Differenciálegyenlet rendszerek

(A kezdeti érték probléma. Lineáris differenciálegyenlet rendszerek, magasabb rendű lineáris egyenletek.)

Szili László: Modellek és algoritmusok ea+gyak jegyzet alapján

Differenciálegyenleteknek 2 típusa van:

1. Közönséges diff.egyenletek (az ismeretlen egyváltozós függvény)
    - explicit elsőrendű diff.egyenlet
    - implicit elsőrendű diff.egyenlet
    - magasabb rendű diff.egyenlet
    - diff.egyenlet rendszer
2. Parciális diff.egyenletek (az ismeretlen többváltozós függvény) (ezekkel nem foglalkoztunk)

A kezdeti érték probléma

Feladat:

Adott (Kezdeti érték probléma, vagy Cauchy feladat):

$n=1,2,\ldots$; (egyenletek száma)
$D\subset \mathbb{R}x\mathbb{R}^n$ tartomány (összefüggő, nyílt halmaz)
$f:D\to\mathbb{R}^n$ folytonos

Keresünk olyan $I\subset\mathbb{R}$ nyílt intervallumot és $\varphi: I\to\mathbb{R}^n$ differenciálható (ezután: diffható) függvényt, hogy:

1) $(t,\varphi(t))\in D\subset\mathbb{R}x\mathbb{R}^n$ $(\forall t\in I)$
2) $\varphi'(t)=f(t,\varphi(t))$ $(\forall t\in I)$

Def.: A fenti feladatot **explicit, elsőrendű közönséges diff.egyenletnek** nevezzük. Az ilyen φ függvény a diff.egyenletrendszer megoldása az I intervallumon.
Jelölések a feladatra:

$x'(t) = f(t,x(t))$
$x' = f\circ(id,x)$
$(id:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ t\to t$
f: a diff.egyenlet jobb oldala)

Def.: Kezdeti-érték probléma
Legyen $[\tau,\xi]\in D\subset\mathbb{R}x\mathbb{R}^n$. Azt mondjuk, hogy a
$\varphi: I\to\mathbb{R}^n$ függvény az $x' = f\circ(id,x)$, $x(\tau)=\xi$ **<u>kezdeti-érték probléma megoldása</u>**, ha

1) az $x' = f\circ(id,x)$, diff.egyenletet megoldja I-n
2) $\varphi(\tau) = \xi$ (φ átmegy a (τ,ξ) ponton)

(Ezután kezdeti érték probléma rövidítve: k.é.p.)

K.é.p. megoldására vonatkozó legfontosabb kérdések:

1) A megoldás létezése
2) A megoldások egyértelműsége
3) A megoldások előállítása:
    - pontos megoldás (megoldóképlet)
    - közelítő megoldás
4) A megoldások függése (pl.) a kezdeti értéktől
5) Minőségi vizsgálatok: A megoldások bizonyos tulajdonságainak (pl.: periodicitás) vizsgálata a diff.egyenlet ismerete nélkül.

1. A megoldás létezése

Tétel: Cauchy-Peano tétel

$f: D \to R^n$ ($D \subset R \times R^n$ tartomány), f folytonos $\Rightarrow \forall\ (\tau,\xi) \in D$ esetén $x' = f \circ (id,x)$, $x(\tau)=\xi$ k.é.p.-nak <u>van</u> megoldása.

Lokális tétel: $\exists I \subset R$ intervallum ($\tau \in I$), hogy a diff.egyenletnek van megoldása I-n.

2. A megoldás egyértelműsége

Def.: A k.é.p. megoldás **globálisan egyértelmű**, ha $\forall \varphi,\psi$ megoldásra:

$$\varphi(t) = \psi(t) \qquad (\forall t \in (D_\varphi \cap D_\psi) \neq 0)$$

Tétel: A k.é.p. megoldása globálisan egyértelmű $\Leftrightarrow$ $\tilde{I} \subset R$ nyílt intervallum és $\exists \tilde{\varphi}: \tilde{I} \to R^n$ függvény, úgy hogy

1) $\tilde{\varphi}$ megoldása a k.é.p.-nak
2) minden más megoldás ennek a leszűkítése

Def.: Ha a $x' = f \circ (id,x)$, $x(\tau)=\xi$ k.é.p. megoldása globálisan egyértelmű, akkor a fenti tételben szereplő $\tilde{\varphi}$ függvényt a k.é.p. **teljes megoldásának** nevezzük.

