2017.12.29.

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
INFORMATIKAI KAR

Kovács Sándor

Az analízis alkalmazásai

oktatási segédanyag

Budapest, 2017

2017.12.29.

Tudnivalók

Ez az iromány elsősorban programtervező informatikus hallgatóknak készül segédletként **Az analízis alkalmazásai** című tárgyhoz.

További tudnivalók:

1. **A zárthelyik időpontja:**
   - 1. zh: **X. 27.**, Mogyoródi-terem, $(18^{00} - 20^{00})$;
   - 2. zh: **XII. 15.**, Mogyoródi-terem, $(18^{00} - 20^{00})$;
   - javító zh: **XII. 22.**, Mogyoródi-terem, $(18^{00} - 20^{00})$;
   - uv. zh: **I. 5.**, Mogyoródi-terem, $(18^{00} - 20^{00})$.
2. **A gyakorlati jegy megszerzése** ($a :=$ 1. zh. eredménye, $b :=$ 2. zh. eredménye):
   - ha $1 \notin \{a, b\}$, akkor a gyak. jegy $= a$ és b átlaga alapján;
   - ha $1 \in \{a, b\} \neq \{1\}$, akkor javító zh-t ír ($c :=$ javító zh. eredménye) és

     1° eset:. $c \neq 1 \Rightarrow$ gyak. jegy $= a, b, c$ alapján;

     2° eset:. $c = 1 \Rightarrow$ gyak. jegy $= 1$ és uv. zh-t ír ($d :=$ uv. zh. eredménye);

     3° eset:. $d = 1 \Rightarrow$ gyak. jegy uv. $= 1$;

     4° eset:. $d \neq 1 \Rightarrow$ gyak. jegy uv. $= 2$;
   - ha $\{a, b\} = \{1\} \Rightarrow$ gyak. jegy $= 1$ és uv. zh-t ír, tovább ld. **3°, 4° eset**ek.

Budapest, 2017. ősz

Kovács Sándor

2017.12.29.

Tartalomjegyzék

2017.12.29.

2017.12.29.

Jelölések jegyzéke

$\forall$	minden egyes
$\exists$	van olyan
$\exists\vert$	létezik egyetlen
$:=$	definíció szerint egyenlő
$\mathbb{N}$	a természetes számok halmaza
$\mathbb{Z}$	az egész számok halmaza
$\mathbb{Q}$	a racionális számok halmaza
$\mathbb{Q}^*$	az irracionális számok halmaza
$\mathbb{R}$	a valós számok halmaza
$\mathbb{C}$	a komplex számok halmaza
$\mathbb{K}$	az $\mathbb{R}$ és $\mathbb{C}$ közül valamelyik
$\mathbb{R}^+$	a pozitív valós számok halmaza
${\mathbb{R}^+}_0$	a nemnegatív valós számok halmaza
$\mathbb{R}^-$	a negatív valós számok halmaza
${\mathbb{R}^-}_0$	a nempozitív valós számok halmaza
$\overline{\mathbb{R}}$	a kibővített valós számok halmaza ($\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$)
$\overline{\mathbb{C}}$	a kibővített komplex számok halmaza ($\mathbb{C} \cup \{\infty\}$)

Legyen $a, b \in \mathbb{R}$: $a \leq b$. Ekkor

(a, b)	$:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
$[a, b]$	$:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
$(a, b]$	$:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$
$[a, b)$	$:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
$(-\infty, +\infty)$	$:= \mathbb{R}$
$[-\infty, +\infty]$	$:= \overline{\mathbb{R}}$

Ha $a < b$, akkor *nemelfajuló intervallum*ról beszélünk.

Legyen $a \in \mathbb{R}$. Ekkor

$[a, +\infty)$	$:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$
$(a, +\infty)$	$:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$
$(-\infty, a]$	$:= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$
$(-\infty, a)$	$:= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$

$\mathcal{D}_f$	az f függvény értelmezési tartománya
$\mathcal{R}_f$	az f függvény értékkészlete
$f : A \to B$	az A halmazt a B halmazba képező függvény ($\mathcal{D}_f = A$)
$f \in A \to B$	azoknak az f függvényeknek a halmaza, amelyekre $\mathcal{D}_f \subset A$, $\mathcal{R}_f \subset B$
$f\vert_H$	az f függvénynek a H halmazra való leszűkítése
$f[H]$	a H halmaz f függvény szerinti képe
$f^{-1}[H]$	a H halmaz f függvény szerinti őse képe
$f \circ g$	az f (külső) és a g (belső) függvény összetett vagy közvetett függvénye
$\mathbb{E}_n$	$(n \times n)$-es egységmátrix
$\mathfrak{C}(A, B)$	az A halmazt a B halmazba képező, folytonos függvények halmaza
$\mathfrak{C}^r(A, B)$	az A halmazt a B halmazba képező, r-szer folytonosan differenciálható függvények halmaza ($r \in \mathbb{N}$)

Görög betűk

A	α	alfa	I	ι	ióta	P	ρ, ϱ	ró
B	β	béta	K	$\kappa, \varkappa$	kappa	Σ	σ, ς	szigma
Γ	γ	gamma	Λ	λ	lambda	T	τ	tau
Δ	δ	delta	M	μ	mű	Υ	υ	üpszilon
E	ε, ϵ	epszilon	N	ν	nű	Φ	ϕ, φ	fí
Z	ζ	(d)zéta	Ξ	ξ	kszí	X	χ	khí
H	η	éta	O	o	omikron	Ψ	ψ	pszí
Θ	θ, ϑ	théta	Π	π, ϖ	pí	Ω	ω	ómega
						$\digamma$		digamma

Gót betűk

$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{a}$	a	$\mathfrak{H}$	$\mathfrak{h}$	h	$\mathfrak{O}$	$\mathfrak{o}$	o	$\mathfrak{V}$	$\mathfrak{v}$	v (fau)
$\mathfrak{B}$	$\mathfrak{b}$	b	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{i}$	i	$\mathfrak{P}$	$\mathfrak{p}$	p	$\mathfrak{W}$	$\mathfrak{w}$	w (vé)
$\mathfrak{C}$	$\mathfrak{c}$	c	$\mathfrak{J}$	$\mathfrak{j}$	j (jot,jé)	$\mathfrak{Q}$	$\mathfrak{q}$	q	$\mathfrak{X}$	$\mathfrak{x}$	x
$\mathfrak{D}$	$\mathfrak{d}$	d	$\mathfrak{K}$	$\mathfrak{k}$	k	$\mathfrak{R}$	$\mathfrak{r}$	r	$\mathfrak{Y}$	$\mathfrak{y}$	y (üpszilon)
$\mathfrak{E}$	$\mathfrak{e}$	e	$\mathfrak{L}$	$\mathfrak{l}$	l	$\mathfrak{S}$	$\mathfrak{s}$	s (esz)	$\mathfrak{Z}$	$\mathfrak{z}$	z (cet)
$\mathfrak{F}$	$\mathfrak{f}$	f	$\mathfrak{M}$	$\mathfrak{m}$	m	$\mathfrak{T}$	$\mathfrak{t}$	t			
$\mathfrak{G}$	$\mathfrak{g}$	g	$\mathfrak{N}$	$\mathfrak{n}$	n	$\mathfrak{U}$	$\mathfrak{u}$	u			

1. fejezet

Előismeretek

1.1. Mátrixok inverze

1.1.1. definíció. Azt mondjuk, hogy az $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix **reguláris**, ha az

$$MX = E_n \qquad \text{és az} \qquad YM = E_n \tag{1.1.1}$$

mátrixegyenlet-pár megoldható. Ha nincsen az (1.1.1) mátrixegyenlet-párnak megoldása, akkor M-et **szinguláris**nak mondjuk.

Az (1.1.1)-beli mátrixegyenletek megoldásának egyértelműségére vonatkozik az

1.1.1. tétel. Ha az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és a $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix az (1.1.1)-beli mátrixegyenletek megoldása, pontosabban

$$MA = E_n \qquad \text{és} \qquad BM = E_n,$$

akkor $A = B$.

Biz. A mátrix-szorzás asszociativitását felhasználva kapjuk, hogy

$$A = E_nA = (BM)A = B(MA) = BE_n = B. \quad \blacksquare$$

Ez azt jelenti, hogy ha a (1.1.1)-beli mátrixegyenlet-párnak van megoldása, akkor az egyértelmű. Erre vonatkozik az

1.1.2. definíció. Azt mondjuk, hogy az $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix **invertálható**, ha reguláris, azaz pontosan egy olyan – M^{-1}-gyel jelölt – mátrix létezik, amelyre

$$MM^{-1} = E_n = M^{-1}M.$$

Az M^{-1} mátrixot M **inverz mátrix**ának (röv. **inverz**ének) nevezzük.

1.1.1. feladat. Tegyük fel, hogy $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ **nilpotens mátrix**, azaz valamely $k \in \mathbb{N}$ esetén $M^k = O \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Mutassuk meg, hogy ekkor $E_n - M$ invertálható és az inverzére

$$(E_n - M)^{-1} = E_n + M + \ldots + M^{k-1}$$

teljesül!

Útm.

$$\begin{aligned}(E_n - M)(E_n + M + \ldots + M^{k-1}) &= E_n + M + \ldots + M^{k-1} - M - M^2 - \ldots - M^{k-1} - M^k = \\ &= E_n - M^k = E_n - O = E_n. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

1.1.2. feladat. Legyen $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Igazoljuk, hogy ha M reguláris, akkor inverzének determinánsára

$$\det(M^{-1}) = \frac{1}{\det(M)}$$

teljesül!

Útm.

$$1 = \det(E_n) = \det(M \cdot M^{-1}) = \det(M) \cdot \det(M^{-1}). \quad \blacksquare$$

1.1.3. feladat. Mely $a \in \mathbb{R}$ estén reguláris az

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 4 & a \end{bmatrix}$$

mátrix?

Útm. $a \in \mathbb{R}\backslash\{7\}$. $\blacksquare$

1.1.1. példa.

1. Világos, hogy az E_n egységmátrix invertálható, és $E_n^{-1} = E_n$.

2. Bármely $a, b, c, d \in \mathbb{R}$: $ad - bc \neq 0$ esetén az $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ mátrix invertálható, és

$$\boxed{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}},$$

hiszen

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Az iménti (2×2)-es mátrix inverzére vonatkozó formula tetszőleges méretű (négyzetes) mátrixra általánosítható. Igaz ugyanis az

1.1.1. tétel. Az $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix pontosan akkor reguláris, ha determinánsára

$$\det(M) \neq 0$$

teljesül, és ebben az esetben M^{-1} inverzére

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} M^\sharp, \qquad \text{ahol} \qquad M^\sharp := \left[(-1)^{i+j}\det(M_{ij})\right]^T.$$

Az iménti tételben bevezetett $M^\sharp$ mátrixot szokás az M mátrix **asszociált**jának, ill. andjungáltjának nevezni. Ez utóbbi elnevezés azonban kerülendő, mert M transzponáltjának konjugáltját is így hívják.

1.1.1. következmény. Ha $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (alsó vagy felső) háromszögmátrix, úgy

$$M \text{ reguláris} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \prod_{k=1}^{n} m_{kk} \neq 0.$$

Biz. Ha $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (alsó vagy felső) háromszögmátrix, akkor $\det(M) = \prod_{k=1}^{n} m_{kk}$. ■

1.1.2. példa. Az

$$M := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

mátrix esetén

$$\det(M) = -1,$$

ill.

$$M^\sharp = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \text{így} \qquad M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1.1.4. feladat. Határozzuk meg az alábbi mátrixok inverzét (amennyiben invertálhatók)!

$$\textsf{1.} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}; \qquad \textsf{2.} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}; \qquad \textsf{3.} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Útm.

1. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$

2. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 10 & -6 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$

3. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -6 & -1 & 5 \\ 2 & 5 & -4 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$ ■

1.1.5. feladat. Tekintsük a

$$B(\alpha) := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{ch}\,(\alpha) & \mathrm{sh}\,(\alpha) \\ 0 & \mathrm{sh}\,(\alpha) & \mathrm{ch}\,(\alpha) \end{bmatrix} \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$$

mátrixot!

1. Számítsuk ki $B(\alpha)$ determinánsát!
2. Tetszőleges $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén határozzuk meg a $B(\alpha)B(\beta)$ szorzatot!
3. Milyen kapcsolat van $B(\alpha)$ és $B(-\alpha)$ között?

Útm.

1. $\det(B(\alpha)) = 1.$
2. $B(\alpha)B(\beta) = B(\alpha + \beta)$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R}).$
3. $B(\alpha)^{-1} = B(-\alpha).$ ■

Valamely M reguláris mátrix inverzének kiszámítására a gyakorlatban – nagy műveletigénye miatt – nem az 1.1.1. tételbeli képletet használjuk. M inverzét úgy is kiszámíthatjuk, hogy elemi sorátalakításokkal M-et az E_n egységmátrixszá transzformáljuk (ha ez nem lehetséges, akkor M szinguláris), és ezekkel párhuzamosan az egységmátrixon elvégezzük ugyanazokat a sorátalakításokat, amely így az M mátrix inverzébe fog transzformálódni. Mivel minden elemi sorátalakítás megfelel egy elemi mátrixszal balról való szorzásnak, ezért ha az alkalmazott átalakításokat rendre a T_1, T_2, …, T_k mátrixokkal való szorzás jelöli, akkor a

$$T_k \cdot T_{k-1} \cdot \ldots \cdot T_2 \cdot T_1 \cdot M = E_n$$

szorzatból kiindulva

$$M^{-1} = E_n T_k \cdot T_{k-1} \cdot \ldots \cdot T_2 \cdot T_1 = T_k \cdot T_{k-1} \cdot \ldots \cdot T_2 \cdot T_1 \cdot E_n,$$

vagyis M^{-1} megkapható az E_n-nen végzett elemi sorátalakításokkal.

1.1.3. példa. Az 1.1.2. példabeli M mátrix esetében

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & -3 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \to$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right] = [E_3|M^{-1}].$$

1.1.2. tétel. Ha $M, N \in \mathbb{R}^{n\times n}$ reguláris mátrix, akkor

1. M^{-1} reguláris és $(M^{-1})^{-1} = M$;
2. MN reguláris és $(MN)^{-1} = N^{-1}M^{-1}$;
3. M^T reguláris és $\left(M^T\right)^{-1} = (M^{-1})^T$.

Biz.

1. $MM^{-1} = M^{-1}M = E_n$.
2. A mátrixok szorzásának asszociatív tulajdonságát felhasználva kapjuk, hogy
$$N^{-1}M^{-1}(MN) = N^{-1}(M^{-1}M)N = N^{-1}E_nN = N^{-1}N = E_n.$$
3. Az
$$MM^{-1} = M^{-1}M = E_n$$
egyenlőséget transzponálva
$$(MM^{-1})^T = (M^{-1}M)^T = E_n^T = E_n$$
adódik, ahonnan
$$\left(M^{-1}\right)^T M^T = M^T \left(M^{-1}\right)^T = E_n. \quad \blacksquare$$

Ha tehát alkalmas $k \in \mathbb{N}$ esetén az $M_1, \ldots, M_k \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixok regulárisak, akkor

$$(M_1 \cdot M_2 \ldots \cdot M_{k-1}M_k)^{-1} = M_k^{-1} \cdot M_{k-1}^{-1} \cdot \ldots \cdot M_2^{-1}M_1^{-1}.$$

1.1.3. tétel. Ha

$$m_{11} \cdot \ldots \cdot m_{nn} \neq 0,$$

akkor az

$$M := \operatorname{diag}\{m_{11}, \ldots, \cdot m_{nn}\}$$

mátrix reguláris, és inverzére

$$M^{-1} = \operatorname{diag}\left\{\frac{1}{m_{11}}, \ldots, \frac{1}{m_{nn}}\right\}$$

teljesül.

Biz.

$$\begin{bmatrix} m_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & m_{22} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \ldots & m_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{m_{11}} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_{22}} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{m_{nn}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} = E_n. \quad \blacksquare$$

1.1.3. definíció. Azt mondjuk, hogy az $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix **ortogonális**, ha $M^T M = E_n$, azaz $M^T = M^{-1}$ teljesül.

1.1.4. tétel. Ha $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonális mátrix, akkor determinánsára

$$|\det(M)| = 1$$

teljesül.

Biz. Ha M ortogonális, akkor a determinánsokra vonatkozó szabályok következtében

$$\det(M)\det(M^T) = \det(MM^T) = \det(E_n) = 1, \qquad \text{ill.} \qquad \det(M) = \det(M^T),$$

így

$$(\det(M))^2 = 1. \quad \blacksquare$$

1.1.6. feladat. Igazoljuk, hogy ha az $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mátrix ortogonális és $\det(M) = 1$, akkor alkalmas $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén

$$M = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

teljesül!

Útm. Az $M^T M = E_2$ egyenlőségből, és abból, hogy $\det(M) = 1$, az

$$m_{11}^2 + m_{21}^2 = 1, \quad m_{12}^2 + m_{22}^2 = 1, \quad m_{11}m_{12} + m_{21}m_{22} = 0, \quad m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21} = 1$$

összefüggések adódnak. Az első két összefüggés alapján alkalmas $\alpha, \beta \in (-\pi, \pi]$ esetén

$$m_{11} = \cos(\alpha), \quad m_{21} = \sin(\alpha), \quad m_{12} = \sin(\beta), \quad m_{22} = \cos(\beta).$$

A harmadik és a negyedik összefüggésből azt kapjuk, hogy

$$\sin(\alpha + \beta) = 0 \qquad \text{és} \qquad \cos(\alpha + \beta) = 1.$$

Mivel $\alpha = \beta = \pi$ nem lehetséges, ezért $\alpha + \beta \in (-\pi, \pi)$, és ebben az intervallumban $\alpha = -\beta$ az egyetlen megoldás. ■

1.2. Mátrixok sajátértéke és sajátvektora

Mátrixok jellemzésének egyik igen hatékony eszköze olyan vektoroknak a meghatározása, amelyekre a mátrrixot ráuszítva önmagukkal párhuzamos vektorokat kapunk. Mivel „bármely" M mátrix, ill. bármely $\lambda \in \mathbb{C}$ szám esetén

$$M\mathbf{0} = \mathbf{0} = \lambda\mathbf{0},$$

ezért $\mathbf{0}$-t kizárjuk a vizsgálódásainkból.

Adott

$$M = [m_{ij}]_{i,j=1}^{n} \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

mátrix esetén az alábbi feladatot tűzzük ki:
HATÁROZZUNK MEG OLYAN $\lambda \in \mathbb{C}$ SZÁMOT ÉS $\mathbf{0} \neq \mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$ VEKTORT, AMELYRE

$$M\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}, \qquad \text{ill.} \qquad \mathbf{u}^T M = \lambda\mathbf{u}^T, \tag{1.2.1}$$

TELJESÜL!

1.2.1. definíció. A fenti feladatot **sajátérték-feladat**nak vagy **saját(érték)-egyenlet**nek nevezzük és az

$$M\mathbf{x} = z\mathbf{x} \tag{1.2.2}$$

szimbólummal jelöljük.

Ezzel kapcsolatos az

1.2.2. definíció. Azt mondjuk, hogy az

$$M = [m_{ij}]_{i,j=1}^{n} \in \mathbb{C}^{n\times n}$$

mátrixnak a $\lambda \in \mathbb{C}$ szám **sajátérték**e, ha van olyan $\mathbf{0} \neq \mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$ vektor, hogy

$$M\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}, \qquad \text{ill.} \qquad \mathbf{u}^T M = \lambda\mathbf{u}^T \tag{1.2.3}$$

és az $\mathbf{u}$ vektort az M mátrix λ sajátértékéhez tartozó **jobb oldali**, ill. **bal oldali sajátvektor**ának nevezzük. Az M sajátértékeinek halmazát az M **spektrum**ának nevezzük és $\sigma(M)$-mel jelöljük.

A 1.2.2. definícióban a *jobb oldali* jelző arra vonatkozik, hogy a mátrix-vektor-szorzatban a vektor a mátrixtól jobbra található. A gyakorlati alkalmazások során szükség van a bal oldali sajátvektor meghatározására is. Látható, hogy $\mathbf{u}$ pontosan akkor bal oldali sajátvektora M-nek, ha jobb oldali sajátvektora M transzponáltjának:

$$\mathbf{u}^T M = \lambda\mathbf{u}^T \qquad \iff \qquad (\mathbf{u}^T M)^T = (\lambda\mathbf{u}^T)^T \qquad \iff \qquad M^T\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}.$$

Ezért a továbbiakban sajátvektoron mindig jobb oldali sajátvektort értünk. A (1.2.2) sajátértékfeladat tehát akkor tekinthető megoldottnak, ha meghatároztuk az M mátrix sajátértékeit, valamint a hozzájuk tartozó sajátvektorokat.

1.2.1. példa.

1. Az
$$M := \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$
mátrixnak az 1 szám sajátértéke, és az $\mathbf{u} := (2{,}1)$ vektor az 1 sajátértékhez tartozó jobb oldali sajátvektor, hiszen $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ és
$$M\mathbf{u} = \mathbf{u}.$$

2. Az
$$M := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$
mátrixnak a 2 szám sajátértéke, és az $\mathbf{u} := (1, 2, -1)$ vektor a 2 sajátértékhez tartozó bal oldali sajátvektor, hiszen
$$\mathbf{u} \neq \mathbf{0} \qquad \text{és} \qquad \mathbf{u}^T M = 2\mathbf{u}^T.$$

1.2.2. példa. Ha $\alpha \in \mathbb{R}$, akkor az αE_n mátrixnak az α szám sajátértéke és minden $\mathbf{0} \neq \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ vektor sajátvektora, hiszen

$$(\alpha E_n)\mathbf{u} = \alpha(E_n\mathbf{u}) = \alpha\mathbf{u}.$$

1.2.3. példa. Az

$$M := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

annak a tenzornak a mátrixa, amely $\mathbb{R}^3$ vektorait az (xz)-síkra tükrözi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ -b \\ c \end{bmatrix} \qquad ((a, b, c) \in \mathbb{R}^3).$$

Az 1, ill. a -1 szám sajátértéke M-nek, és az (xz)-sík zérustól különböző vektorai az M mátrix 1 sajátértékeihez tartozó sajátvektorai, továbbá az (xz)-síkra merőleges, $\mathbf{0}$-tól különböző vektorok az M mátrix -1 sajátértékeihez tartozó sajátvektorai.

A (1.2.2) sajátértékfeladat egyenértékű valamely homogén lineáris egyenletrendszer triviálistól (azaz $\mathbf{0}$-tól) különböző megoldásának megkeresésével, hiszen

$$M\mathbf{x} = z\mathbf{x} \qquad \Longleftrightarrow \qquad z\mathbf{x} - M\mathbf{x} = \mathbf{0} \qquad \Longleftrightarrow \qquad (zE_n - M)\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Tudjuk (vö.), hogy valamely $\lambda \in \mathbb{C}$ esetén ennek a

$$(\lambda E_n - M)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

egyenletrendszernek pontosan akkor van a triviálistól különböző megoldása, ha

$$\mathrm{rang}\,(\lambda E_n - M) = \mathrm{rang}\,(M - \lambda E_n) < n,$$

azaz a

$$p_M(z) := \det(zE_n - M) = (-1)^n \cdot \det(M - zE_n) \qquad (z \in \mathbb{C}) \tag{1.2.4}$$

függvényre $p_M(\lambda) = 0$ teljesül:

$$\lambda \in \sigma(M) \qquad \Longleftrightarrow \qquad p_M(\lambda) = 0.$$

1.2.4. példa. A 1.2.1. példa esetén

1. a p_M függény a következő:

$$p_M(z) := (-1)^2 \cdot \det \begin{bmatrix} 2-z & -2 \\ 2 & -3-z \end{bmatrix} = (2-z)(-3-z)+4 = z^2+z-2 \qquad (z \in \mathbb{C}),$$

így az 1, ill. -2 számra

$$p_M(1) = 0, \qquad \text{ill.} \qquad p_M(-2) = 0.$$

2. a p_M függény a következő:

$$\begin{aligned} p_M(z) \quad &:= \quad (-1)^3 \cdot \det \begin{bmatrix} -z & 1 & 0 \\ 1 & 1-z & -1 \\ 0 & -1 & -z \end{bmatrix} = \\ &= \quad z \cdot \{(1-z)\cdot(-z) - 1\} + 1 \cdot \{-z-0\} + 0 = \\ &= \quad z \cdot \left\{z^2 - z - 2\right\} = z(z+1)(z-2) \qquad (z \in \mathbb{C}), \end{aligned}$$

így a 0, -1, ill. a 2 számra

$$p_M(0) = 0, \qquad p_M(-1) = 0, \qquad \text{ill.} \qquad p_M(2) = 0.$$

1.2.5. példa. A 1.2.2. példa esetén pedig a p_M függény a következő:

$$p_M(z) := \det(zE_n - \alpha E_n) = \det((z-\alpha)E_n) = (z-\alpha)^n \det(E_n) = (z-\alpha)^n \qquad (z \in \mathbb{C}),$$

így az α számra

$$p_M(\alpha) = 0.$$

1.2.6. példa. Ha

$$M := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

akkor a p_M függény a következő:

$$\begin{aligned} p_M(z) &:= (z-1)\cdot\{(1-z)\cdot(-z)-1\} - 1\cdot\{1\cdot(-z)+2\} - 1\cdot\{-1-2(1-z)\} = \\ &= (z-1)\left\{z^2-z-1\right\} + 1 - z = (z-1)\left\{z^2-z-2\right\} = \\ &= (z-1)(z+1)(z-2) \qquad (z\in\mathbb{C}), \end{aligned}$$

így a -1, 1, ill. a 2 számra

$$p_M(-1)=0, \qquad p_M(1)=0, \qquad \text{ill.} \qquad p_M(2)=0.$$

1.2.1. feladat. Határozzuk meg a p_M függvényt az

$$M := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix esetében!

Útm.

$$\begin{aligned} p_M(z) &:= (-1)^4\cdot\det\begin{bmatrix} 2-z & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -z & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1-z & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 1-z \end{bmatrix} = \\ &= (2-z)\cdot\det\begin{bmatrix} -z & -1 & 1 \\ 2 & 1-z & 0 \\ 2 & 2 & 1-z \end{bmatrix} - \det\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1-z & 0 \\ -1 & 2 & 1-z \end{bmatrix} = \\ &= (2-z)\left\{-z(1-z)^2+2(1-z)+2+2z\right\} - \{1-z+2+1-z\} = \\ &= (2-z)\left\{-z(1-z)^2+4\right\} - (4-2z) = \\ &= (2-z)\left\{-z+2z^2-z^3+4-2\right\} = (2-z)\left\{z^2(2-z)+2-z\right\} = \\ &= (2-z)^2(z^2+1) = (2-z)^2(z+\imath)(z-\imath) \quad (z\in\mathbb{C}). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

1.2.1. gyakorló feladat. Határozzuk meg a p_M függvényt az alábbi M mátrixok esetében!

1. $M := \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, 2. $M := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, 3. $M := \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Útm.

1.2.3. definíció. A (1.2.4)-beli p_M függvényt, azaz a

$$p_M(z) := (-1)^n \cdot \det \begin{bmatrix} m_{11}-z & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22}-z & \dots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nn}-z \end{bmatrix} \qquad (z \in \mathbb{C}) \tag{1.2.5}$$

polinomot az M mátrix **karakterisztikus polinom**jának nevezzük. A p_M karakterisztikus polinom λ gyökének multiplicitását a λ sajátérték **algebrai mulitiplicitás**ának nevezzük, és erre az $a(\lambda)$ jelölést használjuk. Ha valamely $\lambda \in \mathbb{C}$ szám nem gyöke a p_M karakterisztikus polinomnak, akkor legyen $a(\lambda) := 0$.

A (1.2.5)-beli determináns első oszlop szerinti kifejtését végiggondva látható, hogy a p_M polinom főegyütthatója 1, z^{n-1} tag együtthatója pedig

$$-(m_{11} + \ldots + m_{nn}) = -\mathrm{Sp}\,(M).$$

A

$$p_M(0) = (-1)^n \det(M)$$

egyenlőségből pedig az adódik, hogy p_M konstans tagja $(-1)^n \det(M)$. Összefoglalva:

$$p_M(z) = z^n - \mathrm{Sp}\,(M) z^{n-1} + \ldots + (-1)^n \det(M) \qquad (z \in \mathbb{C}). \tag{1.2.6}$$

(1.2.5)-ből az is látható, hogy ha M (alsó vagy felső) háromszögmátrix, akkor sajátértékei a főátlóban lévő elemek, hiszen – mint tudjuk – az ilyen mátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.

Természetesen a karakterisztikus polinom többi együtthatójának kiszámítására is van formula. Ha ui. tetszőleges $p \in \mathbb{N}$ esetén $\mathcal{S}_p$-vel jelöljük az $\{1, \ldots, p\}$ halmaz **permutáció**inak halmazát, azaz

$$\mathcal{S}_p := \{\pi : \{1, \ldots, p\} \to \{1, \ldots, p\} \mid \pi \text{ bijektív}\},$$

akkor az M determinánsa

$$\det(M) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \mathrm{sgn}\,(\sigma) \prod_{k=1}^{n} M_{k\sigma(k)}$$

Leibniz-féle alakjának felhasználásával belátható a

1.2.1. tétel. Ha $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ és

$$C_r^{(n)} := \sum_{\mathbf{i}\in N^r} \det\left(M_{\mathbf{i}}\right),$$

ahol $N := \{1, \ldots, n\}$,

$$M_{\mathbf{i}} := \begin{bmatrix} m_{i_1 i_1} & \ldots & m_{i_1 i_r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{i_r i_1} & \ldots & m_{i_r i_r} \end{bmatrix} \qquad (\mathbf{i} := (i_1, \ldots, i_r) \in N^r : \quad 1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq n)$$

azaz az $M_{\mathbf{i}}$ mátrix úgy keletkezik az M mátrixból, hogy M-ből elhagyjuk $(n-r)$ darab sorát és ugyanolyan indexű $(n-r)$ darab oszlopát $(r \in \{1, \ldots, n\})$, akkor

$$p_M(z) = z^n + \sum_{r=1}^{n} (-1)^r C_r^{(n)} z^{n-r} \qquad (z \in \mathbb{C}), \tag{1.2.7}$$

Speciálisan $r = 1$, ill. $r = n$ esetén

$$C_1^{(n)} = \sum_{\mathbf{i}\in N} \det\left(M_{\mathbf{i}}\right) = \mathrm{Sp}\left(M\right), \qquad \text{ill.} \qquad C_n^{(n)} = \sum_{\mathbf{i}\in N^n} \det\left(M_{\mathbf{i}}\right) = \det(M).$$

A (1.2.6), ill. (1.2.7) formulák felhasználásával $n = 2$, ill. $n = 3$ esetén könnyen megjegyezhető képlet kapható a p_M karakterisztikus polinom alakjára:

1.2.2. tétel. Ha $M \in \mathbb{C}^{2\times 2}$, ill. $M \in \mathbb{C}^{3\times 3}$, akkor

$$\boxed{p_M(z) = z^2 - \mathrm{Sp}\left(M\right)z + \det(M) \qquad (z \in \mathbb{C}),}$$

ill. tetszőleges $z \in \mathbb{C}$ esetén

$$\boxed{p_M(z) = z^3 - \mathrm{Sp}\left(M\right)z^2 + \left\{\det(M_{(12)}) + \det(M_{(13)}) + \det(M_{(23)})\right\} z - \det(M).}$$

$n = 3$ esetén M determinánsát úgy érdemes kiszámolni, hogy egy (determinánstartó) eleminációs lépés után egy (2×2)-szeres mátrix determinánsát kelljen csak kiszámolni, továbbá a

$$\det(M_{(12)}) + \det(M_{(13)}) + \det(M_{(23)}) =$$

$$= \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m_{11} & m_{13} \\ m_{31} & m_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m_{22} & m_{23} \\ m_{32} & m_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \mathrm{Sp}\left(M^{\sharp}\right)$$

összeg kiszámítása a legegyszerűbben úgy történik, hogy M főátlójábann minden elemet összeszorzunk minden elemmel (egyszer) és ebből kivonjuk a főátlón kívüli egymással tükrös elemek szorzatának összegét. $n = 3$ esetén a karakterisztikus polinom lineáris tagjának együtthatója előállítható az

$$C_2^{(3)} = \frac{1}{2}\left((\mathrm{Sp}\,(M))^2 - \mathrm{Sp}\,(M^2)\right)$$

alakban is.

1.2.7. példa. A szilárdságtanban gyakran előforduló

$$S := \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

mátrix (**feszültségtenzor mátrixa**) esetében például a

$$p_S(z) := z^3 + c_2 z^2 + c_1 z + c_0 \qquad (z \in \mathbb{C})$$

karakterisztikus polinom együtthatóira

$$\begin{aligned} c_2 &= -(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z), \\ c_1 &= \sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{xz}^2, \\ c_0 &= -\det(S) \end{aligned}$$

teljesül.

1.2.8. példa. Az

$$M := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

(ún.) **telefonmátrix** esetében

$$p_M(z) = z^3 - 12z^2 - 18z = z\left(z - 6 + 3\sqrt{6}\right)\left(z - 6 - 3\sqrt{6}\right) \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

1.2.9. példa. Az

$$M := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \\ 3 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

mátrix esetében

$$p_M(z) = z^3 - 12z^2 - 27z = z\left(z - 6 + 3\sqrt{7}\right)\left(z - 6 - 3\sqrt{7}\right) \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

Nagyobb n-ekre a (1.2.7) formulával való számolás helyett a – későbbi tanulmányainkban egyszerűen belátható – alább megfogalmazott rekurzív módszerrel való számolás ajánlott.

1.2.3. tétel. A

$$p_M(z) := z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \ldots + a_1 z + a_0 \qquad (z \in \mathbb{C})$$

karakterisztikus polinom együtthatóira:

$$\begin{aligned} N_1 &:= E_n, & a_{n-1} &:= -\frac{1}{1} \cdot \mathrm{Sp}\,(MN_1), \\ N_2 &:= MN_1 + a_{n-1}E_n, & a_{n-2} &:= -\frac{1}{2} \cdot \mathrm{Sp}\,(MN_2), \\ &\vdots \\ N_n &:= MN_{n-1} + a_1E_n, & a_0 &:= -\frac{1}{n} \cdot \mathrm{Sp}\,(MN_n), \\ O &= MN_n + a_0E_n. \end{aligned}$$

1.2.2. feladat. Határozzuk meg az

$$M := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix karakterisztikus polnomját!

Útm. $a_3 = -\mathrm{Sp}\,(M) = -4$,

$$a_2 = -\frac{1}{2}\mathrm{Sp}\left(M \cdot \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}\right) = -\frac{1}{2}\mathrm{Sp}\begin{bmatrix} -2 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = 3,$$

$$a_1 = -\frac{1}{3}\mathrm{Sp}\left(M \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}\right) = -\frac{1}{3}\mathrm{Sp}\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = 2,$$

$$a_0 = -\frac{1}{4}\mathrm{Sp}\left(M \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = -\frac{1}{4}\mathrm{Sp}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -1,$$

így

$$p_M(z) = z^4 - 4z^3 + 3z^2 + 2z - 1 \qquad (z \in \mathbb{C}). \quad \blacksquare$$

Mivel a legtöbb tantermi feladat esetében a mátrixok egész eleműek, ezért a karakterisztikus polinomjuk egész együtthatós polinom lesz. Az ilyen polinomok esetében az egész gyökök – ha egyáltalán ilyenek vannak – ügyes átalakításokkal[1] vagy a Rolle-féle gyöktétel, ill. a Horner-módszer segítségével számíthatók ki a leggyorsabban.

1.2.1. tétel. Ha $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ és $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ az M (nem feltétlenül különböző) sajátértékei, akkor

$$\mathrm{Sp}\,(M) = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n, \qquad \text{ill.} \qquad \det(M) = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n,$$

azaz M nyoma éppen M sajátértékeinek összege, M determinánsa éppen M sajátértékeinek szorzata.

Biz. Ha $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ az M (nem feltétlenül különböző) sajátértékei, akkor az M karakterisztikus polinomjára

$$p_M(z) = (z - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (z - \lambda_n) \qquad (z \in \mathbb{C})$$

teljesül. Beszorzással látható, hogy bármely $z \in \mathbb{C}$ esetén

$$p_M(z) = z^n - (\lambda_1 + \ldots + \lambda_n) \cdot z^{n-1} + \ldots + (-1)^n \cdot \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n,$$

ezért a **??**. tétel, ill. (1.2.6) felhasználásával az igazolandó állítást kapjuk. ■

Korábbi tanulmányainkból tudjuk, hogy ha

$$M \in \mathbb{C}^{n\times n} \qquad \text{és} \qquad \mathrm{rang}\,(\lambda E_n - M) = \mathrm{rang}\,(M - \lambda E_n) < n,$$

akkor végtelen sok olyan $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$ vektor van, amelyre

$$(\lambda E_n - M)\mathbf{u} = \mathbf{0}, \qquad \text{ill.} \qquad (M - \lambda E_n)\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

[1] A karakterisztikus polinomot adó determináns kifejtése során nem szorzunk be mindent mindennel, hanem megpróbálunk $(z - \alpha)$ alakú szorzó(ka)t kiemelni (vö. 1.2.1. feladat).

teljesül. Ezen vektorok közül azokat nem tekintjük különbözőnek, amelyek egymás (nem-zérus) skalárszorosai, geometriai megfogalmazással ezek azok a vektorok, amelyek egy egyenesbe esnek. Világos ui., hogy ha $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, ill. $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$ a $\lambda \in \sigma(M)$ sajátértékhez tartozó sajátvektor, akkor tetszőleges $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$, ill. $0 \neq \alpha \in \mathbb{C}$ esetén $\alpha\mathbf{u}$ is a λ sajátértékhez tartozó sajátvektor, hiszen

$$M(\alpha\mathbf{u}) = \alpha(M\mathbf{u}) = \alpha(\lambda\mathbf{u}) = \lambda(\alpha\mathbf{u}).$$

Ezért minden esetben **lineárisan független sajátvektorok**at keresünk.

1.2.3. feladat. Határozzuk meg a következő mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait!

$$A := \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B := \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad C := \begin{bmatrix} 14 & -2 \\ -2 & 11 \end{bmatrix}, \qquad D := \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Útm. Az A mátrix sajátértékei a

$$p_A(z) := z^2 - 6z + 5 \qquad (z \in \mathbb{C})$$

polinom gyökei: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$.

– A $\lambda_1 = 1$ sajátértékhez tartozó sajátvektor a $\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$ egyenletrendszer megoldása:

$$\mathbf{s}_1 = \begin{bmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{bmatrix} \qquad (0 \neq \alpha \in \mathbb{R}),$$

– a $\lambda_2 = 5$ sajátértékhez tartozó sajátvektor a $\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{array}\right]$ egyenletrendszer megoldása:

$$\mathbf{s}_2 = \begin{bmatrix} 3\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} \qquad (0 \neq \alpha \in \mathbb{R}).$$

A B mátrix sajátértékei a

$$p_B(z) := z^2 - 4z + 6 \qquad (z \in \mathbb{C})$$

polinom gyökei: $\lambda_1 = 2 + \sqrt{2}\imath$, $\lambda_2 = 2 - \sqrt{2}\imath$.

– A $\lambda_1 = 2 + \sqrt{2}\imath$ sajátértékhez tartozó sajátvektor a $\left[\begin{array}{cc|c} -2-\sqrt{2}\imath & -3 & 0 \\ 2 & 2-\sqrt{2}\imath & 0 \end{array}\right]$ egyenletrendszer megoldása:

$$\mathbf{s}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} (\imath - \sqrt{2})\alpha \\ \sqrt{2}\alpha \end{bmatrix} \qquad (0 \neq \alpha \in \mathbb{C}),$$

– a $\lambda_2 = 2 - \sqrt{2}\imath$ sajátértékhez tartozó sajátvektor a $\left[\begin{array}{cc|c} -2+\sqrt{2} & -3 & 0 \\ 2 & 2+\sqrt{2}\imath & 0 \end{array}\right]$ egyenletrendszer megoldása:

$$\mathbf{s}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} (-\sqrt{2} - \imath)\alpha \\ \sqrt{2}\alpha \end{bmatrix} \qquad (0 \neq \alpha \in \mathbb{C}).$$

A C mátrix sajátértékei a

$$p_C(z) := z^2 - 25z + 150 \qquad (z \in \mathbb{C})$$

polinom gyökei: $\lambda_1 = 15$, $\lambda_2 = 10$.

– A $\lambda_1 = 15$ sajátértékhez tartozó normált sajátvektor a $\left[\begin{array}{cc|c} -1 & -2 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \end{array}\right]$ egyenletrendszer megoldása:

$$\mathbf{s}_1 = \begin{bmatrix} 2\alpha \\ -\alpha \end{bmatrix} \qquad (0 \neq \alpha \in \mathbb{R}),$$

– a $\lambda_2 = 10$ sajátértékhez tartozó normált sajátvektor a $\left[\begin{array}{cc|c} 4 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{array}\right]$ egyenletrendszer megoldása:

$$\mathbf{s}_2 = \begin{bmatrix} \alpha \\ 2\alpha \end{bmatrix} \qquad (0 \neq \alpha \in \mathbb{R}).$$

A D mátrix sajátértékei a

$$p_D(z) := (1-z)(2-z)(3-z) \qquad (z \in \mathbb{C})$$

polinom gyökei: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$.

