),$$
$$P(A_nB)=P(B|A_n)P(A_n),$$

melyeket behelyettesítve a $P(A_n|B)=\frac{P(A_nB)}{P(B)}$ egyenlőségbe, kapjuk a tétel állítását.

PÉLDA A BAYES-TÉTELRE

Tekintsük az előző feladatot. Most az a kérdés, hogy mennyi annak a valószínűsége, hogy az első urnából húztunk, ha a húzás eredménye piros, azaz mennyi $P(B_{\mathrm{I}}|A)=?$

Megoldás. A Bayes-tétel szerint

$$P(B_{\mathrm{I}}|A)=\frac{P(A|B_{\mathrm{I}})P(B_{\mathrm{I}})}{\sum_{i=\mathrm{I}}^{\mathrm{III}}P(A|B_i)P(B_i)}.$$

Világos (ld. a teljes valószínűség tételére vonatkozó példát), hogy

$$P(A|B_{\mathrm{I}})P(B_{\mathrm{I}})=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{8},$$

$$P(A|B_{\mathrm{II}})P(B_{\mathrm{II}})=\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{8},$$

$$P(A|B_{\mathrm{III}})P(B_{\mathrm{III}})=\frac{2}{7}\cdot\frac{4}{8},$$

így

$$P(B_{\mathrm{I}}|A)=\frac{2/5}{2/5+1+8/7}.$$

4. VALÓSZÍNŰSÉGI VÁLTOZÓ

VALÓSZÍNŰSÉGI VÁLTOZÓ FOGALMA.

A véletlen kísérletek elvégzése során a kísérlet eredményeképp általában valamilyen számérték jelenik meg. Például:

> a kockadobás és lottóhúzás eredménye, adott időintervallumban a fénycsapdába befogott rovarok száma, orvosi vizsgálatnál a különböző paraméterek értéke (vérnyomás értéke, vér összetétele, stb.), a hőmérséklet számértéke adott időpontban és helyen, az áramfogyasztás nagysága megadott időszakban, meghatározott telekommunikációs hálózatot adott időpontban használók száma, stb.

Ez azt jelenti, hogy a bekövetkező ω elemi esemény egy a véletlentől függő $X(\omega)$ számértéket eredményez.

A különböző elemi eseményekhez más és más számérték tartozhat, ugyanakkor ez az $X(\omega)$ véletlentől függő függvény nem lehet akármilyen, hiszen olyan alapvető kérdést meg kell tudnunk válaszolni, hogy pl. mennyi annak a valószínűsége, hogy a kísérlet eredménye kisebb, mint egy bizonyos x valós szám.

Jelölje $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ alap valószínűségi mezőt (melyet a továbbiakban rögzítünk). A valószínűségi mező definíciójában csak az eseményekhez határoztunk meg valószínűségeket, így ennek nyilvánvaló következménye, hogy csak akkor beszélhetünk az előbbi valószínűségéről, ha az $\{\omega: X(\omega) < x\}$ halmaz esemény, vagyis eleme az $\mathcal{A}$ esemény σ-algebrának. Ez a felismerés vezet a valószínűségelmélet egyik legfontosabb fogalmához (Csebisev, 1883).

Definíció. Egy Ω-n értelmezett $X(\omega)$ valós függvényt – vagyis egy olyan függvényt, amely minden ω elemi eseményhez egy valós számot rendel – ***valószínűségi változónak*** nevezünk, ha tetszőleges x valós szám esetén $\{\omega: X(\omega) < x\} \in \mathcal{A}$., vagyis az $\{\omega: X(\omega) < x\}$ halmaz esemény. Ez utóbbi halmazt szokás az x értékhez tartozó ***nívóhalmaznak*** is nevezni.

ELOSZLÁSFÜGGVÉNY. Legyen $X = X(\omega)$ egy valószínűségi változó, ekkor minden x valós szám esetén $\{\omega: X(\omega) < x\}$ esemény és így a $P(X(\omega) < x) = P(\{\omega: X(\omega) < x\})$ valószínűség jól definiált.

Definíció. Az $F(x) = P(X < x),\ -\infty < x < \infty$ függvényt az X valószínűségi változó ***eloszlásfüggvényének*** nevezzük. Az F eloszlásfüggvény rendelkezik a következő alapvető tulajdonságokkal.

1) $F(x)$ tetszőleges $-\infty < x_0 < \infty$ pontban balról folytonos függvény, azaz $\lim_{x \uparrow x_0} F(x) = F(x_0 - 0) = F(x_0)$.

2) Az $F(x), -\infty < x < \infty$ függvény az x változónak monoton növő függvénye, azaz tetszőleges $-\infty < x < y < \infty$ esetén teljesül az $F(x) \le F(y)$ egyenlőtlenség.

3) Létezik az $F(x)$ függvénynek $x \to -\infty$ és $x \to \infty$ mellett határértéke és fennáll

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \quad \text{és} \quad \lim_{x \to \infty} F(x) = 1.$$

4) Tetszőleges $a < b$ számok mellett igaz

$$P(X = a) = F(a+0) - F(a),$$

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a+0),$$

$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a),$$

$$P(a < X \le b) = F(b+0) - F(a+0),$$

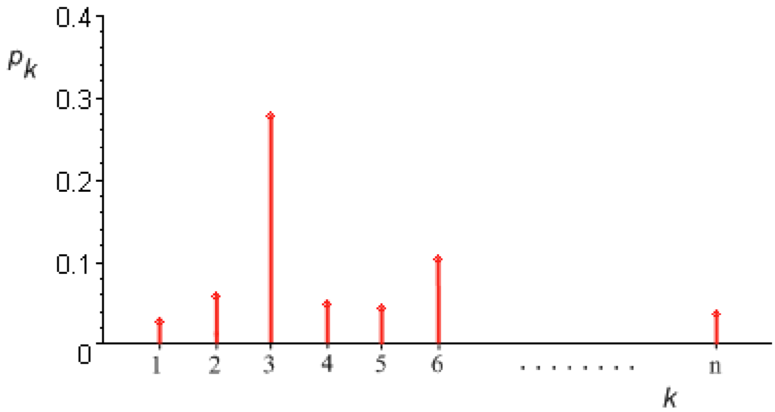
$$P(a \le X \le b) = F(b+0) - F(a).$$

DISZKRÉT ÉS FOLYTONOS ELOSZLÁS, SŰRŰSÉGFÜGGVÉNY. Az eloszlásfüggvények két fontos típusát különböztetjük meg a gyakorlatban: az un. ***diszkrét***, illetve ***folytonos eloszlásfüggvényeket***.

Létezik még egy eloszlásfüggvény-típus, az un. ***szinguláris eloszlásfüggvény***, amely folytonos és differenciálhányadosa majdnem mindenütt 0, ez utóbbival azonban nem foglalkozunk. Ez az osztályozás azzal van összefüggésben, hogy a monoton függvények kanonikus felbontása következtében tetszőleges F_X eloszlásfűggvény mindig felbontható három monoton: ***folytonos***, ***tiszta ugró*** (diszkrét) és ***szinguláris függvények*** összegére.

Definíció. Azt mondjuk, hogy egy X valószínűségi változó ***diszkrét***, illetve ***diszkrét eloszlású***, ha X legfeljebb megszámlálhatóan végtelen sok $\{x_k, k = 0,1,\ldots\}$ lehetséges értéket vesz fel. Ha X diszkrét eloszlású valószínűségi változó, akkor a $\{p_k = P(X = x_k),\ k = 0,1,\ldots\}$ valószínűségeket szokás az X valószínűségi változó ***eloszlásának*** is nevezni.

PÉLDA: Az X diszkrét eloszlású véges valószínűségi változó $\{p_k = P(X = x_k), k = 0,1,\ldots,n\}$ valószínűségek eloszlására egy példát az alábbi ábra szemlélteti:



Ha az X valószínűségi változó diszkrét eloszlású $\{x_k, k = 0,1,\ldots\}$ értékkészlettel és $\{p_k, k = 0,1,\ldots\}$ eloszlással, akkor az F eloszlásfüggvénye a következő módon adható meg:

$$F(x) = \sum_{x_k < x} p_k, -\infty < x < \infty.$$

Definíció. Azt mondjuk, hogy egy X valószínűségi változó ***folytonos***, illetve ***folytonos eloszlású***, ha létezik olyan nemnegatív integrálható $f(x), -\infty < x < \infty$ függvény, hogy tetszőleges $-\infty < a < b < \infty$ számok mellett fennáll

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx.$$

Az $f(x)$ függvényt az X valószínűségi változó ***eloszlás-sűrűségfüggvényének***, vagy röviden ***sűrűségfüggvényének*** nevezzük.

Ekkor

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(u)du, -\infty<x<\infty.$$

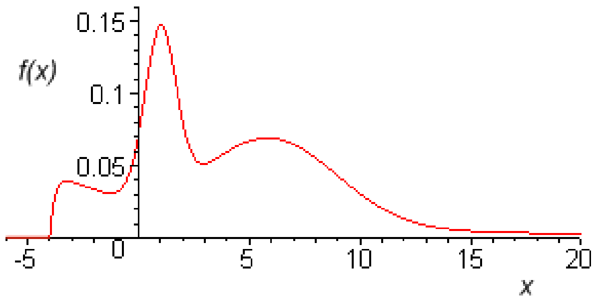
Tulajdonságok. Tetszőleges $f(x)$ sűrűségfüggvény eleget tesz a következő feltételeknek:

(a) $f(x)\geq 0$,

(b) $f(x)$ integrálható,

(c) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$ és $F'(x)=f(x),\ -\infty<x<\infty$.

PÉLDA: Az X folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvényére egy példát az alábbi ábra szemlélteti:



VALÓSZÍNŰSÉGI VÁLTOZÓ FÜGGVÉNYÉNEK AZ ELOSZLÁSA. Legyen X egy valószínűségi változó, h valamilyen valós változós, valós értékeket felvevő függvény és legyen $Y=h(X)$.

Tulajdonság. Ha h folytonos függvény (lehetne a h függvényre kevésbé szigorú megszorítást tenni) akkor az új $Y=h(X)$ változó szintén valószínűségi változó lesz (ugyanazon a valószínűségi mezőn, mint ahol X van értelmezve).

Kérdés: Hogyan határozható meg az Y valószínűségi változó $F_Y(y)$ eloszlásfüggvénye és ha létezik, az $f_Y(y)$ sűrűségfüggvénye?

Általánosan igaz, hogy

$$F_Y(y)=P(Y<y)=P(h(X)<y),\quad -\infty<y<\infty.$$

Ha h szigorúan monoton függvény, akkor jelölje h^{-1} a h függvény inverzét, amely ebben az esetben biztosan létezik.

1) Ha h szigorúan monoton növő függvény, akkor
$$F_Y(y)=P(h(X)<y)=P(X<h^{-1}(y))=F_X(h^{-1}(y)),\ -\infty<y<\infty.$$

2) Ha h szigorúan monoton csökkenő függvény, akkor
$$F_Y(y)=P(h(X)<y)=P(X>h^{-1}(y))=1-F_X(h^{-1}(y)+0),\ -\infty<y<\infty.$$

Ezeket az összefüggéseket felhasználva az Y sűrűségfüggvényére is adható formula.