Def.: A k.é.p. egy $\varphi^*: I^* \to R^n$ megoldás **maximális megoldás**, ha nincs olyan φ^*-től különböző megoldás, amelyiknek a leszűkítése φ^* lenne.

Megjegyzés: Ha φ teljes megoldás $\Rightarrow$ φ maximális megoldás is. (fordítva <u>nem</u> igaz)

Def.: Az $x' = f \circ (id,x)$, $x(\tau)=\xi$ k.é.p. **lokálisan egyértelműen** oldható meg, ha

$\exists\ k(\tau,\xi) \subset D_f (\subset R \times R^n)$, amelyre leszűkítve a k.é.p.-t az már globálisan egyértelmű oldható meg, azaz:

$\exists\ k(\tau,\xi) \subset D_f (\subset R \times R^n)$ $x' = F \circ (id,x)$, $x(\tau)=\xi$ k.é.p. globálisan egyértelműen oldható meg, ahol $F := f|_{k(\tau,\xi)}$

Tétel: A k.é.p. megoldása lokálisan egyértelmű $\Leftrightarrow$ $\exists\tau$-t tartalmazó $I\subset\mathbb{R}^n$ nyílt intervallum, hogy $\forall\varphi,\psi$ megoldásra: $I\subset D_\varphi\cap D_\psi$

$$\varphi(t) = \psi(t) \qquad (\forall t\in I)$$

Tétel: Tegyük fel hogy $\forall(\tau,\xi)\in D_f$ esetén az $x' = f\circ(id,x)$, $x(\tau)=\xi$ k.é.p. lokálisan egyértelműen oldható meg. Ekkor $\forall(\tau,\xi)\in D_f$ kezdeti-érték esetén a k.é.p. globálisan is egyértelműen adható meg.

Def.: Lipschitz-féle feltétel (a k.é.p. létezésére és lokális egyértelműségére)

Tegyük fel, hogy az $f: D\to\mathbb{R}^n$ ($D_f\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ tartomány). Az f függvény a $(\tau,\xi)\in D$ pontban a második változójában lokális **Lipschitz-féle feltételnek** tesz eleget, ha

$\exists$ $k(\tau,\xi)\subset D_f$ és $L_{\tau,\xi}>0$: $\|f(t,u)-f(t,\bar{u})\| \le L_{\tau,\xi}\|u-\bar{u}\|$ $(\forall(t,u),\ (t,\bar{u})\in k(\tau,\xi)$, $\|.\|$ tetszőleges norma $\mathbb{R}^n$-en)

Tétel: Elégséges feltétel a lokális Lipschitz-féle feltételre
Tegyük fel, hogy:

- $f: D\to\mathbb{R}^n$ ($D_f\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ tartomány).
- D konvex (= bármely két pontot összekötő szakaszt is tartalamazza D)
- $f\in C^1$

Ekkor $\forall(\tau,\xi)\in D_f$-ben teljesül a lokális Lipschitz-féle feltétel.