– A $\lambda_1 = 1$ sajátértékhez tartozó sajátvektor a $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right]$ egyenletrendszer megoldása:

$$\mathbf{s}_1 = \begin{bmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (0 \neq \alpha \in \mathbb{R}),$$

– a $\lambda_2 = 2$ sajátértékhez tartozó sajátvektor a $\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right]$ egyenletrendszer megoldása:

$$\mathbf{s}_2 = \begin{bmatrix} 2\alpha \\ -1\alpha \\ -2\alpha \end{bmatrix} \qquad (0 \neq \alpha \in \mathbb{R}),$$

– a $\lambda_3 = 3$ sajátértékhez tartozó sajátvektor a $\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right]$ egyenletrendszer megoldása:

$$\mathbf{s}_3 = \begin{bmatrix} -\alpha \\ \alpha \\ 2\alpha \end{bmatrix} \qquad (0 \neq \alpha \in \mathbb{R}). \qquad \blacksquare$$

1.2.2. tétel. Ha M négyzetes, reguláris mátrix, akkor M és M^{-1} sajátvektorai azonosak, sajátértékeik pedig egymás reciprokai.

Biz. Ha a $\lambda \in \mathbb{C}$ szám az M mátrixnak sajátéertéke: $\lambda \in \sigma(M)$, $\mathbf{u}$ pedig a hozzá tartozó sajátvektor, akkor $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ és $M\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$. Innen

$$M^{-1}(M\mathbf{u}) = M^{-1}(\lambda\mathbf{u}) \ ,$$

és ebből

$$\mathbf{u} = \lambda(M^{-1}\mathbf{u})$$

következik. $\lambda \neq 0$, hiszen ellenkező esetben $\det(M) = 0$ lenne (vö. 1.2.1-tétel), ezért oszthatunk vele:

$$M^{-1}\mathbf{u} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{u}.$$

Eszerint $\mathbf{u}$ sajátvektora M^{-1}-nek is, az $\frac{1}{\lambda}$ sajátértékkel. ■

1.2.3. tétel. Ha $n \in \mathbb{N}$, $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$, és valamely $k \in \{1, \ldots, n\}$ esetén $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ az M mátrix páronként különböző sajátértékei, akkor a hozzájuk tartozó $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ sajátvektorok függetlenek.

Biz. Ha $k = 1$, akkor $\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{0}$ miatt az állítás teljesül. Ha valamely $2 \leq k \in \{1, \ldots, n-1\}$ esetén az $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{k-1}$ vektorok lineárisan függetlenek és

$$(*) \qquad \sum_{l=1}^{k} \alpha_l \mathbf{u}_l = 0,$$

akkor

$$0 = (\lambda_k E_n - M)\sum_{l=1}^{k} \alpha_l \mathbf{u}_l = \sum_{l=1}^{k} \alpha_l(\lambda_k - \lambda_l)\mathbf{u}_l = \sum_{l=1}^{k-1} \alpha_l(\lambda_k - \lambda_l)\mathbf{u}_l.$$

Így az indukciós feltevésből

$$\alpha_l(\lambda_k - \lambda_l) = 0 \qquad (l \in \{1, \ldots, k-1\}),$$

azaz tetszőleges $l \in \{1, \ldots, k-1\}$ esetén $\alpha_l = 0$ következik. Tehát $(*)$ az $\alpha_k\mathbf{u}_k = 0$ egyenlőségre redukálódik. Mivel $\mathbf{u}_k$ sajátvektor, ezért $\mathbf{u}_k \neq 0$, így $\alpha_k = 0$, azaz az $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ vektorok függetlenek. ■

1.2.4. definíció. Adott Ha $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix és $\lambda \in \sigma(M)$ sajátérték esetén az

$$\mathcal{A}_\lambda := \ker(\lambda E_n - M) = \mathcal{N}(\lambda E_n - M) \subset \mathbb{C}^n$$

alteret pedig λ sajátértékéhez tartozó **sajátaltérnek**, az $\mathcal{A}_\lambda$ altér dimenzióját a λ sajátérték **(geometriai) multiplicitás**ának nevezzük.

Az $\mathcal{A}_\lambda$ sajátaltér tehát tartalmazza az M mátrix összes, a λ sajátértékéhez tartozó sajátvektorát és a $\mathbf{0}$-t. Látható, hogy valamely $\lambda \in \mathbb{C}$ szám pontosan akkor sajátértéke M-nek, ha a $\mathcal{A}_\lambda \neq \{\mathbf{0}\}$.
A **kvantummechanikában** nagy jelentősége van az alábbi feladatban megfogalmazott állításnak.

1.2.4. feladat. Igazoljuk, hogy ha az $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrixok felcserélhetők, azaz $AB = BA$, és a $\lambda \in \sigma(A)$ sajátérték geometriai multiplicitása 1, azaz az $\mathcal{A}_\lambda$ sajátaltér egydimenziós (erre szokás azt mondani, hogy a λ sajátérték **nem-elfajuló**), akkor A-nak és B-nek van közös sajátvektora!

Útm. Ha $\lambda \in \sigma(A)$ és valamely $0 \neq \mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$ vektorra $A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$, továbbá $\dim(\mathcal{A}_\lambda) = 1$, akkor $AB = BA$ következtében

$$A(B\mathbf{u}) = (AB)\mathbf{u} = (BA)\mathbf{u} = B(A\mathbf{u}) = B(\lambda\mathbf{u}) = \lambda(B\mathbf{u}),$$

azaz $B\mathbf{u}$ sajátvektora A-nak, ugynazzal a λ sajátértékkel. Ez azt jelenti, hogy valamely $0 \neq \mu \in \mathbb{C}$ esetén $B\mathbf{u} = \mu\mathbf{u}$, azaz $\mathbf{u}$ sajátvektora B-nek is. ■

1.2.5. definíció. $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ **hasonló mátrixok** – jelben: $A \sim B$ –, ha van olyan reguláris $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix, hogy $B = T^{-1}AT$.

1.2.5. feladat. Igazoljuk, hogy bármely $A, B, C \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix esetén igazak az alábbi állítások!

1. $A \sim A$;
2. $A \sim B \quad \Longrightarrow \quad B \sim A$;
3. $(A \sim B, B \sim C) \quad \Longrightarrow \quad A \sim C$.

Útm.

1. Ha $T := E_n$, akkor $T^{-1}AT = A$.
2. Ha $A \sim B$, akkor alkalmas $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$ reguláris mátrix esetén $B = T^{-1}AT$, azaz

$$(T^{-1})^{-1}BT^{-1} = TBT^{-1} = A,$$

   ahonnan $B \sim A$ következik.
3. Ha $A \sim B$ és $B \sim C$, akkor alkalmas $T, S \in \mathbb{C}^{n\times n}$ reguláris mátrixok esetén

$$B = T^{-1}AT, \qquad C = S^{-1}BS,$$

   azaz

$$(TS)^{-1}A(TS) = S^{-1}(T^{-1}AT)S = S^{-1}BS = C,$$

   ahonnan $A \sim C$ következik. ■

1.2.4. tétel. Hasonló mátrixok karakterisztikus polinomjai, sajátértékei, nyomai, determinánsai megegyeznek.

Biz. Ha $A \sim B$, akkor alkalmas $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$ reguláris mátrixszal $B = T^{-1}AT$. Így

$$\begin{aligned}\det(B - zE_n) &= \det\left(T^{-1}AT - zE_n\right) = \det\left(T^{-1}AT - zT^{-1}T\right) = \\ &= \det\left(T^{-1}\left(A - zE_n\right)T\right) = \det(T^{-1})\det(A - zE_n)\det(T) = \\ &= \det(A - zE_n),\end{aligned}$$

és minden mátrix nyoma, ill. determinánsa sajátértékeinek összege, ill. szorzata. ∎

1.2.6. feladat. Igazoljuk, hogy $n = 2$, ill. $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ esetén M az alábbi három mátrix valamelyikéhez hasonló:

$$\textbf{1)}\ \begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{bmatrix}, \qquad \textbf{2)}\ \begin{bmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}, \qquad \textbf{3)}\ \begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta & \alpha\end{bmatrix},$$

ahol $\lambda, \mu, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ alkalmas számok!

Útm.

1). ha

$$\sigma(M) = \{\lambda, \mu\}$$

és M-nek két lineárisan független sajátvektora van: $\mathbf{s}$, $\mathbf{t}$ (akkor is ha $\lambda = \mu$), akkor az $T := [\mathbf{s}, \mathbf{t}]$ mátrix reguláris, és

$$\begin{aligned}M \sim T^{-1}MT &= T^{-1}M[\mathbf{s},\mathbf{t}] = T^{-1}[M\mathbf{s}, M\mathbf{t}] = T^{-1}[\lambda\mathbf{s}, \mu\mathbf{t}] = \\ &= \frac{1}{s_1t_2 - s_2t_1}\begin{bmatrix}t_2 & -t_1\\ -s_2 & s_1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\lambda s_1 & \mu t_1\\ \lambda s_2 & \mu t_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

2). ha

$$\sigma(M) = \{\lambda\}$$

és M-nek egy sajátvektora van: $\mathbf{s}$, és $\mathbf{t}$ olyan, az $\mathbf{s}$-től független vektor, amelyre $M\mathbf{t} = \mathbf{s} + \lambda\mathbf{t}$, akkor a $T := [\mathbf{s}, \mathbf{t}]$ mátrix reguláris, és

$$\begin{aligned}M \sim T^{-1}MT &= T^{-1}M[\mathbf{s},\mathbf{t}] = T^{-1}[M\mathbf{s}, M\mathbf{t}] = T^{-1}[\lambda\mathbf{s}, \mathbf{s} + \lambda\mathbf{t}] = \\ &= \frac{1}{s_1t_2 - s_2t_1}\begin{bmatrix}t_2 & -t_1\\ -s_2 & s_1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\lambda s_1 & s_1 + \lambda t_1\\ \lambda s_2 & s_2 + \lambda t_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

3). ha

$$\sigma(M) = \{\alpha + \imath\beta, \alpha - \imath\beta\} \qquad (\beta \neq 0)$$

és M sajátvektorai: $\mathbf{s} = \mathbf{u} + \imath\mathbf{v}$ és $\mathbf{t} = \mathbf{u} - \imath\mathbf{v}$, ahol $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$, akkor a $T := [\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ mátrix reguláris, és

$$\begin{aligned} M \sim T^{-1}MT &= T^{-1}M[\mathbf{u},\mathbf{v}] = T^{-1}[M\mathbf{u}, M\mathbf{v}] = T^{-1}[\alpha\mathbf{u} - \beta\mathbf{v}, \beta\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}] = \\ &= \frac{1}{u_1v_2 - u_2v_1}\begin{bmatrix} v_2 & -v_1 \\ -u_2 & u_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha u_1 - \beta v_1 & \beta u_1 + \alpha v_1 \\ \alpha u_2 - \beta v_2 & \beta u_2 + \alpha v_2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Megjegyzés. Ha $T := [\mathbf{v}, \mathbf{u}]$, akkor

$$A \sim T^{-1}MT = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

1.2.10. példa. Ha

$$M := \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

akkor

$$\sigma(M) = \{-1{,}2\}$$

és

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \text{ill.} \qquad \mathbf{t} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Így a

$$T := \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrixszal

$$M \sim T^{-1}MT = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

1.2.11. példa. Ha

$$M := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

akkor

$$\sigma(M) = \{1\}$$

és

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \text{ill.} \qquad \mathbf{t} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Így a

$$T := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrixszal

$$M \sim T^{-1}MT = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1.2.12. példa. Ha $M := \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$, akkor $\sigma(M) = \{-4\}$ és

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \text{ill.} \qquad \mathbf{t} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Így a

$$T := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

mátrixszal

$$M \sim T^{-1}MT = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

1.2.13. példa. Ha $M := \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, akkor $\sigma(M) = \{2+\imath, 2-\imath\}$ és

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \text{ill.} \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Így a

$$T := \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

mátrixszal

$$M \sim T^{-1}MT = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

1.2.7. feladat. Igazoljuk, hogy ha az $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix

1. szimmetrikus, akkor minden sajátértéke valós szám;
2. antiszimmetrikus, akkor minden sajátértéke (tisztán) képzetes szám!

Útm. Ha valamely $\lambda \in \sigma(M)$ esetén $M\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$, és

1. $M^T = M$, akkor $\lambda\|\mathbf{u}\|^2 =$

   $$= \lambda\langle\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle = \langle\lambda\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle = \langle M\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle = \langle\mathbf{u},M^T\mathbf{u}\rangle = \langle\mathbf{u},M\mathbf{u}\rangle = \langle\mathbf{u},\lambda\mathbf{u}\rangle = \overline{\lambda}\langle\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle = \overline{\lambda}\|\mathbf{u}\|^2,$$ [2]

   ahonnan $\lambda = \overline{\lambda}$, azaz $\lambda \in \mathbb{R}$ következik.

2. $M^T = -M$, akkor $\lambda\|\mathbf{u}\|^2 = \lambda\langle\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle =$

   $$= \langle\lambda\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle = \langle M\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle = \langle\mathbf{u},M^T\mathbf{u}\rangle = \langle\mathbf{u},-M\mathbf{u}\rangle = \langle\mathbf{u},-\lambda\mathbf{u}\rangle = -\overline{\lambda}\langle\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle = -\overline{\lambda}\|\mathbf{u}\|^2,$$

   (vö. **??**/4. feladat), ahonnan $\lambda = -\overline{\lambda}$, azaz

   $$\lambda \in \mathcal{K} := \{z \in \mathbb{C} : \; z = b\imath, \; b \in \mathbb{R}\}$$

   következik. ■

[2] Komplex elemű vektorok esetén a skaláris szorzatot így értelmezzük: $\langle\mathbf{r},\mathbf{s}\rangle := \sum_{k=1}^{n} r_i\overline{s}_i$ $(\mathbf{r},\mathbf{s} \in \mathbb{C}^n)$.

1.2.14. példa. Ha valamely $a, b, c \in \mathbb{R}$ esetén $a^2 + b^2 + c^2 > 0$ és

$$M := \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix},$$

akkor az M antiszimmetrikus mátrix karakterisztikus polinomja

$$p_M(z) \equiv z^3 + (a^2 + b^2 + c^2)z \qquad (z \in \mathbb{C})$$

amelynek gyökei: $0, \pm\imath\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

1.2.5. tétel. Ha az $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix szimmetrikus, továbbá $\mathbf{u}$, ill. $\mathbf{v}$ az M különböző sajátértékeihez tartozó sajátvektorai, akkor $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$.

Biz. Ha $M^T = M$, és valamely $\lambda, \mu \in \sigma(M)$ sajátértékek esetén $\lambda \neq \mu$ és $M\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$, ill. $M\mathbf{v} = \mu\mathbf{v}$, akkor pl. $\lambda \neq 0$ esetén

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \left\langle \frac{1}{\lambda} M\mathbf{u}, \mathbf{v} \right\rangle = \frac{1}{\lambda}\langle \mathbf{u}, M\mathbf{v} \rangle = \frac{1}{\lambda}\langle \mathbf{u}, \mu\mathbf{v} \rangle = \frac{\mu}{\lambda}\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle.$$

Így

$$\left(1 - \frac{\mu}{\lambda}\right)\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0,$$

és ezért $\lambda \neq \mu$ miatt $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$. ■

Ez azt jelenti, hogy

szimmetrikus mátrixok különböző sajátértékeihez tartozó sajátvektorai ortogonálisak.

1.2.8. feladat. Számítsuk ki az

$$M := \begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

mátrix sajátértékeit és normált sajátvektorait!

Útm.

1. lépés.. Meghatározzuk a p_M karakterisztikus polinomot.

1. módszer (ajánlott).. Az M mátrix elemeből könnyen kiolvasható, hogy

$$\mathrm{Sp}\,(M) = 7 + 6 + 5 = 18,$$

$$\mathrm{Sp}\,(M^\sharp) = 7\cdot 6 + 7\cdot 5 + 6\cdot 5 - (-2)\cdot(-2) - 0\cdot 0 - (-2)\cdot(-2) = 99,$$

ill.

$$\det(M) = (-2)\begin{vmatrix} 7 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} = (-2)\begin{vmatrix} 0 & 19 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 2(19\cdot 5 - (-7)\cdot(-2)) = 162,$$

így a karakterisztikus polinom nem más, mint

$$\boxed{p_M(z) = z^3 - \mathrm{Sp}\,(M)z^2 + \mathrm{Sp}\,(M^\sharp)z - \det(M)} = z^3 - 18z^2 + 99z - 162 \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

2. módszer (nem ajánlott: sok számolás, könnyű eltéveszteni)..

$$\begin{aligned}
p_M(z) &= \det(E - zM) = (-1)^3 \det(M - zE) = - \begin{vmatrix} 7-z & -2 & 0 \\ -2 & 6-z & -2 \\ 0 & -2 & 5-z \end{vmatrix} = \\
&= (z-7) \begin{vmatrix} 6-z & -2 \\ -2 & 5-z \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 5-z \end{vmatrix} = \\
&= (z-7)\left\{(6-z)(5-z) - 4\right\} + 4(5-z) = \\
&= (z-7)\{z^2 - 11z + 26\} + 20 - 4z = \\
&= z^3 - 11z^2 + 26z - 7z^2 + 77z - 26 \cdot 7 + 20 - 4z = \\
&= z^3 - 18z^2 + 99z - 162 \qquad (z \in \mathbb{C}).
\end{aligned}$$

2. lépés.. **Kiszámítjuk p_M gyökeit, azaz M sajátértékeit.** Mivel egész együtthatós normált polinomról van szó, p_M egész gyökei (ha vannak egyáltalán ilyenek) osztói a konstans tagnak, esetünkben -162-nek (vö. **??**. tétel). Általános iskolai ismereteink alapján érdemes tehát legalább a ± 1, ± 2, ± 3 ill. ± 6 számokkal próbálkozni. Ha valamelyik helyettesítési érték zérust ad, azaz a behelyettesített szám gyök ($=: \gamma$), akkor a p_M karakterisztikus polinomra

$$p_M(z) = (z - \gamma) \cdot q(z) \qquad (z \in \mathbb{C})$$

teljesül, ahol q másodfokú polinom (vö. **??**. tétel). q gyökeinek meghatározása már nem okozhat nehézséget. A fenti M mátrix esetében ez a lépés a következő számolásokat tartalmazza.

1. módszer (ajánlott).. Mivel tetszőleges harmadfokú p polinomra

$$p(z) := a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 = a_0 + z(a_1 + z(a_2 + a_3 z)) \qquad (z \in \mathbb{C}),$$

ezért valamely $c \in \mathbb{C}$ szám behelyettesítése a következő (Horner-)séma szerint történik:

	a_3	a_2	a_1	a_0
c	a_3	$a_3 \cdot c + a_2$	$(a_3 \cdot c + a_2) \cdot c + a_1$	$\{(a_3 \cdot c + a_2) \cdot c + a_1\}c + a_0 = p(c)$

Ha $p(c) = 0$, azaz c gyöke a p polinomnak, akkor

$$p(z) = (z - c) \cdot (\alpha z^2 + \beta z + \gamma) \qquad (z \in \mathbb{C}),$$

ahol a másodfokú polinom együtthatói a táblázat azon sorában vanak, ahol $p(c) = 0$ áll. Esetünkben:

$$\alpha = a_3, \qquad \beta = a_3 \cdot c + a_2, \qquad \gamma = (a_3 \cdot c + a_2) \cdot c + a_1.$$

A (fenti)

$$p_M(z) = z^3 - 18z^2 + 99z - 162 \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

karakterisztikus polinom esetében ez pl. így néz ki:

	1	-18	99	$-162,$
1	1	-17	82	$-80 = p_M(1) \neq 0,$
3	$\boxed{1}$	$\boxed{-15}$	$\boxed{54}$	$0 = p_M(3).$

Tehát a 3 gyöke p_M-nek, továbbá

$$p_M(z) = (z-3)(z^2 - 15z + 54) = (z-3)(z-6)(z-9) \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

2. módszer (nem ajánlott: sok számolás, könnyű eltéveszteni).. Pl. az 1 és a 3 számok behelyettesítése:

$$\begin{aligned} p_M(1) &= 1^3 - 18 \cdot 1^2 + 99 \cdot 1 - 162 = 1 - 18 + 99 - 162 = -80 \neq 0 \\ p_M(3) &= 3^3 - 18 \cdot 3^2 + 99 \cdot 3 - 162 = 27 - 162 + 297 - 162 = \ldots = 0. \end{aligned}$$

Tehát a 3 gyöke p_M-nek, továbbá

$$p_M(z) = (z-3)(\alpha z^2 + \beta z + \gamma) \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

Az α, β, γ együtthatók meghatározása maradékos osztással történik:

$$\begin{array}{rl} (z^3 - 18z^2 + 99z - 162) & : \ (z-3) \equiv \ z^2 - 15z + 54 \\ -(z^3 - 3z^2) & \\ \hline -15z^2 + 99z - 162 & \\ -(-15z^2 + 45z) & \\ \hline 54z - 162 & \\ -(54z - 162) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Tehát

$$p_M(z) = (z-3)(z^2 - 15z + 54) = (z-3)(z-6)(z-9) \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

3. lépés.. Meghatározzuk az M normált sajátvektorait.

– **A $\lambda_1 = 3$ sajátértékhez tartozó normált sajátvektor meghatározása.** A $\lambda_1 = 3$ sajátértékhez tartozó $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ sajátvektor az

$$(M - \lambda_1 E_3)\mathbf{u} = \mathbf{0}, \qquad \text{azaz a} \quad \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

egyenletrendszer nemtriviális megoldása. Így tetszőleges $0 \neq t \in \mathbb{R}$ esetén az

$$\mathbf{u} = (t{,}2t{,}2t)$$

vektor az M mátrix $\lambda_1 = 3$ sajátértékéhez tartozó sajátvektora. Az

$$\mathbf{s}_1 = \frac{1}{3}(1{,}2{,}2)$$

vektor ezért a $\lambda_1 = 3$ sajátértékéhez tartozó normált sajátvektor.

– **A** $\lambda_2 = 6$ **sajátértékhez tartozó normált sajátvektor meghatározása.** A $\lambda_2 = 6$ sajátértékhez tartozó $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ sajátvektor az

$$(M - \lambda_2 E_3)\mathbf{v} = \mathbf{0}, \qquad \text{azaz az} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

egyenletrendszer nemtriviális megoldása. Így tetszőleges $0 \neq t \in \mathbb{R}$ esetén a

$$\mathbf{v} = (2t, t, -2t)$$

vektor az M mátrix $\lambda_2 = 6$ sajátértékéhez tartozó sajátvektora. Az

$$\mathbf{s}_2 = \frac{1}{3}(2{,}1, -2)$$

vektor ezért a $\lambda_2 = 6$ sajátértékéhez tartozó normált sajátvektor.

– **A** $\lambda_3 = 9$ **sajátértékhez tartozó normált sajátvektor meghatározása.** Mivel M szimmetrikus mátrix, ezért (vö. 1.2.5. tétel) sajátvektorai ortogonálisak

$$/\text{pl.} \quad \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = t \cdot 2t + 2t \cdot t + 2t \cdot (-2t) = 0/\,.$$

Így tetszőleges $0 \neq t \in \mathbb{R}$ esetén a

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_3 & v_3 & v_3 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ t & 2t & 2t \\ 2t & t & -2t \end{bmatrix} = (-6t^2{,}6t^2, -3t^2)$$

vektor az M mátrix $\lambda_3 = 9$ sajátértékéhez tartozó sajátvektora. Az

$$\mathbf{s}_3 = \frac{1}{3}(-2{,}2, -1)$$

vektor ezért a $\lambda_3 = 9$ sajátértékéhez tartozó normált sajátvektor. ■

1.2.9. feladat. Mutassuk meg, hogy igazak az alábbi állítások!

1. Ha $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ antiszimmetrikus mátrix, akkor van olyan $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ vektor, amelyre

$$M\mathbf{r} = \mathbf{a} \times \mathbf{r} \qquad \left(\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3\right).$$

2. Minden $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ vektorhoz van olyan antiszimmetrikus $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mátrix, hogy

$$M\mathbf{r} = \mathbf{w} \times \mathbf{r} \quad (\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3).$$

Útm.

1. Ha $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ antiszimmetrikus, azaz $M^T = -M$, akkor $\det(M^T) = \det(M)$ miatt $\det(M) = 0$, hiszen

$$\det(M) = \det(M^T) = \det(-M) = (-1)^3 \det(M) = -\det(M).$$

Így $0 \in \sigma(M)$, ezért ha $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$ jelöli az M mátrix 0 sajátértékéhez tartozó sajátvektorát, akkor az

$$M\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 & a & \boxed{b} \\ \boxed{-a} & 0 & c \\ -b & \boxed{-c} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = 0 \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

egyenletből

$$w_1 = -c, \qquad w_2 = b, \qquad w_3 = -a$$

következik, és erre a $\mathbf{w}$ vektorra:

$$\mathbf{w} \times \mathbf{r} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -c & b & -a \\ x & y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} bz + ay \\ cz - ax \\ -cy - bx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot x + ay + bz \\ -ax + 0 \cdot y + cz \\ -bx - cy + 0 \cdot z \end{bmatrix} = M\mathbf{r},$$

ahol $\mathbf{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

2. Ha $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$, akkor alkalmas $x, y, z \in \mathbb{R}$ esetén $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, így ha valamely $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mátrixra

$$M\mathbf{r} = \mathbf{w} \times \mathbf{r} \quad (\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3),$$

akkor egyrészt

$$M\mathbf{r} = x(M\mathbf{i}) + y(M\mathbf{j}) + z(M\mathbf{k}),$$

másrészt pedig

$$M\mathbf{i} = \mathbf{w} \times \mathbf{i} = w_3\mathbf{j} - w_2\mathbf{k}, \qquad M\mathbf{j} = \mathbf{w} \times \mathbf{j} = w_1\mathbf{k} - w_3\mathbf{i}, \qquad M\mathbf{k} = \mathbf{w} \times \mathbf{k} = w_2\mathbf{i} - w_1\mathbf{j},$$

ezért az

$$M := \begin{bmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrix megfelelő. ■

1.2.6. definíció. Azt mondjuk, hogy az $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mátrix **vektorinvariánsa** a

$$\mathrm{vi}\,(M) := \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$$

vektor, ha fennáll a

$$\mathbf{v} \times \mathbf{r} = T_M\mathbf{r} = \frac{1}{2}\left(M - M^T\right)\mathbf{r} \qquad (\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3)$$

egyenlőség.

1.2.15. példa. Ha

$$M =: \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix},$$

akkor

$$T_M = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & m_{12}-m_{21} & \boxed{m_{13}-m_{31}} \\ \boxed{m_{21}-m_{12}} & 0 & m_{23}-m_{32} \\ m_{31}-m_{13} & \boxed{m_{32}-m_{23}} & 0 \end{bmatrix},$$

így M vektorinvariánsa a

$$\mathbf{v} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} m_{32}-m_{23} \\ m_{13}-m_{31} \\ m_{21}-m_{12} \end{bmatrix}$$

vektor (vö. 1.2.9. feladat).

A vektorinvariáns leolvasása M-ből így történik:

$$M \rightsquigarrow \frac{1}{2}\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}.$$

Ha tehát M antiszimmetrikus mátrix, akkor

$$T_M = M,$$

így az M mátrix $\mathbf{v}$ vektorinvariánsa a 0 sajátértékéhez tartozó sajátvektora (vö. 1.2.9. feladat útmutatója). Ez azt jelenti, hogy

$$M\mathbf{v} = 0\mathbf{v} = \mathbf{0},$$

ami persze az

$$M\mathbf{v} = \mathbf{v} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

egyenlőségből is jól látszik.

1.2.10. feladat. Igazoljuk, hogy ha $M, N, U \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, U ortogonális, továbbá

1. M és N antiszimmetrikus, akkor

$$\mathrm{vi}\,(M) \times \mathrm{vi}\,(N) = \mathrm{vi}\,([M, N])$$

(vö. 1.2.6. definíció);

2. M szimmetrikus és N antiszimmetrikus, akkor

$$((\mathrm{Sp}\,(M)E_3 - M)\mathrm{vi}\,(N) = \mathrm{vi}\,(\{N, M\})$$

teljesül (vö. 1.2.6. definíció)

3. N antiszimmetrikus, akkor fennáll a

$$\mathrm{vi}\,\left(UAU^{-1}\right) = \det(U) \cdot U\mathrm{vi}\,(N)$$

egyenlőség!

Útm. ■

1.2.6. tétel. Tetszőleges $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix, ill. $k \in \mathbb{N}_0$, $\beta \in \mathbb{C}$ számok esetén

1. ha $\lambda \in \sigma(M)$ és $M\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$, akkor $\mathbf{u}$ az

$$\alpha M, \quad M^k, \quad M + \beta E_n, \quad f(M) := \alpha_m M^m + \ldots + \alpha_1 M + \alpha_0 E_n$$

mátrixok

$$\alpha\lambda, \qquad \lambda^m, \qquad \lambda + \beta, \qquad f(\lambda) := \alpha_m \lambda^m + \ldots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0$$

sajátértékekhez tartozó sajátvektora;

2. M, ill. M^T spektruma megegyezik:

$$\sigma(M^T) = \sigma(M)$$

(M és M^T sajátvektorai azonban nem feltételenül egyeznek meg);

3. ha $N \in \mathbb{C}^{n\times n}$ reguláris mátrix, akkor

$$\sigma(M) = \sigma(N^{-1}MN)$$

és $\mathbf{u}$ pontosan akkor sajátvektora M-nek, ha a $N^{-1}\mathbf{u}$ sajátvektora az $N^{-1}MN$ mátrixnak.

Biz.

1. lépés.. Ha $\lambda \in \sigma(M)$ és $M\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$, akkor

$$k \in \mathbb{N}_0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda^k \in \sigma(M^k),$$

hiszen

$$M^k\mathbf{u} = (M^{k-1}M)\mathbf{u} = M^{k-1}(M\mathbf{u}) = M^{k-1}(\lambda\mathbf{u}) = M^{k-2}(\lambda^2\mathbf{u}) = \ldots = \lambda^k\mathbf{u}$$

így

$$f(M)\mathbf{u} = f(\lambda)\mathbf{u}.$$

2. lépés.. A determinánsokra vonatkozó azonosságok (vö. tétel) alapján

$$\det(zE_n - M^T) \equiv \det\left((zE_n - M)^T\right) \equiv \det(zE_n - M).$$

3. lépés.. M és $N^{-1}MN$ karakterisztikus polinomja azonos, hiszen bármely $z \in \mathbb{C}$ esetén

$$\begin{aligned}
\det(zE_n - M) &= \det\left(zE_n - N^{-1}MN\right) = \det\left(zN^{-1}N - N^{-1}MN\right) = \\
&= \det\left(N^{-1}\left(zE_n - M\right)N\right) = \det(N^{-1})\det(zE_n - M)\det(N) = \\
&= \det(zE_n - M). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

1.2.11. feladat. Az

$$M := \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

mátrix esetén határozzuk meg M^2 sajátértékeit és sajátvektorait!

Útm. Mivel

$$\det(M) = 2 \cdot (-4) + 4 \cdot 2 = 0,$$

ezért M sajátértékei a

$$p_M(z) := z^3 - 9z^2 + 18z = z(z^2 - 9z + 18) = z(z-3)(z-6) \qquad (z \in \mathbb{C})$$

polinom gyökei. A $\lambda := 0$ sajátértékhez tartozó $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ sajátvektor az

$$(M - \lambda E_3)\mathbf{u} = \mathbf{0}, \qquad \text{azaz a} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

egyenletrendszer nemtriviális megoldása:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A $\mu := 3$ sajátértékhez tartozó $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ sajátvektor az

$$(M - \lambda 3 E_3)\mathbf{v} = \mathbf{0}, \qquad \text{azaz a} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

egyenletrendszer nemtriviális megoldása:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

A $\nu := 6$ sajátértékhez tartozó $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ sajátvektor az

$$(M - \lambda 6 E_3)\mathbf{w} = \mathbf{0}, \qquad \text{azaz a} \qquad \begin{bmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ wu_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

egyenletrendszer nemtriviális megoldása:

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Az M^2 mátrix sajátértékei így $0{,}9{,}36$, sajátértékei pedig M sajátértékeivel egyeznek meg (vö. 1.2.6/1. tétel). ■

1.2.12. feladat. Határozzuk meg az

$$M := \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

mátrix sajátértékeit és normált sajátvektorait!

Útm. A mátrix karakterisztikus polinomja:

$$p_M(z) := \det(zE_n - M) = \det \begin{bmatrix} z-2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & z-2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & z-2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & z-2 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & z-2 \end{bmatrix}.$$

Bevezetve a

$$z =: 4\sin^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right), \qquad \text{ill. a} \qquad p_M\left(4\sin^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right)\right) =: D_n$$

jelöléseket azt kapjuk, hogy

$$D_n = \det \begin{bmatrix} -2\cos(\vartheta) & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2\cos(\vartheta) & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2\cos(\vartheta) & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -2\cos(\vartheta) & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -2\cos(\vartheta) \end{bmatrix}.$$

Az első sor szerinti kifejtéssel

$$D_n = (-2\cos(\vartheta))D_{n-1} - D_{n-2}$$

adódik. Teljes indukcióval belátható, hogy

$$D_n = (-1)^n \frac{\sin((n+1)\vartheta)}{\sin(\vartheta)} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Valóban, $n = 1$, ill. $n = 2$ esetén

$$D_1 = -\frac{\sin(2\vartheta)}{\sin(\vartheta)} = \frac{2\sin(\vartheta)\cos(\vartheta)}{\sin(\vartheta)} = -2\cos(\vartheta) = z - 2,$$

ill.

$$\begin{aligned} D_2 &= \frac{\sin(3\vartheta)}{\sin(\vartheta)} = \frac{\sin((2+1)\vartheta)}{\sin(\vartheta)} = \frac{\sin(2\vartheta)\cos(\vartheta) + \cos(2\vartheta)\sin(\vartheta)}{\sin(\vartheta)} = \\ &= \frac{2\sin(\vartheta)\cos^2(\vartheta) + \cos^2(\vartheta)\sin(\vartheta) - \sin^3(\vartheta)}{\sin(\vartheta)} = \\ &= 2\cos^2(\vartheta) + \cos^2(\vartheta) - \sin^2(\vartheta) = 3\cos^2(\vartheta) - (1 - \cos^2(\vartheta)) = \\ &= 4\cos^2(\vartheta) - 1, \end{aligned}$$

továbbá

$$\sin((n+1)\vartheta) = 2\cos(\vartheta)\sin(\vartheta) - \sin((n-1)\vartheta),$$

következtében

$$(-1)^n \frac{\sin((n+1)\vartheta)}{\sin(\vartheta)} = -2\cos(\vartheta)(-1)^{n-1}\frac{\sin((n\vartheta)}{\sin(\vartheta)} - (-1)^{n-2}\frac{\sin((n-1)\vartheta)}{\sin(\vartheta)}.$$

A sajátértékek tehát:

$$4\sin^2\left(\frac{\vartheta_k}{2}\right), \qquad \text{ahol} \qquad \vartheta_k := \frac{\pi}{n+1} \quad (k \in \{1, \dots, n\}).$$

A k-adik normált sajátvektor:

$$\mathbf{u}_k = \sqrt{\frac{2}{n+1}}\left(\sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right), \dots, \sin\left(\frac{nk\pi}{n+1}\right)\right). \quad \blacksquare$$

1.2.7. tétel. Ha $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\lambda \in \sigma(M)$, $M\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$, akkor fennáll a

$$\lambda = \frac{\langle M\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle}{\|\mathbf{u}\|^2}$$

egyenlőség.

Biz. Mivel $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, így $\|\mathbf{u}\| \neq 0$, ezért az

$$\langle M\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle = \langle \lambda\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle = \lambda\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle = \lambda\|\mathbf{u}\|^2$$

egyenlőségből $\|\mathbf{u}\|$-val osztással a bizonyítandó állítást kapjuk. ■

A 1.2.7. tételben szereplő törtet szokás **Rayleigh-hányados**nak is nevezni.

1.2.8. tétel. Igazoljuk, hogy ha $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, akkor az

$$M := \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

mátrix esetében $p_M(M)$ nem más, mint a nullmátrix!

Biz. Mivel (vö. 1.2.2. tétel)

$$p_M(z) = z^2 - (a+d)z + ad - bc \qquad (z \in \mathbb{C}),$$

ezért

$$p_M(M) = M^2 - (a+d)M + (ad-bc)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \ldots = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad ■$$

1.2.9. tétel. (Cayley-Hamilton-tétel.) Ha $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$, akkor $p_M(M)$ nullmátrix:

$$p_M(M) = M^n + a_{n-1}M^{n-1} + \ldots + a_1 M + a_0 E_n = O.$$

Biz.

1. lépés.. Ha valamely $m \in \mathbb{N}$, $A_0, \ldots, A_m \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixok, illetve $0 \neq c \in \mathbb{C}$ esetén

$$A_0 + A_1 z + \ldots + A_m z^m = O \qquad (z \in \mathbb{C} : \ |z| \geq |c|),$$

akkor

$$A_0 = A_1 = \ldots = A_m = O,$$

hiszen a fenti egyenlőséget z^{-m}-mel szorozva

$$A_0 z^{-m} + A_1 z^{-m+1} + \ldots + A_m = O$$

adódik, ahonnan a $|z| \to +\infty$ határétmenettel

$$A_m = O, \qquad A_{m-1} = O, \qquad \ldots, \qquad A_0 = O$$

adódik.

2. lépés.. Ha valamely $m \in \mathbb{N}$, $A_0, \ldots, A_m, B_0, \ldots, B_m \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixok, illetve $0 \neq c \in \mathbb{C}$ esetén

$$A_0 + A_1 z + \ldots + A_m z^m = O = A_0 + B_1 z + \ldots + B_m z^m \qquad (z \in \mathbb{C}: \ |z| \geq |c|),$$

akkor

$$A_0 = B_0, \quad A_1 = B_1, \quad \ldots, A_m = B_m,$$

hiszen ekkor

$$A_0 - B_0 + (A_1 - B_1)z + \ldots + (A_m - B_m)z^m = O \qquad (z \in \mathbb{C}: \ |z| \geq |c|).$$

3. lépés.. Az iméntiek következményeként van olyan $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix, hogy

$$A_0 + A_1 C + \ldots + A_m C^m = A_0 + B_1 C + \ldots + B_m C^m$$

teljesül.

4. lépés.. A fenti $z \in \mathbb{C}$ esetén legyen $C(z)$ az a mátrix, amelynek transzponáltja $(zE_n - M)^\sharp$. Mivel az M mátrixnak csak véges sok sajátértéke van, feltehető, hogy a $zE_n - M$ mátrix reguláris. Így (vö. 1.1.1. tétel)

$$C(z) \equiv \det(zE_n - M)zE_n - M)^{-1} = p_M(z)(zE_n - M)^{-1}.$$

Mivel $C(z)$ a z-nek legfeljebb $(n-1)$-edfokú polinomja, azaz alkalmas $C_0, C_1, \ldots, C_{n-1} \in$ $\in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixok esetén

$$C(z) = C_0 + C_1 z + \ldots + C_n^{n-1} z^{n-1},$$

ezért

$$(M - zE_n)(C_0 + C_1 z + \ldots + C_{n-1} z^{n-1}) = p_M(z)E_n.$$

Így a **2. lépés**ben megfogalmazott állítás felhasználásával belátható, hogy z megfelelő hatványának mátrix-együtthatói megegyeznek. Ezért z helyébe M-et helyettesítve azt kapjuk, hogy

$$O = (M - M)(C_0 + C_1 M + \ldots + C_n^{n-1} M^{n-1}) = p_M(M)E_n = p_M(M). \quad \blacksquare$$

1.2.13. feladat. Igazoljuk, hogy ha az $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix reguláris és karakterisztikus polinomja:

$$p_M(z) = z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \ldots + c_1 z + c_0 \qquad (z \in \mathbb{C}),$$

akkor inverzére

$$M^{-1} = \frac{1}{c_0}\left\{M^{n-1} + c_{n-1}M^{n-2} + \ldots + c_2 M + c_1 E_n\right\}$$

teljesül!