Tétel. Tegyük fel, hogy létezik az X valószínűségi változónak f_X sűrűségfüggvénye, h pedig szigorúan monoton, differenciálható valós függvény. Ekkor

$$f_Y(y) = f_X(h^{-1}(y))\left|\frac{d}{dy}h^{-1}(y)\right|, \quad -\infty < y < \infty .$$

Tétel. Ha az X valószínűségi változónak létezik f_X sűrűségfüggvénye és tekintjük az $Y = h(X)$ valószínűségi változót adott $h(y) = ay + b,\ a \neq 0$ lineáris függvény mellett, akkor az $Y = h(X) = aX + b$ valószínűségi változónak is létezik sűrűségfüggvénye és fennáll

$$f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right), \quad -\infty < y < \infty .$$

PÉLDA. Legyen X $N(\mu,\sigma)$ normális eloszlású valószínűségi változó és tekintsük az $Y = \dfrac{1}{\sigma}(X - \mu)$ "standarizáltjának" az eloszlását. Ekkor a tétel jelöléseivel $a = 1/\sigma,\ b = -\mu/\sigma$. Minthogy X sűrűségfüggvénye

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)\},$$

így Y-nak is létezik $f_Y(y)$ sűrűségfüggvénye és fennáll

$$f_Y(y) = \frac{1}{1/\sigma}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\{-[\frac{y-(-\mu/\sigma)}{1/\sigma} - \mu]^2/(2\sigma^2)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2},$$

vagyis az Y valószínűségi változó $N(0,1)$ standard normális eloszlású.

TÖBB VALÓSZÍNŰSÉGI VÁLTOZÓ EGYÜTTES ELOSZLÁS- ÉS SŰRŰSÉGFÜGGVÉNYE, PEREMELOSZLÁSOK.

Legyen adva két X és Y valószínűségi változó (ugyanazon az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező). Ekkor az X és Y valószínűségi változók együttes vizsgálata megfelel egy olyan véletlen, kétdimenziós (X,Y) vektorváltozó vizsgálatának, mely koordinátái valószínűségi változók.

Definíció. Az

$$F_{XY}(x,y) = P_{XY}((X,Y) \in (-\infty,x)\times(-\infty,y)) =$$
$$= P(X < x, Y < y), \quad -\infty < x,y < \infty$$

egyenlettel definiált kétváltozós függvényt az X és az Y valószínűségi változók ***együttes eloszlásfüggvényének*** nevezzük.

Definíció. Azt mondjuk, hogy az X és Y valószínűségi változók ***együttes eloszlása diszkrét***, vagy másképpen mondva, az (X,Y) valószínűségi vektorváltozó diszkrét eloszlású, ha X és Y diszkrét eloszlásúak. Ekkor, ha az X és Y valószínűségi változók értékkészlete

$$\{x_i, i = 0,1,\ldots\}, \qquad \text{illetve} \qquad \{y_j, j = 0,1,\ldots\},$$

a

$$\{p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j),\ i,j \geq 0\}$$

valószínűségeket az X és Y valószínűségi változók ***együttes eloszlásának*** nevezzük.

Diszkrét esetben

$$F_{XY}(x, y) = \sum_{x_i < x,\, y_j < y} p_{ij}, \; -\infty < x, y < \infty.$$

Definíció. Azt mondjuk, hogy az X és Y valószínűségi változók ***együttes eloszlása folytonos***, vagy másképpen mondva, az (X, Y) valószínűségi vektorváltozó ***folytonos eloszlású***, ha létezik olyan nemnegatív integrálható $f_{XY}(x, y)$ valós függvény a síkon, hogy az együttes eloszlásfüggvényre minden $-\infty < x, y < \infty$ mellett fennáll

$$F_{XY}(x, y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{XY}(u, v)\,du\,dv.$$

Definíció. Ha adott két tetszőleges X és Y valószínűségi változó együttes F_{XY} eloszlásfüggvénye, akkor az

$$F_X(x) = \lim_{y\to\infty} F_{XY}(x, y),$$
$$F_Y(y) = \lim_{x\to\infty} F_{XY}(x, y)$$

eloszlásfüggvényeket ***peremeloszlásoknak***, vagy más néven ***marginális eloszlásoknak*** nevezzük.

Könnyen igazolható, hogy abban az esetben, amikor létezik az együttes $f_{XY}(x, y)$ sűrűségfüggvény, akkor a peremeloszlásoknak is létezik sűrűségfüggvénye és minden $-\infty < x, y < \infty$ mellett fennáll, hogy

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y)\,dy, \qquad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y)\,dx.$$

Kettőnél több $X_1, \ldots, X_n$ valószínűségi változó (n dimenziós $(X_1, \ldots, X_n)$ valószínűségi vektorváltozók) esetén, ugyanúgy definiálhatók az együttes eloszlások és az együttes eloszlásfüggvények, mint ahogyan két valószínűségi változóra történt, közöttük nincs semmi elvi különbség.

VALÓSZÍNŰSÉGI VÁLTOZÓK FÜGGETLENSÉGE. Legyen X és Y két valószínűségi változó és jelölje $F_{XY}(x, y)$ az együttes, míg $F_X(x)$ és $F_Y(y)$ a marginális eloszlásfüggvényeiket.

Definíció. Azt mondjuk, hogy az X és Y valószínűségi változók ***függetlenek*** egymástól, ha tetszőleges $-\infty < x, y < \infty$ mellett teljesül

$$F_{XY}(x, y) = F_X(x)F_Y(y).$$

Tetszőleges *véges számú* valószínűségi változó ***független*** egymástól, ha az együttes eloszlásfüggvényük megegyezik a marginális eloszlásfüggvényeik szorzatával.

Definíció. A valószínűségi változók valamilyen *tetszőleges számú* együttesére akkor mondjuk hogy ***függetlenek***, ha kiválasztva közülük bármilyen módon véges számú valószínűségi változót, a kiválasztott valószínűségi változók függetlenek egymástól.

Hasonlóan az események páronkénti függetlenség fogalmához, ha a függetlenséget csak a minden lehetséges módon kiválasztott párokra tesszük fel, akkor valószínűségi változók együttesének páronkénti függetlenségéről beszélünk.

Megjegyzés. Abból, hogy bármely két valószínűségi változó független egymástól, nem következik, hogy a valószínűségi változók összességükben is függetlenek egymástól. Ezt a függetlenségi fogalmat a páronkénti függetlenségtől való megkülönböztetésül szokás néha ***teljes függetlenségnek*** is nevezni.

Legyenek először X és Y diszkrét eloszlású valószínűségi változók $\{x_i, i \geq 0\}$, illetve $\{y_j, j \geq 0\}$ értékkészlettel, valamint $\{p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j),\ i, j \geq 0$ együttes eloszlással. A marginális eloszlásokat jelölje $\{q_i = P(X = x_i), i \geq 0\}$ és $\{r_j = P(Y = y_j), j \geq 0\}$.

Tétel. A fenti feltételek mellett az X és Y valószínűségi változók akkor és csak akkor függetlenek, amikor teljesül a $p_{ij} = q_i r_j$, $i, j \geq 0$ összefüggés.

Tétel. Legyenek X és Y folytonos eloszlású valószínűségi változók $f_{XY}(x, y)$ együttes sűrűségfüggvénnyel és $f_X(x)$, illetve $f_Y(y)$ marginális sűrűségfüggvényekkel. Ekkor az X és Y valószínűségi változók akkor és csak akkor függetlenek, amikor az együttes sűrűségfüggvényük szorzat alakú, azaz

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x) f_Y(y), \quad -\infty < x, y < \infty.$$

ELOSZLÁSOK KONVOLÚCIÓJA. Legyen X és Y két egymástól független valószínűségi változó $F_X(x)$, illetve $F_Y(x)$ eloszlásfüggvénnyel.

Definíció. A $Z = X + Y$ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét (eloszlását, sűrűségfüggvényét) az X és az Y valószínűségi változók eloszlásfüggvényei (eloszlásai, sűrűségfüggvényei) ***konvolúciójának*** nevezzük. Az általános, illetve diszkrét és folytonos esetre felírt formulákat ***konvolúciós formuláknak*** nevezzük.

Speciális eset. Legyen X és Y diszkrét eloszlású, független valószínűségi változók $\{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ értékkészlettel és $\{q_i = P(X = i)\}$, illetve $\{r_i = P(Y = j)\}$ eloszlásokkal. Ekkor a $Z = X + Y$ valószínűségi változó értékkészlete az egész számok halmaza és az $s_k = P(Z = k)$ eloszlására érvényes az

$$s_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q_{k-n} r_n, \ 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

összefüggés.

Tétel. Ha az X és Y valószínűségi változók függetlenek és folytonos eloszlásúak $f_X(x)$, illetve $f_Y(y)$ sűrűségfüggvényekkel, akkor a $Z = X + Y$ valószínűségi változónak is létezik $f_Z(z)$ sűrűségfüggvénye és előállítható a következő alakban.

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z - x) f_Y(x) dx$$

ELOSZLÁSOK KEVERÉKE.

Definíció. Legyen adva eloszlásfüggvényeknek valamilyen $F_1(x), \ldots, F_n(x)$ együttese és legyenek $a_1, \ldots, a_n$ nemnegatív számok, melyek összege 1. Ekkor azt mondjuk, hogy

$$F(x) = a_1 F_1(x) + ... + a_n F_n(x), \quad -\infty < x < \infty$$

az $\{F_i(x), i = 1,\dots,n\}$ eloszlásfüggvényekből az $\{a_i, i = 1,\dots,n\}$ súlyokkal származtatott ***keverék-eloszlásfüggvény***.

Ha az $F_1(x),\dots,F_n(x)$ eloszlásfüggvényeknek létezik $f_1(x),...,f_n(x)$ sűrűségfüggvénye, akkor a $F(x)$ keverékeloszlásnak is létezik sűrűségfüggvénye és fennáll rá következő összefüggés

$$f(x) = a_1 f_1(x) + ... + a_n f_n(x), \quad -\infty < x < \infty \ .$$

Az $F(x)$ függvény nyilvánvalóan teljesíti az eloszlásfüggvényekkel szemben támasztott követelményeket, ezért eloszlásfüggvény.