Alaptétel: Picard-Lindelöf
Legyen $f: D\to\mathbb{R}^n$ ($D_f\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ tartomány) és tegyük fel, hogy

a. f folytonos
b. $\forall(\tau,\xi)\in D$ pontban

f a második változójában lokális Lipschitz-féle feltételnek tesz eleget.
Ekkor $\forall(\tau,\xi)\in D$ esetén az $x' = f\circ(id,x)$, $x(\tau)=\xi$ k.é.p. lokálisan egyértelműen oldható meg.
Következésképpen: minden k.é.p. globálisan is egyértelműen oldható meg.
Megjegyzés:

1) Bizonyítás alapja a Banach-féle fixpont-tétellel
2) Létezést is állít a tétel (nem kell a Cauchy-Peano-ra hivatkozni)

Lineáris differenciálegyenlet rendszerek

Feladat: Adott: $n\in\mathbb{N}$, $I\subset\mathbb{R}$ nyílt intervallum
A: $\mathbb{R}^{n\times n}$ matrix értékű folytonos függvény
b: $\mathbb{R}^n$ vektor értékű folytonos függvény
Keresünk olyan $J\subset I$ nyílt intervallumot és $\varphi: J\to\mathbb{R}^n$ diff.ható.

$$\varphi'(t)= A(t)\cdot\varphi(t)+b(t)\ (t\in J)$$

Lineáris diff.egyenletrendszer típusai:

- Homogén egyenlet: $x'=Ax$ $(b\equiv0)$
- Inhomogén egyenlet: $x'=Ax+b$

Röviden: $x'(t)=A(t)\cdot x(t)+b(t)$ $\Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} x'_1(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) \ldots a_{1n}(t) \\ \vdots \quad \vdots \\ a_{n1}(t) \ldots a_{nn}(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x'_1(t) = a_{11}(t) \cdot x_1(t) \ldots a_{1n}(t) \cdot x_1(t) + b_1(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) = a_{n1}(t) \cdot x_n(t) \ldots a_{nn}(t) \cdot x_n(t) + b_n(t) \end{cases}$$

K.é.p.:

$$(\tau,\xi) \in I \times \mathsf{R}^n$$
$$x'(t)=A(t)x(t)+b(t)$$
$$x(\tau)=\xi$$

Tétel: Tegyük fel, hogy a fenti feltételek teljesülnek.
Ekkor $\forall\ (\tau,\xi) \in I \times \mathsf{R}^n$ esetén az $x'=Ax+b$, $x(\tau)=\xi$ k.é.p.

a) globálisan egyértelműen oldható meg
b) a teljes megoldás értelmezési tartománya a teljes I intervallum

3. A megoldás előállítása

1. eset: homogén egyenlet: Az $x'=Ax$ homogén egyenlet megoldásai

A tételből következik, hogy minden k.é.p.-re globálisan egyértelmű a megoldása és az értelmezési tartomány (ÉT) = I.

$\mathcal{M}_h$: a teljes megoldások halmaza $\subset C(I, \mathsf{R}^n)$ (I-n értelmezett R^n–beli folytonos függvények lineáris altere)

Segédtétel: A $\{\varphi^{(i)} \mid i=1,2,\ldots,m\} \subset \mathcal{M}_h$ függvényrendszer lineárisan független $\Leftrightarrow \exists\ t_o \in I$, hogy a $\{\varphi^{(i)}(t_o) \mid i=1,2,\ldots,m\} \subset \mathsf{R}^n$ vektorok lineárisan függetlenek.

Tétel: $\mathcal{M}_h$ altér $C(I, \mathsf{R}^n)$ lineáris térben és $\dim \mathcal{M}_h = n$.

Biz.:
Altér, ugyanis $\varphi^{(1)}$, $\varphi^{(2)}$ megoldás, $(\varphi^{(i)})' = A\varphi^{(i)}$ $(i=1,2) \Rightarrow \lambda_1\varphi^{(i)}\ \lambda_2\varphi^{(i)}$ is megoldás.
$\mathcal{M}_h$ n dimenziós $(\tau \in I)$ $(i=1,2,\ldots,n)$

$$x'=Ax,\ x(\tau)=e(i)= \begin{array}{r} \\ \\ \\ i \rightarrow \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 0 \\ \ldots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}$$

az n db teljes megoldás lineárisan független és minden megoldás előállítható ezek lineáris kombinációjából.