Útm. A Cayley-Hamilton-tétel következtében

$$M\left\{M^{n-1} + c_{n-1}M^{n-2} + \ldots + c_1 E_n\right\} = -c_0 E_n.$$

Mivel M reguláris, ezért $c_0 = (-1)\det(M) \neq 0$, ahonnan az igazolandó állítást kapjuk. $\blacksquare$

1.2.14. feladat. Igazoljuk, hogy ha az $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix reguláris és karakterisztikus polinomja:

$$p_M(z) = z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \ldots + c_1 z + c_0 \qquad (z \in \mathbb{C}),$$

továbbá $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ az M sajátértékei, azaz

$$p_M(\lambda_1) = \ldots = p_M(\lambda_n) = 0$$

teljesül, továbbá valamely $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ esetén

$$s_k := \lambda_1^k + \ldots + \lambda_k^n$$

akkor

$$c_k = -\frac{1}{k}\left(s_k + s_{k-1}c_{n-1} + \ldots + s_2 c_{n-(k-2)} + s_1 c_{n-(k-1)}\right)$$

teljesül (**Newton-azonosság**)!

Útm. Világos, hogy tetszőleges $z \in \mathbb{C}$ esetén

$$p_M(z) = (z - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (z - \lambda_n),$$

ezért bármely $z \in \mathbb{C}$, $p_M(z) \neq 0$ esetén

$$\frac{p_M'(z)}{p_M(z)} = \frac{nz^{n-1} + (n-1)c_{n-1}z^{n-2} + \ldots + c_1}{z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \ldots + c_1 z + c_0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{z - \lambda_i}.$$

1.2.7. definíció. Legyen $M \in \mathbb{K}^{d\times d}$, $\lambda \in \sigma(M)$. Azt mondjuk, hogy a $\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in \mathbb{K}^d$ az M λ sajátértékéhez tartozó **k-adrendű (jobboldali) fővektor**a vagy **általánosított sajátvektor**a, ha

$$(A - \lambda E_d)^k \mathbf{v} = \mathbf{0} \qquad \text{és} \qquad (A - \lambda E_d)^{k-1}\mathbf{v} \neq \mathbf{0}.$$

Világos, hogy minden $\mathbf{u}$ sajátvektor egyben fővektor is, ui.

$$(M - \lambda E_d)\mathbf{u} = \mathbf{0} \qquad \text{és} \qquad \mathbf{0} \neq \mathbf{u} = E_d\mathbf{u} = (M - \lambda E_d)^0\mathbf{u}.$$

1.2.16. példa. Az

$$M := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix esetében $\sigma(A) = \{1\}$, és

$$(M - \lambda E_3)\mathbf{e}_1 = 0, \qquad (M - \lambda E_3)\mathbf{e}_2 = e_1, \quad (M - \lambda E_3)^2\mathbf{e}_2 = 0,$$

$$(M - \lambda E_3)e_3 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \quad (M - \lambda E_3)^2 e_3 = \mathbf{e}_1, \quad (M - \lambda E_3)^3\mathbf{e}_3 = \mathbf{0}.$$

Tehát e_1 sajátvektor, e_2 másodrendű, e_3 harmadrendű fővektor.

1.2.0. megjegyzés. Ha $\mathbf{v}$ a λ sajátértékhez tartozó k-adrendű fővektor, akkor a

$$\mathbf{v}, \quad (M - \lambda E_d)\mathbf{v}, \quad (M - \lambda E_d)^2\mathbf{v}, \ldots, \quad (M - \lambda E_d)^{k-1}\mathbf{v}$$

vektorok $k, k-1, \ldots, 1$-ed rendű lineárisan független fővektorok (**fővektorlánc**), ui. ha a

$$\sum_{l=0}^{k-1} \alpha_l (M - \lambda E)^l \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

egyenlőséget rendre megszorozzuk az

$$(M - \lambda E_d)^m \qquad (m \in \{k-1, \ldots, 1, 0\})$$

mátrixszal, akkor azt kapjuk, hogy $\alpha_0 = \ldots = \alpha_{k-1} = 0$.

1.2.4. tétel. Ha $\lambda \in \sigma(M)$: $a(\lambda) = k$, akkor M-nak van k darab lineárisan független fővektora, azaz

$$\dim\ker\left((M - \lambda E_d)^k\right) = k,$$

továbbá M páronként különböző sajátértékeihez tartozó fővektorai lineárisan függetlenek.

1.2.0. megjegyzés. Könnyen belátható, hogy ha $\mathbf{v}_1$ elsőrendű, $\mathbf{v}_2$ másodrendű, . . ., $\mathbf{v}_k$ k-adrendű fővektor, akkor tetszőleges $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ esetén a

$$\sum_{l=1}^{k} \alpha_l \mathbf{v}_l$$

vektor k-adrendű fővektor.

1.2.0. megjegyzés. Ha $\mathbf{0} \neq \mathbf{u} \in \ker(M - \lambda E_d)$, akkor

$$(M - \lambda E_d)\mathbf{v} = \mathbf{u} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{v} \text{ másodrendű fővektor},$$

ui.

$$(M - \lambda E_d)^2\mathbf{v} = (M - \lambda E_d)(M - \lambda E_d)\mathbf{v} = (M - \lambda E_d)\mathbf{u} = \mathbf{0},$$

de

$$(M - \lambda E_d)\mathbf{v} = \mathbf{u} \neq \mathbf{0}.$$

Sőt

$$(M - \lambda E_d)\mathbf{w} = \mathbf{v} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{w} \text{ harmadrendű fővektor},$$

ui.

$$(M - \lambda E_d)^3\mathbf{w} = (M - \lambda E_d)^2(M - \lambda E_d)\mathbf{w} = (M - \lambda E_d)^2\mathbf{v} = 0,$$

de

$$(M - \lambda E_d)^2\mathbf{w} = (M - \lambda E_d)\mathbf{v} = \mathbf{u} \neq \mathbf{0}.$$

1.2.0. megjegyzés. Tehát ha $a(\lambda) = k$, akkor k darab lineárisan független $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ fővektort kapunk a következő módszerrel:

1. lépés.. meghatározunk egy

$$\mathbf{v}_1 \in \ker(M - \lambda E_d)$$

vektort[3], azaz olyan vektort amelyre

$$(M - \lambda E_d)\mathbf{v}_1 = \mathbf{0} \qquad \text{és} \qquad \mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0},$$

majd

2. lépés.. az

$$\boxed{(M - \lambda E_d)\mathbf{v}_{i+1} = \mathbf{v}_i \qquad (i \in \{1, \ldots, k-1\})}$$

egyenletből kiszámítjuk $\mathbf{v}_{i+1}$-et.

A fentieket összefoglalva azt is mondhatjuk, hogy megoldjuk az

$$\boxed{\begin{array}{rcc} M\mathbf{v}_1 & = & \lambda\mathbf{v}_1, \\ M\mathbf{v}_2 & = & \lambda\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1, \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ M\mathbf{v}_k & = & \lambda\mathbf{v}_k + \mathbf{v}_{k-1} \end{array}}$$

egyenletrendszert.

1.2.17. példa. Az

$$M := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrix esetében $\sigma(M) = \{2\}$, továbbá

$$(M - 2E_3)\mathbf{e}_1 = \mathbf{0}, \qquad (M - 2E_3)\mathbf{e}_2 = e_1, \qquad (M - 2E_3)\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2.$$

1.2.18. példa. Az

$$M := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix esetében $\sigma(M) = \{1\}$, továbbá

$$(M - \lambda E_3)\mathbf{e}_1 = \mathbf{0}, \qquad (M - \lambda E_3)\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1, \qquad (M - \lambda E_3)\mathbf{v} = \mathbf{e}_2,$$

ahol $\mathbf{v} := (1, -1, 1)$.

1.3. Polinomok helyettesítési értéke

1.3.1. tétel. Legyen $n \in \mathbb{N}_0$, $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$: $a_n \neq 0$, $\xi \in \mathbb{R}$,

$$f(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

majd vezessük be a következő jelöléseket:

$$\begin{array}{rcl} c_n & := & a_n \\ c_{n-1} & := & a_{n-1} + c_n \cdot \xi \\ c_{n-2} & := & a_{n-2} + \xi \cdot c_{n-1} \\ & \vdots & \\ c_{n-k} & := & a_{n-k} + \xi \cdot c_{n-k+1} \\ & \vdots & \\ c_1 & := & a_1 + \xi \cdot c_2 \\ c_0 & := & a_0 + \xi \cdot c_1. \end{array}$$

Ekkor

$$c_0 = f(\xi) \qquad \text{és} \qquad f(x) = (x - \xi) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} c_{k+1} x^k + f(\xi) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Biz.

1.3.2. tétel. (Rolle-tétel.) Legyen $n \in \mathbb{N}_0$, $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$: $a_n \neq 0$,

$$f(x) := a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Úgy, ha valamely

- $\xi \in \mathbb{Z}$ esetén $f(\xi) = 0$, akkor $\xi | a_0$;
- $\xi, \eta \in \mathbb{Z}$: $\eta \neq 0$ és $\operatorname{lnko}(\xi, \eta) = 1$ esetén $f(\xi/\eta) = 0$, akkor $\xi | a_0$ és $\eta | a_n$.

Biz.

1.4. Kvadratikus alakok

1.4.1. definíció. Adott

$$M=[m_{ij}]_{i,j=1}^{n}\in\mathbb{R}^{n\times n}$$

szimmetrikus mátrix ($M^T=M$) esetén a

$$Q_M(\mathbf{r}):=\langle M\mathbf{r},\mathbf{r}\rangle=(M\mathbf{r})^T\mathbf{r}=\mathbf{r}^TM^T\mathbf{r}=\mathbf{r}^TM\mathbf{r}=\sum_{i,j=1}^{n}m_{ij}x_ix_j\qquad(\mathbf{r}=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n)$$

leképezést (az M mátrix által meghatározott) **kvadratikus alak**nak nevezzük.

Világos, hogy $Q_M(\mathbf{0})=0$.

1.4.1. példa. Legyen $a,b,c\in\mathbb{R}$,

$$M:=\begin{bmatrix}a&b\\b&c\end{bmatrix}.$$

Ekkor

$$\begin{aligned}Q_M(\mathbf{r})&=\left\langle\begin{bmatrix}a&b\\b&c\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix},\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right\rangle=\left\langle\begin{bmatrix}ax+by\\bx+cy\end{bmatrix},\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right\rangle=\\&=ax^2+byx+bxy+cy^2=\\&=ax^2+2bxy+cy^2\qquad(\mathbf{r}=(x,y)\in\mathbb{R}^2).\end{aligned}$$

1.4.2. példa. Legyen $a,b,c,d,e,f\in\mathbb{R}$,

$$M:=\begin{bmatrix}a&b&c\\b&d&e\\c&e&f\end{bmatrix}.$$

Ekkor

$$\begin{aligned}Q_M(\mathbf{r})&=\left\langle\begin{bmatrix}a&b&c\\b&d&e\\c&e&f\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix},\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right\rangle=\left\langle\begin{bmatrix}ax+by+cz\\bx+dy+ez\\cx+ey+fz\end{bmatrix},\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right\rangle=\\&=ax^2+byx+czx+bxy+dy^2+ezy+cxz+eyz+fz^2=\\&=ax^2+dy^2+fz^2+2bxy+2cxz+2eyz\qquad(\mathbf{r}=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3).\end{aligned}$$

A kvadratikus alakokat felvett értékeik előjele alapján szokás osztályozni (ún. definitségi osztályokba sorolni).

1.4.2. definíció. Azt mondjuk, hogy a Q_M kvadratikus alak, ill. az M mátrix

1. **pozitív definit**, ha minden $\mathbf{0} \neq \mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$ esetén $Q_M(\mathbf{r}) > 0$;
2. **negatív definit**, ha minden $\mathbf{0} \neq \mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$ esetén $Q_M(\mathbf{r}) < 0$;
3. **pozitív szemidefinit**, ha minden $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$ esetén $Q_M(\mathbf{r}) \geq 0$;
4. **negatív szemidefinit**, ha minden $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$ esetén $Q_M(\mathbf{r}) \leq 0$;
5. **indefinit**, ha van olyan $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ és $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, hogy

$$Q_M(\mathbf{u}) > 0 \qquad \text{és} \qquad Q_M(\mathbf{v}) < 0$$

   teljesül.

A pozitív és a negatív definit alakokat együttesen **definit alak**oknak, a pozitív és a negatív szemidefinit alakokat pedig együttesen **szemidefinit alak**oknak nevezzük.

Az 1.4.2. definícióból látható, hogy

1. a pozitív, ill. negatív definit alakok (mátrixok) egyúttal pozitív, ill. negatív szemidefinit alakok (mátrixok).
2. a kvadratikus alakok, ill. a szimmetrikus mátrixok halmaza három osztályra bomlik: a pozitív szemidefinit, a negaív szemidefinit és az indefinit alakok osztályára. Ez a három osztály majdnem diszjunkt. Egyetlen olyan kvadratikus alak, ill. szimmetrikus mátrix van, amely benne van két osztályban is. Ha ui. M a zérusmátrix, akkor Q_M, ill. M pozitív szemidefinit és negatív szemidefinit is egyben.
3. a szemidefinit Q_M pontosan akkor nem definit, ha van olyan $\mathbf{0} \neq \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ vektor, amelyre $Q_M(\mathbf{u}) = 0$ teljesül.
4. Valamely pozitív, ill. negatív (szemi)definit mátrix főátlójában csak pozitív (nemnegatív) ill. negatív (nempozitív) számok lehetnek, hiszen ha

$$\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$$

   az $\mathbb{R}^n$-beli kanonikus bázis, akkor

$$Q_M(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_i^T \cdot M \cdot \mathbf{e}_i = a_{ii} \qquad (i \in \{1, \ldots, n\}).$$

   Ha tehát M főátlójában van pozitív és negatív előjelű elem is, akkor Q_M, ill. M indefinit.

1.4.3. példa. Az

$$M := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$$

mátrix esetén

$$Q_M(\mathbf{r}) = x^2 + 4xy + 8y^2 = (x+2y)^2 + 4y^2 \qquad \big(\mathbf{r} = (x,y) \in \mathbb{R}^2\big)\,.$$

Mivel

$$Q_M(\mathbf{r}) \geq 0 \qquad \big(\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2\big)$$

és

$$Q_M(\mathbf{r}) = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad x + 2y = 0 = 2y \quad\Longleftrightarrow\quad (x = y = 0, \quad \text{azaz} \quad \mathbf{r} = \mathbf{0}),$$

ezért Q_M, ill. M pozitív definit.

1.4.4. példa. Az

$$M := \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix esetén

$$Q_M(\mathbf{r}) = 2x^2 + 2\sqrt{2}xy + y^2 = (\sqrt{2}x + y)^2 \qquad \big(\mathbf{r} = (x,y) \in \mathbb{R}^2\big)\,.$$

Mivel

$$Q_M(\mathbf{r}) \geq 0 \qquad \big(\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2\big)\,,$$

ezért Q_M, ill. M pozitív szemidefinit. Q_M, ill. M nem pozitív definit, ui.

$$Q_M(1, -\sqrt{2}) = 0.$$

1.4.5. példa. Az

$$M := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

mátrix esetén

$$Q_M(\mathbf{r}) = x^2 - y^2 \qquad \big(\mathbf{r} = (x,y) \in \mathbb{R}^2\big)\,.$$

Mivel

$$Q_M(2{,}1) = 3 > 0 \qquad \text{és} \qquad Q_M(1{,}2) = -3 < 0,$$

ezért Q_M, ill. M indefinit.

1.4.6. példa. Az

$$M := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

mátrix esetén

$$Q_M(\mathbf{r}) = -2y^2 \qquad \left(\mathbf{r} = (x, y) \in \mathbb{R}^2\right).$$

Mivel

$$Q_M(\mathbf{r}) \leq 0 \qquad \left(\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2\right),$$

ezért Q_M, ill. negatív szemidefinit. Q_M, ill. M nem negatív definit, ui.

$$Q_M(1{,}0) = 0.$$

1.4.7. példa. Az

$$M := \begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

mátrix esetén

$$Q_M(\mathbf{r}) = -4x^2 + 4xy - y^2 - 3z^2 = -(2x - y)^2 - 3z^2 \qquad \left(\mathbf{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\right).$$

Mivel

$$Q_M(\mathbf{r}) \leq 0 \qquad \left(\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3\right),$$

ezért Q_M, ill. M negatív szemidefinit. Q_M, ill. M nem negatív definit, ui.

$$Q_M(1{,}2{,}0) = 0.$$

Nem nehéz belátni, hogy ha $n = 2$, azaz ha Q_M a 1.4.1. példabeli kvadratikus alak:

$$Q_M(\mathbf{r}) = ax^2 + 2bxy + cy^2 \quad \left(\mathbf{r} = (x, y) \in \mathbb{R}^2\right),$$

akkor

- $a \neq 0$ esetén
$$Q_M(x, y) = a\left(x + \frac{b}{a}y\right)^2 + \frac{ac - b^2}{a}y^2 \qquad \left((x, y) \in \mathbb{R}^2\right);$$
- $c \neq 0$ esetén
$$Q_M(x, y) = c\left(y + \frac{b}{c}x\right)^2 + \frac{ac - b^2}{c}x^2 \qquad \left((x, y) \in \mathbb{R}^2\right);$$
- $a = c = 0$ esetén
$$Q_M(x, y) = 2bxy \qquad \left((x, y) \in \mathbb{R}^2\right).$$

1.4.1. tétel. Tetszőleges $a, b, c \in \mathbb{R}$ esetén a

$$Q_M(x,y) := ax^2 + 2bxy + cy^2 \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

kvadratikus alak, ill. az

$$M := \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

mátrix pontosan akkor

1. definit, ha $ac - b^2 > 0$, mégpedig
   a) $a > 0$ esetén pozitív definit,
   b) $a < 0$ esetén negatív definit.
2. szemidefinit, ha $ac - b^2 \geq 0$, mégpedig
   a) $a \geq 0$, $c \geq 0$ esetén pozitív szemidefinit,
   b) $a \leq 0$, $c \leq 0$ esetén negatív szemidefinit.
3. indefinit, ha $ac - b^2 < 0$.

Biz.

1. *a)* Tegyük fel, hogy Q_M pozitív definit. Ekkor

$$Q_M(1{,}0) = a > 0,$$

ui. $(1{,}0) \neq \mathbf{0}$ és így

$$Q_M(-b/a{,}1) = \frac{ac - b^2}{a} > 0,$$

ui.

$$(-b/a{,}1) \neq (0{,}0).$$

Tegyük fel, hogy

$$a > 0 \qquad \text{és} \qquad ac - b^2 > 0.$$

Ekkor

$$Q_M(\mathbf{r}) = a\left(x + \frac{b}{a}y\right)^2 + \frac{ac - b^2}{a}y^2 \geq \frac{ac - b^2}{a}y^2 \geq 0 \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$$

és

$$Q_M(x,y) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x + \frac{b}{a}y = 0 = y \quad \Longleftrightarrow \quad (x = y = 0, \quad \text{azaz} \quad (x,y) = (0{,}0)).$$

b) Ezt az állítást az előjelek megfordítása után ugynúgy bizonyíthatjuk, mint az előzőt.

2. *a)* Tegyük fel, hogy Q_M pozitív szemidefinit. Ekkor

$$Q_M(1{,}0) = a \geq 0 \qquad \text{és} \qquad Q_M(0{,}1) = c \geq 0.$$

Ha $a = 0$, akkor

$$Q_M(x,1) = 2bx + c \geq 0 \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big) \qquad \Longleftrightarrow \qquad b = 0,$$

ui. a fentiek miatt $c \geq 0$, továbbá $b > 0$ esetén legyen $x < -c/2b$, így $Q_M(x,1) < 0$, illetve $b < 0$ esetén legyen $x > -c/2b$, így $Q_M(x,1) < 0$. Így tehát $a = 0$ esetén $b = 0$, azaz $ac - b^2 = 0$. Ha $a > 0$, akkor

$$Q_M(-b,a) = ab^2 - 2ab^2 + ca^2 = a(ac - b^2) \geq 0,$$

ezért $ac - b^2 \geq 0$.

Tegyük fel, hogy

$$a \geq 0, \qquad c \geq 0 \qquad \text{és} \qquad ac - b^2 \geq 0.$$

Ha $a = 0$, akkor $ac - b^2 \geq 0$ miatt $b = 0$ és ekkor

$$Q_M(x,y) = cy^2 \geq 0 \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2).$$

Ha $a > 0$, akkor

$$\frac{ac - b^2}{a} \geq 0,$$

így

$$Q_M(x,y) \geq 0 \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2).$$

b) Ezt az állítást az előjelek megfordítása után ugynúgy bizonyíthatjuk, mint azelőzőt.

3. Tegyük fel, hogy Q_M indefinit. Ez azt jelenti, hogy Q_M nem pozitív szemidefinit és nem negatív szemidefinit. Így vagy a és c ellenkező előjelűek vagy $ac - b^2 < 0$. Ha a és c ellenkező előjelűek, akkor $ac < 0 \leq b^2$, ezért $ac - b^2 < 0$.

   Tegyük fel, hogy $ac - b^2 < 0$. Ha $a \neq 0$, akkor

   $$Q_M(1,0) = a \qquad \text{és} \qquad Q_M(-b,a) = ab^2 - 2ab^2 + ca^2 = a(ac - b^2)$$

   ellenkező előjelűek, így Q_M indefinit. Ha $a = 0$ és $c = 0$, akkor

   $$Q(1,1) = 2b \qquad \text{és} \qquad Q_M(-1,1) = -2b.$$

   Mivel ebben az esetben az $ac - b^2 < 0$ egyenlőtlenségből $b^2 > 0$ következik, ezért $b \neq 0$ és így Q_M indefinit. Ha $a = 0$ és $c \neq 0$, akkor

   $$Q(0,1) = c \qquad \text{és} \qquad Q_M(c,-b) = -2b^2c + b^2c = -b^2c$$

   ellenkező előjelűek, ezért Q_M indefinit. ■

1.4.8. példa. A

$$Q_M(x,y) := 5x^2 - 24xy + 29y^2 \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

kvadratikus alak pozitív definit, ugyanis

$$M = \begin{bmatrix} 5 & -12 \\ -12 & 29 \end{bmatrix}, \qquad 5 \cdot 29 - 144 = 1 > 0 \qquad \text{és} \qquad 5 > 0.$$

1.4.9. példa. A

$$Q_M(x,y) := 2x^2 + 2xy - y^2 \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

kvadratikus alak indefinit, ugyanis

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad 2 \cdot (-1) - 1 = -3 < 0.$$

1.4.3. definíció. Valamely

$$M = [m_{ij}]_{i,j=1}^{n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

mátrix esetén a

$$d_k := \det \begin{bmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1k} \\ & \ddots & \\ m_{k1} & \cdots & m_{kk} \end{bmatrix} \qquad (k \in \{1, \ldots, n\}),$$

számokat az M mátrix k-adik **sarokminor**ának nevezzük.

1.4.10. példa. Legyen $a, b, c \in \mathbb{R}$,

$$M := \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Ekkor

$$d_1 = a, \qquad d_2 = ad - bc = \det(M).$$

1.4.11. példa. Legyen $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$,

$$M := \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}.$$

Ekkor

$$d_1 = a, \qquad d_2 = ae - db = \det \begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix} \qquad \text{és} \qquad d_3 = \det(M).$$

1.4.4. definíció. Valamely

$$M = [m_{ij}]_{i,j=1}^{n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

mátrix esetén a

$$\Delta_r := \det(M_{\mathbf{i}}) \in \mathbb{R} \qquad (r \in \{1, \ldots, n\})$$

számokat az M mátrix r-edrendű **főminor**ának nevezzük (vö. 1.2.1. tétel).

1.4.12. példa. Legyen $a, b, c, d, e, f, g, h, i \in \mathbb{R}$. Ekkor az

$$M := \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

három darab elsőrendű főminora van:

$$a, \qquad e, \qquad i,$$

három másodrendű főminora van:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} \qquad \text{és} \qquad \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}$$

és egy darab harmadrendű főminora van:

$$\det(M).$$

1.4.1. tétel. (Sylvester-kritérium.) Az $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus mátrix, ill. az M meghatározta Q_M kvadratikus alak pontosan akkor

1. pozitív definit, ha
$$d_k > 0 \qquad (k \in \{1, \ldots, n\});$$
2. negatív definit, ha
$$(-1)^k d_k > 0 \qquad (k \in \{1, \ldots, n\});$$
3. pozitív szemidefinit, ha minden r-edrendű Δ_r főminorára $\Delta_r \geq 0$ teljesül $(r \in \{1, \ldots, n\})$;
4. negatív szemidefinit, ha minden r-edrendű Δ_r főminorára $(-1)^r \Delta_r \geq 0$ teljesül $(r \in \{1, \ldots, n\})$.

1.4.1. feladat. Vizsgáljuk meg a

$$Q_M(x, y, z, u) := 5x^2 + 5y^2 + 3z^2 + 3u^2 + 6xy + 2xz + 2xu + 2yz + 2yu + 4zu \qquad \left((x, y, z, u) \in \mathbb{R}^4\right)$$

kvadratikus alakok definitség szempontjából!

Útm. Mivel

$$M=\begin{bmatrix}5&3&1&1\\3&5&1&1\\1&1&3&2\\1&1&2&3\end{bmatrix},\qquad \text{továbbá}\qquad \det[5]=5>0,\qquad \det\begin{bmatrix}5&3\\3&5\end{bmatrix}=16>0,$$

$$\det\begin{bmatrix}5&3&1\\3&5&1\\1&1&3\end{bmatrix}=-\det\begin{bmatrix}1&1&3\\3&5&1\\5&3&1\end{bmatrix}=-\det\begin{bmatrix}1&1&3\\0&2&-8\\0&-2&-14\end{bmatrix}=-\det\begin{bmatrix}1&1&5\\0&2&-8\\0&0&-22\end{bmatrix}=44>0$$

és

$$\det(M)=72>0,$$

ezért Q_M negatív definit. ■

1.4.2. feladat. Vizsgáljuk meg a

$$Q_M(x,y,z):=-x^2-9y^2-2z^2+6xy\qquad \left((x,y,z)\in\mathbb{R}^3\right)$$

kvadratikus alakok definitség szempontjából!

Útm. Mivel

$$M=\begin{bmatrix}-1&3&0\\3&-9&0\\0&0&-2\end{bmatrix},$$

és

$$d_1=-1,\qquad d_2=0,\qquad d_3=0,$$

ezért Q_M nem definit. Mivel M elsőrendű főminorjaira:

$$(-1)\cdot(-1)>0,\qquad (-1)\cdot(-9)>0,\qquad (-1)\cdot(-2)>0,$$

másodrendű főminorjaira:

$$(-1)^2\det\begin{bmatrix}-1&3\\3&-9\end{bmatrix}=0,\qquad (-1)^2\det\begin{bmatrix}-1&0\\0&-2\end{bmatrix}=2>0,\qquad (-1)^2\det\begin{bmatrix}-9&0\\0&-2\end{bmatrix}=18>0,$$

továbbá egyetlen harmadrendű fő-, ill. sarokminorjára:

$$(-1)^3\Delta_3=(-1)^3d_3=0\geq 0$$

teljesül, azért Q_M negatív szemidefinit. ■

Mivel minden szimmetrikus mátrix sajátértéke valós szám, ezért, ha $M\in\mathbb{R}^{n\times n}$:

$$M^T=M,\qquad \lambda\in\sigma(M),\qquad M\mathbf{u}=\lambda\mathbf{u},$$

akkor

$$Q_M(\mathbf{u})=\langle M\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle=\langle\lambda\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle=\lambda\|\mathbf{u}\|^2,$$

normált sajátvektor ($\|\mathbf{u}\| = 1$) esetén pedig

$$Q_M(\mathbf{u}) = \lambda$$

teljesül.

1.4.1. tétel (Főtengelytétel). Ha $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$: $M^T = M$,

$$Q_M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad Q_M(\mathbf{r}) := \langle M\mathbf{r}, \mathbf{r}\rangle,$$

és

$$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \in \mathbb{R}^n$$

az M sajátvektoraiból álló ortonormált bázis,

$$M\mathbf{u}_k = \lambda_k \mathbf{u}_k \qquad (k \in \{1, \ldots, n\}),$$

akkor

$$Q_M(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \xi_k^2 \qquad (\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n),$$

ahol

$$\xi_k := \langle \mathbf{r}, \mathbf{u}_k\rangle \qquad (k \in \{1, \ldots, n\}).$$

Biz. Mivel

$$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \in \mathbb{R}^n$$

bázis és

$$\mathbf{r} = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \mathbf{u}_k,$$

ezért

$$\begin{aligned}
Q_M(\mathbf{r}) &= \langle M\mathbf{r}, \mathbf{r}\rangle = \left\langle M\sum_{k=1}^{n} \xi_k \mathbf{u}_k, \sum_{l=1}^{n} \xi_l \mathbf{u}_l \right\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} \xi_k M\mathbf{u}_k, \sum_{l=1}^{n} \xi_l \mathbf{u}_l \right\rangle = \\
&= \left\langle \sum_{k=1}^{n} \xi_k \lambda_k \mathbf{u}_k, \sum_{l=1}^{n} \xi_l \mathbf{u}_l \right\rangle = \sum_{k,l=1}^{n} \lambda_k \xi_k \xi_l \cdot \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_l\rangle = \\
&= \sum_{k,l=1}^{n} \lambda_k \xi_k \xi_l \cdot 1 = \sum_{k,l=1}^{n} \lambda_k \xi_k^2 \quad (\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

1.4.2. tétel. Az $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus mátrix meghatározta Q_M kvadratikus alak, ill. az M mátrix pontosan akkor

1. pozitív definit, ha M minden sajátértéke pozitív;
2. negatív definit, ha M minden sajátértéke negatív;
3. pozitív szemidefinit, ha M minden sajátértéke nemnegatív;
4. negatív szemidefinit, ha M minden sajátértéke nempozitív;
5. indefinit, ha M-nak van pozitív és negatív sajátértéke.

Biz.

1. lépés.. Ha

$$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \in \mathbb{R}^n$$

az M sajátvektoraiból álló ortonormált bázis,

$$M\mathbf{u}_k = \lambda_k \mathbf{u}_k \qquad (k \in \{1, \ldots, n\}),$$

akkor (vö. főtegelytétel előtti megjegyzés)

$$\lambda_k = Q_M(\mathbf{u}_k) \qquad (k \in \{1, \ldots, n\}),$$

így a (szemi)definitségekre vonatkozó állítások „szükséges” részeit beláttuk.

2. lépés.. A (szemi)definitségekre vonatkozó állítások „elégséges” részek belátásához a főtengelytételt fogjuk felhasználni. Világos, hogy

$$\xi_k^2 = \langle \mathbf{r}, \mathbf{u}_k \rangle^2 \geq 0 \qquad (k \in \{1, \ldots, n\}).$$

1. Ha

   $$\lambda_k > 0 \qquad (k \in \{1, \ldots, n\}) \qquad \text{és} \qquad \mathbf{0} \neq \mathbf{r} \in \mathbb{R}^n,$$

   akkor valamely $k \in \{1, \ldots, n\}$ indexre $\xi_k \neq 0$, így

   $$\sum_{k=1}^{n} \xi_k^2 > 0, \qquad \text{azaz} \qquad Q_M(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \xi_k^2 > 0 \quad (\mathbf{0} \neq \mathbf{r} \in \mathbb{R}^n).$$

   Ez azt jelenti, hogy Q_M, ill. M pozitív definit.

2. Ha

   $$\lambda_k < 0 \qquad (k \in \{1, \ldots, n\}),$$

   akkor minden $k \in \{1, \ldots, n\}$ esetén $-\lambda_k > 0$ sajátértéke a $-M$ mátrixnak, ami a fentiek következtében pozitív definit, azaz M, ill. Q_M negatív definit.

3. Ha

   $$\lambda_k \geq 0 \qquad (k \in \{1, \ldots, n\}),$$

   akkor

   $$Q_M(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \xi_k^2 \geq 0 \qquad (\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n),$$

   azaz Q_M pozitív szemidefinit.

4. Ha
$$\lambda_k \leq 0 \qquad (k \in \{1, \ldots, n\}),$$
akkor minden $k \in \{1, \ldots, n\}$ esetén $-\lambda_k \geq 0$ sajátértéke a $-M$ mátrixnak, ami a fentiek következtében pozitív szemidefinit, azaz M, ill. Q_M negatív szemidefinit.

3. lépés.. Mivel Q_M, ill. M pontosan akkor nem indefinit, ha szemidefinit, azaz vagy minden sajátértéke nemnegatív, vagy minden sajátértéke nempozitív. Így tehát Q_M, ill. M pontosan akkor indefinit, ha van pozitív és negatív sajátértéke is. ■

1.4.13. példa. A
$$Q_M(x, y) := 4x^2 - 12xy + 9y^2 \qquad \left((x, y) \in \mathbb{R}^2\right)$$
kvadratikus alak pozitív szemidefinit, ugyanis
$$M = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 9 \end{bmatrix}$$
karakterisztikus polinomja
$$p_M(z) = z^2 - 13z \qquad (z \in \mathbb{C}),$$
melynek gyökei és így M sajátértékei: 0 és 13.

1.4.14. példa. A
$$Q_M(x, y, z) := x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 4xy - 4xz - 8yz \qquad \left((x, y, z) \in \mathbb{R}^3\right)$$
kvadratikus alak pozitív definit, ugyanis
$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$
karakterisztikus polinomja
$$p_M(z) = z^3 - 11z^2 + 11z - 1 \qquad (z \in \mathbb{C}),$$
melynek gyökei és így M sajátértékei:
$$1, \qquad 5 + \sqrt{24} \qquad \text{és} \qquad 5 - \sqrt{24}.$$

1.4.1. gyakorló feladat. Adjuk meg azokat a szimmetrikus M mátrixokat, amelyek az alábbi Q_M kvadratikus alakokat határozzák meg, majd dönstük el, hogy a „definitséget” illetően Q_M melyik kategóriába tartozik!

1. $Q_M(x,y) := 4x^2 - 4xy + y^2 \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$;
2. $Q_M(x,y) := 7x^2 + 6xy - y^2 \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$;
3. $Q_M(x,y) := 5x^2 + 2xy + 5y^2 \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$;
4. $Q_M(x,y) := -2y^2 \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$;
5. $Q_M(x,y) := 6xy + 8y^2 \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$;
6. $Q_M(x,y) := 9x^2 + 12xy + 4y^2 \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$;
7. $Q_M(x,y) := 16x^2 - 24xy + 5y^2 \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$;
8. $Q_M(x,y,z) := 2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 2xz + 4yz \quad ((x,y,z) \in \mathbb{R}^3)$;
9. $Q_M(x,y,z) := 3x^2 - 2y^2 - z^2 + 4xy + 8xz - 12yz \quad ((x,y,z) \in \mathbb{R}^3)$;
10. $Q_M(x,y,z) := x^2 - y^2 + 2z^2 \quad ((x,y,z) \in \mathbb{R}^3)$;
11. $Q_M(x,y,z) := 7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz \quad ((x,y,z) \in \mathbb{R}^3)$;
12. $Q_M(x,y,z) := y^2 - z^2 + 4xy - 4xz \quad ((x,y,z) \in \mathbb{R}^3)$.

Útm.

1.4.5. definíció. Adott $m, n \in \mathbb{N}$: $m < n$ esetén azt mondjuk, hogy a szimmetrikus $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix ($M^T = M$), ill. a

$$Q_M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad Q_M(\mathbf{r}) := \langle M\mathbf{r}, \mathbf{r}\rangle$$

kvadratikus alak **feltételesen pozitív**, ill. **negatív definit a** teljes rangú $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ **mátrixra vonatkozóan**, ha Q_M pozitív, ill. negatív definit B magterén, pontosabban, ha valamely $\mathbf{0} \neq \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ vektorra $B\mathbf{u} = \mathbf{0}$, akkor

$$Q_M(\mathbf{u}) > 0, \qquad \text{ill.} \qquad Q_M(\mathbf{u}) < 0$$

teljesül.

A B mátrix teljes rangú volta $m < n$ következtében azt jelenti, hogy

$$\operatorname{rang}(B) = m.$$

1.4.15. példa. Ha $m = 1$, $n = 2$, ill. $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ és

$$M := \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix},$$

ill.

$$Q_M(x,y) := ax^2 + 2bxy + cy^2 \quad \left((x,y) \in \mathbb{R}^2\right), \qquad B := \left[\begin{array}{cc} d & e \end{array}\right],$$

akkor

$$\operatorname{rang}(B) = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad d^2 + e^2 > 0,$$

így az $\mathbf{u} = (x, y)$ pontosan akkor tartozik B magterébe, ha $dx + ey = 0$ teljesül. Ha pl. $e \neq 0$, akkor az $y = -(d/e)x$-et Q_M-ba helyettesítve azt kapjuk, hogy

$$Q_M(\mathbf{u}) = ax^2 + 2bx\left(-\frac{d}{e}x\right) + c\left(-\frac{d}{e}x\right)^2 = \frac{(ae^2 - 2bde + cd^2)x^2}{e^2} \qquad (\mathbf{u} = (x,y) \in \mathbb{R}^2).$$

Mivel

$$ae^2 - 2bde + cd^2 = -\det\begin{bmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & 0 \end{bmatrix} = -\det\begin{bmatrix} M & B^T \\ B & O \end{bmatrix},$$

ezért Q_M pozitív definitsége azzal egyenértékű, hogy az iménti determináns negatív előjelű.

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy előfordulhat az az eset is, hogy Q_M ugyan indefinit kvadratikus alak, de alkalmas B mátrixra vonatkozóan már definit.

1.4.16. példa. Ha

$$M := \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{bmatrix},$$

akkor (vö. pl. 1.4.1. tétel)

$$\det(M) = -2 < 0$$

következtében indefinit. Ha

$$B := \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \end{array}\right],$$

akkor

$$\ker(B)\backslash\{\mathbf{0}\} = \left\{(c, -c) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \neq c \in \mathbb{R}\right\}$$

alakú. Így, ha valamely $0 \neq c \in \mathbb{R}$ esetén $\mathbf{u} := (c, -c)$, akkor

$$Q_M(\mathbf{u}) = c^2 - 6c^2 + 7c^2 = 2c^2 > 0,$$

azaz Q_M feltételesen pozitív definit B-re vonatkozóan.

1.4.3. tétel. Legyen $m, n \in \mathbb{N}$: $m < n$. A szimmetrikus $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix ($M^T = M$), ill. a

$$Q_M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad Q_M(\mathbf{r}) := \langle M\mathbf{r}, \mathbf{r}\rangle$$

kvadratikus alak pontosan akkor feltételesen pozitív, ill. negatív definit a teljes rangú $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mátrixra vonatkozóan, ha a

$$C := \begin{bmatrix} M & B^T \\ B & O \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+m)\times(n+m)}$$

ún. **szegélyezett mátrix** c_k $(k \in \{1, \ldots, n+m\})$ sarokminorjaira

$$(-1)^m c_k > 0, \quad \text{ill.} \quad (-1)^{m+k} c_k > 0 \qquad (k \in \{2m+1, \ldots, n+m\})$$

teljesül.

Biz. ■

Ha $n = m + 1$, azaz $2m + 1 = m + m + 1 = m + n = n + m$ (vö. 1.4.15. példa), akkor csak egyetlen egy mátrixnak, magának a szegélyezett mátrixnak a determinánsát kell kiszámítani. A gyakorlatban sokszor találkozhatunk az $n = 2$, $m = 1$ esettel ($n = m + 1$). Ekkor

– $\det(C) < 0$ esetén az M mátrix feltételesen pozitív definit a B mátrixra vonatkozóan,

– $\det(C) > 0$ esetén az M mátrix feltételesen negatív definit a B mátrixra vonatkozóan.

1.4.3. feladat. Igazoljuk, hogy ha

$$M := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 9 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \qquad \text{és} \qquad B := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3},$$

akkor M feltételesen pozitív definit B-re vonatkozóan!

Útm. Világos, hogy a

$$C := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 9 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5}$$

mátrix determinánsára

$$\begin{aligned}
\det(C) &= \det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -7 \\ 0 & -3 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & -7 & -2 & -4 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 & -3 \\ -2 & 0 & -2 & -7 \\ -3 & -2 & -1 & -2 \\ -3 & -7 & -2 & -4 \end{bmatrix} = \\
&= \det\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 7 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \\
&= -2\cdot\det\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} + 3\cdot\det\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 7 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \\
&= -2\cdot\det\begin{bmatrix} -13 & 3 & -3 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + 3\cdot\det\begin{bmatrix} -13 & 3 & -3 \\ -10 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \\
&= -18 - 3(-69) = 189 > 0
\end{aligned}$$

teljesül, ezért

$$(-1)^2\det(C) > 0.$$

Ez azt jelenti, hogy az M mátrix feltételesen pozitív definit a B mátrixra vonatkozóan. ■

1.5. Többváltozós függvények szélsőértéke

1.5.1. definíció. Adott $d \in \mathbb{N}$, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d$, ill. $\varepsilon > 0$ esetén a

$$K_\varepsilon(\mathbf{a}) := \left\{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^d : \ \|\mathbf{r} - \mathbf{a}\| < \varepsilon\right\}$$

halmazt az **a** pont ε sugarú környezetének nevezzük.