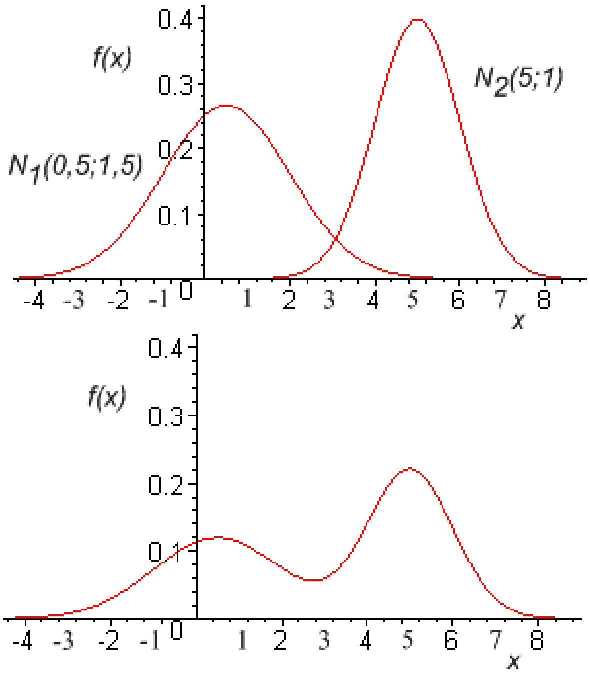
Adott keverék-eloszlásfüggvénnyel bíró valószínűségi változó modellezése: Legyen az $X_1,\dots,X_n$ valószínűségi változók eloszlásfüggvénye $F_1(x),\dots,F_n(x)$ és legyen Y egy olyan valószínűségi változó, melynek értékkészlete 1,2,...,n, eloszlása pedig $\{P(Y = i) = a_i,\ i = 1,...,n\}$. Ekkor a $Z = \sum_{i=1}^{n} I(Y = i) X_i$ valószínűségi változó eloszlása

$$F_Z(z) = P(Z < z) = \sum_{i=1}^{n} P(Z < z \mid Y = i) P(Y = i) = \sum_{i=1}^{n} P(X_i < z) a_i \ .$$

Itt az $I(Y = i)$ valószínűségi változót jelent (az $\{Y = i\}$ esemény indikátor-változóját), amely 1 értéket vesz fel, ha az $\{Y = i\}$ esemény bekövetkezik és minden egyéb esetben 0 lesz.

Megjegyzés. Tetszőleges eloszlásfüggvény előállítható diszkrét, folytonos és szinguláris eloszlásfüggvények keverékeként, egyes súlyok a 0 értéket is felvehetik. Az előállítás egyértelmű.

PÉLDA: Tekintsünk két *N₁(0,5;1,5)* és *N₂(5;1)* normális eloszlást. A két *N₁(0,5;1,5)* és *N₂(5;1)* normális eloszlás sűrűségfüggvényeit, és az *a₁=0,45* és *a₂=0,55* súlyokkal képezett keveréksűrűségfüggvényt az alábbi ábrák szemléltetik:



Keveréksűrűségfüggvény

5. VALÓSZÍNŰSÉGI VÁLTOZÓK JELLEMZŐI

VÁRHATÓ ÉRTÉK FOGALMA ÉS ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI. Egy valószínűségi változót statisztikai értelemben legteljesebb módon az eloszlásfüggvényével tudunk jellemezni. Ennek megadása sok esetben lehetetlen, de nincs is rá szükség - sokszor teljesen kielégítő csak néhány, az eloszlásfüggvényt bizonyos értelemben jellemző értéket megadni. Az egyik legfontosabb fogalom a várható érték.

Tegyük fel, hogy egy X valószínűségi változó k lehetséges $x_1,\ldots,x_k$ értéket vesz fel, éspedig

$$p_i,\ i=1,\ldots,k\ ,\quad p_1+p_2+\ldots+p_n=1\ .$$

valószínűséggel. Végezzünk n darab független véletlen kísérletet és jelölje $n_i, i=1,\ldots,k$ annak az esetszámát, ahányszor a megfigyelt eredmény x_i volt. Ekkor a megfigyelt értékek átlaga a teljes sorozatra

$$\frac{x_1n_1+\ldots+x_kn_k}{n}=x_1\frac{n_1}{n}+\ldots+x_k\frac{n_k}{n}$$

Ha n-nel tartunk a végtelenhez (a nagy számok törvénye szerint - ld. később) ez az összeg tart $x_1p_1+\ldots+x_kp_k$ értékhez.

Ez a szám mutatja azt, hogy nagy mintaszám esetén átlagosan milyen értékre számíthatunk és képezi egyben a várható érték fogalom alapját.

Definíció. Legyen X diszkrét valószínűségi változó, amely véges, vagy megszámlálhatóan végtelen sok $\{x_1,x_2,\ldots\}$ értéket vehet fel $p_i=P(X=x_i),\ i=1,2,\ldots$ valószínűség-eloszlással. Azt mondjuk, hogy az X valószínűségi változónak létezik ***várható értéke*** és az

$$E(X)=\sum_{i=1}^{\infty}p_ix_i\ ,$$

ha ez a sor abszolút konvergens, vagyis $\sum_{i=1}^{\infty}p_i\,|x_i|<\infty$.

PÉLDA. Vizsgáljuk meg a kockadobás esetén a kidobott számok várható értékét. Jelölje X a dobás eredményét (mint valószínűségi változót). Ekkor X lehetséges értékei $\{1,2,\ldots,6\}$, X eloszlása pedig $p_k=P(X=k)=1/k, k=1,\ldots,6$. A várható érték ebben az esetben

$$E(X)=\sum_{i=1}^{6}(1/6)i=\frac{1}{6}\frac{6(6+1)}{2}=\frac{7}{2}.$$

Ha az X valószínűségi változó folytonos eloszlású $f(x)$ sűrűségfüggvénnyel, akkor *az **X valószínűségi változó várható értékén*** az

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx$$

számot értjük, feltéve hogy az integrandus abszolút integrálható, azaz $\int_{-\infty}^{\infty}|\,x\,|\,f(x)dx<\infty$.

PÉLDA. Legyen X egyenletes eloszlású valószínűségi változó az (a,b) intervallumon. Ekkor X sűrűségfüggvénye

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & \text{ha } a<x<b\\ 0, & \text{különben}\end{cases},$$

így a várható értékre kapjuk:

$$E(X)=\int_0^\infty xf(x)dx=\int_a^b x\frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_a^b=\frac{1}{b-a}\frac{1}{2}(b^2-a^2)=\frac{a+b}{2}.$$

A gyakorlat számára általában teljesen kielégítő a két speciális eset megadása. Ha az X valószínűségi változó $F(x)$ eloszlásfüggvénye keverék $F_1(x)$ diszkrét, illetve $F_2(x)$ folytonos összetevővel, azaz

$$F(x)=aF_1(x)+bF_2(x),\quad a,b\geq 0,\ a+b=1,$$

ahol a diszkrét értékek $x_1,x_2,\ldots$, és a hozzájuk tartozó valószínűségek $p_1,p_2,\ldots$, továbbá a folytonos $F_2(x)$ összetevő sűrűségfüggvénye $f(x)$, akkor X várható értéke előáll

$$E(X)=a\sum_{i=1}^{\infty}p_ix_i+b\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx,$$

alakban, feltéve, hogy az egyenlet jobboldalán álló végtelen sor és integrál létezik.

A várható érték képzés, amely egy valószínűségi változóhoz egy véges számot rendel hozzá, rendkívűl fontos szerepet játszik a valószínűségelméletben. Az alábbiakban megadjuk a várható érték legfontosabb tulajdonságait.

TULAJDONSÁGOK:

T1. Ha X korlátos valószínűségi változó, azaz van olyan x_1 és x_2 konstans, hogy $x_1\leq X\leq x_2$, akkor

$$x_1\leq E(X)\leq x_2.$$

Ha $X\geq 0$ (azaz X nemnegatív értékeket felvevő valószínűségi változó), akkor

$$E(X)\geq 0.$$

T2. Tegyük fel, hogy létezik az X valószínűségi változó $E(X)$ várható értéke, akkor tetszőleges c konstans mellett létezik a cX valószínűségi változó várható értéke és fennáll

$$E(cX)=cE(X).$$

T3. Ha az X valószínűségi változóra teljesül $P(X=c)=1$ valamilyen konstans c szám mellett, akkor $E(X)=c$.

T4. Ha az X és Y valószínűségi változók várható értéke létezik, akkor az összegük várható értéke is létezik és fennáll

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y).$$

T5. Az előző tulajdonság kicsit általánosabban is kifejezhető. Tegyük fel, hogy az $X_1,\dots,X_k$ valószínűségi változók várható értékei léteznek, $c_1,\dots,c_k$ pedig tetszőlegesen választott konstans értékek, ekkor igaz a következő összefüggés

$$E(c_1X_1+\ldots+c_kX_k)=c_1E(X_1)+\ldots+c_kE(X_k).$$

VALÓSZÍNŰSÉGI VÁLTOZÓK FÜGGVÉNYEINEK VÁRHATÓ ÉRTÉKE. MOMENTUMOK, SZÓRÁS FOGALMA ÉS TULAJDONSÁGAI.
NEVEZETES EGYENLŐTLENSÉGEK: MARKOV- ÉS CSEBISEV-EGYENLŐTLENSÉG.

Legyen X diszkrét valószínűségi változó $x_1,x_2,\dots$ lehetséges értékekkel és a hozzájuk tartozó $p_1,p_2,\dots$ valószínűségekkel. Legyen $h(x)$ egy valós változójú valós értékeket felvevő függvény, melyre létezik az $Y = h(X)$ valószínűségi változónak várható értéke. Ekkor az Y várható értékére teljesül az alábbi összefüggés

$$E(Y)=Eh(X)=\sum_{i=1}^{\infty}p_ih(x_i).$$

Ha X folytonos eloszlású valószínűségi változó $f_X(x)$ sűrűségfüggvénnyel, és létezik az $Y=h(X)$ valószínűségi változónak várható értéke, az akkor

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{\infty}h(x)f_X(x)dx.$$

Több valószínűségi változó esetén (többdimenziós valószínűségi vektorváltozókra) teljesen analóg formulák írhatók fel, ezért csak két változóra adjuk meg. Legyen X és Y valószínűségi változó és tegyük fel, hogy létezik a $Z = h(X,Y)$ valószínűségi változónak várható értéke. Értelemszerű jelölések mellett diszkrét, illetve folytonos esetben érvényesek az alábbi formulák:

$$E(Z)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}h(x_i,y_j)P(X=x_i,Y=y_j),$$

$$E(Z)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h(x,y)f_X(x,y)dxdy.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy a várható érték képzésre teljesül az alábbi fontos összefüggés is.

T6. Legyen X és Y két egymástól független valószínűségi változó, melyeknek létezik várható értéke. Ekkor

$$E(XY)=E(X)E(Y).$$

MOMENTUMOK, SZÓRÁS. Nézzük meg most a valószínűségi változók gyakorlatban is igen fontos speciális függvényeinek várható értékét.

Definíció. Legyen $k \geq 1$ valamilyen pozitív egész szám és tegyük fel, hogy létezik az *X* valószínűségi változó X^k függvényének várható értéke. Ekkor a $\mu_k = E(X^k)$ mennyiséget az *X* valószínűségi változó ***k-adik momentumának*** nevezzük.

Ennek megfelelően a $\mu = \mu_1 = E(X)$ első momentum maga a várható érték.

Bizonyítható, hogy tetszőleges $k \geq 2,\ 1 \leq j < k$ mellett fennáll

$$|EX^j| \leq (E|X|^k)^{j/k}.$$

Ez azt jelenti, hogy ha létezik valamilyen $k \geq 2$ esetén az *X* valószínűségi változónak véges *k*-adik abszolút momentuma, akkor minden *k*-nál kisebb abszolút momentum is véges.

Megjegyezzük, hogy a definíció szerint egy *Y* valószínűségi változó várható értéke akkor létezik, ha $E|Y| < \infty$, ezért a *k*-adik momentum akkor létezik, ha a *k*-adik abszolút momentum véges.