Def.:
1) x'=Ax homogén egyenlet egy alaprendszerén az $\mathcal{M}_h$ altér egy bázisát értjük.
2) Ha $\varphi^{(1)},\ldots,\varphi^{(n)}$ a homogén egyenlet egy alaprendszere, akkor

$$\Phi := \begin{pmatrix} \varphi_1^{(1)} & \ldots & \varphi_n^{(n)} \\ \ldots & & \ldots \\ \varphi_n^{(1)} & \ldots & \varphi_n^{(n)} \end{pmatrix} : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$$

mátrix értékű függvényt az x'=Ax egyenlet **alapmátrixának** nevezzük.

Megjegyzés: A $\varphi^{(1)},\ldots,\varphi^{(i)}$ alaprendszer $\Leftrightarrow$
1) ha lineárisan függetlenek
2) minden megoldás előáll ezek lineáris kombinációjából

Állítás: Ha Φ az x'=Ax homogén egyenlet alapmátrxa, akkor $\Phi'(t)=A(t)*\Phi(t)$ matrix diff.egyenletet Φ kiegészíti.

Tétel: A homogén egyenlet általános megoldása
Tegyük fel, hogy $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)},\ldots,\varphi^{(n)}$ az x'=Ax egyenlet egy alaprendszere.
Ekkor
$\mathcal{M}_h = \{\sum c_i \varphi^{(i)} \mid c_i \in \mathbb{R},\ i=1,2,3,\ldots,n\}=$

$$=\{\Phi * c \mid c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \ldots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n\}$$

2. eset: Az x'=Ax+b inhomogén egyenlet megoldásai

Tétel: Jelölje $\mathcal{M}_{IH} = \{\psi_0+\varphi \mid \varphi \in \mathcal{M}_h\}$, azaz

inhomogén ált. meo. = hom. egy. ált. meo.-a + inhom. egy. part. meo.

ψ $\qquad\qquad$ $\Phi\cdot c$ $\qquad\qquad$ ψ_0

Biz.: ψ az inhomogén egyenlet tetszőleges megoldás:

$$(\psi-\psi_0)'=\psi'-\psi_0' = A\psi+b-(A\psi_0+b) = A(\psi-\psi_0)$$

azaz $\psi-\psi_0$ megoldása a homogén egyenletnek $\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}$: $\psi-\psi_0 = \Phi\cdot c$.

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldásának előállítása: **az állandók variálásnak módszere:**

A Lagrange-féle alapötlet: keressük ψ_0–t a köv alakban: ψ_0-t$=\Phi(t)*c(t)$ $\quad$ $(c \in \mathbb{R}^n)$

$\psi_0'(t) = \Phi'(t)c(t)+\Phi(t)c'(t)=A(t)\cdot\Phi(t)c(t)+\Phi(t)c'(t)=A(t)\ \psi_0(t)+b(t)$
$\Phi(t)c'(t) = b(t)$ $\qquad$ ($\exists\Phi^{-1}(t)$ $\forall$t-re, uis Φ alaprendszer + segédtétel)
$c'(t) = \Phi^{-1}(t)\ b(t)$

$c(t) = \int_a^t \Phi^{-1}(s)b(s)ds$ $\quad$ ($a \in I$ tetszőleges)

$\Rightarrow \psi_0(t) = \Phi(t) \int_a^t \Phi^{-1}(s)b(s)ds$ ($t \in I$) megoldása az inhomogén egyenletnek.

Tétel: **Cauchy-formula**, az inhomogén diff.egyenlet megoldóképlete
Legyen Φ az $x'=Ax+b$ inhomogén egyenlet egy alapmátrixa. Ekkor $\forall(\tau,\xi)\in I\times \mathbb{R}^n$ esetén $x'=Ax+b$, $x(\tau)=\xi$ k.é.p. globálisan egyértelműen oldható meg. A teljes megoldás:

$$\psi(t) =\Phi(t) \cdot \Phi^{-1}(\tau)\cdot\xi+\Phi(t) = \int_\tau^t \Phi^{-1}(s)b(s)ds \quad (t\in I)$$

Megjegyzés: Változó együtthatós (azaz Ax nem állandó) esetben nincs általános módszer a Φ alapmátrix előállítására.