1.5.2. definíció. Azt mondjuk, hogy az $f \in \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ függvénynek valamely $\mathbf{a} \in \mathcal{D}_f$ helyen

– **lokális minimuma** van, ha alkalmas $\delta > 0$ szám esetén

$$f(\mathbf{r}) \geq f(\mathbf{a}) \qquad (\mathbf{r} \in \mathcal{D}_f \cap K_\delta(\mathbf{a}));$$

– **lokális maximuma** van, ha alkalmas $\delta > 0$ szám esetén

$$f(\mathbf{r}) \leq f(\mathbf{a}) \qquad (\mathbf{r} \in \mathcal{D}_f \cap K_\delta(\mathbf{a}));$$

– **lokális szélsőértéke** van, ha ha f-nek $\mathbf{a}$-ban lokális minimuma vagy lokális maximuma van;

– **abszolút minimuma** van, ha

$$f(\mathbf{r}) \geq f(\mathbf{a}) \qquad (\mathbf{r} \in \mathcal{D}_f);$$

– **abszolút maximuma** van, ha

$$f(\mathbf{r}) \leq f(\mathbf{a}) \qquad (\mathbf{r} \in \mathcal{D}_f);$$

– **abszolút szélsőértéke** van, ha f-nek $\mathbf{a}$-ban abszolút minimuma vagy abszolút minimuma van.

1.5.3. definíció. Ha $f \in \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ és $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d$ a $\mathcal{D}_f$ belső pontja /jelben $\mathbf{a} \in \operatorname{int}(\mathcal{D}_f)$/, azaz alkalmas $\delta > 0$ esetén $K_\delta(\mathbf{a}) \subset \mathcal{D}_f$, továbbá $f \in \mathfrak{D}[\mathbf{a}]$ és

$$f'(\mathbf{a}) = \operatorname{grad} f(\mathbf{a}) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^d,$$

akkor az a pontot az f **stacionárius pont**jának nevezzük.

1.5.0. tétel (Elsőrendű szükséges feltétel a lokális szélsőérték létezésére.) Ha az $f \in \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ függvénynek az $\mathbf{a} \in \operatorname{int}(\mathcal{D}_f)$ pontban lokális szélsőértéke van, továbbá $f \in \mathfrak{D}[\mathbf{a}]$, akkor $\mathbf{a}$ az f stacionárius pontja.

Biz. ■

1.5.1. feladat. Adjunk példát olyan $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvényre, amelynek valamely $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$

1. pontban szélsőértéke van, de a nem stacionárius pontja f-nek;
2. stacionárius pontja, de f-nek nincsnen $\mathbf{a}$-ban szélsőértéke!

Útm.

1. Az
$$f(x) := \sqrt{x^2+y^2} \qquad ((x,y)\in\mathbb{R}^2)$$
függvénynek a $\mathbf{0}$ pontban abszolút minimuma van, de ebben a pontban egyik parciális deriváltja sem létezik.

2. Az
$$f(x,y) := xy \qquad ((x,y)\in\mathbb{R}^2$$
függvénynek a $\mathbf{0}$ stacionárius pontja, hiszen
$$f'(\mathbf{0}) = \operatorname{grad} f(\mathbf{0}) = (\partial_1 f(\mathbf{0}), \partial_2 f(\mathbf{0}))) = \mathbf{0},$$
de f-nek a $\mathbf{0}$ pontban nincsen szélsőértéke, hiszen $f(\mathbf{0})=0$ és f a $\mathbf{0}$ bármely környezetében pozitív és negatív értéket is felvesz. ■

1.5.0. tétel (Másodrendű szükséges feltétel a lokális szélsőérték létezésére). Ha az $f\in\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ függvénynek $\mathbf{a}\in\operatorname{int}(\mathcal{D}_f)$ pontban lokális minimuma [maximuma] van, továbbá $f\in\mathfrak{D}^2[\mathbf{a}]$, akkor

– $f'(\mathbf{a}) = \operatorname{grad} f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$;

– a
$$Q^f_{\mathbf{a}}(\mathbf{r}) := \langle f''(\mathbf{a})\mathbf{r},\mathbf{r}\rangle = \langle H_f(\mathbf{a})\mathbf{r},\mathbf{r}\rangle \qquad (\mathbf{r}\in\mathbb{R}^d)$$
kvadratikus alak pozitív [negatív] szemidefinit.

Biz. ■

1.5.0. tétel (Másodrendű elégséges feltétel a lokális szélsőérték létezésére). Tegyük fel, hogy az $f\in\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ differenciálható függvényre valamely $\mathbf{a}\in\operatorname{int}(\mathcal{D}_f)$ pontban az alábbi feltételek teljesülnek:

– $f\in\mathfrak{D}^2[\mathbf{a}]$ és $f'(\mathbf{a}) = \operatorname{grad} f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$;

– a $Q^f_{\mathbf{a}}$ kvadratikus alak pozitív [negatív] definit.

Ekkor f-nek az a pontban lokális minimuma [maximuma] van.

Biz. ■

1.5.2. feladat. Határozzuk meg az
$$f(x,y) := x^3-3x^2+2xy+y^2 \qquad ((x,y)\in\mathbb{R}^2)$$
függvény lokális szélsőértékhelyeit!

Útm. Mivel
$$f'(x,y) = \operatorname{grad} f(x,y) = \left(3x^2-6x+2y, 2x+2y\right) \qquad ((x,y)\in\mathbb{R}^2),$$

$$f'(x,y) = (0{,}0) \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \{(0{,}0),(8/3,-8/3)\}\,,$$

$$f''(x,y) = H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 6x-6 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2),$$

így $f''(8/3,-8/3)$ pozitív definit, tehát $(8/3,-8/3)$-ban f-nek lokális minimuma van. $f''(0{,}0)$ indefinit, így a $(0{,}0)$ pont nem szélsőértékhelye f-nek. Ez persze úgy is belátható, hogy $f(0{,}0) = 0$ és $(0{,}0)$ tetszőleges környezetében f felvesz pozitív és negatív értéket is, hiszen

$$f(x,x) = x^3 \qquad (x \in \mathbb{R}). \quad \blacksquare$$

1.5.3. feladat. Van-e lokális szélsőértéke az alábbi függvényeknek:

1. $f(x,y) := x^2 + 2y^2 + xy - x + 3y + 4$ $((x,y) \in \mathbb{R}^2)$;
2. $f(x,y) := x^4 + y^2$ $((x,y) \in \mathbb{R}^2)$;
3. $f(x,y) := x^3 + y^2$ $((x,y) \in \mathbb{R}^2)$?

Útm.

1. Mivel
$$f'(x,y) = \operatorname{grad} f(x,y) = (2x+y-1{,}4y+x+3) \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2),$$
$$f'(x,y) = (0{,}0) \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \{(1,-1)\}\,,$$
$$f''(x,y) = H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2),$$
ezért $f''(1,-1)$ pozitív definit, f-nek tehát $(1,-1)$-ben lokális minimuma van.

2. Mivel
$$f'(x,y) = \operatorname{grad} f(x,y) = (4x^3{,}2y) \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2),$$
$$f'(x,y) = (0{,}0) \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \{(0{,}0)\}\,,$$
$$f''(x,y) = H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2),$$
ezért $f''(0{,}0)$ pozitív szemidefinitdefinit. Tehát ha f-nek $(0{,}0)$-ban van lokális szölsőértéke, akkor az csak (lokális) minimum lehet. Mivel $f(0{,}0) = 0$ és tetszőleges $\mathbf{0} \neq \mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ esetén $f(\mathbf{a}) > 0$, ezért f-nek $(0{,}0)$-ban lokális (sőt szigorú abszolút) minimuma van.

3. Mivel
$$f'(x,y) = \operatorname{grad} f(x,y) = (3x^2{,}2y) \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2),$$
$$f'(x,y) = (0{,}0) \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \{(0{,}0)\}\,,$$
$$f''(x,y) = H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2),$$
ezért $f''(0{,}0)$ pozitív szemidefinitdefinit. Tehát ha f-nek $(0{,}0)$-ban van lokális szölsőértéke, akkor az csak (lokális) minimum lehet. f-nek azonban nincsen $(0{,}0)$-ban lokális szélsőértéke, ui. f $(0{,}0)$ tetszőleges környezetében felvesz pozitív és negatív értéket is. $\blacksquare$

1.5.4. feladat. Vizsgáljuk az alábbi függvényeket lokális szélsőérték szempontjából!

1. $f(x,y) := 2 + 3x + 12y - x^3 - y^3$ $((x,y) \in \mathbb{R}^2)$;
2. $f(x,y) := (x^2 + 2y^2)e^{-x^2-y^2}$ $((x,y) \in \mathbb{R}^2)$;
3. $f(x,y) := x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$ $((x,y) \in \mathbb{R}^2)$;
4. $f(x,y) := x^3 + y^3 - (x+y)^2$ $((x,y) \in \mathbb{R}^2)$;
5. $f(x,y,z) := x^2 + y^2 + z^2 - xy + 2z - 6x$ $((x,y,z) \in \mathbb{R}^3)$;
6. $f(x,y,z) := x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$ $((x,y,z) \in \mathbb{R}^3)$;
7. $f(x,y,z) := x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$ $((x,y,z) \in \mathbb{R}^3)$.

Útm.

1. Mivel

$$f'(x,y) = \operatorname{grad} f(x,y) = (3 - 3x^2, 12 - 3y^2) \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2),$$

$$f'(x,y) = (0,0) \quad \Longleftrightarrow \quad (x,y) \in \{(1,2); (1,-2); (-1,2); (-1,-2)\},$$

$$f''(x,y) = H_f(x,y) = \begin{bmatrix} -6x & 0 \\ 0 & -6y \end{bmatrix} \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2),$$

ezért

- $f''(1,2) = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -12 \end{bmatrix}$ negatív definit, így f-nek $(1,2)$-ben lokális maximuma van,
- $f''(1,-2) = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}$ indefinit, így f-nek $(1,-2)$-ben nincsen szélsőértéke,
- $f''(-1,2) = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -12 \end{bmatrix}$ indefinit, így f-nek $(-1,2)$-ben nincsen szélsőértéke,
- $f''(-1,-2) = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}$ pozitív definit, így f-nek $(-1,-2)$-ben lokális minimuma van.

2. Mivel

$$f'(x,y) = \operatorname{grad} f(x,y) = e^{-x^2-y^2}(2x(1 - x^2 - 2y^2), 2y(2 - x^2 - 2y^2)) \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2),$$

$$f'(x,y) = (0,0) \quad \Longleftrightarrow \quad (x,y) \in \{(0,0); (-1,0); (1,0); (0,-1); (0,1)\},$$

$$\begin{aligned} f''(x,y) &= H_f(x,y) = \\ &= e^{-x^2-y^2} \begin{bmatrix} (1 - x^2 - 2y^2)(2 - 4x^2) - 4x^2 & -4xy(3 - x^2 - 2y^2) \\ -4xy(3 - x^2 - 2y^2) & (2 - x^2 - 2y^2)(2 - 4y^2) - 8y^2 \end{bmatrix} \\ &\quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2), \end{aligned}$$

ezért

a) az $f''(0{,}0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ pozitív definit ($2 \cdot 4 - 0 \cdot 0 = 8 > 0$ és $2 > 0$), így f-nek $(0{,}0)$-ban lokális minimuma van;

b) az $f''(0{,}1) = \begin{bmatrix} -2/e & 0 \\ 0 & -8/e \end{bmatrix}$ negatív definit ($(-2/e) \cdot (-8/e) - 0 \cdot 0 = 16/e^2 > 0$ és $-2/e < 0$), így f-nek $(0{,}1)$-ben lokális minimuma van;

c) az $f''(0,-1) = \begin{bmatrix} -2/e & 0 \\ 0 & -8/e \end{bmatrix}$ negatív definit ($(-2/e) \cdot (-8/e) - 0 \cdot 0 = 16/e^2 > 0$ és $-2/e < 0$), így f-nek $(0,-1)$-ben lokális minimuma van;

d) az $f''(1{,}0) = \begin{bmatrix} -4/e & 0 \\ 0 & 2/e \end{bmatrix}$ indefinit ($(-4/e) \cdot (2/e) - 0 \cdot 0 = -8/e^2 < 0$), így f-nek $(1{,}0)$-ban nincsen szélsőértéke;

e) az $f''(-1{,}0) = \begin{bmatrix} -4/e & 0 \\ 0 & 2/e \end{bmatrix}$ indefinit ($(-4/e) \cdot (2/e) - 0 \cdot 0 = -8/e^2 < 0$), így f-nek $(-1{,}0)$-ban nincsen szélsőértéke.

3. Mivel

$$f'(x,y) = \operatorname{grad} f(x,y) = (4x^3 - 2x - 2y, 4y^3 - 2x - 2y) \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2),$$

$$f'(x,y) = (0{,}0) \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \{(-1,-1),(0{,}0),(1{,}1)\},^{4}$$

$$f''(x,y) = H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 12x^2 - 2 & -2 \\ -2 & 12y^2 - 2 \end{bmatrix} \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2),$$

ezért

– $f''(-1,-1) = \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{bmatrix}$ pozitív definit, így f-nek $(-1,-1)$-ben lokális minimuma van;

– $f''(1{,}1) = \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{bmatrix}$ pozitív definit, így f-nek $(1{,}1)$-ben lokális minimuma van;

– $f''(0{,}0) = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$ negatív szemidefinit, így f-nek $(0{,}0)$-ben legfeljebb csak lokális maximuma lehet. Mivel az $x = 0$ egyenes mentén $(0{,}0)$-ban lokális maximum, az $y = -x$ egyenes mentén pedig lokális minimum van, ezért ebben a pontban f-nek nincsen lokális szélsőértéke. (Vizsgáljuk meg ehhez a $\varphi(y) := f(0,y)$ és a $\psi(x) := f(x,-x)$ függvényeket!)

4. Mivel

$$f'(x,y) = \operatorname{grad} f(x,y) = (3x^2 - 2(x+y), 3y^2 - 2(x+y)) \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2),$$

$$f'(x,y) = (0{,}0) \quad \Longleftrightarrow \quad (x,y) \in \left\{ \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right), (0{,}0) \right\},$$

[4] $(4x^3 - 2x - 2y = 0$ és $4y^3 - 2x - 2y = 0) \Leftrightarrow x^3 = y^3 \Leftrightarrow x = y$, majd x helyére y-t helyettesítve $4x^3 - 2x - 2x = 4x(x-1) =$-ból $x \in \{-1{,}0{,}1\}$, és így $x \in \{-1{,}0{,}1\}$.

$$f''(x,y) = H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 6x-2 & -2 \\ -2 & 6y-2 \end{bmatrix} \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2),$$

ezért

- $f''(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}) = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$ pozitív definit, így f-nek $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$-ban lokális maximuma van,
- $f''(0{,}0) = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$ negatív szemidefinit, így f-nek $(0{,}0)$-ban legfeljebb lokális maximum lehet. De $f(0{,}0) = 0$, ezért lokális maximum esetén van olyan $r > 0$ szám, hogy
$$f(x,y) \leq 0 \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2+y^2} < r).$$
Legyen $x > 0$, $-1 < \lambda < 0$, ekkor
$$\begin{aligned} f(x, \lambda x) &= x^3(1+\lambda^3) - x^2(1+\lambda)^2 = x^2\left[x(\lambda+1)(\lambda^2-\lambda+1) - (1+\lambda)^2\right] = \\ &= x^2(1+\lambda)^2\left[x\frac{\lambda^2-\lambda+1}{1+\lambda} - 1\right] =: x^2(1+\lambda)^2 P_x(\lambda) \end{aligned}$$
Mivel
$$\frac{\lambda^2-\lambda+1}{1+\lambda} \to +\infty \qquad (\lambda \to -1+0),$$
ezért
$$P_x(\lambda) \to +\infty \qquad (\lambda \to -1+0).$$
Továbbá bármely
$$r > 0, \qquad 0 < x < \frac{r}{\sqrt{2}}, \qquad \text{ill.} \qquad -1 < \lambda < 0$$
esetén
$$\sqrt{x^2+(\lambda x)^2} < r, \qquad \text{azaz} \qquad f(x, \lambda x) > 0.$$
Így tehát $(0{,}0)$-ban nincsen lokális szélsőérték.

5. Mivel
$$f'(x,y,z) = \operatorname{grad} f(x,,zy) = (2x-6-y, 2y-x, 2z+2) \qquad ((x,y,z) \in \mathbb{R}^3),$$
$$f'(x,y,z) = (0{,}0{,}0) \quad \Longleftrightarrow \quad (x,y,z) \in \{(4{,}2,-1)\},$$
$$f''(x,y,z) = H_f(x,y,z) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad ((x,y,z) \in \mathbb{R}^3),$$
ezért $f''(4{,}2,-1)$ pozitív definit, így f-nek $(4{,}2,-1)$-ben lokális minimuma van.

6. Mivel
$$f'(x,y,z) = \operatorname{grad} f(x,y,z) = (2x+2, 2y+4, 2z-6) \qquad ((x,y,z) \in \mathbb{R}^3),$$
$$f'(x,y,z) = (0{,}0{,}0) \quad \Longleftrightarrow \quad (x,y,z) \in \{(-1,-2{,}3)\},$$

$$f''(x,y,z) = H_f(x,y,z) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad ((x,y,z) \in \mathbb{R}^3),$$

ezért $f''(0,0,0)$ pozitív definit, így f-nek $(0,0,0)$-ban lokális minimuma van.

7. Mivel

$$f'(x,y,z) = \operatorname{grad} f(x,y,z) = (3x^2 + 12y, 2y + 12x, 2z + 2) \qquad ((x,y,z) \in \mathbb{R}^3),$$

$$f'(x,y,z) = (0,0,0) \quad \Longleftrightarrow \quad (x,y,z) \in \{(0,0,-1); (24,-144,-1)\},$$

$$f''(x,y,z) = H_f(x,y,z) = \begin{bmatrix} 6x & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad ((x,y,z) \in \mathbb{R}^3),$$

ezért

– $f''(0,0,-1)$ indefinit, hiszen karakterisztikus polinomja

$$p(z) := (z-2)(z^2 - 2z - 144) \qquad (z \in \mathbb{C}),$$

aminek van pozitív és negatív zérushelye, így f-nek $(0,0,-1)$-ben nincsen szélsőértéke;

– $f''(24,-144,-1) = \begin{bmatrix} 144 & 0 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ pozitív definit, így f-nek $(24,-144,-1)$-ben lokális minimuma van. ■

Mérési eredmények kiértékelésekor gyakran találkozunk az alábbi feladattal.

1.5.5. feladat. Valamely mérés eredményeként a

$$P(x_1, y_1), \quad \ldots, \quad P_n(x_n, y_n)$$

pontokat kapjuk, $x_1 < \ldots < x_n$. Határozzuk meg azt az $y = Ax + B$ egyenletű egyenest, amely legjobban közelíti a mérési pontokat! A legjobb közelítés azt jelenti, hogy az

$$\sum_{k=1}^{n} (Ax_k + B - y_k)^2$$

összeg minimális.

Útm. Legyen

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(A,B) := \sum_{k=1}^{n} (Ax_k + B - y_k)^2.$$

Mivel f deriválható és

$$f'(A,B) = \left(\sum_{k=1}^{n} 2x_k(Ax_k + B - y_k), \sum_{k=1}^{n} 2(Ax_k + B - y_k) \right) = (0,0) \qquad ((A,B) \in \mathbb{R}^2),$$

ezért $f'(A,B)=(0{,}0)$ pontosan akkor teljesül, ha

$$A\sum_{k=1}^n x_k^2+B\sum_{k=1}^n x_k-\sum_{k=1}^n x_ky_k=0 \qquad \text{és} \qquad A\sum_{k=1}^n x_k+nB-\sum_{k=1}^n y_k=0.$$

Az

$$\overline{x}:=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k, \qquad \text{ill. az} \qquad \overline{y}:=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n y_k$$

jelölés bevezetésével azt kapjuk, hogy

$$B=-A\overline{x}+\overline{y}, \qquad \text{ill.} \qquad A=\frac{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_ky_k-\overline{xy}}{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k^2-\overline{x}^2}$$

A nevező az ún. **empirikus szórásnégyzet**: σ_n^2 (a számtani és a négyzetes közép közötti egyenlőtlenség miatt pozitív).

$$\det(f''(A,B))=\det\begin{bmatrix}2\sum_{k=1}^n x_k^2 & 2n\overline{x}\\ 2n\overline{x} & 2n\end{bmatrix}=4n^2\sigma_n^2>0,$$

így valóban lokális minimum van.
Megjegyzés. Ha a mérési pontok közelítőleg az $y=be^{Ax}$ egyenletű görbére illeszkednek, A és b meghatározása az előző feladatra vezethető vissza, ui.

$$\ln(y)=\ln(b)+Ax$$

(feltéve, hogy $b>0$, $y_k>0$). Hasonlóan vezethető vissza az alapfeladatra az $y=bx^A$ kapcsolat is. ■

1.5.1. gyakorló feladat. Határozzuk meg az alábbi függvények lokális szélsőértékeit!

1. $f(x,y):=(1+e^y)\cos(x)-ye^y \ ((x,y)\in\mathbb{R}^2)$;
2. $f(x,y):=(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)} \ ((x,y)\in\mathbb{R}^2)$;
3. $f(x,y,z):=x^2+y^3+z^2+2x+4y-6z \ ((x,y,z)\in\mathbb{R}^3)$;
4. $f(x,y,z):=x+\dfrac{y^2}{x}+\dfrac{z^2}{y}+\dfrac{2}{z} \ ((x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x,y,z>0)$.

Útm.

1.5.0. tétel (Weierstraß). Ha $d\in\mathbb{N}$, $H\subset\mathbb{R}^d$ kompakt (korlátos és zárt) halmaz, továbbá az $f:H\to\mathbb{R}$ függvény folytonos, akkor alkalmas $\mathbf{a},\mathbf{b}\in H$ pontokra

$$f(\mathbf{a})=\min\{f(\mathbf{r})\in\mathbb{R}:\ \mathbf{r}\in H\} \qquad \text{és} \qquad f(\mathbf{b})=\max\{f(\mathbf{r})\in\mathbb{R}:\ \mathbf{r}\in H\}$$

teljesül.
Biz. ■

1.5.6. feladat. Igazoljuk, hogy ha $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^2$ nyílt halmaz, továbbá $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ olyan nem állandó folytonos függvény, amely differenciálható Ω-n, úgy ha f állandó az Ω halmaz $\partial\Omega$ határán, akkor f-nek van stacionárius pontja az Ω halmazban!

Útm. Mivel $\overline{\Omega}$ kompakt (korlátos és zárt) és f folytonos, ezért Weierstraß tétele következtében van olyan $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \overline{\Omega}$, hogy

$$f(\mathbf{a}) = \min\left\{f(\mathbf{r}) \in \mathbb{R} : \; \mathbf{r} \in \overline{\Omega}\right\} \qquad \text{és} \qquad f(\mathbf{b}) = \max\left\{f(\mathbf{r}) \in \mathbb{R} : \; \mathbf{r} \in \overline{\Omega}\right\}.$$

Mivel f állandó $\partial\Omega$-n, ezért

$$\mathbf{a} \in \Omega \qquad \text{vagy} \qquad \mathbf{b} \in \Omega,$$

így (vö. 1.5.0. tétel) $\mathbf{a}$ vagy $\mathbf{b}$ stacionárius pontja f-nek. ■

1.5.7. feladat. Adott $c > 0$ szám, ill.

$$\Omega := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x \in [0, c], \, y \in [c - x, c]\right\}$$

halmaz esetén számítsuk ki az

$$f(x, y) := \sqrt{c(c - x)(c - y)(x + y - c)} \qquad ((x, y) \in \Omega)$$

függvény abszolút maximumhelyét!

Útm. Mivel $f \geq 0$ és Ω határán $f = 0$:

$$f(x, y) = 0 \qquad ((x, y) \in \partial\Omega),$$

ezért, ha f-nek van maximuma, azt az Ω belsejében veszi fel. f folytonos az Ω kompakt (korlátos és zárt) halmazon, ezért Weierstraß tétele következményeként van olyan

$$(a, b) \in \Omega \backslash \partial\Omega$$

pont, amelyben f felveszi maximumát. Erre a pontra

$$\partial_1 f(a, b) = 0 \qquad \text{és} \qquad \partial_2 f(a, b) = 0,$$

azaz

$$\left.\frac{c(c - y)(2c - 2x - y)}{2f(x, y)}\right|_{(x,y)=(a,b)} = 0 \qquad \text{és} \qquad \left.\frac{c(c - x)(2c - 2y - x)}{2f(x, y)}\right|_{(x,y)=(a,b)} = 0$$

vagyis

$$c(c - b)(2c - 2a - b) = 0 \qquad \text{és} \qquad c(c - a)(2c - 2b - a) = 0$$

teljesül. Mivel (a, b) belső pontja Ω-nak, ezért

$$2c - 2a - b = 0 \qquad \text{és} \qquad 2c - 2b - a = 0,$$

amiből

$$a = b = \frac{2c}{3}$$

következik. ■

1.5.8. feladat. Egy adott körbe írható háromszögek közül melyiknek lesz a

1. kerülete
2. területe

a legnagyobb?

Útm.

1. Ha R a kör sugara, akkor (vö. ábra) a háromszög kerülete:

$$K = 2R\left[\sin(\alpha) + \sin(\beta) + \sin(\gamma)\right].$$

Mivel $\gamma = \pi - \alpha - \beta$, ezért

$$\sin(\gamma) = \sin(\pi - (\alpha + \beta)) = \sin(\alpha + \beta).$$

Tehát az

$$f(\alpha, \beta) := \sin(\alpha) + \sin(\beta) + \sin(\alpha + \beta) \qquad (\alpha, \beta > 0,\ \alpha + \beta < \pi)$$

függvény abszolút maximumhelyét kell meghatároznunk. Mivel

$$\partial_1 f(\alpha, \beta) = \cos(\alpha) + \cos(\alpha + \beta) = 0, \qquad \partial_2 f(\alpha, \beta) = \cos(\beta) + \cos(\alpha + \beta) = 0$$

csak akkor teljesül, ha $\cos(\alpha) = \cos(\beta)$, ezért f-nek lokális szélsőértéke csak az $\alpha = \beta$ esetben lehet, hiszen $\alpha, \beta < \pi$. Ez azt jelenti, hogy

$$\cos(\alpha) + \cos(2\alpha) = 0,$$

azaz $\alpha = \pi/3$. Mivel

$$H_f(\alpha, \beta) \equiv \begin{bmatrix} -\sin(\alpha) - \sin(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) \\ -\sin(\alpha + \beta) & -\sin(\beta) - \sin(\alpha + \beta) \end{bmatrix}$$

és

$$H_f(\pi/3, \pi/3) = \begin{bmatrix} -\sqrt{3}/2 - \sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/2 - \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{3} & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -\sqrt{3} \end{bmatrix},$$

ezért f-nek az $\alpha = \beta = \pi/3$-ban lokális maximuma van és

$$f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Azt kell már csak megmutatni, hogy ez a lokális maximum egyúttal abszolút maximum is. Ha

$$\Omega := \left\{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 :\ \alpha + \beta \leq \pi\right\},$$

akkor Ω határa az alábbi három szakasz egyesítése:

$$\partial\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3,$$

ahol

$$\Omega_1 := \left\{(\alpha,0) \in \mathbb{R}^2 :\ \alpha \in [0,\pi]\right\}, \qquad \Omega_2 := \left\{(0,\beta) \in \mathbb{R}^2 :\ \beta \in [0,\pi]\right\}$$

és

$$\Omega_3 := \left\{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 :\ \alpha+\beta=\pi\right\}.$$

Ha

$$g(\alpha,\beta) := \sin(\alpha)+\sin(\beta)+\sin(\alpha+\beta) \qquad ((\alpha,\beta)\in\Omega),$$

akkor a Weierstraß-tétel következtében g felveszi abszolút maximumát, továbbá

$$g(\alpha,\beta) = \begin{cases} 2\sin(\alpha) & ((\alpha,\beta)\in\Omega_1), \\ 2\sin(\beta) & ((\alpha,\beta)\in\Omega_2), \\ 2\sin(\alpha) & ((\alpha,\beta)\in\Omega_3). \end{cases}$$

Mivel

$$\max\left\{g(\alpha,\beta)\in\mathbb{R} :\ (\alpha,\beta)\in\partial\Omega\right\} = 1 < \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

ezért g – és így f is – abszolút maximumát Ω belsejében, azaz az $(\alpha,\beta)=(\pi/3,\pi/3)$ pontban veszi fel. A keresett háromszög tehát az egyenlő oldalú háromszög.

2. Ha R a kör sugara, akkor (vö. ábra) a háromszög területe:

$$T = 2R^2 sin(\alpha)\sin(\beta)\sin(\gamma).$$

Mivel $\gamma=\pi-\alpha-\beta$, ezért

$$\sin(\gamma)=\sin(\pi-(\alpha+\beta))=\sin(\alpha+\beta).$$

Tehát az

$$f(\alpha,\beta) := \sin(\alpha)\sin(\beta)\sin(\alpha+\beta) \qquad (\alpha,\beta>0,\ \alpha+\beta<\pi)$$

függvény abszolút maximumhelyét kell meghatároznunk. Mivel

$$\begin{aligned} \partial_1 f(\alpha,\beta) &= \cos(\beta)\sin(\beta)\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha)\sin(\beta)\cos(\alpha+\beta) &= 0, \\ \partial_2 f(\alpha,\beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta)\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha)\sin(\beta)\cos(\alpha+\beta) &= 0 \end{aligned}$$

pontosan akkor teljesül, ha

$$\begin{aligned} \cos(\beta)\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha)\cos(\alpha+\beta) &= 0, \\ \cos(\beta)\sin(\alpha+\beta)+\sin(\beta)\cos(\alpha+\beta) &= 0, \end{aligned}$$

hiszen $\sin(\alpha)\sin(\beta)\neq 0$. A fenti két egyenlet nem más, mint

$$\sin((\alpha+\beta)+\alpha)=0 \qquad \text{és} \qquad \sin((\alpha+\beta)+\beta)=0,$$

ezért

$$\partial_1 f(\alpha,\beta) = 0 = \partial_2 f(\alpha,\beta)$$

pontosan akkor teljesül, ha

$$2\alpha+\beta=\pi \qquad \text{és} \qquad \alpha+2\beta=\pi,$$

azaz

$$\alpha = \beta = \frac{\pi}{3}.$$

Ha

$$\Omega := \left\{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 : \ \alpha + \beta \leq \pi\right\},$$

és

$$g(\alpha,\beta) := \sin(\alpha)\sin(\beta)\sin(\alpha+\beta) \qquad ((\alpha,\beta) \in \Omega),$$

akkor g folytonos, így a Weierstraß-tétel következtében felveszi abszolút maximumát. Mivel

$$g(\alpha,\beta) = 0 \qquad ((\alpha,\beta) \in \partial\Omega)$$

és

$$g(\pi/3,\pi/3) = f(\pi/3,\pi/3) = \sin(\pi/3)\sin(\pi/3)\sin(2\pi/3) = 2(\sin(\pi/3))^2\cos(\pi/3) > 0,$$

ezért g – és így f is – abszolút maximumát Ω belsejében, azaz az $(\alpha,\beta) = (\pi/3,\pi/3)$ pontban veszi fel. A keresett háromszög tehát az egyenlő oldalú háromszög. ■

1.5.9. feladat. Tegyük fel, hogy egy elegendően vékony, félkör alakú lemezen a hőmérséklet-eloszlás

$$T(x,y) := 10 - 40\frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \geq 0, \ 0 < x^2+y^2 \leq 1), \qquad T(0,0) = 10$$

alakú. A lemez mely pontja legmelegebb, ill. leghidegebb?

Útm. Mivel

$$\lim_{\mathbf{0}} T = 10,$$

ezért T az

$$\Omega := \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq u \leq 1, \ 0 \leq u^2+v^2 \leq 1\right\}$$

kompakt (korlátos és zárt) halmazon értelmezett folytonos függvény. Weierstraß tétele következtében tehát van T-nek legisebb és legnagyobb értéke (a lemezen van leghidegebb és legmelegebb pont). Az Ω halmaz belsejében T deriválható függvény. Ha tehát $(x,y) \in \operatorname{int}(\Omega)$, akkor a

$$\partial_1 T(x,y) = -40\frac{2xy^2(x^2+y^2) - 2x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

és

$$\partial_1 T(x,y) = -40\frac{2x^2y(x^2+y^2) - 2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

feltételből

$$(x = 1, \quad y \in [-1,1]), \qquad \text{ill.} \qquad (x =\in [0,1], \quad y = 0)$$

következik. Mivel ezekben az (x,y) pontokban $T(x,y) = 10$ és T nem vesz fel 10-nél nagyobb értéket, ezért ezekben a pontokban lokális maximumok vannak. Vizsgáljuk meg most a lemez hőmérséklete-loszlását annak határán! Világos, hogy

$$\partial\Omega = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : \ u = 0, \, v \in [-1,1]\right\} \cup \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : \ u > 0, \, u^2+v^2 = 1\right\} =: \Omega_1 \cup \Omega_2$$

és

$$T(x,y)=10 \qquad ((x,y)\in\Omega_1),$$

ill.

$$T(x,y)=10-40\frac{y^2(1-y^2)}{1}=:\varphi(y) \qquad ((x,y)\in\Omega_2),$$

azaz

$$\varphi(y)=40y^4-40y^2+10 \qquad (y\in(-1{,}1)).$$

Mivel

$$\varphi'(y)=160y^3-80y=0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad y\in\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right\},$$

és

$$T\,(1{,}0)=10, \qquad T\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=0, \qquad T\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=0,$$

ezért ezekben a pontokban lokális maximum, ill. lokális minimumok vannak. Tehát a lemez az

$$A:=\left\{(u,v)\in\mathbb{R}^2:\ u=0,\ v\in[-1{,}1]\right\}, \qquad B:=\left\{(u,v)\in\mathbb{R}^2:\ u=\in[0{,}1],\ v=0\right\}$$

halmazok pontjaiban a legmelegebb és

$$T(x,y)=10 \qquad ((x,y)\in A\cup B),$$

ill. az

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \qquad \left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

pontokban a leghidegebb:

$$T\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=0, \qquad T\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=0. \quad \blacksquare$$

2017.12.29.

2. fejezet

Többváltozós függvények Riemann-integrálja

2.0.1. definíció. Legyen $N \in \mathbb{N}$. Azt mondjuk, hogy a $T \subset \mathbb{R}^N$ ponthalmaz N-**dimenziós intervallum** vagy **tégla**, ha alkalmas $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^N$:

$$\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_N) \in \mathbb{R}^N, \qquad \mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_N) \in \mathbb{R}^N \qquad \text{és} \qquad a_i \le b_i \quad (i \in \{1, \ldots, N\})$$

esetén

$$(a_1, b_1) \times \ldots \times (a_N, b_N) \subset T \subset [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_N, b_N].$$

A T tégla **mérték**ének, ill. **átmérő**jének nevezzük a

$$\mu(T) := \prod_{i=1}^{N} (b_i - a_i), \qquad \text{ill. a} \qquad d(T) := \sqrt{\sum_{i=1}^{N} (b_i - a_i)^2}$$

számot.

2.0.0. megjegyzés. Nyilván

$$\mu(T) \le (d(T))^N,$$

és pl. $N = 1$, $N = 2$, ill. $N = 3$ esetén

$$\mu(T) = b_1 - a_1, \qquad \mu(T) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2),$$

ill.

$$\mu(T) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)(b_3 - a_3).$$

2.0.2. definíció. Legyen $T \in \mathbb{R}^N$ tégla. Azt mondjuk, hogy a

$$\tau := \tau_1 \times \ldots \times \tau_N \subset \mathbb{R}^N$$

halmaz a T tégla egy **felosztás**a (jelben $\tau \in \mathfrak{F}(T)$), ha bármely $i \in \{1, \ldots, N\}$ esetén $\tau_i \in \mathfrak{F}([a_i, b_i])$, azaz alkalmas $n_i \in \mathbb{N}$ index esetén

$$a_i = x_{i0}, < x_{i1} < \ldots < x_{in_{i-1}} < x_{in_i} = b_i.$$

Azt mondjuk, hogy a $\tau \in \mathfrak{F}(T)$ felosztás a $\mu \in \mathfrak{F}(T)$ **finomítás**a, ha $\mu \subset \tau$, azaz

$$(\mu = \mu_1 \times \ldots \times \mu_N,\ \tau = \tau_1 \times \ldots \times \tau_N) \qquad \Longrightarrow \qquad \mu_i \subset \tau_i \ \ (i \in \{1, \ldots, N\}).$$

A fenti $T \in \mathbb{R}^N$ tégla, ill. $\tau \in \mathfrak{F}(T)$ felsoztás esetén a T tégla

$$n := \prod_{i=1}^{N} n_i$$

darab pozitív mértékű, $T_1, \ldots, T_n$ ún. **osztástéglá**ra „bomlik” fel. Világos, hogy ekkor

$$\operatorname{int}(T_k) \cap \operatorname{int}(T_l) = \emptyset \quad (k \neq l) \qquad \text{és} \qquad \mu(T) = \sum_{k=1}^{n} \mu(T_k).$$

2.0.1. példa. Ha $T := [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ és

$$\tau^1 := \{x_0, \ldots, x_m\} \in \mathfrak{F}([a, b]), \qquad \text{ill.} \qquad \tau^2 := \{y_0, \ldots, y_n\} \in \mathfrak{F}([c, d]),$$

akkor $\tau := \tau^1 \times \tau^2 \in \mathfrak{F}(T)$, és T osztástéglái

$$[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \qquad (i \in \{1, \ldots, m\},\ j \in \{1, \ldots, n\})$$

alakúak.

2.0.3. definíció. Legyen $f : T \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, majd tetszőleges $\tau \in \mathfrak{F}(T)$ esetén a

$$s(f, \tau) := \sum_{k=1}^{n} \inf\{f(\mathbf{r}) \in \mathbb{R} : \ \mathbf{r} \in T_k\} \cdot \mu(T_k),$$

$$S(f, \tau) := \sum_{k=1}^{n} \sup\{f(\mathbf{r}) \in \mathbb{R} : \ \mathbf{r} \in T_k\} \cdot \mu(T_k),$$

ill.

$$\omega(f, \tau) := S(f, \tau) - s(f, \tau).$$

A $s(f, \tau)$, $S(f, \tau)$, ill. az $\omega(f, \tau)$ számokat az f függvény τ felosztáshoz tartozó **alsó összeg**ének, **felső összeg**ének, illetve **osszillációs összeg**ének nevezzük.

2.0.1. tétel. Legyen $f : T \to \mathbb{R}$ korlátos függvény. Ekkor tetszőleges $\tau, \mu \in \mathfrak{F}(T)$ esetén

1. $s(f,\tau) \leq S(f,\mu)$;
2. $\mu \subset \tau \qquad \Longrightarrow \qquad s(f,\mu) \leq s(f,\tau) \quad$ és $\quad S(f,\mu) \geq S(f,\tau)$.

2.0.0. megjegyzés. Ha $f : T \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, akkor a

$$\{s(f,\tau) \in \mathbb{R} : \ \tau \in \mathfrak{F}(T)\} \qquad \text{és a} \qquad \{S(f,\tau) \in \mathbb{R} : \ \tau \in \mathfrak{F}(T)\}$$

halmaz felülről, ill. alulról korlátos, azaz bármely $\mu \in \mathfrak{F}(T)$ esetén

$$I_*(f) := \sup\{s(f,\tau) \in \mathbb{R} : \ \tau \in \mathfrak{F}(T)\} \leq S(f,\mu) < +\infty,$$

ill.

$$I^*(f) := \inf\{S(f,\tau) \in \mathbb{R} : \ \tau \in \mathfrak{F}(T)\} \geq s(f,\mu) > -\infty.$$

Következésképpen $I_*(f), I^*(f) \in \mathbb{R}$, továbbá bármely $\tau, \mu \in \mathfrak{F}(T)$ felosztásra

$$s(f,\tau) \leq I_*(f) \leq I^*(f) \leq S(f,\mu).$$

Jogos tehát a következő

2.0.4. definíció. Legyen $f : T \to \mathbb{R}$ korlátos függvény. Az $I_*(f)$, ill. az $I^*(f)$ számot az f függvény **Darboux-féle alsó**, ill. **Darboux-féle felső integrál**jának nevezzük. Továbbá azt mondjuk, hogy f **Riemann-integrálható**: $f \in \mathfrak{R}(I)$, ha $I_*(f) = I^*(f)$ teljesül. Ez utóbbi esetben az

$$\boxed{\begin{aligned} \int_T f \quad &:= \quad \int_T f(\mathbf{r})\,\mathrm{d}\mathbf{r} := \int_T f(x_1,\ldots,x_N)\,\mathrm{d}(x_1,\ldots,x_N) := \\ &:= \quad \int_{a_1}^{b_1} \ldots \int_{a_N}^{b_N} f(x_1,\ldots,x_N)\,\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_N := I_*(f) = I^*(f) \end{aligned}}$$

számot az f függvény **Riemann-integrál**jának (vagy más szóval **határozott integrál**jának) nevezzük.