A gyakorlatban használatos még az un. ***k-adik centrális momentum*** is, ami nem más, mint a várható értékkel centrált valószínűségi változó *k*-adik momentuma, azaz

$$m_k = E[(X - E(X))^k].$$

Egyszerű számolással kapjuk, hogy ez mindig kifejezhető *X* nemcentrális $\mu_i, 1 \leq i \leq k$ momentumaival ($\mu_0 = 1,\ \mu = \mu_1$):

$$m_k = E[(X - E(X))^k] = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} E[(X^i)(-EX)^{k-i}] = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \mu_i (-\mu)^{k-i}.$$

A várható érték fogalmának bevezetésénél láttuk, hogy egy véletlen kísérletsorozat esetén a megfigyelt értékek átlaga a várható érték körül ingadozik. Az ingadozás mértékének egyik legfontosabb jellemzője a szórás.

Definíció. . Tegyük fel, hogy az *X* valószínűségi változó második momentuma véges. A

$$D(X) = \sqrt{E[(X - E(X))^2]}$$

mennyiséget az *X* valószínűségi változó ***szórásának*** nevezzük.

Az *X* valószínűségi változó szórásnégyzete kifejezhető az első és második momentumának segítségével:

$$D^2(X) = E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - (E(X))^2 = \mu_2 - \mu_1^2.$$

Ebből az azonosságból, valamint a magasabb matematikából ismert $(E(X))^2 \leq E(X^2)$ egyenlőtlenségből következik, hogy a szórás akkor létezik, amikor a második momentum véges, továbbá tetszőleges véges második momentummal (szórással) rendelkező *X* valószínűségi változóra teljesül

$$D^2(X) \leq E(X^2).$$

Egyszerű számolóssal kapjuk tetszőleges c konstans mellett (a mechanikában jól ismert Steiner-formulával analóg)

$$E[(X-c)^2] = D^2(X) + (E(X)-c)^2$$

összefüggést. Mivel $E(X - EX) = EX - EX = 0$, ezért

$$E[(X-c)^2] = E\left[\left((X-EX)+(EX-c)\right)^2\right] =$$

$$= E\left[(X-EX)^2 + 2(X-EX)(EX-c) + (EX-c)^2\right] = D^2(X) + (E(X)-c)^2 .$$

Ennek az azonosságnak fontos következménye az, hogy az $E[(X-c)^2]$ második momentumot a $c = E(X)$ várható érték minimalizálja, vagy másképpen mondva, *az X valószínűségi változót négyzetes középben legjobban közelítő konstans a várható érték.*

A szórásnégyzettel kapcsolatban megemlítjük még néhány gyakran alkalmazott tulajdonságát.

T1. Ha létezik az X valószínűségi változó szórása, akkor tetszőlegesen választott a és b konstansok mellett igaz

$$D^2(aX+b) = D^2(aX) = a^2 D^2(X) .$$

Bizonyítás. $D^2(aX+b) = E[(aX+b) - E(aX+b)]^2 = a^2 E(X-EX)^2 = a^2 D^2(X)$.

T2. Legyenek az $X_1,\ldots,X_k$ valószínűségi változók páronként függetlenek és véges szórásúak. Akkor

$$D^2(X_1+\ldots+X_k) = D^2(X_1)+\ldots+D^2(X_k) .$$

Bizonyítás. A függetlenség következtében fennáll

$$E[(X_i - EX_i)(EX_j - EX_j)] = E(X_i - EX_i)\, E(X_j - EX_j) = 0,\ i \neq j,\ 1 \leq i, j \leq k ,$$

ezért

$$D^2(X_1+\ldots+X_k) = E[(X_1+\ldots+X_k) - E(X_1+\ldots+X_k)]^2 =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{k} E[(X_i - EX_i)(EX_j - EX_j)] = \sum_{i=1}^{k} E(X_i - EX_i)^2 = D^2(X_1)+\ldots+D^2(X_k) .$$

Itt meg kell jegyezni, hogy ehhez az azonossághoz nem szükséges a valószínűségi változók teljes függetlensége, hanem elegendő hozzá a később definiálandó tulajdonság az un. korrelálatlanság, amely még a páronkénti függetlenségnél is gyengébb megszorítást jelent.

Független, azonos σ szórású valószínűségi változók összegére kapjuk, hogy

$$D^2(X_1+\ldots+X_k) = kD^2(X_1) = \sigma^2 k ,$$

vagy

$$D(X_1+\ldots+X_k) = \sigma\sqrt{k} .$$

NEVEZETES EGYENLŐTLENSÉGEK. A Markov- és Csebisev egyenlőtlenség szerepe nemcsak amiatt jelentős, hogy egyfajta eligazítást nyújtanak az eloszlásokról a várható érték, illetve szórás segítségével, hanem gyakran elegendően hatékony eszközt is biztosítanak bizonyos eredmények igazolásához.

Tétel. (Markov-egyenlőtlenség) Ha az X valószínűségi változó nemnegatív és várható értéke létezik, akkor tetszőlegesen választott $\varepsilon > 0$ konstans mellett fennáll

$$P(X \geq \varepsilon) \leq \frac{E(X)}{\varepsilon}.$$

Bizonyítás. Vezessük be a következő valószínűségi változót:

$$X_\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon, & \text{ha } X \geq \varepsilon \\ 0, & \text{ha } X < \varepsilon \end{cases}$$

Ekkor nyilvánvalóan mindig fennáll

$$X \geq X_\varepsilon \quad \text{és} \quad P(X_\varepsilon = \varepsilon) = P(X \geq \varepsilon), \quad P(X_\varepsilon = 0) = P(X < \varepsilon).$$

Így a várható érték tulajdonságait felhasználva kapjuk, hogy

$$EX \geq EX_\varepsilon = 0P(X_\varepsilon = 0) + \varepsilon P(X_\varepsilon = \varepsilon) = \varepsilon P(X \geq \varepsilon),$$

ahonnan az állítás már következik.

Tétel. (Csebisev-egyenlőtlenség) Tetszőleges véges szórású X valószínűségi változó és $\varepsilon > 0$ konstans mellett fennáll

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{D^2(X)}{\varepsilon^2}.$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk a Markov-egyenlötlenséget a nemnegatív értékeket felvevő $|X - E(X)|$ valószínűségi változóra:

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) = P((X - E(X))^2 \geq \varepsilon^2) \leq \frac{E(X - EX)^2}{\varepsilon^2} = \frac{D^2 X}{\varepsilon^2}.$$

Egyszerű alkalmazásként tekintsük az $(X_1 + \ldots + X_k)/k$ átlagot, ahol $X_1, \ldots, X_k$ független, azonos eloszlású és véges szórású valószínűségi változók, melyek közös várható értékét és szórását jelölje μ, illetve σ.

Ekkor a független valószínűségi változók összegének szórásnégyzetére vonatkozó állítást kombinálva a Csebisev-egyenlőtlenséggel, és ε helyett $(k\varepsilon)$-t írva adódik, hogy

$$P(|X_1 + \ldots + X_k - k\mu| \geq k\varepsilon) \leq P((X_1 + \ldots + X_k - k\mu)^2 \geq k^2\varepsilon^2) \leq \frac{k\sigma^2}{(k\varepsilon)^2} = \frac{\sigma^2}{k\varepsilon^2},$$

vagyis

$$P\left(\left|\frac{X_1 + \ldots + X_k}{k} - \mu\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{k\varepsilon}.$$

Ez azt jelenti, hogy k növekedésével annak a valószínűsége 0-hoz tart, hogy az átlag abszolút eltérése a várható értéktől meghalad bármely rögzített, tetszőlegesen kicsi pozitív értéket.

Ez a következmény valójában nem más, mint a nagy számok Bernoulli-féle törvénye, erre a későbbiek során még visszatérünk.

MEDIÁN, KVANTILISEK, TERJEDELEM, FERDESÉG, LAPULTSÁG.

Az eloszlások jellemzése a gyakorlatban különböző megfontolások alapján történhet, s a különböző jellemzők az adott eloszlás más és más tulajdonságát emelik ki. A medián, kvantilis és a terjedelem is az eloszlások egyfajta jellemzésére szolgálnak és fontos információt nyújthatnak az eloszlásról.

Legyen X tetszőleges valószínűségi változó, eloszlásfüggvényét jelölje $F(x)$. Az eloszlásfüggvény monoton növő, $-\infty$-ben 0, $+\infty$-ben 1 értéket vesz fel, ezért a következő esetek valamelyike teljesül:

a) Létezik egyedüli x_m érték, amelyre fennáll $F(x_m) = 1/2$.

b) Létezik olyan $(x_1, x_2]$ intervallum, amelyen $F(x) = 1/2$, $x_1 < x \le x_2$ és $F(x) < 1/2$, $x \le x_1$. Ekkor legyen $x_m = (x_1 + x_2)/2$.

c) Nem létezik megoldása az $F(x) = 1/2$ egyenletnek (az eloszlásfüggvény „átugorja” az ½ értéket). Ekkor van olyan x_m szám, hogy fennáll $F(x) < 1/2$, ha $x \le x_m$ és $F(x) > 1/2$, ha $x > x_m$.

Definíció. A $\text{med}(X) = x_m$ számot az X valószínűségi változó, illetve az $F(x)$ eloszlásfüggvény ***mediánjának*** nevezzük.

Ha $F(x)$ folytonos és szigorúan monoton növő azon a halmazon, ahol $0 < F(x) < 1$, akkor az $F(x) = 1/2$ egyenletnek nyilvánvalóan létezik egyértelmű x_m megoldása.

Megemlítjük még a medián néhány lényeges tulajdonságát.

Ha az X valószínűségi változó eloszlása szimmetrikus egy c pontra nézve, vagyis $P(X - c \le -x) = P(X - c \ge x)$, $-\infty < x < \infty$, vagy ami ugyanaz, $F(-x + c + 0) = 1 - F(x + c)$ minden valós x számra és létezik várható értéke X-nek, akkor $\text{med}(X) = E(X) = c$. Például, ha az X valószínűségi változó eloszlása $N(\mu, \sigma)$ normális, akkor X eloszlása szimmetrikus a μ várható értékre nézve, ezért a medián ebben az esetben $med(X) = \mu$.

Megjegyzés. A medián egyik érdekes és egyben fontos tulajdonsága az, hogy az $E(|X - c|)$ várható értéknek c-ben vett minimumát a $c = \text{med}(X)$ választás mellett kapjuk.

A mediánhoz hasonló fogalom a kvantilis - itt is azt nézzük, hogy az eloszlás mely pontban vesz fel egy bizonyos értéket.

Definíció. Legyen $0 < p < 1$ szám, és az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy az $F(x) = p$ egyenletnek létezik egyetlen x_p megoldása. Ekkor az x_p számot az X valószínűségi változó, illetve az $F(x)$ eloszlásfüggvény ***p-edrendű kvantilisének*** nevezzük. (Ha nincs egyértelmű megoldása az $F(x) = p$ egyenletnek, akkor a medián definíciójához hasonlóan járhatunk el).

Világos, hogy a $p = 1/2$ rendű kvantilis éppen a medián. Az $x_{1/4}$, illetve $x_{3/4}$ számokat ***alsó***, illetve ***felső kvartiliseknek*** nevezzük.

Korlátos valószínűségi változók esetén szokás terjedelemről is beszélni.