Magasabb szintű lineáris egyenletek

Feladat: Adott $n\in \mathbb{N}$, $h\in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to\mathbb{R}^1$ folytonos (D_h tartomány)
Keresünk: olyan $I\subset\mathbb{R}$ nyílt intervallumot és $\varphi:I\to\mathbb{R}$ n-szer folytonosan deriválható függvényt, hogy:

a) $(t,\varphi(t),\varphi'(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t))\in D_h \quad (t\in I)$
b) $\varphi^{(n)}(t)=h(t,\varphi(t),\varphi'(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t)) \quad (t\in I)$

Def.: Ezt a feladatot **n-edrendű explicit diff.egyenletnek** nevezzük.
Jelölés: $y^{(n)}(t) = h(t, y(t), \dots , y^{(n-1)}(t))$

K.é.p. ezekre:

$(\tau,\xi)\in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, $(\tau,\xi)\in D_h$
$y^{(n)}(t) = h(t, y(t), \dots , y^{(n-1)}(t))$
$y(\tau)=\xi_1$, $y'(\tau)=\xi_2$, …, $y^{(n-1)}(\tau) =\xi_n$, ahol $\xi:= (\xi_1, \dots,\xi_n)$

Tétel: Átviteli elv
$y^{(n)}(t) = h(t, y(t), \dots , y^{(n-1)}(t)) \Leftrightarrow x'(t)=f(t,x(t))$, ahol $f(t, u_1, u_2, \dots, u_n)$
M – Magasabbrendű *R* – Rendszer

a) ha φ megoldása *M*-nek, akkor $\psi = \begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi'\\ \dots\\ \varphi^{(n-1)}\end{pmatrix}$ megoldása *R*-nek, és
b) ha $\psi = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \dots\\ \psi_n\end{pmatrix}$ megoldása *R*-nek $\Rightarrow$ az első komponense $\psi_1(\in \mathbb{R}\to\mathbb{R})$ megoldása *M*-nek.

Ezért igaz:

Tétel: Ha $h\in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^1$ folytonos függvény, és a 2. változójában lokális Lipschitz-féle feltételnek tesz eleget, akkor $\forall(\tau,\xi)\in D_h$ esetén

$y^{(n)}(t) = h(t, y(t), \dots , y^{(n-1)}(t))$
$y(\tau)=\xi_1$, $y'(\tau)=\xi_2$, …, $y^{(n-1)}(\tau) =\xi_n$, ahol $\xi:= (\xi_1, \dots,\xi_n)$ k.é.p.

lokálisan és globálisan is egyértelműen oldható meg és minden teljes megoldás határtól határig halad.

Általános alak:

$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\dots+a_1y'+a_0y=b$, ahol $a_{i,b}$: $I\to\mathbb{R}$ adott folytonos függvények.

Az egyenlet itt is lehet homogén ($b\equiv0$) és inhomogén.

Állandó együtthatós n-edrendű homogén, lineáris diff.egyenlet alaprendszerének előállítása

Tétel: A homogén egyenlet alaprendszerének explicit előállítása

1) Ha a $p(\lambda)$ karakterisztikus polinom gyökei valósak és különbözőek: $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$, akkor
   $\varphi_i(t) = e^{\lambda_i t}$ $(t\in \mathbb{R}, i=1,2,\dots,n)$ alaprendszere a homogén egyenletnek.
2) Ha a λ a $p(\lambda)$ karakterisztikus polinom s-szeres valós gyöke $\Rightarrow$
   $\varphi_1(t) = e^{\lambda t}$, $\varphi_2(t) = t\cdot e^{\lambda t}$, $\varphi_3(t) = t^3\cdot e^{\lambda t}$,…, $\varphi_s(t) = t^{s-1}\cdot e^{\lambda t}$
   s db lineárisan független megoldása van
3) Ha $\lambda=\alpha+i\beta\in \mathbb{C}$ $(\beta\neq 0)$ komplex gyöke a karakterisztikus polinomnak, akkor
   $\varphi_1(t) = e^{\alpha t}\cdot\cos \beta t$
   $\varphi_2(t) = e^{\alpha t}\cdot\sin \beta t$
   a homogén egyenlet két lineárisan független megoldása.
4) Többszörös komplex gyök esetén is hasonlóan kezelhető: ha λ s-szeres komplex gyök $\Rightarrow$ 2s db lineárisan független valós megoldása adható meg