2.0.1. feladat. Adott $c \in \mathbb{R}$, ill. $T \in \mathbb{R}^N$ tégla esetén legyen

$$f(\mathbf{r}) := c \qquad (\mathbf{r} \in T).$$

Mutassuk meg, hogy f Riemann-integrálható, majd számítsuk ki határozott integrálját!

Útm. Ha a $\tau \in \mathfrak{F}(T)$ felosztás következtében a T tégla a $T_1, \ldots, T_n$ osztástéglákra bomlik fel, akkor nyilvánvalóan

$$\{f(\mathbf{r}) \in \mathbb{R} : \mathbf{r} \in T_k\} = \{c\} \qquad (k \in \{1, \ldots, n\}),$$

így

$$\inf \{f(\mathbf{r}) \in \mathbb{R} : \mathbf{r} \in T_k\} = c = \sup \{f(\mathbf{r}) \in \mathbb{R} : \mathbf{r} \in T_k\} \qquad (i \in \{1, \ldots, n\}).$$

Ez azt jelenti, hogy

$$s(f, \tau) = \sum_{k=1}^{n} c \cdot \mu(T_k) = S(f, \tau) \qquad (\tau \in \mathfrak{F}(T)).$$

Ennélfogva $I_*(f) =$

$$= \sup \{s(f, \tau) \in \mathbb{R} : \tau \in \mathfrak{F}(T)\} = \sum_{k=1}^{n} c \cdot \mu(T_k) = \inf \{S(f, \tau) \in \mathbb{R} : \tau \in \mathfrak{F}(T)\} = I^*(f),$$

azaz $f \in \mathfrak{R}(T)$ és

$$\int_T f = \sum_{k=1}^{n} c \cdot \mu(T_k) = c \sum_{k=1}^{n} \cdot \mu(T_k) = c \cdot \mu(T). \quad \blacksquare$$

2.0.2. feladat. Legyen $T \in \mathbb{R}^N$ olyan tégla, amelyre $\mu(T) > 0$, továbbá

$$f : T \to \mathbb{R}, \qquad f(\mathbf{r}) := \begin{cases} 1 & (\mathbf{r} \in T \cap \mathbb{Q}^N), \\ \\ 0 & (\mathbf{r} = (x_1, \ldots, x_N) \in T : \exists i \in \{1, \ldots, N\} : x_i \in (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})). \end{cases}$$

Igazoljuk, hogy f nem Riemann-integrálható függvény!

Útm. Ha a $\tau \in \mathfrak{F}(T)$ felosztás következtében a T tégla a $T_1, \ldots, T_n$ osztástáglákra bomlik fel, akkor nyilvánvalóan

$$\{f(\mathbf{r}) \in \mathbb{R} : \mathbf{r} \in T_k\} = \{0; 1\} \qquad (k \in \{1, \ldots, n\}),$$

és így

$$\inf \{f(\mathbf{r}) \in \mathbb{R} : \mathbf{r} \in T_k\} = 0, \quad \sup \{f(\mathbf{r}) \in \mathbb{R} : \mathbf{r} \in T_k\} = 1 \qquad (k \in \{1, \ldots, n\}),$$

hiszen minden osztástégla tartalmaz olyan pontot, amelynek mindegyik koordinátája racionális, és olyat is, amelynek mindegyik koordinátája irracionális. Ez azt jelenti, hogy bármely $\tau \in \mathfrak{F}(T)$ felosztás esetén

$$s(f, \tau) = \sum_{k=1}^{n} 0 \cdot \mu(T_k) = 0 \qquad \text{és} \qquad S(f, \tau) = \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot \mu(T_k) = \sum_{k=1}^{n} \mu(T_k) = \mu(T).$$

Ennélfogva

$$I_*(f) = \sup \{s(f, \tau) \in \mathbb{R} : \tau \in \mathfrak{F}(T)\} = 0 < \mu(T) = \inf \{S(f, \tau) \in \mathbb{R} : \tau \in \mathfrak{F}(T)\} = I^*(f),$$

azaz $f \notin \mathfrak{R}(T)$. $\blacksquare$

2.0.0. megjegyzés. Ha $T \in \mathbb{R}^N$ olyan tégla, amelyre $\mu(T) = 0$, akkor bármely $f : T \to \mathbb{R}$ korlátos függvény Riemann-integrálható, és

$$\int_T f = 0,$$

hiszen $\mu(T) = 0$ következtében T minden osztástéglája nulla mértékű. Ezt azt is jelenti, hogy ha pl.

$$\Delta : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad \Delta(x) := \begin{cases} 1 & (x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}), \\ & \\ 0 & (x \in [0,1] \cap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})), \end{cases}$$

akkor a

$$\widetilde{\Delta} : [0,1] \times \{0\} \to \mathbb{R}, \qquad \widetilde{\Delta}(x, y) := \Delta(x)$$

függvény Riemann-integrálható, és

$$\int_{[0,1]\times\{0\}} \widetilde{\Delta}(x, y)\, \mathrm{d}(x, y) = 0.$$

2.0.3. feladat. Legyen

$$f(x, y) := xy \qquad ((x, y) \in T := [0,1] \times [0,1]).$$

Mutassuk meg, hogy f Riemann-integrálható, majd számítsuk ki az

$$\int_T f$$

integrált!

Útm. Az $n \in \mathbb{N}$,

$$\tau_n^1 := \tau_n^2 := \left\{ \frac{i}{n} : \ i \in \{0, \ldots, n\} \right\}, \quad \tau_n := \tau_n^1 \times \tau_n^2 = \left\{ \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n} \right) : \ i, j \in \{0, \ldots, n\} \right\},$$

$$x_i := \frac{i}{n}, \quad y_j := \frac{j}{n}, \quad (i, j \in \{0, \ldots, n\}) \quad T_{ij} := [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \quad (i, j \in \{1, \ldots, n\}).$$

jelölések bevezetésével

$$\mu\left(T_{ij}\right) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2},$$

ill.

$$m_{ij} = \inf \left\{ f(\mathbf{r}) : \ \mathbf{r} \in T_{ij} \right\} = f(x_{i-1}, y_{j-1}) = x_{i-1} \cdot y_{j-1},$$

$$M_{ij} = \sup \left\{ f(\mathbf{r}) : \ \mathbf{r} \in T_{ij} \right\} = f(x_i, y_j) = x_i \cdot y_j,$$

így

$$\begin{aligned}
s(f,\tau_n) &= \sum_{i,j=1}^{n} \mu(T_{ij})\cdot m_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n^2}\cdot\frac{i-1}{n}\cdot\frac{j-1}{n} = \\
&= \frac{1}{n^4}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}(i-1)\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{n}(j-1)\right) = \\
&= \frac{1}{n^4}\cdot\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{n(n-1)}{2} = \frac{(n-1)^2}{4n^2} = \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n}\right)^2
\end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}
S(f,\tau_n) &= \sum_{i,j=1}^{n} \mu(T_{ij})\cdot M_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n^2}\cdot\frac{i}{n}\cdot\frac{j}{n} = \frac{1}{n^4}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{n} j\right) = \\
&= \frac{1}{n^4}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)^2}{4n^2} = \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2.
\end{aligned}$$

Belátható, hogy

1. $\sup\{s(f,\tau)\in\mathbb{R}:\ \tau\in\mathfrak{F}(T)\} = \frac{1}{4}$:
   - $\frac{1}{4}$ felső korlát, ui.: tetszőleges $\tau,\sigma\in\mathfrak{F}(T)$ esetén
     $$s(f,\tau)\le S(f,\sigma),$$
     így minden $\tau\in\mathfrak{F}(T)$ és $n\in\mathbb{N}$ esetén
     $$s(f,\tau)\le S(f,\tau_n) = \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2.$$
     Innen
     $$s(f,\tau)\le \inf\{S(f,\tau_n):\ n\in\mathbb{N}\} = \lim\left(S(f,\tau_n)\right) = \frac{1}{4},$$
     ui. $(S(f,\tau_n))$ monoton csökkenő sorozat.
   - $\frac{1}{4}$ a legkisebb felső korlát: legyen $\varepsilon>0$ tetszőleges, ekkor $\lim\left(s(f,\tau_n)\right) = \frac{1}{4}$ miatt van olyan $n\in\mathbb{N}$, hogy
     $$\frac{1}{4}-\varepsilon < s(f,\tau_n).$$
     Ez éppen azt mutatja, hogy $\frac{1}{4}-\varepsilon$ már nem felső korlát.
2. $\inf\{S(f,\tau)\in\mathbb{R}:\ \tau\in\mathfrak{F}(T)\} = \frac{1}{4}$: **HASONLÓAN**

Így tehát

$$f\in\mathfrak{R}(T) \qquad \text{és} \qquad \int_T f = \frac{1}{4}. \quad \blacksquare$$

2.0.1. tétel. Legyen $f : T \to \mathbb{R}$ korlátos függvény. Ekkor

$$\left(f \in \mathfrak{R}(T) \quad \& \quad \int_T f =: \xi \in \mathbb{R}\right) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \exists\, \tau_n \in \mathfrak{F}(T) \quad (n \in \mathbb{N}): \\ \lim\left(s(f,\tau_n)\right) = \xi = \lim\left(S(f,\tau_n)\right). \end{cases}$$

Biz.

$\boxed{\Rightarrow}$. Ha $f \in \mathfrak{R}(T)$ és $\int_T f = \xi$, akkor $I_*(f) = I^*(f) = \xi$, ezért minden $(n \in \mathbb{N})$ esetén van olyan $\tau_n \in \mathfrak{F}(T)$, amelyre

$$\xi - \frac{1}{n} \leq s(f,\tau_n) \leq I_*(f) = I^*(f) \leq S(f,\tau_n) \leq \xi + \frac{1}{n}.$$

A (τ_n) felosztássorozatra tehát

$$\lim\left(s(f,\tau_n)\right) = \xi = \lim\left(S(f,\tau_n)\right)$$

teljesül.

$\boxed{\Leftarrow}$. Ha van olyan $\tau_n \in \mathfrak{F}(T)$ $(1 \leq n \in \mathbb{N})$, amelyre

$$\lim\left(s(f,\tau_n)\right) = \xi = \lim\left(S(f,\tau_n)\right)$$

teljesül, akkor a

$$\xi = \lim\left(s(f,\tau_n)\right) \leq I_*(f) \leq I^*(f) \leq \lim\left(S(f,\tau_n)\right) = \xi$$

egyenlőtlenségből következik, hogy $I_*(f) = \xi = I^*(f)$, azaz

$$f \in \mathfrak{R}(T) \qquad \text{és} \qquad \int_T f = \xi. \quad \blacksquare$$

2.0.2. tétel. Legyen $f : T \to \mathbb{R}$ korlátos függvény. Ekkor

$$f \in \mathfrak{R}(T) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall \varepsilon > 0\, \exists\, \tau \in \mathfrak{F}(T): \ \omega(f,\tau) < \varepsilon.$$

2.0.4. feladat. Lássuk be, hogy az

$$f(x,y) := x^2 + y^2 \qquad ((x,y) \in T := [1{,}2] \times [1{,}3]),$$

függvény integrálható, majd számítsuk ki határozott integrálját!

Útm. Ha $n \in \mathbb{N}$,

$$\tau_n^1 := \left\{1 + \frac{i}{n} : \ i \in \{0,\ldots,n\}\right\}, \qquad \tau_n^2 := \left\{1 + \frac{2j}{n} : \ j \in \{0,\ldots,n\}\right\},$$

$$\tau_n := \tau_n^1 \times \tau_n^2,$$

ill.
$$x_i := 1 + \frac{i}{n}, \quad y_j := 1 + \frac{2j}{n}, \quad (i, j \in \{0, \ldots, n\}),$$
$$T_{ij} := [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \quad (i, j \in \{1, \ldots, n\}).$$
jelölések bevezetésével
$$\mu(T_{ij}) = \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} = \frac{2}{n^2},$$
ill.
$$m_{ij} = \inf\{f(r), r \in T_{ij}\} = f(x_{i-1}, y_{j-1}) = x_{i-1}^2 + y_{j-1}^2 = \left(1 + \frac{i-1}{n}\right)^2 + \left(1 + \frac{2j-2}{n}\right)^2,$$
$$M_{ij} = \sup\{f(r), r \in T_{ij}\} = f(x_i, y_j) = x_i^2 + y_j^2 = \left(1 + \frac{i}{n}\right)^2 + \left(1 + \frac{2j}{n}\right)^2,$$
így
$$s(f, \tau_n) = \sum_{i,j=1}^{n} \mu(T_{ij}) \cdot m_{ij} = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{2}{n^2} \cdot m_{ij}$$
és
$$S(f, \tau_n) = \sum_{i,j=1}^{n} \mu(T_{ij}) \cdot M_{ij} = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{2}{n^2} \cdot M_{ij},$$
ahonnan
$$\omega(f, \tau_n) = \frac{2}{n^2} \sum_{i,j=1}^{n} \{M_{ij} - m_{ij}\}.$$
Megmutatható (**Házi feladat.**), hogy
$$\omega(f, \tau_n) \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty),$$
ennálfogva bármely $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\tau := \tau_n \in \mathfrak{F}(T)$, amelyre $\omega(f, \tau) < \varepsilon$, azaz $f \in \mathfrak{R}(T)$.

Megjegyzés. Mivel bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén
$$s(f, \tau_n) \leq \int_T f \leq S(f, \tau_n)$$
és
$$\lim(s(f, \tau_n)) = \frac{40}{3} = \lim(S(f, \tau_n))$$
(**Házi feladat.**), ezért
$$\int_T f(x, y)\, \mathrm{d}(x, y) = \frac{40}{3}. \quad \blacksquare$$

2.0.3. tétel. Legyen $f, g, h \in \mathfrak{R}(T)$. Ekkor igazak az alábbi állítások.

1. $f \leq g \qquad \Longrightarrow \qquad \int_T f \leq \int_T g;$
2. Ha valamely $m, M \in \mathbb{R}$ esetén
$$m \leq h(r) \leq M \qquad (r \in T),$$
akkor
$$m \cdot \mu(T) \leq \int_T h \leq M \cdot \mu(T).$$

2.0.4. tétel. Legyen $f, g \in \mathfrak{R}(T)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Ekkor $f + g \in \mathfrak{R}(T)$, $\lambda f \in \mathfrak{R}(T)$, továbbá

$$\int_T (f+g) = \int_T f + \int_T g \qquad \text{és} \qquad \int_T (\lambda \cdot f) = \lambda \cdot \int_T f.$$

2.0.5. tétel. Legyen $f \in \mathfrak{R}(T)$. Ekkor $|f| \in \mathfrak{R}(T)$ és

$$\left| \int_T f \right| \leq \int_T |f|.$$

2.0.6. tétel. (Középértéktétel). Legyen $f \in \mathfrak{R}(T)$. Ekkor van olyan

$$\rho \in [\inf(f[T]), \sup(f[T])],$$

hogy

$$\int_T f = \rho \cdot \mu(T).$$

Ha ezen kívül még f folytonos is, akkor alkalmas $\xi \in T$ esetén $\rho = f(\xi)$, azaz

$$\int_T f = f(\xi) \cdot \mu(T).$$

2.0.7. tétel. Ha a $T \subset \mathbb{R}^N$ tégla valamely felosztás következtében a $T_1, \ldots, T_n$ résztéglákra bomlik, továbbá $f \in \mathfrak{R}(T)$, akkor bármely $k \in \{1, \ldots, n\}$ esetén $f|_{T_k} \in \mathfrak{R}(T_k)$ /jel.: $f \in \mathfrak{R}(T_k)$/ és

$$\int_T f = \sum_{k=1}^{n} \int_{T_k} f.$$

2.0.8. tétel. Legyen $f : T \to \mathbb{R}$. Ekkor $\mathfrak{C}(T) \subset \mathfrak{R}(T)$, azaz

$$f \in \mathfrak{C}(T) \qquad \Longrightarrow \qquad f \in \mathfrak{R}(T).$$

2.0.5. definíció. Legyen $T \subset \mathbb{R}^M$, $S \subset \mathbb{R}^N$ tégla, az $f : T \times S \to \mathbb{R}$ függvény pedig korlátos, majd bármely $r \in T$, ill. $s \in S$ vektorok esetén legyen

$$f_r : S \to \mathbb{R}, \quad f_r(s) := f(r,s), \qquad \text{ill.} \qquad f^s : T \to \mathbb{R}, \quad f^s(r) := f(r,s).$$

2.0.9. tétel. (Fubini). Tegyük fel, hogy az $f : T \times S \to \mathbb{R}$ függvény integrálható: $f \in \in \mathfrak{R}(T \times S)$. Ha

1. bármely $\mathbf{r} \in T$ esetén $f_{\mathbf{r}} \in \mathfrak{R}(S)$, akkor a

$$T \ni \mathbf{r} \mapsto \int_S f_{\mathbf{r}}(\mathbf{s})\,\mathrm{d}\mathbf{s}$$

   függvény integrálható, és

$$\int_{T\times S} f = \int_T \left(\int_S f_{\mathbf{r}}(\mathbf{s})\,\mathrm{d}\mathbf{s} \right) \mathrm{d}\mathbf{r} =: \int_T \left(\int_S f(\mathbf{r},\mathbf{s})\,\mathrm{d}\mathbf{s} \right) \mathrm{d}\mathbf{r}.$$

2. bármely $\mathrm{s} \in S$ esetén $f^{\mathrm{s}} \in \mathfrak{R}(T)$, akkor az

$$S \ni s \mapsto \int_T f^s(r)\,\mathrm{d}r$$

   függvény integrálható, és

$$\int_{T\times S} f = \int_S \left(\int_T f^{\mathrm{s}}(\mathbf{r})\,\mathrm{d}\mathbf{r} \right) \mathrm{d}\mathrm{s} =: \int_S \left(\int_T f(\mathbf{r},\mathbf{s})\,\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\mathrm{s}.$$

2.0.10. tétel. Legyen $T \subset \mathbb{R}^M$, $S \subset \mathbb{R}^N$ tégla, az $f : T \times S \to \mathbb{R}$ függvény pedig integrálható függvény: $f \in \mathfrak{R}(T \times S)$. Ha bármely $\mathbf{r} \in T$ esetén $f_{\mathbf{r}} \in \mathfrak{R}(S)$ és bármely $s \in S$ esetén $f^{\mathrm{s}} \in \mathfrak{R}(T)$, akkor

$$\boxed{\int_T \left(\int_S f(\mathbf{r},\mathbf{s})\,\mathrm{d}\mathrm{s} \right) \mathrm{d}\mathbf{r}} = \int_{T\times S} f = \boxed{\int_S \left(\int_T f(\mathbf{r},\mathbf{s})\,\mathrm{d}\mathbf{r} \right) \mathrm{d}\mathrm{s}}.$$

2.0.5. feladat. Legyen $T := [0,1] \times [-1,2]$,

$$f : T \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) := x^2 y.$$

Mutassuk meg, hogy $f \in \mathfrak{R}(T)$, majd számítsuk ki az $\displaystyle\int f$ integrált!

Útm. Mivel f folytonos, ezért integrálható. Mivel tetszőleges $x \in [0,1]$ esetén az

$$f_x(y) := x^2 y \qquad (y \in [-1,2])$$

függvény folytonos, ezért $f_x \in \mathfrak{R}[-1,2]$ és

$$\int_{-1}^{2} f_x(y)\,\mathrm{d}y = x^2 \int_{-1}^{2} y\,\mathrm{d}y = x^2 \left[\frac{y^2}{2}\right]_{-1}^{2} = \frac{3x^2}{2}.$$

Így f Riemann-integrálhatósága következtében

$$\int_T f = \int_0^1 \left(\int_{-1}^{2} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{3x^2}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}. \quad \blacksquare$$

2.0.6. feladat. Legyen $T := [0,1] \times [0,1]$ és

$$f : T \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x-y}{(x+y)^3} & (xy \neq 0), \\ 0 & (xy = 0). \end{cases}$$

Mutassuk meg, hogy f-nek mindkét ismételt integrálja létezik, de f nem integrálható!

Útm.

1. lépés.. f nem korlátos, hiszen

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}\right) = +\infty,$$

így $f \notin \mathfrak{R}(T)$.

2. lépés.. Mivel bármely $x \in (0,1]$ esetén

$$\begin{aligned} F(x) \quad &:= \quad \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\frac{2x}{(x+y)^3} - \frac{1}{(x+y)^2}\right)\mathrm{d}y = \\ &= \quad \left[-\frac{x}{(x+y)^2} + \frac{1}{x+y}\right]_0^1 = \frac{1}{(x+1)^2}, \end{aligned}$$

továbbá $\displaystyle\int_0^2 f(0,y)\,\mathrm{d}y = 0$, így

$$\int_0^1 F = \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

3. lépés.. Hasonlóan adódik, hogy

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = -\frac{1}{2}. \quad \blacksquare$$

2.0.7. feladat. Az

$$f(x,y) := \begin{cases} x, & (y \in \mathbb{Q}), \\ \\ 0, & (y \notin \mathbb{Q}) \end{cases} \qquad ((x,y) \in [-1,1] \times [0,1])$$

függvényről lássuk be a következőket!

1. $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_{-1}^1 f(x,y)\, dx \right) dy = 0;$
2. f nem integrálható: $f \notin \mathfrak{R}([-1,1] \times [0,1])$.

Útm.

1. Tetszőleges $y \in \mathbb{R}$ esetén legyen

$$f^y(x) := f(x,y) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Ekkor

$$f^y(x) = x \quad (y \in \mathbb{Q}) \qquad \Longrightarrow \qquad \int_{-1}^1 f^y = \int_{-1}^1 x\, \mathrm{d}x = 0,$$

$$f^y(x) = 0 \quad (y \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}) \qquad \Longrightarrow \qquad \int_{-1}^1 f^y = \int_{-1}^1 0\, \mathrm{d}x = 0.$$

2. Ha f integrálható lenne, akkor $f \in \mathfrak{R}\left([0,1] \times [0,1]\right)$ is teljesülne, ui.

$$T := [0,1] \times [0,1] \subset [-1,1] \times [0,1].$$

Megmutatjuk, hogy $f \notin \mathfrak{R}\left([0,1] \times [0,1]\right)$. Legyen $\{T_{ij}\} = \tau \in \mathfrak{F}(T)$ tetszőleges. Ekkor, mivel bármely $j \in \{0, \ldots, n\}$ esetén $(y_{j-1}, y_j) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$, ezért

$$m_{ij} = 0, \quad M_{ij} = x_i \qquad (i,j \in \{0, \ldots, n\}).$$

Így

$$\begin{aligned} \omega(f,\tau) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (M_{ij} - m_{ij}) \cdot \mu(T_{ij}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i \cdot (x_i - x_{i-1}) \cdot (y_j - y_{j-1}) = \\ &= \left(\sum_{i=1}^n x_i \cdot (x_i - x_{i-1}) \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^m (y_j - y_{j-1}) \right) = \left(\sum_{i=1}^n x_i \cdot (x_i - x_{i-1}) \right) \cdot 1 \geq \\ &\geq \int_0^1 x\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} > 0. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

2.0.8. feladat. Legyen

$$f:[-1,1]^2\to\mathbb{R},\qquad f(x,y):=\begin{cases}0, & (x=y=0),\\[2ex] \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2}, & (x^2+y^2>0).\end{cases}$$

Bizonyítsuk be, hogy bármely $a,b\in[-1,1]$ mellett

$$\int_{-1}^{1} f(a,y)\,\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1} f(x,b)\,\mathrm{d}x=0,$$

de f nem inegrálható!

Útm.

- Tetszőleges $x\in[-1,1]$ esetén legyen

$$f_x(y):=\begin{cases}\dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2} & (y\neq 0),\\[2ex] 0 & (y=0).\end{cases}$$

  Ekkor

$$\lim_{y\to 0} f_x(y)=\frac{0}{x^2}=0,$$

  így f_x korlátos. Mivel

$$f_x(-y)\equiv -f_x(y),$$

  ezért

$$\int_{-1}^{1} f_x=0.$$

  Hasonlóan legyen tetszőleges $y\in[-1,1]$ esetén legyen ...

- f nem korlátos, ui pl. tetszőleges $0\neq x\in[-1,1]$ esetén

$$f(x,x)=\frac{x^2}{(x^2+x^2)^2}=\frac{x^2}{4x^4}=\frac{1}{2x^2}\longrightarrow+\infty\qquad(x\to 0).$$

  Ezért $f\notin\mathfrak{R}[0,1]^2$. ■

2.0.11. tétel. Ha $T=[a_1,b_2]\times\ldots[a_N,b_N]$ és $f:T\to\mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor $\displaystyle\int_T f=$

$$\boxed{\int_T f(x_1,\ldots,x_N)\,\mathrm{d}(x_1,\ldots,x_N)=\int_{a_N}^{b_N}\left(\ldots\int_{a_2}^{b_2}\left(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1,\ldots,x_N)\,\mathrm{d}x_1\right)\mathrm{d}x_2\ldots\right)\mathrm{d}x_N},$$

és az integrálás sorrendje tetszőleges.

2.0.2. példa. Legyen $T := [0,1]^3$. Ekkor

$$\begin{aligned}\int_T xyz\,\mathrm{d}(x,y,z) &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 xyz\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 (yz)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z = \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\int_0^1 z\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8}.\end{aligned}$$

2.0.2. tétel. Legyen $T := [a,b]\times[c,d]$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ és $g : [c,d] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvény, továbbá

$$F : T \to \mathbb{R}, \qquad F(x,y) = f(x)g(y).$$

Ekkor F Riemann-integrálható, és integráljára

$$\int_T F = \left(\int_a^b f\right)\left(\int_c^d g\right).$$

Biz. Házi feladat. ■

2.0.3. példa. Az

$$f : (x,y) = x^2y \qquad ((x,y) \in T := [0,1]\times[-1,2])$$

integrálható függvény esetében

$$\int_T f = \left(\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_{-1}^2 y\,\mathrm{d}y\right) = \ldots = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2} = \frac{1}{2}. \quad ■$$

2.0.6. definíció. Legyen $H \subset \mathbb{R}^N$ korlátos halmaz, $f : H \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, $T \subset \mathbb{R}^N$ olyan tégla, amelyre $H \subset T$, továbbá

$$\widetilde{f} : T \to \mathbb{R}, \qquad \widetilde{f}(\mathbf{r}) := \begin{cases} f(\mathbf{r}) & (\mathbf{r} \in H), \\ 0 & (\mathbf{r} \in T \setminus H). \end{cases}$$

Azt mondjuk, hogy $f \in \mathfrak{R}(H)$, ha $\widetilde{f} \in \mathfrak{R}(T)$, és ez utóbbi esetben

$$\int_H f := \int_T \widetilde{f}.$$

Ha $H = \emptyset$, akkor $\displaystyle\int_\emptyset f := 0$.

2.0.7. definíció. Azt mondjuk, hogy az $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ halmaz

– az x**-tengelyre nézve normáltartomány**, ha alkalmas $a,b\in\mathbb{R}$: $a<b$, ill. $\phi,\psi\in\mathfrak{C}[a,b]$: $\phi\leq\psi$ esetén

$$\Omega=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x\in[a,b],\ \phi(x)\leq y\leq\psi(x)\right\};$$

– az y**-tengelyre nézve normáltartomány**, ha alkalmas $c,d\in\mathbb{R}$: $c<d$, ill. $\mu,\nu\in\mathfrak{C}[c,d]$: $\mu\leq\nu$ esetén

$$\Omega=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ y\in[c,d],\ \mu(y)\leq x\leq\nu(y)\right\};$$

– **krumpli**, ha Ω mind az x-tengelyre, mind pedig az y-tengelyre nézve normáltartomány.

2.0.12. tétel. Legyen H az x-tengelyre nézve, ill. K az y-tengelyre nézve normáltartomány, továbbá $f:H\to\mathbb{R}$, ill. $g:K\to\mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor

$$\int_H f=\int_a^b\left(\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x,\qquad \text{ill.}\qquad \int_K g=\int_c^d\left(\int_{\mu(y)}^{\nu(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.$$

2.0.9. feladat. Legyen $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ olyan kompakt halmaz, amelyet az x-tengely, az $x=1/2$ és az $y=\arccos(x)$ egyenletű görbék határolnak. Számítsuk ki az

$$\int_\Omega x\mathrm{tg}\,(y)\,\mathrm{d}(x,y)$$

integrált!

Útm. Mivel

$$\Omega=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x\in[1/2,1],\ y\in[0,\arccos(x)]\right\},$$

ezért Ω normáltartomány pl. az x-tengelyre nézve. Így

$$\begin{aligned}
\int_\Omega x\mathrm{tg}\,(y)\,\mathrm{d}(x,y) &= \int_{1/2}^1 \left(\int_0^{\arccos(x)} x\mathrm{tg}\,(y)\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x = \\
&= \int_{1/2}^1 \left[-x\ln(\cos(y))\right]_{y=0}^{y=\arccos(x)}\,\mathrm{d}x = \\
&= \int_{1/2}^1 \left(-x\ln(x)\right)\,\mathrm{d}x = \\
&= \left[-\frac{x^2}{2}\ln(x)\right]_{1/2}^1 + \int_{1/2}^1 \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \\
&= -\frac{\ln(2)}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{3-2\ln(2)}{16}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

2.0.10. feladat. Számítsuk ki az

$$\int_0^2 \left(\int_{y^2}^4 y\mathrm{ch}\,\left(x^2\right)\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}y$$

ismételt integrált!

Útm. Világos, hogy

$$\int_0^2 \left(\int_{y^2}^4 y\mathrm{ch}\,\left(x^2\right)\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}y = \int_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y),$$

ahol

$$\Omega := \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x\in[y^2,4],\ y\in[0,2]\right\}, \qquad f(x,y) := y\mathrm{ch}\,\left(x^2\right) \quad ((x,y)\in\Omega).$$

Mivel Ω krumpli:

$$\Omega = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x\in[0,4],\ y\in[0,\sqrt{x}]\right\},$$

ezért

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) &= \int_0^4 \left(\int_0^{\sqrt{x}} y\mathrm{ch}\,\left(x^2\right)\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x = \int_0^4 \left[\frac{y^2}{2}\mathrm{ch}\,\left(x^2\right)\right]_{y=0}^{y=\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \\
&= \int_0^4 \frac{x}{2}\mathrm{ch}\,\left(x^2\right)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_0^4 2x\mathrm{ch}\,\left(x^2\right)\,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{4}\left[\mathrm{sh}\,\left(x^2\right)\right]_0^4 = \frac{\mathrm{sh}\,(16)}{4}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

2.0.8. definíció. Azt mondjuk, hogy a $H \subset \mathbb{R}^N$ halmaz **Jordan-mérhető**, ha alkalmas (sőt tetszőleges) $H \subset T \subset \mathbb{R}^N$ tégla esetén a

$$\chi_H : T \to \mathbb{R}, \qquad \chi(\mathbf{r}) := \begin{cases} 1 & (\mathbf{r} \in H), \\ 0 & (\mathbf{r} \in T \setminus H) \end{cases}$$

karakterisztikus függvény integrálható, és ez utóbbi esetben a

$$\boxed{|H|} := \int_T \chi_H = \boxed{\int_H 1 \, \mathrm{d}\mathbf{r}} \in \mathbb{R}$$

számot H **Jordan-mérték**ének, $N = 2$, ill. $N = 3$ esetén **terület**ének, ill. **térfogat**ának nevezzük.[1]

Ha $T \subset \mathbb{R}^N$ tégla, akkor persze T Jordan-mérhető és

$$|T| = \mu(T).$$

2.0.13. tétel. Legyen $H \subset \mathbb{R}^N$ Jordan-mérhető halmaz,

$$f, g : H \to \mathbb{R}$$

olyan integrálható függvények, amelyre

$$g(r) \leq f(r) \qquad (r \in H).$$

Ekkor az

$$M := \left\{ (\mathbf{r}, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} : \ \mathbf{r} \in H, \, g(\mathbf{r}) \leq t \leq f(\mathbf{r}) \right\}$$

halmaz is Jordan-mérhető, és

$$|M| = \int_H (f - g).$$

2.0.14. tétel. Ha az előbbi tételben lévő feltételek mellett f és g folytonos is, továbbá H hengerszerű halmaz:

$$H = \left\{ (\mathbf{u}, v) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R} : \ \mathbf{u} \in B, \, v \in [\varphi(\mathbf{u}), \psi(\mathbf{u})] \right\},$$

ahol $B \subset \mathbb{R}^{N-1}$ kompakt és Jordan-mérhető, továbbá a $\varphi, \psi : B \to \mathbb{R}$ olyan folytonos függvények, amelyekre

$$\varphi(\mathbf{u}) \leq \psi(\mathbf{u}) \qquad (\mathbf{u} \in B),$$

akkor

$$|M| = \int_B \left(\int_{\varphi(\mathbf{u})}^{\psi(\mathbf{u})} \{ f(\mathbf{u}, v) - g(\mathbf{u}, v) \} \, \mathrm{d}v \right) \mathrm{d}\mathbf{u}.$$

2.0.11. feladat. Számítsuk ki az origó középpontú, egységnyi sugarú félgömb térfogatát!

Útm. A szóban forgó félgömb nem más, mint az

$$M := \left\{(u,v,t) \in \mathbb{R}^3 :\ u^2+v^2 \leq 1,\, 0 \leq t \leq \sqrt{1-u^2-v^2}\right\}$$

ponthalmaz. Ha $B := [-1,1]$ és

$$\varphi(u) := -\sqrt{1-u^2}, \quad \psi(u) := \sqrt{1-u^2} \qquad (u \in B),$$

továbbá

$$f(u,v) := \sqrt{1-u^2-v^2} \qquad ((u,v) \in \mathbb{R}^2 :\ u^2+v^2 \leq 1),$$

akkor

$$|M| = \int_{-1}^{1} \left(\int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} \sqrt{1-u^2-v^2}\, \mathrm{d}v \right) \mathrm{d}u = \int_{-1}^{1} \left((1-u^2)\frac{\pi}{2} \right) \mathrm{d}u = \frac{\pi}{2}\left[u - \frac{u^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{2\pi}{3}. \qquad \blacksquare$$

2.0.15. tétel. (Cavalieri-elv.) Legyen $a,b \in \mathbb{R}$: $a \leq b$, ill. $M \subset \mathbb{R}^{N+1}$ olyan Jordan-mérhető halmaz, amelyre

$$x_{N+1} \in [a,b] \qquad ((x_1,\ldots,x_{N+1}) \in M).$$

Ha bármely $\xi \in [a,b]$ esetén az

$$\widetilde{M}(\xi) := \left\{(x_1,\ldots,x_{N+1}) \in \mathbb{R}^N :\ (x_1,\ldots,x_N,\xi) \in M\right\}$$

ún. **metszethalmaz** Jordan-mérhető, akkor akkor az

$$[a,b] \ni \xi \mapsto |\widetilde{M}(\xi)|$$

függvény integrálható és

$$|M| = \int_a^b \widetilde{M}(\xi)\, \mathrm{d}\xi.$$

2.0.4. példa. Legyen

$$M := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2+z^2 \leq 1,\, z \geq 0\right\}, \qquad [a,b] := [-1,1],$$

ill.

$$\widetilde{M}(\xi) := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2 \leq 1-\xi^2,\, x \geq 0\right\} \qquad (\xi \in [-1,1]),$$

azaz $\widetilde{M}(\xi)$ nem más, mint egy $\sqrt{1-\xi^2}$ sugarú félkörív. Mivel

$$|\widetilde{M}(\xi)| = (1-\xi^2)\frac{\pi}{2},$$

ezért

$$|M| = \int_{-1}^{1} = (1-\xi^2)\frac{\pi}{2}\, \mathrm{d}\xi = \frac{2\pi}{3}.$$

2.0.16. tétel. (Helyettesítéses integrálás). Legyen $d \in \mathbb{N}$, $U \subset \mathbb{R}^d$ nyílt halmaz, $\Phi : U \to \mathbb{R}^d$ injektív és folytonosan differenciálható függvény, továbbá

$$\det[\Phi'(\mathbf{r})] \neq 0 \qquad (\mathbf{r} \in U).$$

Ha $K \subset U$ kompakt és Jordan-mérhető, akkor $\Phi[K]$ is Jordan-mérhető és

$$|\Phi[K]| = \int_K |\det[\Phi'(\mathbf{r})]| \, \mathrm{d}\mathbf{r},$$

továbbá bármely $f : \Phi[K] \to \mathbb{R}$ folytonos függvényre

$$\boxed{\int_{\Phi[K]} f(\mathbf{s}) \, \mathrm{d}\mathbf{s} = \int_K f(\Phi(\mathbf{r})) \, |\det[\Phi'(\mathbf{r})]| \, \mathrm{d}\mathbf{r}}. \tag{2.0.1}$$

2.0.0. megjegyzés. A (2.0.1) formula akkor is fennáll, ha valamely Jordan-nullmértékű $N \subset K$ halmazon $\det[\Phi']$ eltűnik vagy $\Phi|_N$ nem injektív.

2.0.12. feladat. Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ az a ponthalmaz, amelynek határai az

$$x + 3y = 0, \qquad x - 3y = 0, \qquad x + 3y = 6, \qquad x - 3y = 6$$

egyenesek.

1. Vázoljuk az Ω halmazt!
2. Írjuk le a halmazt az

   $$u := x + 3y, \qquad v := x - 3y$$

   korrdinátatranszformáció bevezetésével!
3. Számítsuk ki az

   $$\int_\Omega xy \, \mathrm{d}(x, y)$$

   integrált!

Útm.

1. Ω nem más, mint a

   $$(0,0), \qquad (3,-1), \qquad (6,0) \qquad \text{és} \qquad (3,1)$$

   csúcspontú rombusz, melynek oldalai az

   $$y = -x/3, \qquad y = x/3, \qquad y = (6 - x)/3, \qquad y = (x - 6)/3$$

   egyenesekre illeszkednek.

2. Mivel
$$u+v=2x \qquad \text{és} \qquad u-v=6y,$$
ezért a szóbanforgó koordinátatranszformáció a következő alakú
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \Phi(u,v) :\equiv \begin{bmatrix} (u+v)/2 \\ (u-v)/6 \end{bmatrix}.$$
Az új koordinátákban Ω már egy,
$$u=0, \qquad v=0, \qquad u=6, \qquad v=6$$
egyenesek határolta korlátos tartomány, azaz
$$\Omega = \Phi([0{,}6]\times[0{,}6]).$$

3. Mivel
$$\det[\Phi'(u,v)] \equiv \det\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/6 & -1/6 \end{bmatrix} = -\frac{1}{6} < 0,$$
ezért a keresett integrál az alábbi módon számítható:
$$\begin{aligned} \int_\Omega xy\,\mathrm{d}(x,y) &= \int_{[0,6]\times[0,6]} \frac{(u+v)(u-v)}{12}\cdot\frac{1}{6}\,\mathrm{d}(u,v) = \\ &= \frac{1}{72}\int_0^6\int_0^6 (u^2-v^2)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \frac{1}{72}\left\{\int_0^6 \left[\frac{u^3}{3}-uv^2\right]_{u=0}^{u=6}\mathrm{d}v\right\} = \\ &= \frac{1}{72}\left\{\int_0^6\left(\frac{6^3}{3}-6v^2\right)\mathrm{d}v\right\} = \frac{1}{72}\left\{\frac{6^4}{3}-\frac{6^4}{3}\right\} = 0. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

2.0.13. feladat. Számítsuk ki az
$$\int_\Omega xye^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}(x,y)$$
kettős integrált, ha $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ egy origó középpontú és $R(>0)$ sugarú körlemeznek az első síknegyedbe ($x \geq 0$ és $y \geq 0$) eső része!

Útm. Legyen
$$f(x,y) := xye^{x^2+y^2} \qquad ((x,y)\in\mathbb{R}^2).$$
Ha
$$\Phi(r,\varphi) := (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) \qquad ((r,\varphi)\in[0,+\infty)\times[0{,}2\pi])$$
(**polárkoordináták**), akkor
$$\Omega = \left\{\Phi(r,\varphi)\in\mathbb{R}^2:\ r\in[0,R], \varphi\in[0,\pi/2]\right\},$$
ezért, ha
$$\Omega_{r,\varphi} := [0,R]\times[0,\pi/2],$$

úgy $\Omega = \Phi[\Omega_{r,\varphi}]$ és

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f &= \int_{\Omega_{r,\varphi}} f \circ \Phi \cdot \left|\det \Phi'\right| = \\
&= \int_0^R \left(\int_0^{\pi/2} r \cdot \cos(\varphi) \cdot r \cdot \sin(\varphi) \cdot e^{r^2 \cdot \cos^2(\varphi) + r^2 \cdot \sin^2(\varphi)} \cdot r \, \mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}r = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^R \left(\int_0^{\pi/2} r^3 \cdot \sin(2\varphi) \cdot e^{r^2} \, \mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}r = \frac{1}{4} \int_0^R r^3 e^{r^2} \left[-\cos(2\varphi) \right]_0^{\pi/2} \mathrm{d}r = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^R r^3 e^{r^2} \, \mathrm{d}r = \frac{1}{4} \int_0^R r^2 \cdot 2r e^{r^2} \, \mathrm{d}r = \frac{1}{4} \left\{ \left[r^2 e^{r^2} \right]_0^R - \int_0^R 2r e^{r^2} \, \mathrm{d}r \right\} = \\
&= \frac{1}{4} \left\{ R^2 e^{R^2} - e^{R^2} + 1 \right\} = \frac{e^{R^2}(R^2 - 1) + 1}{4}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

2.0.14. feladat. Számítsuk ki az $\int_\Omega f$-et, ha

$$f(x,y) := \ln(x^2 + y^2) \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 0),$$

ill. $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ az origó középpontú, 1 belső sugarú és 2 külső sugarú körgyűrű!