Definíció. Ha (x_1, x_2) jelöli azt a legszűkebb intervallumot, amelyre $P(x_1 \le X \le x_2) = 1$, akkor az $x_2 - x_1$ számot az X valószínűségi változó, illetve az $F_X(x)$ eloszlásfüggvény ***terjedelmének*** nevezzük.

Eloszlások jellemzésére szolgál az un. ferdeségi és lapultsági mutató. Nem szimmetrikus eloszlások esetén az asszimetria, a ferdeség mérésére szolgál a

$$\gamma_1 = \mu_3 / \sigma^3$$

ferdeségi együttható, ahol μ_3 a harmadik momentumot, σ pedig a szórást jelöli. A lapultság mérésére szolgál a

$$\gamma_2 = \mu_4 / \sigma^4 - 3$$

lapultsági mutató, ahol μ_4 a negyedik momentumot jelöli, és a mutató úgy van meghatározva, hogy normális eloszlás esetén ad 0 értéket. A lapultsági mutató a normális eloszlástól való eltérésre ad egyfajta információt.

Eloszlások jellemzésére még szokás használni az un. ***módusz*** fogalmát. Folytonos eloszlás esetén a sűrűségfüggvény lokális maximumhelyeit nevezzük módusznak. Ha egy van belőle, akkor az eloszlást unimodálisnak hívjuk. Diszkrét eloszlás esetén módusznak nevezzük azokat az értékeket, melyeket nagyobb valószínűséggel vesz fel a valószínűségi változó, mint az őt közrefogó értékeket.

KOVARIANCIA ÉS KORRELÁCIÓS EGYÜTTHATÓ

Legyen X és Y két véges szórású valószínűségi változó és vezessük be a

$$R_{X,Y} = \mathrm{cov}(X,Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))],$$

valamint a $D(X) > 0,\ D(Y) > 0$ feltétel mellett a

$$r_{X,Y} = \mathrm{corr}(X,Y) = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{D(X)D(Y)}$$

mennyiségeket.

Definíció. A $\mathrm{cov}(X,Y)$ mennyiséget az X és Y valószínűségi változó közötti ***kovarianciának***, míg a $\mathrm{corr}(X,Y)$ mennyiséget a két valószínűségi változó közötti ***korrelációs együtthatónak*** nevezzük.

Mindkét mennyiség alapvető szerepet játszik mind a többváltozós statisztikai analízisben, mind pedig az egy- és többdimenziós idősoranalízisben. A korreláció az egyik legfontosabb mérőszám két valószínűségi változó közötti összefüggésre.

Tétel. Tetszőleges 0-tól különböző véges szórású X és Y valószínűségi változók esetén

$$-1 \le \mathrm{corr}(X,Y) \le 1.$$

A matematikában jól ismert Cauchy-Schwartz egyenlőtlenség szerint tetszőleges, véges második momentummal rendelkező U és V valószínűségi változók esetén érvényes az

$$|E(UV)| \le \sqrt{E(U^2)E(V^2)}.$$

egyenlőtlenség. Így adódik, hogy

$$|\mathrm{corr}(X,Y)| = \frac{|\mathrm{cov}(X,Y)|}{DX\,DY} = \frac{|E(X-EX)(Y-EY)|}{DX\,DY} \le$$

$$\le \frac{[E(X-EX)^2]^{1/2}[E(Y-EY)^2]^{1/2}}{DX\,DY} = 1,$$

ami éppen a bizonyítandó állítást jelenti.

Tétel. Az $|\mathrm{corr}(X,Y)| = 1$ összefüggés akkor és csak akkor igaz, amikor az X és Y valószínűségi változók között lineáris kapcsolat áll fenn, azaz van olyan a és b konstans, hogy $P(Y = aX + b) = 1$.

Bizonyítás. Ha $P(Y = aX + b) = 1$, akkor

$$|\mathrm{corr}(X,Y)| = |\mathrm{corr}(X, aX+b)| = \frac{|E(X-EX)(aX-aEX)|}{DXD(aX)} = 1.$$

Fordítva, ha $|\rho| = 1$, ahol $\rho = corr(X,Y)$, akkor

$$E\left(\frac{Y-EY}{DY} - \rho\frac{X-EX}{DX}\right)^2 = 1 - 2\rho\frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{DX\,DY} + 1 = 2 - 2\rho^2 = 0,$$

Innen következik, hogy

$$P\left(\frac{Y-EY}{DY} = \rho\frac{X-EX}{DX}\right) = 1,$$

és így

$$P\left(Y = \rho\frac{DY}{DX}(X-EX) + EY\right) = 1.$$

Megjegyzés. Fontos megvilágítani a valószínűségi változók függetlensége és korrelálatlansága közötti különbséget.

Ha X és Y valószínűségi változók függetlenek, akkor korrelálatlanok is:

$$\mathrm{corr}(X,Y) = \frac{E[(X-EX)E(Y-EY)]}{DX\,DY} = \frac{E(X-EX)E(Y-EY)}{DX\,DY} = 0.$$

***Megfordítva**, a korrelálatlanságból nem következik a függetlenség.*

PÉLDA. Legyen X és Y két diszkrét valószínűségi változó, melyek lehetséges értékei –1, 0, 1. Az együttes eloszlásuk legyen a következő ($p_{i,j} = P(X=i, Y=j),\ -1 \le i, j \le 1$)

$$p_{-1,0} = p_{0,-1} = p_{0,1} = p_{1,0} = 1/4$$

(innen már adódik, hogy $p_{-1,-1} = p_{-1,0} = p_{0,0} = p_{1,-1} = p_{1,1} = 0$). Ekkor a marginális eloszlások

$$P(X=-1) = P(X=1) = 1/4, \quad P(X=0) = 1/2,$$
$$P(Y=-1) = P(Y=1) = 1/4, \quad P(Y=0) = 1/2.$$

A két valószínűségi változó nyilvánvalóan nem független egymástól, mivel

$$P(X=0, Y=0) = 0 \neq P(X=0)P(Y=0) = 1/4.$$

Számítsuk ki most az X és Y közötti korrelációs együtthatót. Világos, hogy

$$EX = EY = (-1)\cdot(1/4) + 0\cdot(1/2) + 1\cdot(1/4) = 0,$$
$$\operatorname{cov}(X,Y) = E(XY) = \sum_{i,j=-1}^{1} i\cdot j\cdot p_{i,j} = 0.$$

Tehát azt kaptuk, hogy a két valószínűségi változó korrelálatlan, de nem független egymástól.

HATÁRELOSZLÁS TÉTELEK

A várható érték fogalmának bevezetésénél megemlítettük, hogy független azonos eloszlású $X_1 X_2,\ldots$ valószínűségi változók esetén és bizonyos egyszerű feltételek mellett

$$\overline{S}_n = \frac{X_1+\ldots+X_n}{n} \to \mu, \quad n\to\infty$$

(μ a várható értéket jelenti), azonban a konvergencia-fogalom nem került tisztázásra.

Definíció. Azt mondjuk, hogy az $Y_1, Y_2,\ldots$ sorozat ***sztochasztikusan konvergál*** egy Y valószínűségi változóhoz, ha bármely $\varepsilon > 0$ konstans mellett teljesül

$$\lim_{n\to\infty} P(|Y - Y_n| > \varepsilon) = 0.$$

Definíció. Azt mondjuk, hogy az $Y_1, Y_2,\ldots$ sorozat ***1 valószínűséggel konvergál*** az Y valószínűségi változóhoz, ha 1 annak az eseménynek a valószínűsége, amelyhez tartozó elemi eseményeken $Y_1, Y_2,\ldots$ konvergál Y-hez, vagyis

$$P(\lim_{n\to\infty} Y_n = Y) = 1.$$

Ha a sztochasztikus konvergencia fennáll az $Y_n = \overline{S}_n$, $Y=\mu$ választás mellett, akkor azt mondjuk, hogy az $\overline{S}_n$, $n=1,2,\ldots$ valószínűségi változók sorozatára érvényes a ***nagy számok gyenge törvénye.***

(**Az** 1 valószínűséggel vett konvergencia esetén a ***nagy számok erős törvényéről*** beszélünk.)

A NAGY SZÁMOK GYENGE TÖRVÉNYEI: BERNOULLI-TÉTELE. A NAGY SZÁMOK KOLMOGOROV-FÉLE ERŐS TÉTELE, KÖVETKEZMÉNY A RELATÍV GYAKORISÁGOKRA

Végezzünk el n-szer egymás után egy kísérletet és jelölje $S_n(A)$ egy megadott p valószínűségű A esemény bekövetkezésének relatív gyakoriságát a kísérletsorozatban. Ekkor igaz a következő tétel.

Tétel. (Bernoulli-tétel) Az A esemény bekövetkezésének relatív gyakoriságára igaz az $\overline{S}_n(A) \to p,\ n \to \infty$ sztochasztikus konvergencia, vagyis tetszőleges $\varepsilon > 0$ mellett

$$\lim_{n\to\infty} P(|\overline{S}_n(A) - p| > \varepsilon) = 0 .$$

A Csebisev egyenlőtlenség egyszerű következményeként adódik a következő tétel, melynek speciális esete a Bernoulli-féle nagy számok gyenge törvénye.

Tétel. Legyen $X_1, X_2, \ldots$ független, azonos μ várható értékkel és véges σ szórással rendelkező valószínűségi változók sorozata. Ekkor fennáll a következő sztochasztikus konvergencia

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \to \mu,\quad n \to \infty .$$

A nagy számok Kolmogorov-féle erős törvénye páronként független és azonos eloszlású valószínűségi változok sorozata esetén szükséges és elégséges feltételt ad az átlag 1 valószínűséggel vett konvergenciájára

Tétel. (Kolmogorov) Legyen $X_1, X_2, \ldots$ páronként független azonos eloszlású valószínűségi változók sorozata. Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy valamely μ szám mellett fennáll a

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \to \mu,\ n \to \infty$$

konvergencia 1 valószínűséggel az, hogy $E(|X_1|) < \infty$. Ha teljesül ez a feltétel, akkor az 1 valószínűséggel vett konvergencia igaz $\mu = E(X_1)$ mellett.

Következmény. Bernoulli-féle nagy számok törvénye szerint, ha $\overline{S}_n(A)$ jelöli n számú független kisérletben egy A esemény bekövetkezésének relatív gyakoriságát, akkor $\overline{S}_n(A) \to p = P(A),\ n \to \infty$ sztochasztikusan.
(A Kolmogorov-féle nagy számok erős törvénye szerint ez a konvergencia 1 valószínűséggel is igaz.)

CENTRÁLIS HATÁRELOSZLÁS TÉTEL, MOIVRE-LAPLACE-TÉTEL.

Centrális határeloszlás tételek alapproblémája a következő. Legyen $X_1, X_2, \ldots$ független azonos eloszlású valószínűségi változók sorozata. A kérdés az, hogy létezik-e konstansoknak olyan a_n és $b_n \neq 0,\ n \geq 1$ sorozata, hogy a lineárisan normált és centrált

$$\overline{S}_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{b_n} - a_n \quad ,\ n \geq 1$$

összegnek létezik határeloszlása. Először tisztázni kell, hogy mit értünk határeloszlás létezésén. Legyen $F_n(x),\ n = 1,2,\ldots$ eloszlásfüggvények valamilyen sorozata. Azt mondjuk, hogy az $F_1(x), F_2(x), \ldots$ eloszlásfüggvények sorozata gyengén konvergál egy $F(x)$ eloszlásfüggvényhez, amelyet ***határeloszlásnak*** nevezünk, ha $F(x)$ minden x folytonossági pontjában teljesül az $F_n(x) \to F(x),\ n \to \infty$ konvergencia. Ha az $F(x)$ eloszlásfüggvény folytonos, akkor a konvergencia minden pontban fennáll.