Inhomogén egyenletek:

Tétel: Állandók variálása

Legyen $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ a homogén egyenlet egy alaprendszere. A $\psi_0(t)=\sum_{k=1}^{n} c_n(t)\varphi_n(t)$ függvény az inhomogén egyenlet egy megoldása, ha a $c'(t):=\begin{pmatrix} c'_1(t) \\ \dots \\ c'_n(t) \end{pmatrix}$ függvényre:

$$\Phi(t)\cdot c'(t)=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$$ teljesül, ahol

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \dots & \varphi_n(t) \\ \varphi'_1(t) \dots & \varphi'_n(t) \\ \dots & \dots \\ \varphi^{(n-1)}_1(t) \dots & \varphi^{(n-1)}_n(t) \end{pmatrix}$$ Wronski-féle mátrix

Speciális jobb oldal: $b(t)=P(t)\ e^{\alpha t}\cdot(c_1\sin \beta t+c_2\cos\beta t)$ $\rightarrow$az ilyen alakú függvényeket **kvázipolinomoknak** szokás nevezni

polinom

Megjegyzés: Kvázipolinom deriváltja is kvázipolinom.

Tétel: **Próbafüggvény módszer**

Tekintsük a következő egyenletet:

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\dots+a_1y'+a_0y= P(t)\ e^{\alpha t}\cdot(c_1\sin \beta t+c_2\cos\beta t)$$

$a_i\in \mathbb{R}$, $i=0,1,\dots n-1$, $\alpha,\beta\in \mathbb{R}$, $P(t)$:polinom

Legyen: $\mu:=\alpha+i\beta\in\mathbb{C}$

$$\tilde{k}:=\begin{cases} 0, \text{ ha } \mu \text{ nem gyöke a homogén egyenlet karakterisztikus polinomjának} \\ k, \text{ ha } \mu \text{ k-szoros gyök } (k\geq 1). \text{ Ez az ún. rezonancia eset.} \end{cases}$$

Ekkor az inhomogén egyenletnek <u>van</u> ilyen alakú megoldása:

$\psi_0(t)=\{G(t)\cdot e^{\alpha t}\sin\beta t+H(t)e^{\alpha t}\cdot\cos\beta t\}\cdot t^{\tilde{k}}$

G(t), H(t) – polinomok; grad G, grad H ≤ gradP

Tétel: Szuperpozíció elve

Tegyük fel, hogy

ψ_1 megoldása: $y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\ldots+a_1y'+a_0y=b_1$

ψ_2 megoldása: $y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\ldots+a_1y'+a_0y=b_2$

$\Rightarrow(\psi_1+\psi_2)$ megoldja a $y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\ldots+a_1y'+a_0y= b_1+ b_2$

<u>Kapcsolat az alaprendszer előállítása és a sajátérték probléma között</u>

Tétel: Ha az $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixnak van n db lineárisan független valós sajátvektora:

$s^{(1)}, s^{(2)}, \ldots, s^{(n)}\in\mathbb{R}^n$

$\lambda_1,\lambda_2, \ldots \lambda_n$ valós (nem feltétlenül különböző) sajátértékek $\Rightarrow$

$\varphi^{(k)}(t) : s^{(k)}e^{\alpha_k t}$ $(t\in R,\ k=1,2,\ldots,n)$

függvények az x'=Ax egyenlet egy alaprendszere.