Útm. Világos, hogy

$$\Omega := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \le x^2 + y^2 \le 4 \right\},$$

így polárkoordinátákra áttérve azt kapjuk, hogy $0 \le \varphi \le 2\pi$ és $1 \le r^2 \le 4$, azaz

$$\Omega = \left\{ (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) \in \mathbb{R}^2 : \ \varphi \in [0,2\pi], r \in [1,2] \right\}.$$

Ezért

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f &= \int_0^{2\pi} \left(\int_1^2 \ln(r^2) r \, dr \right) d\varphi = 2\pi \left(\left[\frac{r^2}{2} \ln(r^2) \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{r^2}{2} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot 2r \, dr \right) = \\
&= 2\pi \left(4\ln(2) - \int_1^2 r \, dr \right) = 2\pi \left(4\ln(2) - \left[\frac{r^2}{2} \right]_1^2 \right) = \pi \left(8\ln(2) - 3 \right). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

2.0.15. feladat. Adott $a, b > 0$ esetén számítsuk ki az a fél nagytengelyű, ill. b fél kistengelyű ellipszis, azaz az

$$\Omega := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1 \right\}$$

ponthamaz területét!

Útm. Ha

$$\Phi(r,\varphi) := (ar\cos(\varphi), br\sin(\varphi)) \qquad ((r,\varphi) \in [0, +\infty) \times [0,2\pi]),$$

akkor

$$\Omega = \left\{\Phi(r,\varphi) \in \mathbb{R}^2 : \ r \in [0,1], \varphi \in [0,2\pi]\right\},$$

ezért, ha

$$\Omega_{r,\varphi} := [0,1] \times [0,2\pi],$$

úgy

$$|\Omega| = \int_{\Omega} 1 \, \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{\Omega_{r,\varphi}} |\det \Phi'| \, \mathrm{d}r = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} abr \, \mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}r = 2\pi ab \int_0^1 r \, \mathrm{d}r = ab\pi. \quad \blacksquare$$

2.0.0. megjegyzés. A helyettesítéses integrálásnál **hengerkoordinátá**kra való áttérés a

$$\Phi : \mathbb{R}^+ \times (0,2\pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \qquad \Phi(r,\theta,z) := \begin{bmatrix} r\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \\ z \end{bmatrix}$$

sima függvény felhasználásával történik. Látható, hogy

$$\det[\Phi'(r,\theta,z)] \equiv \det \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -r\sin(\theta) & r\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = r\cos^2(\theta) + r\sin^2(\theta) = r.$$

A gyakorlatban azonban legtöbbször

$$\mathcal{D}_\Phi = [r_1, r_2] \times [\theta_1, \theta_2] \times [z_1, z_2], \qquad 0 \le r_1 < r_2, \ 0 \le \theta_1 < \theta_2 \le 2\pi$$

teljesül. Viszonylag könnyen belátható, hogy ebben az esetben is igaz a helyettesítéses integrálás tétele, azaz

$$\boxed{\int_\Omega f(x,y,z) \, \mathrm{d}(x,y,z) = \int_{z_1}^{z_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{r_1}^{r_2} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta), z) r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}z}$$

írható.

2.0.16. feladat. Számítsuk ki az

$$\int_{y=0}^1 \left(\int_{x=0}^{\sqrt{1-y^2}} \left(\int_{z=x^2+y^2}^{\sqrt{x^2+y^2}} xyz \, \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

integrált hengerkoordináták felhasználásával!

Útm. Mivel

$$\int_{y=0}^1 \left(\int_{x=0}^{\sqrt{1-y^2}} \left(\int_{z=x^2+y^2}^{\sqrt{x^2+y^2}} xyz \, \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_\Omega f(x,y,z) \, \mathrm{d}(x,y,z),$$

ahol

$$\Omega := \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ y\in[0,1],\ x\in[0,\sqrt{1-y^2}],\ z\in[x^2+y^2,\sqrt{x^2+y^2}]\right\},$$

$$f(x,y,z) := xyz \qquad ((x,y,z)\in\Omega),$$

ezért

$$\int_{y=0}^{1}\left(\int_{x=0}^{\sqrt{1-y^2}}\left(\int_{z=x^2+y^2}^{\sqrt{x^2+y^2}} xyz\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y =$$

$$= \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^1\left(\int_{z=r^2}^{r} r\cos(\theta)r\sin(\theta)zr\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\theta =$$

$$= \underbrace{\left(\int_0^{\pi/2}\cos(\theta)\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\right)}_{=\int_0^{\pi/2}\sin'(\theta)\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta}\cdot\left(\int_0^1 r^3\left(\int_{r^2}^{r} z\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}r\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\int_0^1 r^3\left[\frac{z^2}{2}\right]_{r^2}^{r}\mathrm{d}r = \frac{1}{4}\cdot\int_0^1 (r^5-r^7)\,\mathrm{d}r = \frac{1}{96}. \quad \blacksquare$$

2.0.17. feladat. Adott $0<\alpha<\pi/2$ esetén számítsuk ki az origó középpontú, R sugarú, 2α nyílásszögű Ω gömbcikk térfogatát!

Útm. Ha

$$\Phi(r,\vartheta,\psi) := (r\sin(\vartheta)\cos(\psi), r\sin(\vartheta)\sin(\psi), r\cos(\vartheta))$$

$$((r,\vartheta,\psi)\in[0,R]\times[0,\alpha]\times[0,2\pi])$$

(**gömbi koordináták**), akkor

$$\Omega = \left\{\Phi(r,\vartheta,\psi)\in\mathbb{R}^2:\ \ r\in[0,R],\ \vartheta\in[0,\alpha],\ \psi\in[0,2\pi]\right\},$$

ezért, ha

$$\Omega_{r,\vartheta,\psi} := [0,R]\times[0,\alpha]\times[0,2\pi],$$

úgy

$$|\Omega| = \int_\Omega 1\,\mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{\Omega_{r,\vartheta,\psi}}\left|\det\Phi'(r,\vartheta,\psi)\right|\,\mathrm{d}(r,\vartheta,\psi) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\alpha}\int_0^{R} r^2\sin(\vartheta)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\psi =$$

$$= \frac{2R^2\pi}{3}R(1-\cos(\alpha)) =: \frac{2R^2\pi m}{3},$$

ahol m a gömbcikkhez tartozó gömbsüveg magassága. $\blacksquare$

2.0.18. feladat. Építsünk autóutat az egyenlítő mentén! A Földet $R = 6380\,\mathrm{km}$ sugarú gömbnek tekintve mekkora földmennyiséget kell kiásni ahhoz, hogy a $d = 60\,\mathrm{m}$ széles út éppen egy hengerfelülettel egyezzék meg? Mekkora lenne a kiásott földmennyiség a Holdon (a Hold sugara $R = 1700\,\mathrm{km}$)?

Útm. A gömbből eltávolítandó Ω test pontjait jellemezzük hengerkoordinátákkal:

$$x =: r\cos(\theta), \qquad y =: r\sin(\theta), \qquad z =: z,$$

ahol

$$z \in [-b, b], \qquad \theta \in [-\pi, \pi] \qquad \text{és a} \qquad b := d/2, \qquad \text{jelöléssel} \qquad R^2 - b^2 < r^2 < R^2 - z^2.$$

Így

$$\begin{aligned}
|\Omega| &= \int_\Omega 1\,\mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{z=-b}^{b} \left(\int_{r=\sqrt{R^2-b^2}}^{\sqrt{R^2-z^2}} \left(\int_{\theta=-\pi}^{\pi} r\,\mathrm{d}\theta \right) \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}z = \\
&= 2\pi \int_{-b}^{b} \left(\int_{\sqrt{R^2-b^2}}^{\sqrt{R^2-z^2}} r\,\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}z = \pi \int_{-b}^{b} \left\{ R^2 - z^2 - R^2 + b^2 \right\} \mathrm{d}z = \\
&= \pi \int_{-b}^{b} (b^2 - z^2)\,\mathrm{d}z = \frac{4\pi}{3} b^3 = \frac{\pi d^3}{6}.
\end{aligned}$$

Mivel eredményünk független az R sugártól, ezért a Holdon, és így más bolygón is ugyanannyi földmennyiséget kell eltávolítani az autóút építéséhez. ■

2.0.19. feladat. Becsüljük meg a Föld légkörének tömegét! Bár a légkör nincs nyugalomban, és a hőmérséklete sem mindenütt ugyanaz, nem túlságosan nagy magasságok esetén a levegő ρ sűrűségének a magassággal való csökkenését jó közelítéssel a

$$\rho(h) := \rho_0 \exp\left(-\frac{\rho_0 g h}{p_0} \right)$$

ún. **barometrikus magasságformula** írja le, ahol

h	a Föld felszínétől mért magasság,
$g = 9.81 m/s^2$	a nehézségi gyorsulás,
$p_0 = 101325 N/m^2$	a Föld felszínén a légnyomás,
$\rho_0 = 1.293 kg/m^3$	a levegő sűrűsége a Föld felszínén.

Mivel igen nagy h-ra $\rho(h)$ igen kicsi, ezért a becslés során feltehető, hogy a fenti formula tetszőleges $h \in [0, +\infty)$ esetén érvényes.

Útm. Mivel a légkör közel gömbszimmetrikusnak tekinthető, érdmes pontjait gömbkoordinátákkal jellemezni. A

$$\frac{p_0}{\rho_0 g} = \frac{101325 \frac{N}{m^2}}{1.293 \frac{kg}{m^3} \cdot 9.81 \frac{m}{s^2}} = 7988.2m =: \alpha$$

jelölés bevezetésével azt kapjuk, hogy

$$\rho(h)=\rho_0 e^{h/\alpha}, \qquad \text{ill.} \qquad \rho(r)=\rho_0\exp\left(\frac{-r+R_0}{\alpha}\right) \qquad (r>R_0),$$

ahol $R_0 = 6380\,km$ a Föld sugara, $r > 0$ pedig a Föld középpontjától mért távolság. Így – egyezően az irodalmi adatokkal – a légkör m tömege

$$\begin{aligned} m &= \int_\Omega \rho = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\left(\int_{R_0}^{+\infty}\rho_0\exp\left(\frac{-r+R_0}{\alpha}\right)r^2\sin(\vartheta)\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\vartheta\right)\mathrm{d}\psi = \\ &= \left(\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\psi\right)\cdot\left(\int_0^{\pi}\sin(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta\right)\cdot\left(\int_{R_0}^{+\infty}\rho_0\exp\left(\frac{-r+R_0}{\alpha}\right)r^2\,\mathrm{d}r\right) = \\ &= 4\pi\rho_0\cdot\int_{R_0}^{+\infty}\exp\left(\frac{-r+R_0}{\alpha}\right)r^2\,\mathrm{d}r = \\ &= 4\pi\rho_0\alpha\{R_0^2+2R_0\alpha+2\alpha^2\}\approx 5.296\cdot 10^{18}kg. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

2.0.20. feladat. Adott $a, b, c > 0$ esetén számítsuk ki az

$$\Omega := \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq 1\right\}$$

ponthalmaz (**ellipszoid**) térfogatát!

Útm. Ha

$$\Phi(r,\vartheta,\psi) := (ar\sin(\vartheta)\cos(\psi), br\sin(\vartheta)\sin(\psi), cr\cos(\vartheta))$$

$$((r,\vartheta,\psi)\in[0,1]\times[0,\pi]\times[0,2\pi]),$$

akkor

$$\Omega = \Phi([0,1]\times[0,\pi]\times[0,2\pi]),$$

így

$$\begin{aligned} |\Omega| &= \int_\Omega 1\,\mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{[0,1]\times[0,\pi]\times[0,2\pi]} |\det\Phi'(r,\vartheta,\psi)|\,\mathrm{d}(r,\vartheta,\psi) = \\ &= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\left(\int_0^1 abcr^2\sin(\vartheta)\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\vartheta\right)\mathrm{d}\psi = \\ &= \frac{abc}{3}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\sin(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta\right)\mathrm{d}\psi = \\ &= \frac{2abc}{3}\int_0^{2\pi}1\,\mathrm{d}\psi = \frac{4\pi}{3}abc. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

2.0.17. tétel. Tegyük fel, hogy valamely $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^3$ Jordan mérhető ponthalmazzal jellemzett test sűrűsége a Riemann-integrálható $\rho : \Omega \to [0, +\infty)$ függvénnylel írható le. Ekkor az

$$M := \int_\Omega \rho(x, y, z)\, \mathrm{d}(x, y, z),$$

tömegű test tömegközéppontjának koordinátái

$$\overline{x} := x_{TKP} = \frac{1}{M} \int_\Omega x\rho(x, y, z)\, \mathrm{d}(x, y, z),$$

$$\overline{y} := y_{TKP} = \frac{1}{M} \int_\Omega y\rho(x, y, z)\, \mathrm{d}(x, y, z),$$

$$\overline{z} := z_{TKP} = \frac{1}{M} \int_\Omega z\rho(x, y, z)\, \mathrm{d}(x, y, z).$$

2.0.21. feladat. Számítsuk ki a

$$\Omega := \left\{\mathbf{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ \|\mathbf{r}\| \leq R,\ z > 0\right\}$$

félgömb tömegközéppontjának koordinátáit, ha a sűrűségét a

$$\rho(\mathbf{r}) := az \qquad (\mathbf{r} \in \Omega,\ a > 0)$$

függvény írja le!

Útm. Mivel

$$\Omega = \left\{(r\cos(\theta)\cos(\psi), r\sin(\theta)\cos(\psi), r\sin(\psi)) \in \mathbb{R}^3 : \ r \in [0, R],\ \theta \in [0{,}2\pi],\ \psi \in [0, \pi/2]\right\}$$

(gömbi koordináták), ezért Ω tömegére

$$\begin{aligned} m &= \int_0^R \left(\int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{2\pi} ar\sin(\psi) r^2 \cos(\psi)\, \mathrm{d}\theta\right) \mathrm{d}\psi\right) \mathrm{d}r = \\ &= a\left(\int_0^R r^3\, \mathrm{d}r\right) \cdot \left(\int_0^{\pi/2} \sin(\psi)\cos(\psi)\, \mathrm{d}\psi\right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\right) = \ldots = \frac{a\pi R^4}{4} \end{aligned}$$

teljesül. Szimmetria-megfontolásokból látható, hogy a tömegközéppont a harmadik tengelyen van: $\overline{x} = \overline{y} = 0$. A tömegközéppont harmadik koordinátája a következőképpen számítható:

$$\begin{aligned} \overline{z} &= \frac{1}{m} \int_0^R \left(\int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{2\pi} ar^2 \sin^2(\psi) r^2 \cos(\psi)\, \mathrm{d}\theta\right) \mathrm{d}\psi\right) \mathrm{d}r = \\ &= \frac{a}{m}\left(\int_0^R r^4\, \mathrm{d}r\right) \cdot \left(\int_0^{\pi/2} \sin^2(\psi)\cos(\psi)\, \mathrm{d}\psi\right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\right) = \ldots = \frac{8R}{15}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

2.0.22. feladat. Tegyük fel, hogy az

$$\{\mathbf{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 < 4\}$$

ponthalmazzal jellemzett testből az (xy)-sík és az

$$\{\mathbf{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = \exp(x^2 + y^2)\}$$

felület egy Ω testet metsz ki. Számítsuk ki Ω tömegét, valamint tömegközéppontjának koordinátáit, ha sűrűségét a

$$\rho(\mathbf{r}) := y^2 \qquad (\mathbf{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^2)$$

függvény írja le!

Útm. Az

$$x =: r\cos(\theta), \qquad y =: r\sin(\theta), \qquad z =: z$$

hengerkoordináták bevezetésével Ω tömege

$$\begin{aligned} m &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 \left(\int_0^{e^{r^2}} r^2 \sin^2(\theta) r \, \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\theta = \\ &= \left(\int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) \, \mathrm{d}\theta \right) \cdot \int_0^2 \left(r^3 \int_0^{e^{r^2}} 1 \, \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}r = \ldots = \frac{\pi(3e^4 + 1)}{2}, \end{aligned}$$

hiszen

$$\int_0^2 \left(r^3 \int_0^{e^{r^2}} 1 \right) \mathrm{d}r = \int_0^2 \frac{r^2}{2} 2re^{r^2} \, \mathrm{d}r = \left[\frac{r^2 e^{r^2}}{2} \right]_0^2 - \frac{1}{2} \int_0^2 2re^{r^2} \, \mathrm{d}r = 2e^4 - \left[\frac{e^{r^2}}{2} \right]_0^2 = 2e^4 - \frac{e^4 - 1}{2}.$$

Szimmetria-megfontolásokból látható, hogy a tömegközéppont a harmadik tengelyen van: $\overline{x} = \overline{y} = 0$. A tömegközéppont harmadik koordinátája a következőképpen számítható:

$$\begin{aligned} \overline{z} &= \frac{1}{m} \int_\Omega z\rho(r) \, \mathrm{d}r = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 \left(\int_0^{e^{r^2}} zr^3 \sin^2(\theta) \, \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\theta = \\ &= \frac{1}{m} \left(\int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) \, \mathrm{d}\theta \right) \cdot \int_0^2 \left(r^3 \int_0^{e^{r^2}} z \, \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}r = \frac{\pi}{2m} \int_0^2 r^3 e^{2r^2} \, \mathrm{d}r = \\ &= \frac{\pi}{4m} \int_0^4 ue^{2u} \, \mathrm{d}u = \ldots = \frac{7e^8 + 1}{4(3e^4 + 1)}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

2.0.23. feladat. Legyen $D \subset \mathbb{R}^2$ az

$$(x - 1)^2 + y^2 = 1$$

kör és az $y = 0$ egyenes által határolt síkrész az első síknegyedben ($x \geq 0$ és $y \geq 0$). Számítsuk ki D tömegközéppontját, ha a D-t kitöltő anyag sűrűsége egyenesen arányos az origótól mért távolsággal!

Útm. Valamely $k > 0$ esetén legyen

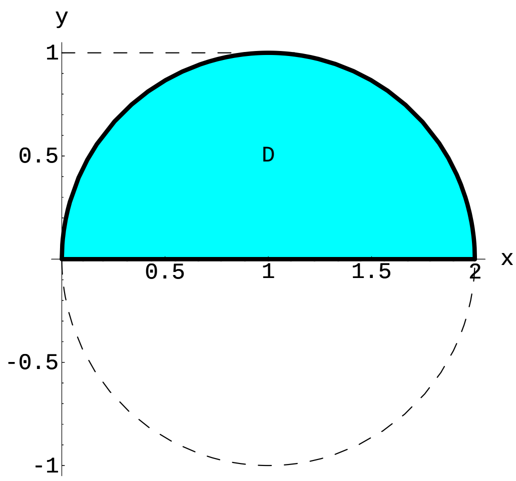
$$\varrho(x,y) := k\sqrt{x^2+y^2} \qquad \left((x,y)\in\mathbb{R}^2\right),$$

így a lemez tömege:

$$m(D) = \int_D \varrho,$$

ahol

$$D := \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ x\in[0,2],\ 0\le y\le\sqrt{1-(x-1)^2}\right\} \qquad \text{(vö. 2.0.1. ábra).}$$



2.0.1. ábra. D határa

Polárkoordinátákra áttérve azt kapjuk, hogy

$$0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$$

és

$$0 \le r\sin(\varphi) \le \sqrt{1-[r\cos(\varphi)-1]^2},$$

azaz

$$0 \le r^2\sin^2(\varphi) \le 1 - r^2\cos^2(\varphi) + 2r\cos(\varphi) - 1,$$

ahonnan

$$0 \le r \le 2\cos(\varphi),$$

következik. Így

$$D = \left\{(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))\in\mathbb{R}^2 :\ \varphi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\ r\in[0{,}2\cos(\varphi)]\right\}.$$

Ezért D tömege

$$
\begin{aligned}
m(D) &= \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{2\cos(\varphi)} kr\cdot r\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\varphi = \frac{8k}{3}\int_0^{\pi/2}\cos^3(\varphi)\mathrm{d}\varphi = \\
&= \frac{8k}{3}\int_0^{\pi/2}\cos(\varphi)\cos^2(\varphi)\mathrm{d}\varphi = \frac{8k}{3}\int_0^{\pi/2}\cos(\varphi)\left[1-\sin^2(\varphi)\right]\mathrm{d}\varphi = \\
&= \frac{8k}{3}\left\{\int_0^{\pi/2}\cos(\varphi)d\varphi - \int_0^{\pi/2}\cos(\varphi)\sin^2(\varphi)\mathrm{d}\varphi\right\} = \\
&= \frac{8k}{3}\left\{[\sin(\varphi)]_0^{\pi/2} - \left[\frac{\sin^3(\varphi)}{3}\right]_0^{\pi/2}\right\} = \frac{16k}{9},
\end{aligned}
$$

így a tömegközéppont koordinátái:

$$
\begin{aligned}
x_{TKP} &= \frac{\int_D x\cdot\varrho(\mathbf{r})\,\mathrm{d}\mathbf{r}}{m_D} = \frac{1}{m_D}\cdot\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{2\cos(\varphi)} r\cos(\varphi)kr\cdot r\,\mathrm{d}r\right)d\varphi = \\
&= \frac{4k}{m_D}\cdot\int_0^{\pi/2}\cos^5(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = \frac{9}{4}\cdot\int_0^{\pi/2}\left[1-\sin^2(\varphi)\right]^2\cos(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = \\
&= \frac{9}{4}\cdot\int_0^{\pi/2}\left[1-2\sin^2(\varphi)+\sin^4(\varphi)\right]\cos(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = \\
&= \frac{9}{4}\cdot\int_0^{\pi/2}\left[\cos(\varphi)-2\sin^2(\varphi)\cos(\varphi)+\sin^4(\varphi)\cos(\varphi)\right]\,\mathrm{d}\varphi = \\
&= \frac{9}{4}\cdot\left\{[\sin(\varphi)]_0^{\pi/2} - \left[2\frac{\sin^3(\varphi)}{3}\right]_0^{\pi/2} + \left[\frac{\sin^5(\varphi)}{5}\right]_0^{\pi/2}\right\} = \\
&= \frac{9}{4}\cdot\left\{1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right\} = \frac{6}{5},
\end{aligned}
$$

ill.

$$
\begin{aligned}
y_{TKP} &= \frac{\int_D y\cdot\varrho(\mathbf{r})\,\mathrm{d}\mathbf{r}}{m(D)} = \frac{1}{m(D)}\cdot\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{2\cos(\varphi)} r\sin(\varphi)kr\cdot r\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\varphi = \\
&= \frac{4k}{m(D)}\cdot\int_0^{\pi/2}\cos^4(\varphi)\sin(\varphi)\,\mathrm{d}\mathrm{d}\varphi = \frac{9}{4}\left[-\frac{\cos^5(\varphi)}{5}\right]_0^{\pi/2} = \frac{9}{20}. \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

2.0.9. definíció. Tegyük fel, hogy $n \in \mathbb{N}$, és legyen adott az $\mathbb{R}^3$ térben n számú

$$P_1(\mathbf{r}_1), \ldots, P_n(\mathbf{r}_n)$$

pont, majd helyezzünk el a $P_k(\mathbf{r}_k)$ pontokba $m_k > 0$ tömeget $(k \in \{1, \ldots, n\})$ $/\mathbf{r}_k = (x_k, y_k, z_k)$ $(k \in \{1, \ldots, n\})/$. Ekkor ennek a **tömegpont-rendszer**nek az $\mathbb{R}^3$ tér valamely $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^3$: $\|\mathbf{e}\| = 1$ irányú tengelyre vonatkozó **vonatkozó tehetetlenségi nyomaték**án a

$$\Theta_{\mathbf{e}} := \sum_{k=1}^{n} m_k l_k^2$$

számot értjük, ahol l_k jelöli a k-adik tömegpontnak $(k \in \{1, \ldots, n\})$ a tengelytől mért távolságát.

2.0.0. megjegyzés. Mivel

$$l_k = \|\mathbf{e} \times \mathbf{r}_k\| \qquad (k \in \{1, \ldots, n\}),$$

ezért a pontrendszer tehetetlenségi nyomatékára

$$\Theta_{\mathbf{e}} = \sum_{k=1}^{n} m_k \|\mathbf{e} \times \mathbf{r}_k\|^2.$$

Ha a tengely valamelyik koordináta-tengely: $\mathbf{e} \in \{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$, ahol

$$\mathbf{e}_x = (1,0,0), \qquad \mathbf{e}_y = (0,1,0), \qquad \mathbf{e}_z = (0,0,1),$$

akkor bármely $k \in \{1, \ldots, n\}$ esetén

$$\|\mathbf{e}_x \times \mathbf{r}_k\|^2 = y_k^2 + z_k^2, \qquad \|\mathbf{e}_y \times \mathbf{r}_k\|^2 = x_k^2 + z_k^2, \qquad \|\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}_k\|^2 = x_k^2 + y_k^2,$$

így

$$\Theta_{\mathbf{e}_x} = \sum_{k=1}^{n} m_k (y_k^2 + z_k^2)^2, \qquad \Theta_{\mathbf{e}_y} = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k^2 + z_k^2)^2, \qquad \Theta_{\mathbf{e}_z} = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k^2 + z_y^2)^2.$$

2.0.18. tétel. Tegyük fel, hogy valamely $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^3$ Jordan mérhető ponthalmazzal jellemzett test sűrűsége a Riemann-integrálható $\rho : \Omega \to [0, +\infty)$ függvénnylel írható le. Ekkor Ω-nak valamely $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^3$: $\|\mathbf{e}\| = 1$ irányú tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka a

$$\boxed{\Theta_{\mathbf{e}} = \int_\Omega l^2(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r})\,\mathrm{d}\mathbf{r}}$$

valós szám, ahol $l(\mathbf{r})$ jelöli az $\mathbf{r} \in \Omega$ pontnak az $\mathbf{e}$ egységvektor irányú tengelytől mért távolságát:

$$l(\mathbf{r}) := \inf\left\{\|\mathbf{r} - t\mathbf{e}\| \in \mathbb{R} :\ t \in \mathbb{R}\right\}. \qquad \blacksquare$$

2.0.0. megjegyzés. Világos, hogy ha $\mathbf{e} \in \{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$, akkor Ω-nak a koordináta-tengelyekre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka:

$$\boxed{\begin{aligned}
\Theta_{\mathbf{e}_x} &= \int_\Omega (y^2 + z^2)\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z),\\
\Theta_{\mathbf{e}_y} &= \int_\Omega (x^2 + z^2)\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z),\\
\Theta_{\mathbf{e}_z} &= \int_\Omega (x^2 + y^2)\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z).
\end{aligned}}$$

2.0.24. feladat. Adott $R > 0$,

$$\Omega := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\right\},$$

és

$$\rho(\mathbf{r}) := \rho_0 \in (0, +\infty) \qquad (\mathbf{r} \in \Omega)$$

esetén számítsuk ki Ω-nak a koordináta-tengelyekre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékát!

Útm. Szimmetria-megfontolások alapján világos, hogy

$$\Theta_{\mathbf{e}_x} = \Theta_{\mathbf{e}_y} = \Theta_{\mathbf{e}_z},$$

és (pl.)

$$\Theta_{\mathbf{e}_z} = \int_\Omega (x^2 + y^2)\rho_0\,\mathrm{d}(x,y,z).$$

Gömbi koordináták bevezetésével látható, hogy

$$\Omega = \left\{\Phi(r,\vartheta,\psi) \in \mathbb{R}^3 :\ r \in [0,R],\ \theta \in [0{,}2\pi],\ \psi \in [-\pi/2, \pi/2]\right\},$$

ahol

$$\Phi(r,\vartheta,\psi) :\equiv (r\cos(\theta)\cos(\psi), r\sin(\theta)\cos(\psi), r\sin(\psi)).$$

Így

$$
\begin{aligned}
\Theta_{\mathbf{e}_z} &= \rho_0 \int_0^R \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_0^{2\pi} \{r^2\cos^2(\theta)\cos^2(\psi) + r^2\sin^2(\theta)\cos^2(\psi)\} \, r^2\cos(\psi)\,\mathrm{d}\theta \right) \mathrm{d}\psi \right) \mathrm{d}r = \\
&= 2\pi\rho_0 \left(\int_0^R r^4\,\mathrm{d}r \right) \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3(\psi)\,\mathrm{d}\psi \right) = \\
&= \frac{\pi\rho_0 R^5}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(\psi)\{1-\sin^2(\psi)\}\,\mathrm{d}\psi = \frac{2\pi\rho_0 R^5}{5}\left[\sin(\psi) - \frac{\sin^3(\psi)}{3}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \\
&= \frac{8\pi\rho_0 R^5}{15}.
\end{aligned}
$$

Mivel Ω tömege

$$
m(\Omega) =: m = \rho_0|\Omega| = \rho_0\frac{4R^3\pi}{3},
$$

ezért

$$
\Theta_{\mathbf{e}_z} = \frac{2}{5}mR^2. \quad \blacksquare
$$

2.0.25. feladat. Adott $R, M, \rho_0 > 0$ esetén határozzuk meg valamely R sugarú, M magasságú, ρ_0 sűrűségű Ω egyenes körhengernek az alapjával párhuzamos tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékát!

Útm. Helyezzük el a hengert úgy, hogy tömegközéppontja az origóba kerüljön. Ekkor az első tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka:

$$
\Theta_{\mathbf{e}_x} = \int_\Omega (y^2+z^2)\rho_0\,\mathrm{d}(x,y,z).
$$

Hengerkorrdináták bevezetésével

$$
\Omega = \left\{ (r\cos(\theta), r\sin(\theta), z) \in \mathbb{R}^3 : \; r\in[0,R],\; \theta\in[-\pi,\pi],\; z\in\left[-\frac{M}{2},\frac{M}{2}\right] \right\},
$$

így

$$
\begin{aligned}
\Theta_{\mathbf{e}_x} &= \rho_0 \int_0^R \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}} r(r^2\sin^2(\theta)+z^2)\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}\theta \right) \mathrm{d}r = \\
&= \rho_0 \int_0^R \left(\int_{-\pi}^{\pi} r\left\{ r^2 M\sin^2(\theta) + \frac{M^3}{12} \right\} \mathrm{d}\theta \right) \mathrm{d}r = \\
&= \rho_0 \int_0^R \left(\int_{-\pi}^{\pi} r\left\{ r^2 M\frac{1-\cos(2\theta)}{2} + \frac{M^3}{12} \right\} \mathrm{d}\theta \right) \mathrm{d}r = \\
&= \rho_0 \int_0^R \left\{ r^3\pi M + \pi\frac{M^3}{6}r \right\} \mathrm{d}r = \rho_0\left(\frac{R^4}{4}M\pi + \frac{M^3}{12}R^2\pi \right).
\end{aligned}
$$

Mivel a henger tömege:

$$m=\rho_0\pi R^2 M,$$

ezért

$$\Theta_{\mathbf{e}_x}=m\left(\frac{R^4}{4}+\frac{M^3}{12}\right). \quad \blacksquare$$

2.0.26. feladat. Tegyük fel, hogy adott $0<R_1<R_2$ esetén

$$\Omega:=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ R_1^2\leq x^2+y^2+z^2\leq R_2^2\right\}.$$

Számítsuk ki a $\rho_0>0$ sűrűségű Ω test tehetetlenségi nyomatékát tetszőleges, a központontján átmenő tengelyre vonatkozóan!

Útm. Szimmetria-megfontolásokból világos, hogy a középponton átmenő tetszőleges tengelyre vonatkozóan ugyanaz lesz a Θ tehetelenségi nyomaték. Így (pl.) $\Theta=\Theta_{\mathbf{e}_z}$. Gömbi koordináták bevezetésével látható, hogy

$$\Omega=\left\{\Phi(r,\vartheta,\psi)\in\mathbb{R}^3:\ r\in[R_1,R_2],\ \theta\in[0{,}2\pi],\ \psi\in[-\pi/2,\pi/2]\right\},$$

ahol

$$\Phi(r,\vartheta,\psi):\equiv(r\cos(\theta)\cos(\psi),r\sin(\theta)\cos(\psi),r\sin(\psi)).$$

Így

$$\begin{aligned}
\Theta_{n_z} &= \int_\Omega (x^2+y^2)\rho_0\,\mathrm{d}(x,y,z)=\rho_0\int_0^{2\pi}\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int_{R_1}^{R_2} r^2\cos^2(\psi)r^2\cos(\psi)\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\psi\right)\mathrm{d}\theta=\\
&= 2\pi\rho_0\left(\int_{R_1}^{R_2} r^4\,\mathrm{d}r\right)\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^3(\psi)\,\mathrm{d}\psi\right)=\frac{2\pi\rho_0}{5}\left(R_2^5-R_1^5\right)\cdot\frac{4}{3}=\\
&= \frac{8\pi}{15}\rho_0\left(R_2^5-R_1^5\right).
\end{aligned}$$

Mivel Ω tömege:

$$m(\Omega)=:m=\rho_0|\Omega|=\rho_0\frac{4}{5}\pi\left(R_2^3-R_1^3\right),$$

ezért

$$\Theta=\frac{2}{5}\cdot m\cdot\frac{R_2^5-R_1^5}{R_2^3-R_1^3}. \quad \blacksquare$$

2.0.0. megjegyzés.

- Az $R_1 = 0$, ill. $R_2 = R$ esetben (tömör gömb esetén)

$$\Theta = \frac{2}{5}mR^2$$

(vö. korábban).

- Az

$$R_1 \nearrow R_2 =: R$$

határesetben a Bernoulli-l'Hospital-szabály alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$\Theta = \frac{2}{3}mR^2.$$

Ez azt jelenti, hogy azonos tömegű és azonos sugarú (következésképpen kisebb sűrűségű) gömbhélynak nagyobb a tehetelenségi nyomatéka. Ezért van az, hogy – egyébként azonos körülmények mellett – a tömör golyó hamarabb legurul a lejtőn.

Merev test valamely pontján tetszőleges tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka egyszerűen kifejezhető a tömegkozépponton átmenő, az előbbivel párhuzamos tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékkal. Erre vonatkozik a következő

2.0.3. tétel. (Steiner-tétel). Valamely, a Jordan-mérhető $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ponthalmazzal jellemezhető testnek bármely pontján átmenő tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka

$$\boxed{\Theta = \Theta_d + md^2},$$

ahol Θ_d az előző tengellyel párhuzamos, a tömegközépponton áthaladó tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomaték, m a test tömege, d pedig a két tengely távolsága.

Biz. A koordinátarendszer harmadik tengelyét válasszuk az adott tengellyel egyirányúnak, és Ω tömegközéppontja legyen az origó. Ekkor

$$\Theta_d = \int_\Omega (x^2+y^2)\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z).$$

Hasonlóan adódik a d távolságban lévő tengelyre vonatkoztatott nyomaték:

$$\begin{aligned}\Theta &= \int_\Omega ((x-d)^2+y^2)\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z) = \\ &= \underbrace{\int_\Omega (x^2+y^2)\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z)}_{\Theta_d} - 2d\int_\Omega x\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z) + \\ &\quad + d^2 \underbrace{\int_\Omega \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z)}_{m:=m(\Omega)}.\end{aligned}$$

Mivel a tömegközéppont az origóban van, ezért

$$0 = x_{TKP} = \frac{\displaystyle\int_\Omega x\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z)}{\displaystyle\int_\Omega \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z)},$$

ahonnan

$$\int_\Omega x\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z) = 0,$$

azaz

$$\Theta = \Theta_d + md^2$$

következik. ■

2.0.27. feladat. Adott $a > 0$ esetén határozzuk meg valamely a élű, egységnyi sűrűségű Ω kockának a kocka középpontján áthaladó, a kocka éleivel párhuzamos tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát! Igazoljuk, hogy bármely, a középponton átmenő tengely esetén ugyanakkora Θ a tehetetlenségi nyomaték!

Útm. Helyezzük el a kockát úgy, hogy középpontja az origóban legyen, élei a koordinátatengelyekkel párhuzamosak legyenek:

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x \in \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right],\ y \in \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right],\ z \in \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]\right\}.$$

Szimmetria-megfontolásból

$$\begin{aligned}
\Theta_{\mathbf{e}_x} &= 8\int_0^{\frac{a}{2}} \left(\int_0^{\frac{a}{2}} \left(\int_0^{\frac{a}{2}} (y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z = 4a\int_0^{\frac{a}{2}} \left(\int_0^{\frac{a}{2}} (y^2+z^2)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z = \\
&= 4a\int_0^{\frac{a}{2}} \left(\frac{a^3}{24} + \frac{a}{2}z^2\right)\mathrm{d}z = 4a\left(\frac{a^4}{48} + \frac{a^4}{48}\right) = \frac{a^5}{6}.
\end{aligned}$$

Mivel egységnyi sűrűségű kockáról van szó, ezért a kocka tömege: $m = a^3$. Tehát

$$\Theta_{\mathbf{e}_x} = \frac{ma^2}{6}.$$

Szimmetria-megfontolásból nyilvánvaló, hogy

$$\Theta_{\mathbf{e}_x} = \Theta_{\mathbf{e}_y} = \Theta_{\mathbf{e}_z}.$$

Ha $\mathbf{e} = (n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{R}^3$: $\|\mathbf{e}\| = 1$ valamely, az origón átmenő tengely irányú (egység)vektor, akkor a kocka tetszőleges r helyvektorú pontjának a tengelytől mért távolsága:

$$l := l(\mathbf{r}) := \|\mathbf{e} \times \mathbf{r}\| = \|\mathbf{r}\| \sin(\mathbf{e}, \mathbf{r}).$$

Mivel

$$\begin{aligned}
l^2(\mathbf{r}) &= \|\mathbf{e}\times\mathbf{r}\|^2 = \langle \mathbf{e}\times\mathbf{r}, \mathbf{e}\times\mathbf{r}\rangle = (n_2z - n_3y)^2 + (n_3x - n_1z)^2 + (n_1y - n_2x)^2 = \\
&= n_1^2(y^2+z^2) + n_2^2(x^2+z^2) + n_3^2(x^2+y^2) - 2n_2n_3yz - 2n_1n_3xz - 2n_1n_2xy
\end{aligned}$$

és

$$\Theta = \int_\Omega l^2(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z),$$

ill. szimmetria-megfontolások miatt

$$\int_\Omega (z^2+y^2)\,\mathrm{d}(x,y,z) = \Theta_{n_y}, \qquad \int_\Omega zy\,\mathrm{d}(x,y,z) = 0,$$

ezért

$$\Theta = \Theta_{\mathbf{e}_x}\cdot n_1^2 + \Theta_{\mathbf{e}_y}\cdot n_2^2 + \Theta_{\mathbf{e}_z}\cdot n_3^2.$$

Felhasználva a

$$\Theta_{\mathbf{e}_x} = \Theta_{\mathbf{e}_y} = \Theta_{\mathbf{e}_z} \qquad \text{és az} \qquad n_1^2+n_2^2+n_3^2=1$$

összefüggést, azt kapjuk, hogy

$$\Theta = \Theta_{\mathbf{e}_x}\left(n_1^2+n_2^2+n_3^2\right) = \Theta_{\mathbf{e}_x}. \quad \blacksquare$$

2.0.28. feladat. Számítsuk ki az alábbi integrálokat:

1. $\int_H xy^2\,d(x,y)$, ahol H az $y=x^2$ és az $y=\sqrt{x}$ egyenletű görbék által közrezárt korlátos síkrész;
2. $\int_H y^2\sqrt{1-x^2}\,d(x,y)$, ahol H az origó körüli, 1 sugarú kompakt körlemez!
3. $\int_H \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,d(x,y,z)$, ahol H az $x^2+y^2+z^2=z$ egyenletű felület által határolt gömb!

Útm.

1. H normáltartomány mindkét tengelyre vonatkozóan, így pl.

$$\int_H f = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} xy\,dy\right)\,\mathrm{d}x = \ldots = \int_0^1 \left(x\cdot\frac{x\sqrt{x}}{3} - x\cdot\frac{x^6}{3}\right)\,\mathrm{d}x = \ldots = \frac{3}{56}.$$

Házi feladat. Számítsuk ki ugyagyanezt az integrált úgy, hogy H az y-tengelyre vonatkozóan normáltartomány, azaz számítsuk ki az

$$\int_H f = \int_0^1 \left(\int_{y^2}^{\sqrt{y}} xy\,dx\right)\,\mathrm{d}y$$

integrált!