Csak az olyan határeloszlások érdekesek, amelyek nem elfajultak. Ez azt jelenti, hogy a határeloszlás nem koncentrálódhat csak egy pontra, vagyis egyetlen pont valószínűsége sem lehet 1 a határeloszlás szerint.
A legegyszerűbb esetre vonatkozó tétel (amikor a valószínűségi változók két értéket vehetnek fel) Moivre és Laplace nevéhez fűződik. Ez volt egyébként az első tétel a fenti problémakörben.

Tétel. (Moivre-Laplace) Legyen $X_1, X_2, \dots$ független azonos eloszlású, csak 0-t és 1-t felvevő valószínűségi változók sorozata, melyekre $P(X_i = 1) = p$, $P(X_i = 0) = 1 - p$, ahol $0 < p < 1$ rögzített szám. Ekkor tetszőleges $u < v$ számokra

$$\lim_{n\to\infty} P\left(u \le \frac{X_1 + \ldots + X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le v \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_u^v e^{-x^2/2} dx .$$

Megjegyezzük, hogy a Moivre-Laplace tétel lényegét tekintve a binomiális eloszlásra mond ki állítást, mivel ebben az esetben az $X_1 + \ldots + X_n$ összeg eloszlása n-edrendű p paraméterű binomiális. Általánosan, független azonos eloszlású és véges szórású valószínűségi változókra egyszerűen adható meg a centrális határeloszlás tétel.

Tétel. (Centrális határeloszlás tétel) Ha $X_1, X_2, \dots$ független azonos eloszlású, véges szórású valószínűségi változók, közös $\mu = E(X_i)$ várható értékkel és $\sigma = D(X_i)$ szórással, akkor

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} < x \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-s^2/2} ds .$$

6. NEVEZETES DISZKRÉT ÉS FOLYTONOS ELOSZLÁSOK.

DISZKRÉT ELOSZLÁSOK.

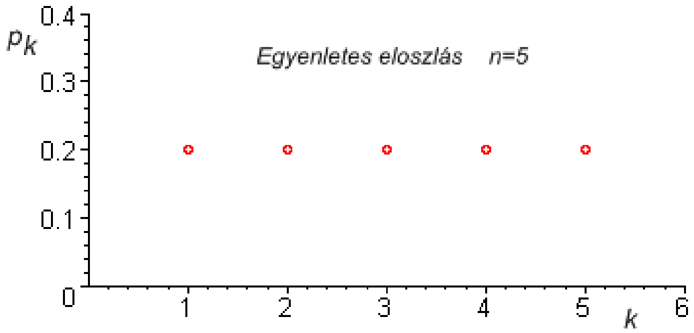
EGYENLETES ELOSZLÁS. Legyen az X valószínűségi változó diszkrét, melynek lehetséges értékei $\mathfrak{X} = \{x_1, \ldots, x_n\}$, ahol n valamilyen pozitív egész számot jelöl. Azt mondjuk, hogy X eloszlása egyenletes $\mathfrak{X}$ -en, ha

$$p_k = P(X = x_k) = \frac{1}{n},\ 1 \le k \le n .$$

Várható értéke és szórása

$$E(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i,\quad D^2(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 .$$

PÉLDA: Az X diszkrét egyenletes eloszlású valószínűségi változónak az *1; 2; 3; 4; 5* értékeken egyenletes eloszlását az alábbi ábra szemlélteti:



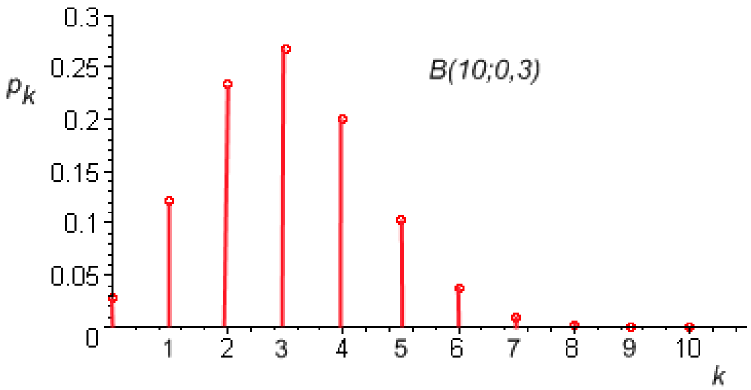
BINOMIÁLIS ELOSZLÁS. Tekintsünk egy n megfigyelésből álló kísérletet, melynek során azt nézzük, hogy egy bizonyos A esemény hányszor következik be. Jelölje ennek számát az X valószínűségi változó. Tegyük fel, hogy $p = P(A),\ 0 < p < 1$, és hogy az egyes kísérletekben egymástól függetlenül következik be A. Ekkor annak valószínűsége, hogy a kísérlett során az A esemény pontosan k-szor következzen be, éppen

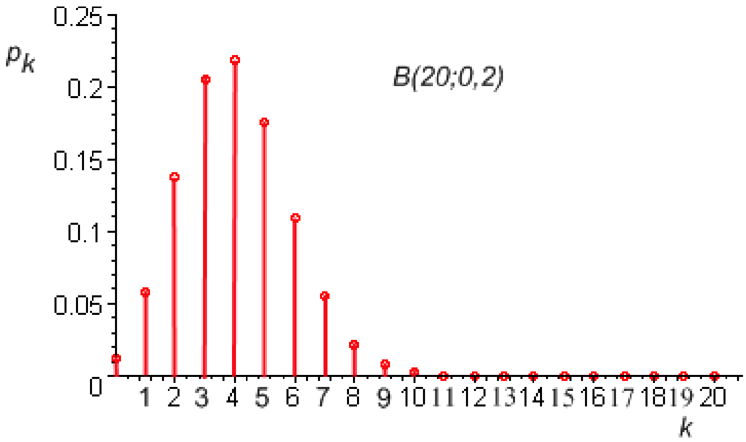
$$p_k = P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},\ k = 0,1,\ldots,n .$$

Ezt az eloszlást nevezzük n-edrendű, p paraméterű binomiális eloszlásnak. Ekkor

$$E(X) = np,\quad D^2(X) = np(1-p) .$$

PÉLDA: Az X binomiális eloszlású valószínűségi változó eloszlását a megadott esetekben az alábbi ábra szemlélteti:





POLINOMIÁLIS ELOSZLÁS. Legyenek $A_1,\dots,A_k$ egymást kizáró események, melyekre $p_i = P(A_i) > 0,\ p_1 + \ldots + p_k = 1$. Egy kísérlett során n számú megfigyelést végzünk az $A_1,\dots,A_k$ eseményekre nézve. Jelölje az $X = (X_1,\dots,X_k)$ valószínűségi vektorváltozó a kísérlett lehetséges kimenetelét, ahol az i-edik X_i koordináta azt mutatja meg, hogy az A_i esemény hányszor következett be az n megfigyelés során. Az X valószínűségi vektorváltozó lehetséges értékei:

$$\{(n_1,\dots,n_k):\ n_i \geq 0,\ n_1 + \ldots + n_k = n\}$$

Ekkor az X vektorváltozó eloszlása

$$p_{n_1,\dots,n_k} = P(X_1 = n_1,\dots,X_k = n_k) = \frac{n!}{n_1!\ldots n_k!} p_1^{n_1}\ldots p_k^{n_k}.$$

Ezt az eloszlást nevezzük $p_1,\dots,p_k$ paraméterű polinomiális eloszlásnak.

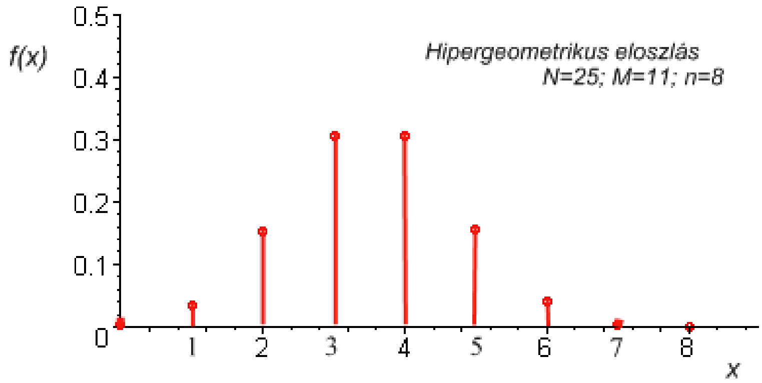
HIPERGEOMETRIKUS ELOSZLÁS. Egy kísérlett során M fehér és $N-M$ fekete golyót tartalmazó urnából húzunk n golyót véletlenszerűen, visszatevés nélkül. Jelölje X a kihúzott fehér golyók számát. Ekkor az X valószínűségi változó

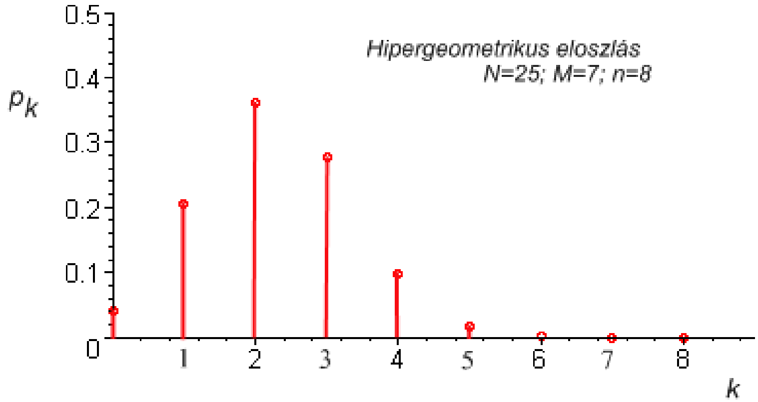
$$p_k = P(X = k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \quad k = 0,1,\dots,n$$

eloszlását hipergeometrikus eloszlásnak nevezzük. Várható értéke és szórása:

$$E(X) = np, \quad D^2(X) = np(1-p)\left(1 - \frac{n-1}{N-1}\right).$$

PÉLDA: Az X hipergeometrikus eloszlású valószínűségi változó eloszlását a megadott két paraméteresetekben az alábbi ábrák szemléltetik:





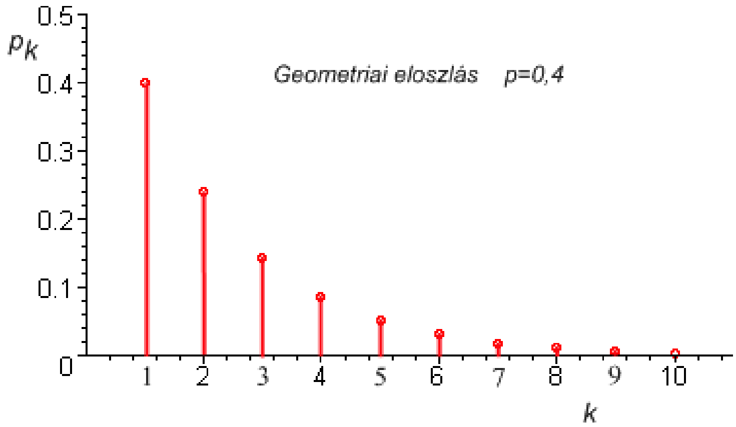
GEOMETRIAI ELOSZLÁS. Legyen A valamilyen esemény valószínűsége és tekintsünk egy olyan kísérlettet, melynek során minden lépésben egymástól függetlenül ugyanolyan $p = P(A)$, $0 < p < 1$ valószínűséggel következhet be az A esemény. Jelölje X azt a lépésszámot, ahányadikban először következett be az A esemény. Ekkor az X valószínűségi változó eloszlását p paraméterű geometriai eloszlásnak nevezzük, és fennáll:

$$p_k = (1-p)^{k-1} p, \quad k = 1,2,\dots$$

A várható érték és a szórásnégyzet ekkor

$$E(X) = \frac{1}{p}, \quad D^2(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

PÉLDA: Az X geometriai *(p=0,4)* eloszlású valószínűségi változó eloszlását az alábbi ábra szemlélteti:



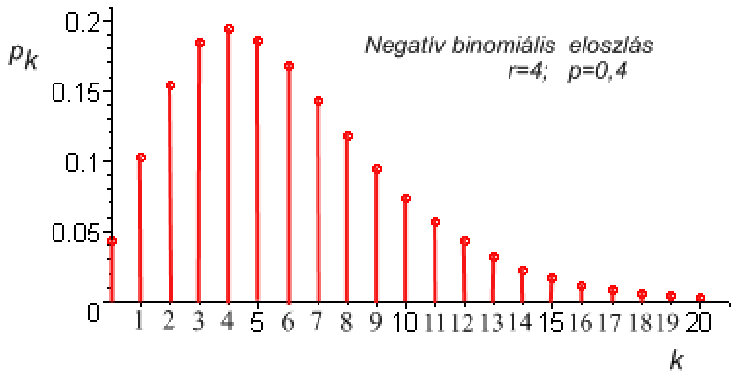
NEGATÍV BINOMIÁLIS ELOSZLÁS. Tekintsünk egy olyan kísérlettet, melynek során minden lépésben egymástól függetlenül ugyanolyan $p = P(A)$, $0 < p < 1$ valószínűséggel következhet be az A esemény. Legyen r tetszőleges pozitív egész szám és jelölje az X valószínűségi változó azt a lépésszámot, amikor az A esemény bekövetkezéseinek a száma először éri el az r-et. Ekkor X eloszlását r-edrendű, p paraméterű negatív binomiális eloszlásnak nevezzük. X eloszlása a következő formulával adható meg:

$$P(X = k + r) = \binom{r+k-1}{k}(1-p)^k p^r, \quad k = 0,1,\ldots$$

Megjegyezzük, hogy a p paraméterű geometriai eloszlás nem más, mint első rendű, p paraméterű negatív binomiális eloszlás. Másrészről, ha $V_1,\ldots,V_r$ független, azonos p $(0 < p < 1)$ paraméterű geometriai eloszlású valószínűségi változók, akkor az $X = V_1 + \ldots + V_r$ összeg eloszlása r-edrendű, p paraméterű negatív binomiális eloszlás lesz. Ezt felhasználva, egyszerűen adódik a várható érték és a szórásnégyzet:

$$E(X) = r\frac{1}{p}, \quad D^2(X) = r\frac{1-p}{p^2}.$$

PÉLDA: Az X negatív binomiális *(r=4; p=0,4)* eloszlású valószínűségi változó eloszlását az alábbi ábra szemlélteti:



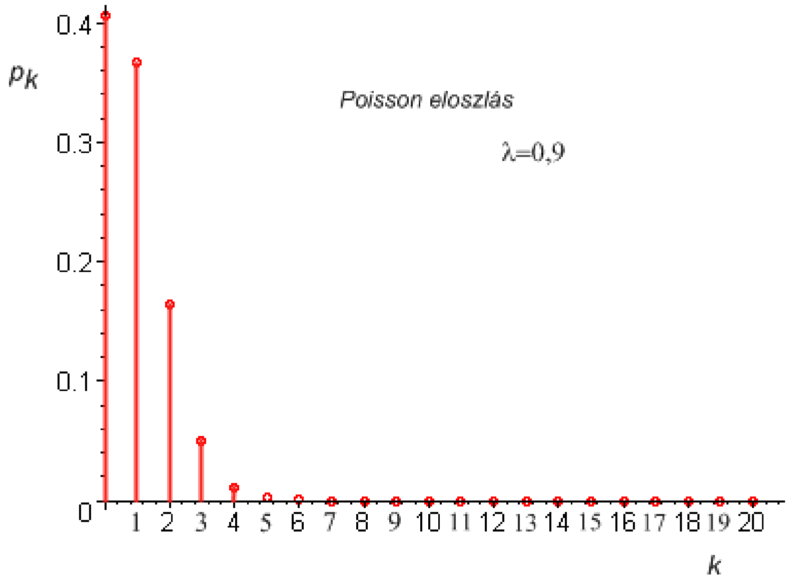
POISSON-ELOSZLÁS. Az X valószínűségi változó eloszlását λ $(0 < \lambda)$ paraméterű Poisson-eloszlásúnak nevezzük, ha lehetséges értéke a nemnegatív egész számok és

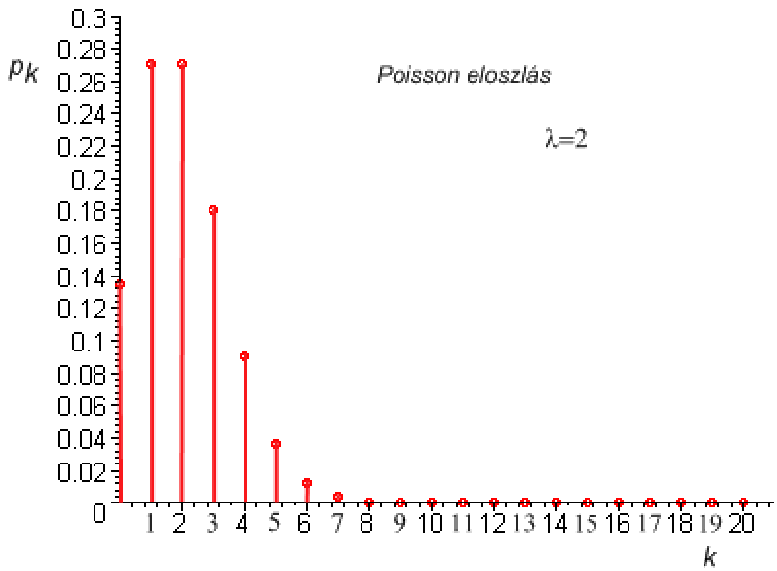
$$p_k = P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \; k = 0,1,\ldots$$

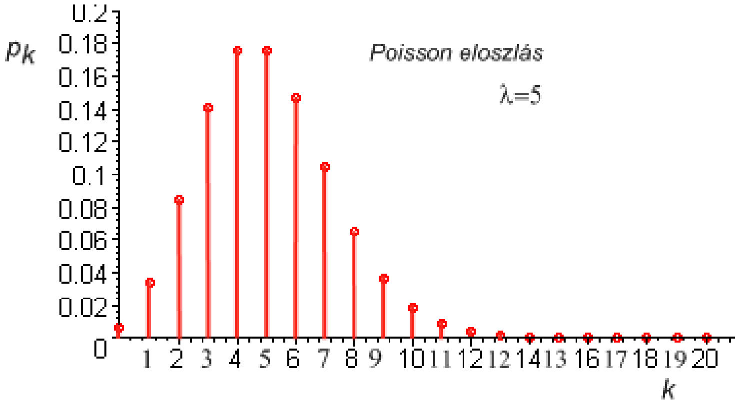
Várható értéke és szórásnégyzete

$$E(X) = \lambda, \quad D^2(X) = \lambda .$$

PÉLDA: Az X Poisson eloszlású valószínűségi változó eloszlását *(λ=5; λ =2; λ=0,9)* paraméter esetekben az alábbi ábrák szemléltetik:






Poisson eloszlás
λ=5
p_k
k

FOLYTONOS ELOSZLÁSOK.

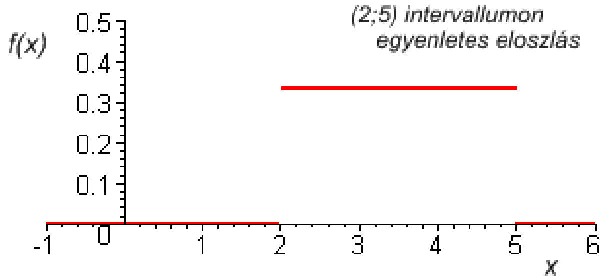
EGYENLETES ELOSZLÁS. Legyen $a<b$ két tetszőleges valós szám. Azt mondjuk, hogy az X valószínűségi változó eloszlása egyenletes az (a,b) intervallumon, ha az $f_X(x)$ sűrűségfüggvénye létezik és fennáll

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & \text{ha } x\in(a,b)\\ 0, & \text{ha } x\notin(a,b)\end{cases}$$

Ebben az esetben a várható értékre és a szórásnégyzetre teljesül

$$E(X)=\frac{a+b}{2},\quad D^2(X)=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

PÉLDA: Az X egyenletes eloszlású valószínűségi változó *(2; 5)* intervallumon eloszlását az alábbi ábra szemlélteti:



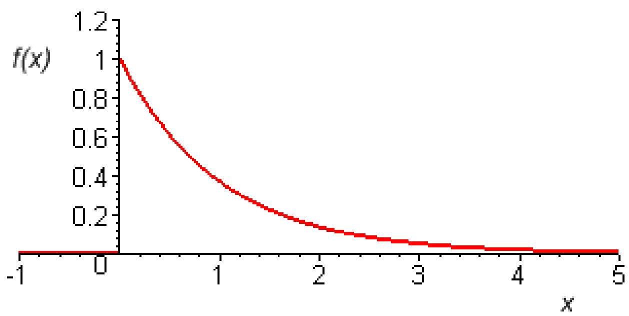
EXPONENCIÁLIS ELOSZLÁS. Legyen az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f_X(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & \text{ha } x\ge 0\\ 0, & \text{ha } x<0\end{cases}$$

ahol $\lambda>0$ konstans. Ekkor az X valószínűségi változó eloszlását λ paraméterű exponenciális eloszlásúnak nevezzük. Várható értéke és szórásnégyzete

$$E(X)=\frac{1}{\lambda},\quad D^2(X)=\frac{1}{\lambda^2}.$$

PÉLDA: Az X exponenciális eloszlású *(λ =2)* valószínűségi változó eloszlását az alábbi ábra szemlélteti:



Jelölje $\Gamma(x)=\int\limits_0^\infty y^{x-1}e^{-y}dy,\ x>0$ az analízisben jól ismert Γ függvényt, amely szükséges a következő eloszlás definíciójához.