2. H normáltartomány mindkét tengelyre vonatkozóan, így pl.

$$\int_H f = \int_{-1}^1 \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} y^2\sqrt{1-x^2}\,dy\right)\,dx = \ldots = \int_{-1}^1 \frac{2}{3}\left(1-x^2\right)^2\,\mathrm{d}x = \ldots = \frac{32}{45}.$$

Házi feladat. Számítsuk ki ugyagyanezt az integrált úgy, hogy H az y-tengelyre vonatkozóan normáltartomány, azaz számítsuk ki az

$$\int_H f = \int_{-1}^{1} \left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} y^2 \sqrt{1-x^2}\, dx \right) \mathrm{d}y$$

integrált!

3. A H halmaz $(0{,}0{,}1/2)$ középpontú, $1/2$ sugarú gömb, ui.

$$x^2+y^2+z^2=z \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2+y^2+(z-1/2)^2=1/4.$$

Mivel

$$H=\left\{\Phi(r,\vartheta,\varphi)\in\mathbb{R}^3 :\ r\in[0{,}1/2], \vartheta\in[0,\pi], \varphi\in[0{,}2\pi]\right\},$$

ahol

$$\Phi(r,\vartheta,\varphi) :\equiv (r\sin(\vartheta)\cos(\varphi), r\sin(\vartheta)\sin(\varphi), 1/2+r\cos(\vartheta))$$

ezért, ha

$$H_{r,\vartheta,\varphi} := [0{,}1/2]\times[0,\pi]\times[0{,}2\pi],$$

akkor

$$\begin{aligned} \int_H f &= \int_{H_{r,\vartheta,\varphi}} f\left(\Phi(r,\vartheta,\varphi)\right)\cdot\left|\det\left(\Phi'(r,\vartheta,\varphi)\right)\right| = \ldots = \\ &= 2\pi\int_0^{\pi}\left(\int_0^{1/2} r^2\sin(\vartheta)\sqrt{r^2+r\cos(\vartheta)+1/4}\,dr\right) d\vartheta \end{aligned}$$

Az utolsó integrál kiszámítása nem egyszerű feladat, ezért kihasználva, hogy

$$H=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2+z^2\le z\right\},$$

a következő trükköt fogjuk alkalmazni:

$$H=\bigcup_{\vartheta\in[0,\pi/2]} K_\vartheta, \quad K_\vartheta=\bigcup_{r\in[0,\cos(\vartheta)]} k_{r,\vartheta}$$

ahol K_ϑ ϑ félnyílásszögű kúppalást, $k_{r,\vartheta}$ pedig egy $r\sin(\vartheta)$ sugarú körvonal, melynek síkja a z-tengelyt $r\cos(\vartheta)$ magasan merőlegesen metszi:

$$K_\vartheta := \left\{(r\sin(\vartheta)\cos(\varphi), r\sin(\vartheta)\sin(\varphi), r\cos(\vartheta))\in\mathbb{R}^3 :\ \varphi\in[0{,}2\pi], r\in[0,\cos(\vartheta)]\right\},$$

$$k_{r,\vartheta} := \left\{(r\sin(\vartheta)\cos(\varphi), r\sin(\vartheta)\sin(\varphi), r\cos(\vartheta))\in\mathbb{R}^3 :\ \varphi\in[0{,}2\pi]\right\}$$

$$(\vartheta\in[0,\pi/2], \qquad (r\in[0,\cos(\vartheta)]).$$

Így, ha

$$H_{r,\vartheta,\varphi} := [0,\cos(\vartheta)]\times[0,\pi/2]\times[0{,}2\pi],$$

akkor

$$\begin{aligned}\int_H f &= \int_{H_{r,\vartheta,\varphi}} f\left(\Phi(r,\vartheta,\varphi)\right)\cdot\left|\det\left(\Phi'(r,\vartheta,\varphi)\right)\right| = \ldots = \\ &= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{\cos(\vartheta)} r\cdot r^2\sin(\vartheta)\,dr\right)d\vartheta\right)d\varphi = \ldots = \frac{\pi}{10}. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

2.0.29. feladat. Számítsuk ki az

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

improprius integrál értékét!

Útm. Legyen

$$f(x,y) := e^{-(x^2+y^2)} \qquad \left((x,y)\in\mathbb{R}^2\right),$$

$$H_R := [0,R]\times[0,R] \qquad (R>0).$$

Ekkor

$$\left(\int_0^R e^{-x^2}\,dx\right)^2 = \int_{H_R} f = \int_{K_R} f + \int_{H_R\setminus K_R},$$

ahol

$$K_R := \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ x\in[0,R],\ y\in\left[0,\sqrt{R^2-x^2}\right]\right\} \qquad (R>0).$$

Megmutatjuk, hogy:

– $\boxed{\lim\limits_{R\to\infty}\left(\int_{K_R} f\right) = \frac{\pi}{4}}$: mivel

$$K_R = \left\{(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))\in\mathbb{R}^2 : r\in[0,R], \varphi\in[0,\pi/2]\right\},$$

ezért ha $K_{r,\varphi} := [0,R]\times[0,\pi/2]$,
akkor

$$\begin{aligned}\int_{K_R} f &= \int_{K_{r,\varphi}} f\circ(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))\cdot|\det\left(J(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))\right)| = \\ &= \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^R e^{-r^2(\sin^2(\varphi)+\cos^2(\varphi))}\cdot r\,dr\right)d\varphi = -\frac{\pi}{4}\int_0^R(-2r)e^{-r^2}\,dr = \\ &= -\frac{\pi}{4}\left(e^{-R^2}-1\right) \longrightarrow \frac{\pi}{4} \quad (R\to+\infty).\end{aligned}$$

– $\boxed{\lim\limits_{R\to\infty}\left(\int_{H_R\setminus K_R} f\right) = 0}$: mivel

$$\int_{H_R\setminus K_R} f \le \int_{K_{\sqrt{2}R}} f - \int_{K_R} f = -\frac{\pi}{4}\left(e^{-2R^2}-1\right) + \frac{\pi}{4}\left(e^{-R^2}-1\right) \longrightarrow 0 \qquad (R\to+\infty).$$

Ez azt jelenti, hogy

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}. \quad \blacksquare$$

2017.12.29.

3. fejezet

Pareméteres integrálok

Emlékeztető. Ha $a, b \in \mathbb{R}$: $a < b$, $c \in [a, b]$, $f \in \mathfrak{R}[a, b]$ és

$$F(x) := \int_c^x f = -\int_x^c f \qquad (x \in [a, b]),$$

akkor

- $F \in \mathfrak{C}$, továbbá
- ha $f \in \mathfrak{C}[a, b]$, úgy $F \in \mathfrak{D}$ és $F' = f$.

3.0.1. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha $F, G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvények, akkor a

$$\varphi(x) := -\exp(-F(x)) \int_0^x \exp(F(y))G(y)\,dy \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény megoldása az

$$y' + F'y + G = 0$$

elsőrendű lineáris differenciálegyenletnek, azaz φ-re

$$\varphi' + F'\varphi + G = 0$$

teljesül!

Útm. Tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= -\exp(-F(x))\left(-F'(x)\right)\int_0^x \exp(F(y))G(y)\,dy - \\ &\quad -\exp(-F(x))\left\{\exp(F(x))G(x)\right\} = \\ &= -F'(x)\varphi(x) - G(x). \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Az alkalmazásokban – úgy, mint pl. az alábbi néhány esetben is – a változó nem feltétlenül a felső határban, hanem magában az integrandusban is előfordulhat. Ilyenkor paraméteres integrállal van dolgunk.

3.0.1. példa. Több fontos műszaki-fizikai alkalmazásban (különösen a hengerszimmetriát mutató feladatok esetében) fordulnak elő a

$$J_n(x) := \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(ny - x\sin(y))\,\mathrm{d}y \qquad (x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z})$$

Bessel-függvények.

3.0.2. példa. A statisztikus fizikában valamely makroállapothoz tartozó mikroállapotok számának kiszámításakor játszik szerepet az $R > 0$ sugarú n-dimenziós gömb, azaz az

$$\mathcal{G}_n := \left\{\mathbf{r} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n :\ \|\mathbf{r}\|^2 \leq R^2\right\}$$

ponthalmaz térfogatára vonatkozó formula:

$$V(\mathcal{G}_n) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)} \cdot R^n,$$

ahol

$$\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t \qquad (x > 0)$$

(**gamma-függvény**).

3.0.3. példa. A spektroszkópiában, az orvosi diagnosztikában, a képtömörítésben stb. használt

$$F(\omega) := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\imath\omega t} f(t)\,\mathrm{d}t \qquad (\omega \in \mathbb{R})$$

(trigonometrikus) **Fourier-transzformált** esetében is paraméteres integrállal van dolgunk.

3.0.4. példa. Linerási differenciálegyenletek megoldásakor, ill. sorösszegek kiszámításakor igen hasznos segédeszköz az

$$Lf(x) := \int_0^{+\infty} e^{-tx} f(t)\,\mathrm{d}t \qquad (x \in \mathcal{D}_{Lf})$$

Laplace-transzformált.

3.0.1. tétel. Ha

$$\Omega := [a,b] \times [c,d] = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; a \leq x \leq b, \; c \leq y \leq d\big\}$$

és $f : \Omega \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor az (f által meghatározott)

$$F(x) := \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y \qquad (x \in [a,b]), \qquad \text{ill.} \qquad F(y) := \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x \qquad (y \in [c,d])$$

pareméteres integrálra igazak az alábbi állítások:

1. az F függvény folytonos,
2. F integrálható és integráljára

$$\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}y,$$

   ill.

$$\int_c^d F(y)\,\mathrm{d}y = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x;$$

3. ha f az első, ill. második változója szerint folytonosan parciálisan deriválható: $\partial_1 f \in \mathfrak{C}(\Omega)$, ill. $\partial_2 f \in \mathfrak{C}(\Omega)$, akkor F deriválható és deriváltjára

$$F'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\right) = \int_c^d \partial_1 f(x,y)\,\mathrm{d}y \qquad (x \in [a,b]),$$

   ill.

$$F'(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\right) = \int_a^b \partial_2 f(x,y)\,\mathrm{d}x \qquad (y \in [c,d]).$$

Biz.

1. lépés.. Nyilvánvaló, hogy bármely $x \in [a,b]$ esetén a

$$\varphi(y) := f(x,y) \qquad (y \in [c,d])$$

függvény folytonos, így integrálható is. Mivel f folytonos és Ω kompakt (korlátos és zárt), ezért f egyenletesen folytonos, így bármely $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$ szám, hogy bármely $(x,y), (\tau,y) \in [a,b] \times [c,d]$ esetén

$$|x - \tau| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x,y) - f(\tau,y)| < \frac{\varepsilon}{d-c},$$

ahonnan

$$|F(x) - F(\tau)| \leq \int_c^d |f(x,y) - f(\tau,y)|\,\mathrm{d}y < \frac{\varepsilon}{d-c}(d-c) = \varepsilon$$

következik. Ez azt jelenti, hogy 1. teljesül, azaz F folytonos.

2. lépés.. Ha f folytonosságán túl még $\partial_1 f \in \mathfrak{C}(\Omega)$ is teljesül, akkor A Lagrange-féle középértéktétel következtében bármely $x \in [a,b]$ és $h \neq 0$: $x+h \in [a,b]$ esetén van olyan x és $x+h$ közötti ξ_h szám, hogy

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \int_c^d \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}\,\mathrm{d}y = \int_c^d \partial_1 f(\xi_h,y)\,\mathrm{d}y =: \psi(\xi_h).$$

Így $\partial_1 f$ folytonossága következtében (vö. 1.)

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\psi(\xi_h) = \int_c^d \partial_1 f(x,y)\,\mathrm{d}y,$$

ahonnan 3. következik.

3. lépés.. Ha f folytonos, akkor F integrálható, hiszen folytonos, továbbá az

$$[a,b]\times[c,d] \ni (x,y) \mapsto \int_a^x f(t,y)\,\mathrm{d}t$$

függvény első változója szerint folytonosan paricálisan deriválható, így (vö. 3.) az

$$\omega(x) := \int_c^d \left(\int_a^x f(t,y)\,\mathrm{d}t\right)\,\mathrm{d}y \qquad (x\in[a,b])$$

függvény deriválható és deriváltjára

$$\omega'(x) = \int_c^d \left(\frac{\partial}{\partial x}\int_a^x f(t,y)\,\mathrm{d}t\right)\,\mathrm{d}y = \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y,$$

és így $\omega(a)=0$ következtében

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}y = \omega(b)-\omega(a) = \int_a^b \omega'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x. \quad \blacksquare$$

3.0.2. feladat. Adott $a\in\mathbb{R}$ esetén számítsuk ki az

$$\int_0^a x^2\cos(x)\,\mathbf{d}x$$

integrált!

Útm. Világos, hogy kétszeres parciális integrálással is célhoz érhetünk. Van azon ban más lehetőség is a fenti integrál, kiszámítására. Tekintsük ehhez az

$$f(y) := \int_0^a \cos(xy)\,\mathrm{d}y \qquad (y\in[1/2,2])$$

függvényt! Világos (vö. 3.0.1. tétel), hogy

$$F'(y) = \int_0^a \partial_y\cos(xy)\,\mathrm{d}y = -\int_0^a x\sin(xy)\,\mathrm{d}y, \qquad \text{ill.} \qquad F''(y) = -\int_0^a x^2\cos(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

Így a keresett integrál értéke:

$$\int_0^a x^2\cos(x)\,\mathbf{d}x = -F''(1).$$

Másrészt pedig

$$F(y) = \left[\frac{\sin(xy)}{y}\right]_{x=0}^{x=a} = \frac{\sin(ay)}{y},$$

ahonnan differenciálással azt kapjuk, hogy

$$F'(y) = \frac{ay\cos(ay) - \sin(ay)}{y^2},$$

ill.

$$F''(y) = \frac{y^2(-a^2 y\sin(ay) + a\cos(ay) - a\cos(ay)) - 2y(ay\cos(ay) - \sin(ay))}{y^4},$$

azaz

$$\int_0^a x^2\cos(x)\,\mathbf{d}x = -F''(1) = (a^2-2)\sin(a) + 2a\cos(a). \qquad \blacksquare$$

A 3.0.1. tétel 1. és 3. állítása könnyen általánosítható arra az esetre, ha az $[a,b]$ kompakt intervallum helyett (akár többdimenziós) nyílt halmaz szerepel, azaz igaz a

3.0.1. tétel. Ha $c, d \in \mathbb{R}\colon c < d$, $n \in \mathbb{N}$, és $\emptyset \neq U \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, akkor bármely folytonos $f : U \times [c,d] \to \mathbb{R}$ függvény esetén az

$$F(\mathbf{r}) := \int_c^d f(\mathbf{r},t)\,\mathrm{d}t \qquad (\mathbf{r} = (x_1,\ldots,x_n) \in U)$$

paraméteres integrálra a következő állítások igazak. F folytonos, továbbá, ha

1. valamely $k \in \{1,\ldots,n\}$ indexre $\partial_k f \in \mathfrak{C}$, akkor $\partial_k F \in \mathfrak{C}$ és

$$\partial_k F(\mathbf{r}) = \int_c^d \partial_k f(\mathbf{r},t)\,\mathrm{d}t \qquad (\mathbf{r} \in U);$$

2. f folytonosan differenciálható: $f \in \mathfrak{C}^1$, akkor ugyanez igaz F-re is: $F \in \mathfrak{C}^1$.

3.0.5. példa. Ha

$$F(x) := \int_1^\pi \frac{\sin(tx)}{t}\,\mathrm{d}t \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

akkor

$$F'(x) = \int_1^\pi \cos(tx)\,\mathrm{d}t, \quad F''(x) = -\int_1^\pi t\sin(tx)\,\mathrm{d}t \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

3.0.6. példa. Ha

$$\varphi(x) := \int_0^1 \ln(x^2+t^2)\,\mathrm{d}t \qquad (x \in (0,+\infty)),$$

akkor $\varphi \in \mathfrak{C}^1$ és

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\ln(x^2+t^2)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{2x}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2x}{x^2}\int_0^1 \frac{1}{1+\left(\frac{t}{x}\right)^2}\,\mathrm{d}t = \\ &= 2\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{x}\right)\right]_{t=0}^{t=1} = 2\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (x \in (0,+\infty)).\end{aligned}$$

3.0.0. megjegyzés. Az iménti példában φ' közvetlenül is megkapható, ui. bármely $0 < x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned}\int_0^1 \ln(x^2+t^2)\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 1\cdot\ln(x^2+t^2)\,\mathrm{d}t = \left[t\ln(x^2+t^2)\right]_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 \frac{2t^2}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t = \\ &= \ln(x^2+1) - 2\int_0^1 \frac{x^2+t^2-x^2}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t = \ln(x^2+1) - 2 + \\ &\quad +2\int_0^1 \frac{1}{1+\left(\frac{t}{x}\right)^2}\,\mathrm{d}t = \ln(x^2+1) - 2 + 2x\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right),\end{aligned}$$

így

$$\varphi'(x) = \frac{2x}{x^2+1} + 2\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{2x}{x^2+1} \qquad (0 < x \in \mathbb{R}).$$

3.0.1. gyakorló feladat. Indokoljuk meg, hogy a

$$\varphi(\alpha) := \int_0^1 \ln\left(\sqrt{x^2+\alpha}\right)dx \qquad (\alpha \in (0,+\infty))$$

függvény deriválható, majd számítsuk ki a deriváltját!

Útm.

3.0.3. feladat. Adott $\epsilon > 0$,

$$\Omega := \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n : \ \|\mathbf{r}\| < \epsilon\}$$

és

$$\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$$

kétszer deriválható vektormező esetén adjunk meg olyan $U : \Omega \to \mathbb{R}$ skalármezőt, amelyre $\operatorname{grad} U = \mathbf{v}$ teljesül!

Útm. Ha

$$U(\mathbf{r}) := \int_0^1 \langle \mathbf{v}(t\mathbf{r}), \mathbf{r}\rangle \, \mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^n v_k(t\mathbf{r}) \cdot x_k\right) \mathrm{d}t = \sum_{k=1}^n \left(\int_0^1 v_k(t\mathbf{r})\,\mathrm{d}t\right) x_k \qquad (\mathbf{r} \in \Omega),$$

akkor bármely $l \in \{1, \ldots, n\}$ esetén

$$\begin{aligned} \partial_l U(\mathbf{r}) &= \sum_{k=1}^n \left(\partial_l \int_0^1 v_k(t\mathbf{r})\,\mathrm{d}t\right) x_k + \sum_{k=1}^n \left(\int_0^1 v_k(t\mathbf{r})\,\mathrm{d}t\right) \partial_l(x_k) = \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\int_0^1 t\partial_l v_k(t\mathbf{r})\,\mathrm{d}t\right) x_k + \int_0^1 v_l(t\mathbf{r})\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Mivel bármely $\mathbf{r} \in U$ esetén

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(tv_l(t\mathbf{r})) = v_l(t\mathbf{r}) + t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v_l(t\mathbf{r}) = v_l(t\mathbf{r}) + t\sum_{k=1}^n \partial_k v_l(t\mathbf{r})x_k = v_l(t\mathbf{r}) + t\sum_{k=1}^n \partial_l v_k(t\mathbf{r})x_k,$$

így tetszőleges $l \in \{1, \ldots, n\}$ indexre, ill. $\mathbf{r} \in \Omega$ vektorra

$$\partial_l U(\mathbf{r}) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(tv_l(t\mathbf{r})\right)\,\mathrm{d}t = \left[tv_l(t\mathbf{r})\right]_{t=0}^{t=1} = v_l(\mathbf{r}). \quad \blacksquare$$

3.0.2. gyakorló feladat. Igazoljuk, hogy a J_n $(n \in \mathbb{Z})$ Bessel-függvényekre

$$\boxed{x^2 J_n''(x) + xJ_n'(x) + (x^2 - n^2)J_n(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z})},$$

továbbá

$$\boxed{\int_0^x tJ_0(t)\,\mathrm{d}t = xJ_1(x) \quad (x \in \mathbb{R})}$$

teljesül!

Útm.

3.0.2. tétel. Ha $\emptyset \neq U \subset \mathbb{R}$ nyílt halmaz, $c, d \in \mathbb{R}\colon c < d$, továbbá az $f : U \times [c, d] \to \mathbb{R}$, ill. a $\varphi : U \to [c, d]$ függvényekre $f \in \mathfrak{C}^1$, ill. $\varphi \in \mathfrak{D}$, akkor az

$$F(x) := \int_c^{\varphi(x)} f(x, t)\,\mathrm{d}t \qquad (x \in U)$$

függvény differenciálható, és

$$\boxed{F'(x) = f(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x) + \int_c^{\varphi(x)} \partial_1 f(x, y)\,\mathrm{d}y \qquad (x \in U)}.$$

Biz. Ha

$$I(t, x) := \int_c^t f(x, y)\,\mathrm{d}y \quad ((t, x) \in [c, d] \times U), \qquad \text{ill.} \qquad G(x) := (\varphi(x), x) \quad (x \in U),$$

akkor $F = I \circ G$. Mivel I és G diefferenciálható függvények, és

$$I'(t,x) = (\partial_1 I(t,x), \partial_2 I(t,x)) \equiv \left(f(x,t), \int_c^t \partial_1 f(x,y)\,\mathrm{d}y\right), \quad \text{ill.} \quad G'(x) \equiv (\varphi'(x),1),$$

ezért F is differenciálható, és deriváltjára

$$\begin{aligned} F'(x) &= \langle (I' \circ G)(x), G'(x) \rangle = \langle (\partial_1 I(\varphi(x),x), \partial_2 I(\varphi(x),x)), (\varphi'(x),1) \rangle = \\ &= \partial_1 I(\varphi(x),x) \cdot \varphi'(x) + \partial_2 I(\varphi(x),x) \cdot 1 = \\ &= f(x,\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) + \int_c^{\varphi(x)} \partial_1 f(x,y)\,\mathrm{d}y \qquad (x \in U). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

3.0.0. megjegyzés. Ha még $\psi : U \to [c,d]$, $\psi \in \mathfrak{D}$: $\psi(x) \geq \varphi(x)$ $(x \in U)$ is teljesül, akkor (hasonlóan a 3.0.2. tétel bizonyításához) könnyen belátható, hogy az

$$F(x) := \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y \qquad (x \in U)$$

függvény differenciálható, és deriváltjára

$$\boxed{F'(x) = f(x,\psi(x))\psi'(x) - f(x,\varphi(x))\varphi'(x) + \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \partial_1 f(x,y)\,\mathrm{d}y \qquad (x \in U)}.$$

3.0.4. feladat. Mutassuk meg, hogy az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \in \mathfrak{C}^1$ függvény esetében az

$$F(x) := \int_0^x (x+y)f(y)\,\mathrm{d}y \qquad (x \in \mathbb{R})$$

leképezésre $F \in \mathfrak{D}^2$ és

$$F''(x) = 3f(x) + 2xf'(x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

teljesül!

Útm. Mivel a

$$h(x,y) := (x+y)f(y) \qquad \left((x,y) \in \mathbb{R}^2\right)$$

függvény folytonososan deriválható, ezért $F \in \mathfrak{D}$ és tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$F'(x) = h(x,x) \cdot 1 + \int_0^x \partial_1 h(x,y)\,\mathrm{d}y = 2x \cdot f(x) + \int_0^x f(y)\,\mathrm{d}y\,.$$

f folytonos (ui. deriválható), ezért az

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto \int_0^x f(y)\,\mathrm{d}y$$

integrálfüggvény is deriválható. Lévén, hogy $f \in \mathfrak{D}$, ezért $F' \in \mathfrak{D}$ és

$$F''(x) = 2f(x) + 2x \cdot f'(x) + f(x) = 3f(x) + 2x \cdot f'(x) \qquad (x \in \mathbb{R}). \quad \blacksquare$$

3.0.3. gyakorló feladat. Számítsuk ki az alábbi függvények deriváltját!

1. $f(x) := \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin(x)\cos(y)\mathrm{d}y \quad (x \in \mathbb{R});$
2. $f(x) := \displaystyle\int_0^{1} \operatorname{arctg}(xy)\,\mathrm{d}y \quad (x \in \mathbb{R});$
3. $f(x) := \displaystyle\int_0^{x^2} (1-x^3)(1-2xy+y^2)\,\mathrm{d}y \quad (x \in \mathbb{R});$
4. $f(x) := \displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{x^2} \ln(xy)\,\mathrm{d}y \quad (0 < x \in \mathbb{R}).$

Útm.

3.0.5. feladat. Adott

$$F(t) := \int_0^1 \frac{e^{-(1+x^2)t^2}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x, \qquad G(t) := \left(\int_0^t e^{-s^2}\,\mathrm{d}s\right)^2 \qquad (t \in \mathbb{R})$$

függvények esetén mutassuk, ill. indokoljuk meg, hogy

1. $F \in \mathfrak{C}$, majd számítsuk ki $\lim\limits_{+\infty} F$-et;
2. $F \in \mathfrak{D}$, majd számítsuk ki F'-t;
3. $G \in \mathfrak{D}$, majd számítsuk ki G'-t;
4. $F(t) = \dfrac{\pi}{4} - G(t)$ $(t \in \mathbb{R})$, ill.

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-s^2}\,\mathrm{d}s = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

teljesül!

Útm.

1. Mivel az $\mathbb{R} \ni t \mapsto e^{-t^2}$ függvény folytonos, ezért, ezért $F \in \mathfrak{C}$ és

$$\lim_{+\infty} F = \int_0^1 \left(\lim_{t\to+\infty} \frac{e^{-(1+x^2)t^2}}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x = 0.$$

2. Mivel az $\mathbb{R} \ni t \mapsto e^{-t^2}$ függvény $\mathfrak{C}^1$-beli, ezért $F \in \mathfrak{D}$ és

$$\begin{aligned}
F'(t) &= \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{e^{-(1+x^2)t^2}}{1+x^2}\right) \mathrm{d}x = \int_0^1 (-2(1+x^2)t)\frac{e^{-(1+x^2)t^2}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \\
&= (-2e^{-t^2}) \int_0^1 te^{-x^2t^2}\,\mathrm{d}x = \quad \left(xt =: s \rightsquigarrow dx = \frac{1}{t}ds\right) \\
&= (-2e^{-t^2}) \int_0^t e^{-s^2}\,\mathrm{d}s \quad (t \in \mathbb{R}).
\end{aligned}$$

3. Mivel az $\mathbb{R} \ni t \mapsto e^{-t^2}$ függvény folytonos, ezért ennek integrálfüggvénye deriválható, és

$$G'(t) = 2\left(\int_0^t e^{-s^2}\,\mathrm{d}s\right) e^{-t^2} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

4. Mivel tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ esetén $F'(t) = -G'(t)$, ezért van olyan $c \in \mathbb{R}$, hogy

$$F(t) + G(t) = c \qquad (t \in \mathbb{R}),$$

és mivel $G(0) = 0$, ill.

$$F(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arctg}(1) - \operatorname{arctg}(0) = \frac{\pi}{4},$$

ezért

$$F(t) = \frac{\pi}{4} - G(t) \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Mivel $\lim\limits_{+\infty} F = 0$, ezért $\lim\limits_{+\infty} G = \frac{\pi}{4}$, azaz

$$\int_0^{+\infty} e^{-s^2}\,\mathrm{d}s = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad \blacksquare$$

3.0.6. feladat. Igazoljuk, hogy az

$$F(\alpha) := \int_0^\alpha \frac{\ln(1+\alpha x)}{x}\,\mathrm{d}x \qquad (\alpha \in (0, +\infty))$$

függvény differenciálható és számítsuk ki $F'(\alpha)$-t!

Útm. A Bernoulli-l'Hospital-szabály segítségével könnyen belátható, hogy az

$$f(x) := \frac{\ln(1+\alpha x)}{x} \qquad (0 < x \in \mathbb{R})$$

függvényre $\lim\limits_0 f = \alpha$. Ezért az

$$\widetilde{f}(\alpha, x) := \begin{cases} \dfrac{\ln(1+\alpha x)}{x} & (x > 0) \\ \alpha & (x = 0) \end{cases}, \quad \partial_1 \widetilde{f}(\alpha, x) := \frac{1}{1+\alpha x} \qquad ((\alpha, x) \in \mathbb{R}^2 : \ \alpha > 0, x \in [0, \alpha])$$

függvények folytonosak. Így azt kapjuk, hogy

$$F'(\alpha) = \frac{\ln(1+\alpha^2)}{\alpha} \cdot 1 + \int_0^\alpha \frac{1}{1+\alpha x}\,\mathrm{d}x = \frac{\ln(1+\alpha^2)}{\alpha} + \left[\frac{1}{\alpha}\ln(1+\alpha x)\right]_{x=0}^{x=\alpha} = \frac{2}{\alpha}\ln(1+\alpha^2). \quad \blacksquare$$

3.0.4. gyakorló feladat. Igazoljuk, hogy tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén teljesül az

$$\int_0^1 \frac{\sin(xy) - xy\cos(xy)}{y^2}\,\mathrm{d}y = x - \sin(x)$$

egyenlőség!

Útm.

3.0.5. gyakorló feladat. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén teljesül az

$$F(\alpha) := \int_0^\pi \ln(1 - 2\alpha\cos(x) + \alpha^2)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & (|\alpha| \leq 1), \\ 2\pi\ln(|\alpha|) & (|\alpha| > 1) \end{cases}$$

egyenlőség!

Útm.

3.0.6. gyakorló feladat. Számítsuk ki az

$$\int_0^\pi \frac{1}{\sin(x)} \ln\left(\frac{1 + \alpha\sin(x)}{1 - \alpha\sin(x)}\right)\mathrm{d}x \qquad (\alpha \in (-1,1))$$

integrált!

Útm.

3.0.7. gyakorló feladat. Mutassuk meg, hogy bármely $\alpha, \beta \in (0, +\infty)$ esetén fennáll az

$$F(\alpha, \beta) := \int_0^{\pi/2} \ln\left(\alpha^2\sin^2(x) + \beta^2\cos^2(x)\right)\,\mathrm{d}x = \pi\ln\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

egyenlőség!

Útm.

2017.12.29.

4. fejezet

Az implicit függvényre vonatkozó tétel

Adott $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény esetében azt fogjuk megvizsgálni, hogy milyen esetben lesz a

$$H := \{(x, y) \in \mathcal{D}_f : \; f(x, y) = 0\}$$

halmaz valamely egyváltozós φ függvény grafikonja, feltéve, hogy $H \neq \emptyset$. Ha pl.

$$f(x, y) := x^2 + y^2 - 1 \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2),$$

akkor nyilván nincs olyan φ függvény, amelyre

$$\text{graph}(\varphi) = H$$

teljesülne. Viszont az f helyett ennek egy leszűkítését, nevezetesen az

$$f_+(x, y) := x^2 + y^2 - 1 \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; y \geq 0)$$

vagy az

$$f_-(x, y) := x^2 + y^2 - 1 \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; y \leq 0)$$

függvényt véve már létezik a mondott tulajdonságú φ függvény:

$$\varphi(x) := \sqrt{1 - x^2} \qquad (x \in [-1,1]),$$

vagy

$$\psi(x) := -\sqrt{1 - x^2} \qquad (x \in [-1,1]),$$

hiszen

$$f_+(x, \varphi(x)) = 0 \qquad \text{vagy} \qquad f_-(x, \psi(x)) = 0 \qquad (x \in [-1,1]).$$

Ezt a tényt gyakran úgy szokták kifejezni, hogy **a φ, ill. a ψ függvény az**

$$f_+(x, y) = 0, \qquad \textbf{ill. az} \qquad f_-(x, y) = 0$$

implicit egyenlet megoldása. A továbbiakban valamivel általánosabb esetben megvizsgáljuk a most felvetett kérdést.

4.0.1. tétel. Ha

$$a, b \in \mathbb{R}, \quad f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}: \quad f \in \mathfrak{C}^1, \quad f(a,b) = 0 \quad \text{és} \quad \partial_2 f(a,b) \neq 0,$$

akkor létezik olyan $\varepsilon, \delta > 0$, hogy

1. pontosan egy olyan
$$\varphi : (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \to (b-\delta, b+\delta)$$
függvény van, amelyre $\varphi \in \mathfrak{C}^1$ (ha f analitikus, akkor φ is analitikus) és
$$f(x, \varphi(x)) = 0 \qquad (x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon));$$
2. továbbá bármely $x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ esetén
$$\partial_2 f(x, \varphi(x)) \neq 0 \qquad \text{és} \qquad \varphi'(x) = -\frac{\partial_1 f(x,\varphi(x))}{\partial_2 f(x,\varphi(x))}.$$

4.0.1. feladat. Bizonyítsuk be, hogy van olyan $\varepsilon > 0$ szám és olyan differenciálható $\varphi \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre

1. $\ln(x) + \varphi(x)e^{\varphi^2(x)} = 1$ $(x \in (e-\varepsilon, e+\varepsilon))$, majd számítsuk ki $\varphi'(e)$-t;
2. $\ln(x^2 + \varphi^2(x)) = x\varphi(x)$ $(x \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon))$, majd számítsuk ki $\varphi'(1)$-t;
3. $xe^{-\varphi(x)} + \varphi(x)e^x = a$ $(x \in (-\varepsilon, \varepsilon);\ a \in \mathbb{R})$, mmajd számítsuk ki $\varphi'(0)$-t;
4. $e^{x\varphi(x)} = x^2$ $(x \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon))$, majd számítsuk ki $\varphi'(1)$-t;
5. $x^4\varphi^6(x) + x = 2x^2\varphi^4(x)$ $(x \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon))$, majd számítsuk ki $\varphi'(1)$-t;
6. $x^{\varphi(x)} = \varphi(x)^x$ $(x \in (2-\varepsilon, 2+\varepsilon))$, majd számítsuk ki $\varphi'(2)$-t;
7. $x\cos(\varphi(x)) = \varphi(x)\cos(x)$ $(x \in (-\varepsilon, \varepsilon))$, majd számítsuk ki $\varphi'(0)$-t!

Útm.

1. Ha
$$f(x,y) := \ln(x) + y\exp(y^2) - 1 \qquad \left((x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x > 0\right),$$
akkor $f \in \mathfrak{C}^1$,
$$f(e,0) = 0, \qquad \partial_y f(e,0) = e^0 + 2 \cdot 0^2 \cdot e^0 = 1 \neq 0,$$
így van olyan olyan $\varepsilon > 0$ szám és olyan differenciálható $\varphi : (e-\varepsilon, e+\varepsilon) \to \mathbb{R}$ függvény, hogy
$$\ln(x) + \varphi(x)e^{\varphi^2(x)} - 1 = f(x, \varphi(x)) = 0 \qquad (|x-e| < \varepsilon);$$
$\varphi(e) = 0$ és
$$\varphi'(x) = -\frac{\partial_x f(x,\varphi(x))}{\partial_y f(x,\varphi(x))} = -\frac{1/x}{e^{\varphi^2(x)} + 2\varphi^2(x)e^{\varphi^2(x)}} = -\frac{1}{xe^{\varphi^2(x)}\left(1 + 2\varphi^2(x)\right)} \qquad (|x-e| < \varepsilon),$$

$\varphi'(e) = -\frac{1}{e}$.

2. Ha

$$f(x,y) := \ln(x^2+y^2) - xy \qquad \left((x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2>0\right),$$

akkor $f \in \mathfrak{C}^1$,

$$f(1{,}0) = 0, \qquad \partial_y f(1{,}0) = \frac{2\cdot 0}{1^2+0^2} - 1 = -1 \neq 0,$$

így van olyan olyan $\varepsilon > 0$ szám és olyan differenciálható $\varphi : (1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \to \mathbb{R}$ függvény, hogy

$$\ln(x^2+\varphi^2(x)) - x\varphi(x) = f(x,\varphi(x)) = 0 \qquad (|x-1|<\varepsilon);$$

$\varphi(1) = 0$ és

$$\varphi'(x) = -\frac{\partial_x f(x,\varphi(x))}{\partial_y f(x,\varphi(x))} = -\frac{\frac{2x}{x^2+\varphi^2(x)} - \varphi(x)}{\frac{2\varphi(x)}{x^2+\varphi^2(x)} - x} \qquad (|x-1|<\varepsilon),$$

$\varphi'(1) = -2$.

3. Ha

$$f(x,y) := xe^{-y} + ye^{x} - a \qquad \left((x,y)\in\mathbb{R}^2\right),$$

akkor $f \in \mathfrak{C}^1$,

$$f(0,a) = 0, \quad \partial_y f(0,a) = -0\cdot e^{-a} + e^0 = 1 \neq 0,$$

így van olyan olyan $\varepsilon > 0$ szám és olyan differenciálható $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ függvény, hogy

$$xe^{-\varphi(x)} + \varphi(x)e^x - a = f(x,\varphi(x)) = 0 \quad (|x|<\varepsilon);$$

$\varphi(0) = a$ és

$$\varphi'(x) = -\frac{\partial_x f(x,\varphi(x))}{\partial_y f(x,\varphi(x))} = -\frac{e^{-\varphi(x)} + \varphi(x)e^x}{e^x - x\cdot e^{-\varphi(x)}} \quad (|x|<\varepsilon),$$

$\varphi'(0) = -e^{-a} - a$.

4. Ha

$$f(x,y) := e^{xy} - x^2 \qquad \left((x,y)\in\mathbb{R}^2\right),$$

akkor $f \in \mathfrak{C}^1$,

$$f(1{,}0) = 0, \quad \partial_y f(1{,}0) = 1\cdot e^{1\cdot 0} = 1 \neq 0,$$

így van olyan olyan $\varepsilon > 0$ szám és olyan differenciálható $\varphi : (1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \to \mathbb{R}$ függvény, hogy

$$e^{x\varphi(x)} - x^2 = f(x,\varphi(x)) = 0 \qquad (|x-1|<\varepsilon);$$

$\varphi(1) = 0$ és

$$\varphi'(x) = -\frac{\partial_x f(x,\varphi(x))}{\partial_y f(x,\varphi(x))} = -\frac{ye^{x\varphi(x)} - 2x}{xe^{x\varphi(x)}} \qquad (|x-1|<\varepsilon),$$

$\varphi'(1) = 2$.

Megjegyzés. Vegyük észre, hogy ha $x \in (0,+\infty)$, akkor

$$e^{x\varphi(x)} = x^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \varphi(x) = \frac{\ln(x^2)}{x},$$

továbbá

$$\varphi'(x) = \frac{2 - \ln(x^2)}{x^2} \qquad (x \in (0, +\infty)) \qquad \text{és} \qquad \varphi'(1) = 2!$$

5. Ha

$$f(x,y) := x^4y^6 + x - 2x^2y^4 \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2),$$

akkor

$$f \in \mathfrak{C}^1, \qquad f(1,1) = 0, \qquad \partial_y f(1,1) = 6 \cdot 1^4 \cdot 1^5 - 8 \cdot 1^2 \cdot 1^3 = -2 \neq 0,$$

így van olyan olyan $\varepsilon > 0$ szám és olyan differenciálható

$$\varphi : (1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \to \mathbb{R}$$

függvény, hogy $\varphi(1) = 1$ és

$$f(x,\varphi(x)) = x^4\varphi^6(x) + x - 2x^2\varphi^4(x) = 0 \quad (|x-1| < \varepsilon)$$

teljesül, továbbá

$$\varphi'(x) = -\frac{\partial_x f(x,\varphi(x))}{\partial_y f(x,\varphi(x))} = -\frac{4x^3\varphi^6(x) + 1 - 4x\varphi^4(x)}{6x^4\varphi^5(x) - 8x^2\varphi^3(x)} \qquad (|x-1| < \varepsilon),$$

következtében

$$\varphi'(1) = \frac{1}{2}.$$

6. Ha

$$f(x,y) := x^y - y^x \qquad (0 < x, y \in \mathbb{R}),$$

akkor

$$f \in \mathfrak{C}^1, \qquad f(2,4) = 0, \qquad \partial_y f(2,4) = [x^y \ln(x) - xy^{x-1}]_{x=2,y=4} = 16\ln(2) - 8 \neq 0,$$

így van olyan olyan $\varepsilon > 0$ szám és olyan differenciálható

$$\varphi : (2-\varepsilon, 2+\varepsilon) \to \mathbb{R}$$

függvény, hogy $\varphi(2) = 4$ és

$$0 = f(x,\varphi(x)) = x^{\varphi(x)} - \varphi(x)^x \qquad (|x-2| < \varepsilon)$$

teljesül, továbbá

$$\varphi'(x) = -\frac{\partial_x f(x,\varphi(x))}{\partial_y f(x,\varphi(x))} = -\frac{\varphi(x)x^{\varphi(x)-1} - y^x \ln(\varphi(x))}{x^{\varphi(x)}\ln(x) - x(\varphi(x))^{x-1}} \qquad (|x-2| < \varepsilon),$$

következtében

$$\varphi'(1) = -\frac{32 - 16\ln(4)}{16\ln(2) - 8} = \frac{4\ln(2) - 4}{2\ln(2) - 1}.$$

7. Ha
$$f(x,y) := x\cos(y) - y\cos(x) \qquad \left((x,y)\in\mathbb{R}^2\right),$$
akkor $f \in \mathfrak{C}^1$,
$$f(0{,}0) = 0, \quad \partial_y f(0{,}0) = -0\cdot\sin(0) - \cos(0) = -1 \neq 0,$$
így van olyan olyan $\varepsilon > 0$ szám és olyan differenciálható $\varphi : (-\varepsilon,\varepsilon) \to \mathbb{R}$ függvény, hogy
$$x\cos(\varphi(x)) - \varphi(x)\cos(x) = f(x,\varphi(x)) = 0 \qquad (|x| < \varepsilon);$$
$\varphi(0) = 0$ és
$$\varphi'(x) = -\frac{\partial_x f(x,\varphi(x))}{\partial_y f(x,\varphi(x))} = -\frac{\cos(\varphi(x)) + \varphi(x)\sin(x)}{-x\sin(\varphi(x)) - \cos(x)} \qquad (|x| < \varepsilon),$$
$\varphi'(0) = 1$.
Megjegyzés. Vegyük észre, hogy a
$$\varphi(x) := x \qquad (x\in\mathbb{R})$$
függvény az implicit egyenlet megoldása! ■

4.0.0. megjegyzés. Ha $f \in \mathfrak{C}^2$, akkor
$$\partial_{11}f(x,\varphi(x)) + \partial_{12}f(x,\varphi(x))\varphi'(x) +$$
$$+\left[\partial_{21}f(x,\varphi(x)) + \partial_{22}f(x,\varphi(x))\varphi'(x)\right]\varphi'(x) +$$
$$+\partial_2 f(x,\varphi(x))\varphi''(x) = 0 \qquad (x\in(a-\varepsilon,a+\varepsilon)),$$
ahonnan tetszőleges $x \in (a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ estén
$$\varphi''(x) = -\frac{\partial_{11}f(x,\varphi(x)) + 2\partial_{12}f(x,\varphi(x))\varphi'(x) + \partial_{22}f(x,\varphi(x))[\varphi'(x)]^2}{\partial_2 f(x,\varphi(x))}.$$
Így pl. ha $\varphi'(c) = 0$, akkor
$$\varphi''(c) = -\frac{\partial_{11}f(c,\varphi(c))}{\partial_2 f(c,\varphi(c))}.$$

4.0.2. feladat. Legyen
$$f(x,y) := e^y + y^3 + x^3 + x^2 - 1 \qquad ((x,y)\in\mathbb{R}^2).$$
Igazoljuk, hogy pontosan egy olyan $\varphi : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ differenciálható függvény, amelyre
$$f(x,\varphi(x)) = 0 \qquad (x\in\mathbb{R})$$
teljesül, majd határozzuk meg φ lokális szélsőértékhelyeit és azok minőségét!