NORMÁLIS ELOSZLÁS. Az X valószínűségi változót (μ,σ) paraméterű normális eloszlásúnak nevezzük, ha sűrűségfüggvénye

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\}, \; -\infty < x < \infty .$$

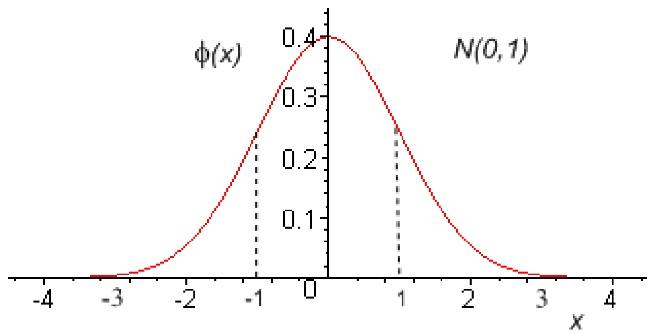
Az X valószínűségi változó várható értéke és szórása nem más, mint a két paraméter, azaz μ és σ. Ennek az eloszlásnak a jelölésére szokás $N(\mu,\sigma)$-t használni. Az N(0,1) eloszlást standard normális eloszlásnak nevezzük, melynek sűrűség- és eloszlás-függvénye a szokásos jelölésekkel

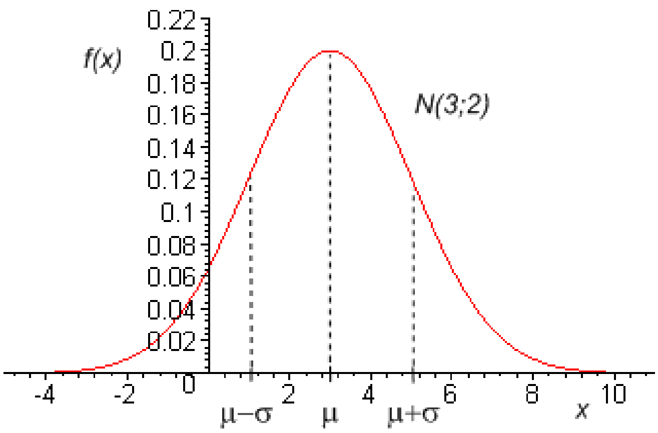
$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2},$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2} dy .$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy tetszőleges $N(\mu,\sigma)$ eloszlású X valószínűségi változó esetén az $Y = (X-\mu)/\sigma$ valószínűségi változó eloszlása N(0,1). Ennek az összefüggésnek a következménye, hogy a gyakorlati alkalmazásokhoz elegendő csak a standard normális eloszlást táblázatolni.

PÉLDA: Az *X N(0; 1)* standard normális és *N(3; 2)*-normális valószínűségi változó eloszlását az alábbi ábrák szemléltetik:





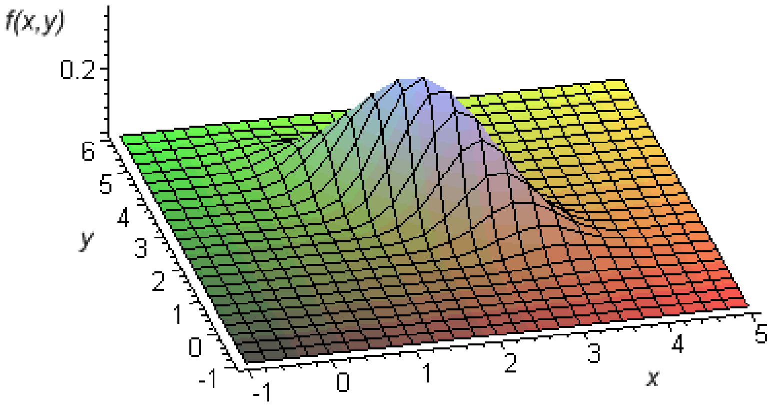
A kétdimenziós (X,Y) normális eloszlás sűrűségfüggvényének általános alakja:

$$f_{X,Y}(x,y)=\frac{\sqrt{ac-b^2}}{2\pi}\exp\left\{-\frac{1}{2}[a(x-\mu_1)^2+2b(x-\mu_1)(y-\mu_2)+c(y-\mu_2)^2]\right\},$$

ahol b,μ_1,μ_2 tetszőleges számok, $a>0$, $b>0$ és teljesül a $b^2<ac$ feltétel. Ekkor az X és Y valószínűségi változók marginális eloszlása $N(\mu_1,\sigma_1)$, illetve $N(\mu_2,\sigma_2)$ normális eloszlás, ahol

$$\sigma_1=\sqrt{\frac{c}{ac-b^2}},\qquad \sigma_2=\sqrt{\frac{a}{ac-b^2}}.$$

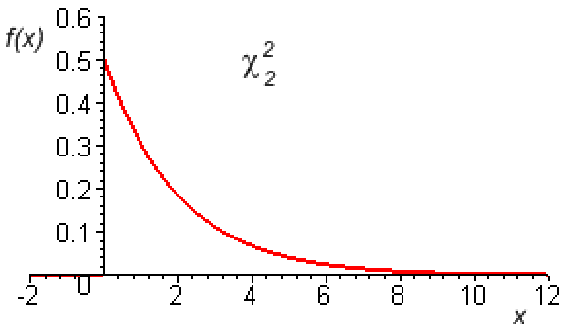
PÉLDA: Az *(X,Y)* kétdimenziós normális valószínűségi vektorváltozók eloszlását az alábbi ábra szemlélteti:
(Az X valószínűségi változó $\mu_1=2$, az Y valószínűségi változó $\mu_2=3$ várható értékű, az $a=5, b=3, c=3$.)

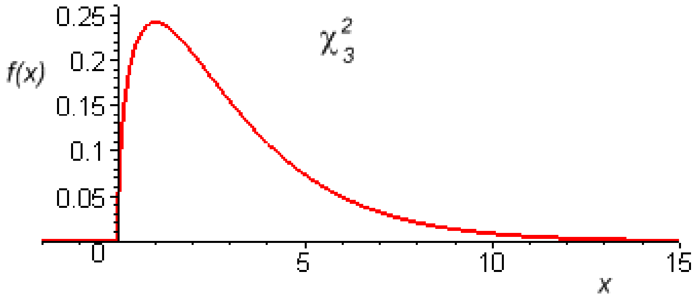


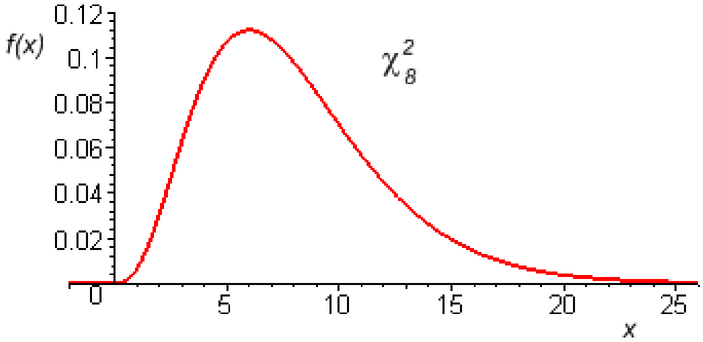
χ^2-ELOSZLÁS. $\chi_n^2=Z_1^2+\ldots+Z_n^2$ valószínűségi változó eloszlását n szabadságfokú χ^2-eloszlásnak nevezzük, ahol $Z_1,Z_2,\ldots,Z_n$ független, standard normális eloszlású valószínűségi változók. Sűrűségfüggvénye

$$f_n(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{n/2-1}e^{-x/2}}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}, & \text{ha } x>0\\ 0, & \text{ha } x\le 0\end{cases}$$

PÉLDA: Az X χ_n^2-eloszlású valószínűségi változó eloszlását *(n=2; n=3; n=8)* esetekben az alábbi ábrák szemléltetik:



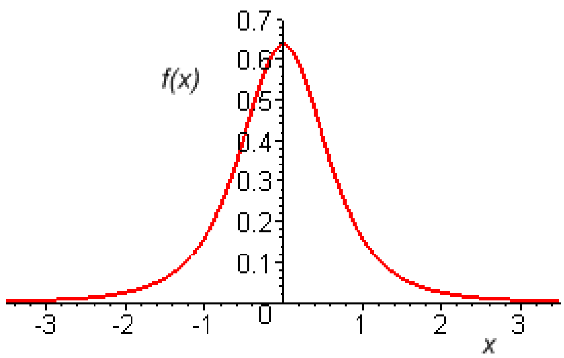




STUDENT-ELOSZLÁS. Az $X = \dfrac{\sqrt{n}Z}{\sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_n^2}}$ valószínűségi változó eloszlását n szabadságfokú Student-, vagy t-eloszlásnak nevezzük, ahol $Z, Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ független, standard normális eloszlású valószínűségi változók. Ezen alapszik a matematikai statisztikában gyakran alkalmazott t-próba. Sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(n/2)} \frac{1}{(1+x^2)^{(n+1)/2}}.$$

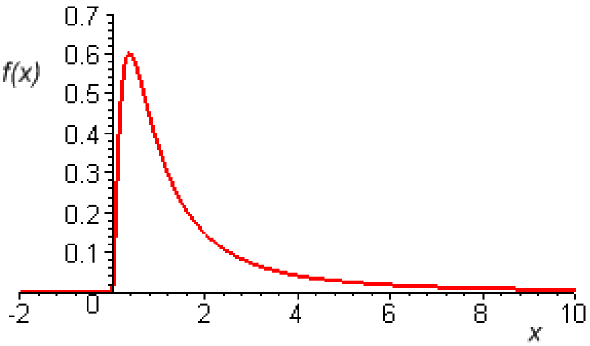
PÉLDA: Az X Student-eloszlású valószínűségi változó $(n=2)$ eloszlását az alábbi ábra szemlélteti:



F-ELOSZLÁS. Az $X = \dfrac{n}{m} \dfrac{Z_1^2 + \ldots + Z_m^2}{Z_{m+1}^2 + \ldots + Z_{m+n}^2}$ valószínűségi változó eloszlását m, n- szabadságfokú F-eloszlásnak nevezzük, ahol $Z_1, Z_2, \ldots, Z_{n+m}$ független, standard normális eloszlású valószínűségi változók. Sűrűségfüggvénye egyszerűen megadható két egymástól független m, illetve n szabadságfokú χ^2-eloszlású valószínűségi változó hányadosának $f_{m,n}(x)$ sűrűségfüggvényével, ahol

$$f_{m,n}(x)=\begin{cases}\dfrac{(m/n)^{m/2}\Gamma((m+n)/2)}{\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)}\dfrac{x^{m/2-1}}{(1+(m/n)x)^{(m+n)/2}}, & \text{ha } x>0\\ 0, & \text{ha } x\le 0\end{cases}$$

PÉLDA: Az X F-eloszlású valószínűségi változó eloszlását *(m=5; n=3)* az alábbi ábra szemlélteti:



LOGARITMIKUSAN NORMÁLIS ELOSZLÁS. Ha Z eloszlása $N(\mu,\sigma)$ normális, akkor az $X=e^Z$ valószínűségi változó eloszlását logaritmikusan normális eloszlásúnak nevezzük. Az eloszlás sűrűségfüggvénye létezik és fennáll

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\dfrac{1}{x}\exp\left\{-\dfrac{(\log x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, & \text{ha } x>0\\ 0, & \text{ha } x\le 0\end{cases}$$