Útm. Ha
$$g(x) := 1 - x^2 - x^3 \quad (x\in\mathbb{R}), \qquad h(x) := e^x + x^3 \qquad (x\in\mathbb{R}),$$

akkor $h \in \mathfrak{D}$,

$$h'(x) = e^x + 3x^2 > 0 \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

így h szigorúan monoton növekedő, következésképpen invertálható, továbbá $\mathcal{R}_h = \mathbb{R}$. A

$$\varphi := h^{-1} \circ g$$

függvényre

$$f(x, \varphi(x)) = e^{\varphi(x)} + 3\varphi^2(x) + x^3 + x^2 - 1 = 0 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Mivel

$$\varphi'(x) = -\frac{\partial_1 f(x,\varphi(x))}{\partial_2 f(x,\varphi(x))} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 0 = \partial_1 f(x, \varphi(x)) = 3x{+}2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in \{0, -2/3\}$$

és

$$\partial_{11} f(x, \varphi(x)) = 6x + 2 \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ezért

$$\partial_{11} f(0, \varphi(0)) = 2, \qquad \text{ill.} \qquad \partial_{11} f(-2/3, \varphi(-2/3)) = -2$$

így φ-nek 0-ban lokális maximuma, $-2/3$-ben pedig lokális minimuma van. ■

4.0.3. feladat. Vizsgáljuk meg, hogy adott $a \in \mathbb{R}$ paraméter mellett az

$$x^2 + 2xy - y^2 = a^2$$

egyenletből y kifejezhető az x implicit függvényeként! Ha igen, akkor határozzuk meg az így kapott φ függvény deriváltját!

Útm. Legyen $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$,

$$F(x, y) := x^2 + 2xy - y^2 - a^2 \qquad ((x, y) \in \mathbb{R}^2).$$

Ekkor

$$\partial_2 F(x_0, y_0) = 2x_0 - 2y_0 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_0 = y_0$$

miatt két esetet kell megkülönböztetnünk:

$\boxed{x_0 = y_0}$: az ilyen pontok környezetében pontosan akkor van implicit függvény, ha $a = 0$, ui.

- $a = 0$ esetén

  $$\varphi(x) := 0 \qquad (x \in K(x_0))$$

  az implicit függvény.

- $a \neq 0$ esetén tetszőleges $K(x_0), K(y_0) \subset \mathbb{R}$ környezetekhez van olyan $x \in K(x_0)$, amelyhez két olyan $\varphi(x) \in K(y_0)$ is tartozik, amelyre

  $$x^2 + 2x\varphi(x) - \varphi^2(x) = a^2$$

  teljesül:

  $$\varphi_1(x) := |a|/\sqrt{2}, \qquad \varphi_2(x) := -|a|/\sqrt{2} \qquad (x \in K(x_0)).$$

nincsen implicit

$\boxed{x_0 \neq y_0}$: ekkor alkalmazható az implicit függvényre vonatkozó tétel, azaz van olyan $K(x_0), K(y_0) \subset \mathbb{R}$ környezet, hogy tetszőleges $x \in K(x_0)$ esetén egyetlen olyan $\varphi(x) \in K(y_0)$ van, amelyre

$$x^2 + 2x\varphi(x) - \varphi^2(x) = a^2.$$

Az így értelmezett φ függvény deriváltja:

$$\varphi'(x) = -\frac{\partial_1 F(x, \varphi(x))}{\partial_2 F(x, \varphi(x))} = -\frac{2x + 2\varphi(x)}{2x - 2\varphi(x)} = \frac{\varphi(x) + x}{\varphi(x) - x} \qquad (x \in K(x_0)). \quad \blacksquare$$

4.0.0. megjegyzés. Ha $m, n \in \mathbb{N}$, $A \subset \mathbb{R}^m$ és $B \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, $\mathbf{a} \in A$, $\mathbf{b} \in B$, továbbá $f \in \mathfrak{C}^1(A \times B, \mathbb{R}^n)$, akkor a

$$g(\mathbf{r}) := f(\mathbf{r}, \mathbf{b}) \quad (\mathbf{r} \in A), \qquad h(\mathbf{s}) := f(\mathbf{a}, \mathbf{s}) \quad (\mathbf{s} \in B)$$

utasításokkal értelmezett függvényekre

$$g \in \mathfrak{C}^1(A, \mathbb{R}^n), \qquad h \in \mathfrak{C}^1(B, \mathbb{R}^n),$$

és a megfelelő deriváltakra a következő jelölések használatosak:

$$\mathbb{R}^{n\times m} \ni g'(\mathbf{a}) =: \partial_1 f(\mathbf{a}, \mathbf{b}) =: \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} f(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \qquad \mathbb{R}^{n\times n} \ni h'(\mathbf{b}) =: \partial_2 f(\mathbf{a}, \mathbf{b}) =: \frac{\partial}{\partial \mathbf{s}} f(\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

4.0.2. tétel. A fenti jelöléseket megtartva, ha

$$f(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{0} \qquad \text{és} \qquad \det\left[\partial_2 f(\mathbf{a}, \mathbf{b})\right] \neq 0,$$

akkor létezik olyan $\mathcal{K}(\mathbf{a}) \subset A$ és $\mathcal{K}(\mathbf{b}) \subset B$ környezet, hogy minden $\mathbf{r} \in \mathcal{K}(\mathbf{a})$ esetén pontosan egy olyan $\varphi(\mathbf{r}) \in \mathcal{K}(\mathbf{b})$ van, amelyre

$$f(\mathbf{r}, \varphi(\mathbf{r})) = \mathbf{0}$$

teljesül, és az így definiált

$$\varphi : \mathcal{K}(\mathbf{a}) \to \mathcal{K}(\mathbf{b})$$

függvényre $\varphi \in \mathfrak{C}^1$, továbbá minden $\mathbf{r} \in \mathcal{K}(\mathbf{a})$ esetén

$$\det\left[\partial_2 f\left(\mathbf{r}, \varphi(\mathbf{r})\right)\right] \neq 0, \qquad \text{ill.} \qquad \varphi'(\mathbf{r}) = -\left[\partial_2 f\left(\mathbf{r}, \varphi(\mathbf{r})\right)\right]^{-1} \cdot \partial_1 f\left(\mathbf{r}, \varphi(\mathbf{r})\right).$$

4.0.0. megjegyzés. A 4.0.2. tételben speciálisan $\varphi(\mathbf{a}) = \mathbf{b}$ miatt

$$\varphi'(\mathbf{a}) = -\left[\partial_2 f\left(\mathbf{a},\mathbf{b}\right)\right]^{-1} \cdot \partial_1 f\left(\mathbf{a},\mathbf{b}\right).$$

4.0.4. feladat. Tekintsük az

$$xy^2z^3 + 2x^2ye^{z-1} = 0$$

egyenletet! Mutassuk meg, hogy a $(-1{,}2) \in \mathbb{R}^2$ pontnak van olyan $\mathcal{K}$ környezete és olyan differenciálható $\varphi : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ függvény, hogy $\varphi(-1{,}2) = 1$ és minden $(x,y) \in \mathcal{K}$ mellett $(x,y,\varphi(x,y))$ megoldása az egyenletnek, majd számítsuk ki $\varphi'(-1{,}2)$-t!

Útm. Az

$$xy^2z^3 + 2x^2ye^{z-1} = 0$$

egyenlet megoldható, ui.

$$(-1)\cdot 2^2 \cdot 1^3 + 2\cdot(-1)^2\cdot 2\cdot e^{1-1} = 0.$$

Legyen

$$f(x,y,z) := xy^2z^3 + 2x^2ye^{z-1} \in \mathbb{R} \qquad ((x,y,z) \in \mathbb{R}^3),$$

ekkor $f(-1{,}2{,}1) = 0$ és $f \in \mathfrak{C}^1$. Mivel

$$\det\left[\frac{\partial}{\partial z} f(-1{,}2{,}1)\right] = \det\left[3xy^2z^2 + 2x^2ye^{z-1}\right]_{x=-1,y=2,z=1} = -8 \neq 0,$$

ezért teljesülnek az implicit függvényre vonatkozó tétel feltételei, azaz létezik a kívánt tulajdonságú φ. Továbbá

$$\begin{aligned}
\varphi'(-1{,}2) &= -\left[\frac{\partial}{\partial z} f(-1{,}2{,}1)\right]^{-1} \cdot \frac{\partial}{\partial(x,y)} f(-1{,}2{,}1) = \\
&= -[-8]^{-1} \cdot \left[\begin{array}{cc} y^2z^3 + 4xye^{z-1} & 2xyz^3 + 2x^2e^{z-1} \end{array}\right]_{x=-1,y=2,z=1} = \\
&= -[-8]^{-1} \cdot \left[\begin{array}{cc} -4 & -2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} -\frac{1}{2}, & -\frac{1}{4} \end{array}\right]. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

4.0.5. feladat. Tekintsük a

$$\left.\begin{aligned} 7x + \sin(y) + 3z &= 5, \\ x + e^y - 2z &= 9 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszert! Mutassuk meg, hogy van olyan $\varepsilon > 0$ szám és olyan differenciálható

$$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : (-3-\varepsilon, -3+\varepsilon) \to \mathbb{R}^2$$

függvény, hogy $\varphi(-3) = (2{,}0)$ és minden $z \in (-3-\varepsilon, -3+\varepsilon)$ mellett $(\varphi_1(z), \varphi_2(z), z)$ megoldása az egyenletrendszernek, majd számítsuk ki $\varphi'(-3)$-at!

Útm. A

$$\left.\begin{aligned} 7x + \sin(y) + 3z &= 5, \\ x + e^y - 2z &= 9 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszer megoldható, ui. $y = 0$ esetén a

$$\left.\begin{array}{rcl} 7x + 3z &=& 5, \\ x - 2z &=& 8 \end{array}\right\}$$

lineáris egyenletrendszer megoldása: $(2, -3)$. Legyen

$$f(x, y, z) := (7x + \sin(y) + 3z - 5, x + e^y - 2z - 9) \in \mathbb{R}^2 \qquad ((x, y, z) \in \mathbb{R}^3),$$

ekkor $f(2{,}0, -3) = (0{,}0)$ és $f \in \mathfrak{C}^1$.

$$\det\left[\frac{\partial}{\partial(x, y)} f(2{,}0, -3)\right] = \det\begin{bmatrix} 7 & \cos(0) \\ 1 & e^0 \end{bmatrix} = 7 - 1 = 6 \neq 0,$$

ezért teljesülnek az implicit függvényre vonatkozó tétel feltételei, azaz létezik a kívánt tulajdonságú φ.

$$\begin{aligned} \varphi'(-3) &= -\left[\frac{\partial}{\partial(x, y)} f(2{,}0, -3)\right]^{-1} \cdot \frac{\partial}{\partial z} f(2{,}0, -3) = -\begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \\ &= -\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -5 \\ 17 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

4.0.6. feladat. Tekintsük a

$$\left.\begin{array}{rcl} 7x + \cos(y) + 3z &=& 6 \\ x + \ln(1 - y) - 2z &=& 8 \end{array}\right\}$$

egyenletrendszert! Mutassuk meg, hogy van olyan $\epsilon > 0$ szám és olyan differenciálható $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : (2 - \epsilon, 2 + \epsilon) \to \mathbb{R}^2$ függvény, hogy $\varphi(2) = (0, -3)$ és minden $x \in (2 - \epsilon, 2 + \epsilon)$ mellett $(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x))$ megoldása az egyenletrendszernek, majd számítsuk ki $\varphi'(2)$-t!

Útm. A

$$\left.\begin{array}{rcl} 7x + \cos(y) + 3z &=& 6 \\ x + \ln(1 - y) - 2z &=& 8 \end{array}\right\}$$

egyenletrendszer megoldható, ui. $y = 0$ esetén a

$$\left.\begin{array}{rcl} 7x + 3z &=& 5 \\ x - 2z &=& 8 \end{array}\right\}$$

lineáris egyenletrendszer megoldása: $(2, -3)$. Legyen

$$f(x, y, z) := (7x + \cos(y) + 3z - 6, x + \ln(1 - y) - 2z - 8) \in \mathbb{R}^2 \quad ((x, y, z) \in \mathbb{R}^3),$$

ekkor $f(2{,}0, -3) = (0{,}0)$ és $f \in \mathfrak{C}^1$.

$$\det\left[\frac{\partial}{\partial(y, z)} f(2{,}0, -3)\right] = \det\begin{bmatrix} -\sin(0) & 3 \\ \frac{1}{0-1} & -2 \end{bmatrix} = 3 \neq 0,$$

ezért teljesülnek az implicit függvényre vonatkozó tétel feltételei, azaz létezik a kívánt tulajdonságú φ.

$$\begin{aligned}
\varphi'(2) &= -\left[\frac{\partial}{\partial(y,z)} f(2,0,-3)\right]^{-1} \cdot \frac{\partial}{\partial x} f(2,0,-3) = \\
&= -\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix} = \\
&= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 17 \\ -7 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

4.0.7. feladat. Számítsuk ki az

$$\begin{aligned}
xe^{u+v} + 2uv &= 1 \\
ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} &= 2x
\end{aligned}$$

egyenletrendszer által meghatározott $(x,y) \mapsto (u,v)$ implicit függvény Jacobi-mátrixát az $(1,2)$ pontban!

Útm. Legyen

$$A := \mathbb{R}^2, \qquad B := \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : \ v \neq -1\right\},$$

$$F : A \times B \to \mathbb{R}^2, \qquad F((x,y),(u,v)) := \left(xe^{u+v} + 2uv - 1, ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} - 2x\right).$$

Látható, hogy pl. $\mathbf{a} := (1,2)$, $\mathbf{b} := (0,0)$ esetén $\mathbf{a} \in A$, $\mathbf{b} \in B$ és $F(\mathbf{a},\mathbf{b}) = 0$. Mivel

$$\frac{\partial}{\partial(u,v)} F((x,y),(u,v)) = \begin{bmatrix} xe^{u+v} + 2v & xe^{u+v} + 2u \\ ye^{u-v} - \frac{1}{1+v} & -ye^{u-v} + \frac{u}{(1+v)^2} \end{bmatrix},$$

ezért

$$\det\left[\frac{\partial}{\partial(u,v)} F((1,2),(0,0))\right] = \det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = -3 \neq 0,$$

tehát alkalmazható az implicit függvényre vonatkozó tétel, azaz alkalmas $\mathcal{K}(1,2)$, $\mathcal{K}(0,0) \subset \mathbb{R}^2$ környezetek, ill. bármely $(x,y) \in \mathcal{K}(1,2)$ esetén pontosan egy $\Phi(x,y) \in \mathcal{K}(0,0)$ létezik, hogy az így definiált $\Phi : \mathcal{K}(1,2) \to \mathcal{K}(0,0)$ (deriválható) függvényre

$$F(x,y,\Phi(x,y)) = (0,0) \qquad ((x,y) \in \mathcal{K}(1,2))$$

$$\begin{aligned}
\Phi'(1{,}2) &= -\left(\frac{\partial}{\partial(u,v)}F((1{,}2),(0{,}0))\right)^{-1}\cdot\frac{\partial}{\partial(x,y)}F((1{,}2),(0{,}0)) = \\
&= -\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix} \partial_x F_1(1{,}2{,}0{,}0) & \partial_y F_1(1{,}2{,}0{,}0) \\ \partial_x F_2(1{,}2{,}0{,}0) & \partial_y F_2(1{,}2{,}0{,}0) \end{bmatrix} = \\
&= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} e^{u+v} & 0 \\ -2 & e^{u-v} \end{bmatrix}_{(x,y,u,v)=(1,2,0,0)} = \\
&= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

4.0.8. feladat. Tekintsük a

$$\begin{aligned}
3x_1 + x_2 - x_3 - x_4^2 &= 0, \\
x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0, \\
2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 &= 0
\end{aligned}$$

egyenletrendszert! Mutassuk meg, hogy ebből x_1, x_2, x_4 kifejezhető x_3 implicit függvényeként! Igaz-e ugyanez az x_1, x_2, x_3, x_4 közül tetszőlegesen kiválasztott három és a maradék negyedik vonatkoztatásában?

Útm. Legyen

$$F = (F_1, F_2, F_3) : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3,$$

ahol

$$F_1(x_1,x_2,x_3,x_4) := 3x_1 + x_2 - x_3 - x_4^2, \qquad F_2(x_1,x_2,x_3,x_4) := x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4,$$

$$F_3(x_1,x_2,x_3,x_4) := 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4.$$

Az

$$\left.\begin{aligned}
F_1(x_1,x_2,x_3,x_4) - F_2(x_1,x_2,x_3,x_4) &= 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4^2 - x_4, \\
F_3(x_1,x_2,x_3,x_4) &= 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4
\end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszert tekintve jól látható, hogy csak akkor van megoldása az

$$F(x_1,x_2,x_3,x_4) = (0{,}0{,}0)$$

egyenletrendszernek, ha

$$x_4^2 + x_4 = -2x_4,$$

azaz ha $x_4 \in \{-3; 0\}$. Mivel 4 különböző elemből 3-at $\binom{4}{3} = 4$ féleképpen lehet kiválasztani, ezért négy esetet különböztetünk meg:

$\boxed{(x_1, x_2, x_4) = \varphi_3(x_3)}$:

$$\det\left[\frac{\partial}{\partial(x_1,x_2,x_4)}F(x_1,x_2,x_3,x_4)\right] =$$

$$= \det \begin{bmatrix} \partial_1 F_1(x_1,x_2,x_3,x_4) & \partial_2 F_1(x_1,x_2,x_3,x_4) & \partial_4 F_1(x_1,x_2,x_3,x_4) \\ \partial_1 F_2(x_1,x_2,x_3,x_4) & \partial_2 F_2(x_1,x_2,x_3,x_4) & \partial_4 F_2(x_1,x_2,x_3,x_4) \\ \partial_1 F_3(x_1,x_2,x_3,x_4) & \partial_2 F_3(x_1,x_2,x_3,x_4) & \partial_4 F_3(x_1,x_2,x_3,x_4) \end{bmatrix} =$$

$$= \det \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2x_4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} = -12 - 8x_4 \neq 0 \qquad (x_4 \in \{-3;0\}).$$

Így tehát minden, a $d \in \{-3;0\}$ feltételnek eleget tévő $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ pontnak van olyan környezete, amelyben x_1, x_2, x_4 kifejezhető x_3 implicit függvényeként.

$\boxed{(x_1,x_3,x_4) = \varphi_2(x_2)}$:

$$\det\left(\frac{\partial}{\partial(x_1,x_3,x_4)} F(x_1,x_2,x_3,x_4)\right) =$$

$$= \det \begin{bmatrix} \partial_1 F_1(x_1,x_2,x_3,x_4) & \partial_3 F_1(x_1,x_2,x_3,x_4) & \partial_4 F_1(x_1,x_2,x_3,x_4) \\ \partial_1 F_2(x_1,x_2,x_3,x_4) & \partial_3 F_2(x_1,x_2,x_3,x_4) & \partial_4 F_2(x_1,x_2,x_3,x_4) \\ \partial_1 F_3(x_1,x_2,x_3,x_4) & \partial_3 F_3(x_1,x_2,x_3,x_4) & \partial_4 F_3(x_1,x_2,x_3,x_4) \end{bmatrix} =$$

$$= \det \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2x_4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{bmatrix} = 14x_4 + 21 \neq 0 \qquad (x_4 \in \{-3;0\}).$$

Így tehát minden, a $d \in \{-3;0\}$ feltételnek eleget tévő $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ pontnak van olyan környezete, amelyben x_1, x_3, x_4 kifejezhető x_2 implicit függvényeként.

$\boxed{(x_2,x_3,x_4) = \varphi_1(x_1)}$:

$$\det\left[\frac{\partial}{\partial(x_2,x_3,x_4)} F(x_1,x_2,x_3,x_4)\right] =$$

$$= \det \begin{bmatrix} \partial_2 F_1(x_1,x_2,x_3,x_4) & \partial_3 F_1(x_1,x_2,x_3,x_4) & \partial_4 F_1(x_1,x_2,x_3,x_4) \\ \partial_2 F_2(x_1,x_2,x_3,x_4) & \partial_3 F_2(x_1,x_2,x_3,x_4) & \partial_4 F_2(x_1,x_2,x_3,x_4) \\ \partial_2 F_3(x_1,x_2,x_3,x_4) & \partial_3 F_3(x_1,x_2,x_3,x_4) & \partial_4 F_3(x_1,x_2,x_3,x_4) \end{bmatrix} =$$

$$= \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2x_4 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{bmatrix} = 2x_4 + 3 \neq 0 \qquad (x_4 \in \{-3;0\}).$$

Így tehát minden, a $d \in \{-3;0\}$ feltételnek eleget tévő $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ pontnak van olyan környezete, amelyben x_2, x_3, x_4 kifejezhető $x_1$implicit függvényeként.

$\boxed{(x_1,x_2,x_3) = \varphi_4(x_4)}$:

$$\det\left[\frac{\partial}{\partial(x_1,x_2,x_3)} F(x_1,x_2,x_3,x_4)\right] =$$

$$= \det \begin{bmatrix} \partial_1 F_1(x_1,x_2,x_3,x_4) & \partial_2 F_1(x_1,x_2,x_3,x_4) & \partial_3 F_1(x_1,x_2,x_3,x_4) \\ \partial_1 F_2(x_1,x_2,x_3,x_4) & \partial_2 F_2(x_1,x_2,x_3,x_4) & \partial_3 F_2(x_1,x_2,x_3,x_4) \\ \partial_1 F_3(x_1,x_2,x_3,x_4) & \partial_2 F_3(x_1,x_2,x_3,x_4) & \partial_3 F_3(x_1,x_2,x_3,x_4) \end{bmatrix} =$$

$$= \det \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix} = 0,$$

ez azonban még nem bizonyítja, hogy x_1, x_2, x_3 nem fejezhető ki x_4 implicit függvényeként. További vizsgálatra van tehát szükségünk. Mivel az

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0{,}0{,}0)$$

egyenletrendszernek csak akkor van megoldása, ha $x_4 \in \{-3; 0\}$ és az x_1, x_2, x_3 változókra az egyenletrendszer lineáris, ezért sem -3, sem pedig 0 környezetében nincsen megoldása. ■

4.0.9. feladat. Legyen $f \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f \in \mathfrak{C}^1$ és valamely $(a,b,c) \in \mathcal{D}_f$ esetén $f(a,b,c) = 0$. Tegyük fel, hogy egy alkalmas $K(a,b,c)$ környezetben bármelyik változó kifejezhető a másik kettő implicit függvényeként, legyenek ezek az első, második, harmadik változót illetően rendre φ_1, φ_2, φ_3. Mutassuk meg, hogy teljesül a

$$\partial_1\varphi_1(b,c) \cdot \partial_2\varphi_2(a,c) \cdot \partial_1\varphi_3(a,b) = -1$$

egyenlőség!

Útm. A φ_1, φ_2, φ_3 függvényekre ekkor

$$f(\varphi_1(b,c), b, c) = 0, \quad f(a, \varphi_2(a,c), c) = 0, \quad f(a, b, \varphi_3(a,b)) = 0\ ,$$

és tetszőleges $(x,y,z) \in K(a,b,c)$ esetén

$$\begin{aligned}
\varphi_1'(y,z) &= -\left[\partial_1 f(x,y,z)\right]^{-1} \tfrac{\partial}{\partial(y,z)} f(x,y,z) &= -\tfrac{1}{\partial_1 f(x,y,z)} \cdot \begin{bmatrix} \partial_2 f(x,y,z) & \partial_3 f(x,y,z) \end{bmatrix}, \\
\varphi_2'(x,z) &= -\left[\partial_2 f(x,y,z)\right]^{-1} \tfrac{\partial}{\partial(x,z)} f(x,y,z) &= -\tfrac{1}{\partial_2 f(x,y,zc)} \cdot \begin{bmatrix} \partial_1 f(x,y,z) & \partial_3 f(x,y,z) \end{bmatrix}, \\
\varphi_3'(x,y) &= -\left[\partial_3 f(x,y,z)\right]^{-1} \tfrac{\partial}{\partial(x,y)} f(x,y,z) &= -\tfrac{1}{\partial_3 f(x,y,z)} \cdot \begin{bmatrix} \partial_1 f(x,y,z) & \partial_2 f(x,y,z) \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Így

$$\partial_1\varphi_1(b,c) = -\tfrac{\partial_2 f(a,b,c)}{\partial_1 f(a,b,c)}, \quad \partial_2\varphi_2(a,c) = -\tfrac{\partial_3 f(a,b,c)}{\partial_2 f(a,b,c)}, \quad \partial_1\varphi_3(a,b) = -\tfrac{\partial_1 f(a,b,c)}{\partial_3 f(a,b,c)}\ ,$$

ezért

$$\begin{aligned}
\partial_1\varphi_1(b,c) \cdot \partial_2\varphi_2(a,c) \cdot \partial_1\varphi_3(a,b) &= \left(-\frac{\partial_2 f(a,b,c)}{\partial_1 f(a,b,c)}\right)\left(-\frac{\partial_3 f(a,b,c)}{\partial_2 f(a,b,c)}\right)\left(-\frac{\partial_1 f(a,b,c)}{\partial_3 f(a,b,c)}\right) = \\
&= (-1)(-1)(-1) = -1. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

4.0.0. megjegyzés. Nagy hibát követnénk el, ha az

$$a = \varphi_1(b,c), \qquad b = \varphi_2(a,c), \qquad c = \varphi_3(a,b)$$

egyenlőségekből kiindulva a

$$\partial_1\varphi_1(b,c) \cdot \partial_2\varphi_2(a,c) \cdot \partial_1\varphi_3(a,b)$$

szorzat

$$\frac{\partial a}{\partial b} \cdot \frac{\partial b}{\partial c} \cdot \frac{\partial c}{\partial a}$$

alakját formálisan egyszerűsítenénk, ui. ekkor 1-et kapnánk eredményül.

4.0.0. megjegyzés. A hőtanból jól ismert, hogy a mólnyi mennyiségű **ideális gáz** állapotjelzői között a következő összefüggés áll fenn:

$$pV = RT$$

(p: nyomás, V: térfogat, T: abszolút hőmérséklet, R: univerzális gázállandó). Látható, hogy bármelyik állapotjelző a másik kettőnek a függvénye:

$$p = p(V,T), \qquad V = V(p,T), \qquad T = T(p,V).$$

Ekkor

$$\frac{\partial p}{\partial V} \cdot \frac{\partial V}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} = \left(-\frac{RT}{V^2}\right) \cdot \left(\frac{R}{p}\right) \cdot \left(\frac{V}{R}\right) = -\frac{RT}{pV} = -1.$$

4.0.10. feladat. Tegyük fel, hogy mólnyi menyiségű valódi gáz állapotjelzői, pontosabban a gáz nyomása, abszolút hőmérséklete, illetve térfogata között a

$$p = \frac{8T}{3V-1} - \frac{3}{V^2} \qquad (p > 0, V > 1/3, T > 0)$$

(ún. **Van-der-Waals**-féle) **összefüggés** áll fenn. Igazoljuk, hogy a $(V_0, T_0, p_0) := (3{,}1, \frac{2}{3})$ pont a gáz egy lehetséges állapotát reprezentálja, majd mutassuk meg, hogy a térfogat kifejezhető V_0 egy alkalmas környezetében p, ill. T függvényeként: $V = V(T,p)$. Differenciálható-e ez a függvény? Ha igen, számítsuk ki a

$$\frac{\partial V}{\partial p}(T_0, p_0)$$

parciális deriváltat!

Útm. Legyen

$$f(V,T,p) := \frac{8T}{3V-1} - \frac{3}{V^2} - p \qquad (p > 0, V > 1/3, T > 0)$$

Ekkor

$$f(V_0, T_0, p_0) = 0, \qquad f \in \mathfrak{C}^1,$$

ill.

$$\frac{\partial f}{\partial V}(V_0, T_0, p_0) = \left[\frac{-24T}{(3V-1)^2} + \frac{6}{V^3}\right]_{V=V_0, T=T_0, p=p_0} = -\frac{24}{54} + \frac{6}{27} = -\frac{11}{72} \neq 0.$$

Az imlicit függvényre vonatkozó tétel alapján tehát van olyan $\mathcal{K} := \mathcal{K}(T_0, p_0)$ környezet, hogy a térfogatra

$$f(V(T,p), T, p) = 0 \qquad ((T,p) \in \mathcal{K})$$

teljesül, sőt a $V : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ deriválható, és bármely $(T,p) \in \mathcal{K}$ esetén

$$\frac{\partial V}{\partial p}(T,p) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial p}(V(T,p), T, p)}{\frac{\partial f}{\partial V}(V(T,p), T, p)} = \frac{1}{\frac{-24T}{(3V(T,p)-1)^2} + \frac{6}{(V(T,p))^3}},$$

ahonnan

$$\frac{\partial V}{\partial p}(T_0, p_0) = \frac{1}{-\frac{3}{8} + \frac{2}{9}} = -\frac{72}{11}$$

következik. ■

4.0.11. feladat. Legyen $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ az

$$\left.\begin{array}{rcl} x^2 + 4y^2 + 9z^2 &=& 1, \\ x + y + z &=& 0 \end{array}\right\}$$

egyenletrendszer megoldáshalmaza. Mutassuk meg, hogy a $P(0{,}1/\sqrt{13}, -1/\sqrt{13})$ pont megoldása az egyenletrendszernek: $P \in \mathcal{M}$, majd P egy alkalmas környezetében az egyenletrendszer megoldható y, z-re, azaz alkalmas $\varepsilon > 0$, ill. differenciálható $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^2$ esetén

$$(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x)) \in \mathcal{M} \qquad (|x| < \varepsilon)$$

teljesül! Számítsuk ki $\varphi'(0)$-t is!

Útm. Mivel

$$0 + \frac{4}{13} + \frac{9}{13} = \frac{13}{13} = 1 \qquad \text{és} \qquad 0 + \frac{1}{\sqrt{13}} - \frac{1}{\sqrt{13}} = 0,$$

ezért $P \in \mathcal{M}$. Legyen

$$f(x,y,z) := (x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 1, x + y + z) \in \mathbb{R}^3 \qquad ((x,y,z) \in \mathbb{R}^3).$$

Ekkor $f \in \mathfrak{C}^1$ és $f(P) = 0$, továbbá

$$\det\left[\frac{\partial}{\partial(y,z)} f(P)\right] = \det\begin{bmatrix} 8y & 18z \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_{(x,y,z)=P} = \frac{10}{\sqrt{13}} \neq 0.$$

Ezért teljesülnek az implicit függvényre vonatkozó tétel feltételei, azaz létezik a kívánt tulajdonságú φ. Továbbá

$$\varphi'(0) = -\left[\frac{\partial}{\partial(y,z)} f(P)\right]^{-1} \cdot \frac{\partial}{\partial x} f(P) = -\frac{\sqrt{13}}{10}\begin{bmatrix} 1 & \frac{18}{\sqrt{13}} \\ -1 & \frac{8}{\sqrt{13}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 9 \\ 4 \end{bmatrix}. \quad ■$$

2017.12.29.

5. fejezet

Az inverz függvényre vonatkozó tétel

Az inverz függvény differenciálhatóságára vonatkozik a

5.0.1. tétel. Ha $I \subset \mathbb{R}$ (valódi) intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ injektív és folytonos, $a \in I$, továbbá $f \in \mathfrak{D}[a]$, akkor az

$$f^{-1} : \mathcal{R}_f \to \mathcal{D}_f$$

inverz függvényre a következők igazak:

1. $f^{-1} \in \mathfrak{D}[f(a)] \qquad \Longleftrightarrow \qquad f'(a) \neq 0;$
2. $f^{-1} \in \mathfrak{D}[f(a)] \qquad \Longrightarrow$

$$\boxed{\left(f^{-1}\right)'(f(a)) = \frac{1}{f'(f^{-1}(f(a)))} = \frac{1}{f'(a)}\ .}$$

5.0.1. példa.

$$\ln'(x) = \frac{1}{\exp'(\ln(x))} = \frac{1}{\exp(\ln(x))} = \frac{1}{x} \qquad (0 < x \in \mathbb{R}).$$

5.0.2. példa. Tetszőleges $x \in (-1,1)$ esetén

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

5.0.3. példa.

$$\operatorname{arctg}'(x) = \frac{1}{\operatorname{tg}'(\operatorname{arctg}(x))} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg}(x))} = \frac{1}{1+x^2} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

5.0.1. definíció. Adott $d \in \mathbb{N}$, ill. $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ esetén azt mondjuk, hogy az f leképezés **lineáris**, ha tetszőleges $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$, ill. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{u}) + \beta f(\mathbf{v})$$

teljesül.

5.0.1. tétel. Az $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ lineáris leképezés pontosan akkor lineáris, ha alkalmas $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_d) \in \mathbb{R}^d$ vektor esetén

$$f(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{a}, \mathbf{r} \rangle = \sum_{k=1}^{d} a_k x_k \qquad (\mathbf{r} = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d)$$

teljesül.

Biz.

1. lépés.. Ha

$$f(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{a}, \mathbf{r} \rangle \qquad (\mathbf{r} \in \mathbb{R}^d),$$

akkor bármely $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$, ill. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \langle \mathbf{a}, \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} \rangle = \alpha\langle \mathbf{a}, \mathbf{u} \rangle + \beta\langle \mathbf{a}, \mathbf{v} \rangle = \alpha f(\mathbf{u}) + \beta f(\mathbf{v}).$$

2. lépés.. Ha $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ lineáris leképezés, továbbá $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_d$ jelöli az $\mathbb{R}^d$-beli kanonikus bázist, akkor bármely $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^d$ esetén van olyan $\alpha_1, \ldots, \alpha_d \in \mathbb{R}$, hogy

$$\mathbf{r} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \ldots + \alpha_d\mathbf{e}_d,$$

így az

$$\mathbf{a} := (f(\mathbf{e}_1), \ldots, f(\mathbf{e}_d))$$

vektorral f linearitása folytán

$$f(\mathbf{r}) = \alpha_1 f(\mathbf{e}_1) + \ldots + \alpha_d f(\mathbf{e}_d) = \langle \mathbf{a}, \mathbf{r} \rangle. \quad \blacksquare$$

5.0.2. definíció. Adott $p, q \in \mathbb{N}$, ill. $f : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^p$ esetén azt mondjuk, hogy az f leképezés **lineáris**, ha tetszőleges $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^q$, ill. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{u}) + \beta f(\mathbf{v})$$

teljesül.

5.0.2. tétel. Adott $p, q \in \mathbb{N}$ esetén az $f = (f_1, \ldots, f_p) : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^p$ leképezés pontosan akkor lineáris, ha alkalmas $M \in \mathbb{R}^{p\times q}$ mátrixszal

$$f(\mathbf{r}) = M\mathbf{r} \qquad (\mathbf{r} \in \mathbb{R}^q)$$

teljesül.

Biz.

1. lépés.. Ha tetszőleges $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^q$ vektorra

$$f(\mathbf{r}) = M\mathbf{r},$$

akkor bármely $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^q$, ill. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = M(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \alpha M\mathbf{u} + \beta M\mathbf{v} = \alpha f(\mathbf{u}) + \beta f(\mathbf{v}),$$

azaz f lineáris.

2. lépés.. Ha f lineáris, akkor (vö. 5.0.1. tétel) alkalmas

$$\mathbf{m}_1 := (a_{11}, \ldots, a_{1q}), \ldots, \mathbf{m}_p := (a_{p1}, \ldots, a_{pq}) \in \mathbb{R}^q$$

vektorokkal bármely $\mathbf{r} = (x_1, \ldots, x_q) \in \mathbb{R}^q$ esetén

$$\begin{aligned} f(\mathbf{r}) &= \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{r}) \\ \vdots \\ f_p(\mathbf{r}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{m}_1, \mathbf{r} \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{m}_p, \mathbf{r} \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11}x_1 + \ldots, + m_{1q}x_q \\ \vdots \\ m_{p1}x_1 + \ldots, + m_{pq}x_q \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} m_{11} & \ldots & m_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{p1} & \ldots & m_{pq} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{r} = M\mathbf{r}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

5.0.3. tétel. Ha $d \in \mathbb{N}$, $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ lineráis, azaz alkalmas $M \in \mathbb{R}^{d\times d}$ esetén

$$f(\mathbf{r}) = M\mathbf{r} \qquad (\mathbf{r} \in \mathbb{R}^d),$$

úgy

$$f \text{ invertálható} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \det(M) \neq 0,$$

és invertálhatóság esetén $f[\mathbb{R}^d] = \mathbb{R}^d$ teljesül, továbbá az $f^{-1} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ inverz lineáris, és

$$f^{-1}(\mathbf{s}) = M^{-1}\mathbf{s} \qquad (\mathbf{s} \in \mathbb{R}^d).$$

Biz.

1. lépés.. Ha $\det(M) \neq 0$, akkor M reguláris. Bármely $\mathbf{r}, \mathbf{s} \in \mathbb{R}^d$ esetén az $f(\mathbf{r}) = f(\mathbf{s})$ egyenlőségből $M\mathbf{r} = M\mathbf{s}$ következik. M regularitása következtében így

$$\mathbf{r} = E_d\mathbf{r} = (M^{-1}M)\mathbf{r} = \boxed{M^{-1}(M\mathbf{r}) = M^{-1}(M\mathbf{s})} = (M^{-1}M)\mathbf{s} = E_d\mathbf{s} = \mathbf{s},$$

ami azt jelenti, hogy f injektív. Ha most $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$ tetszőleges vektor, és $\mathbf{u} := M^{-1}\mathbf{v}$, akkor

$$f(\mathbf{u}) = M\mathbf{u} = M(M^{-1}\mathbf{v}) = (M^{-1}M)\mathbf{v} = E_d\mathbf{v} = \mathbf{v}.$$

Innen egyrészt $\mathbf{v} \in f[\mathbb{R}^d]$, másrészt pedig f injektivitása folytán $\mathbf{u} = f^{-1}(\mathbf{v})$ következik. Mivel $\mathbf{v}$ tetszőleges volt, ezért $f[\mathbb{R}^d] = \mathbb{R}^d$, továbbá $f^{-1}(\mathbf{v}) = M^{-1}\mathbf{v}$.

2. lépés.. Ha $\det(M) = 0$, akkor van olyan $\mathbf{0} \neq \mathbf{u} \in \mathbb{R}^d$, hogy $M\mathbf{u} = \mathbf{0}$ teljesül, ahonnan $f(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ következik. f linearitása következtében

$$f(\mathbf{0}) = f(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = f(\mathbf{0}) + f(\mathbf{0}),$$

így $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, ami azt jelenti, hogy f nem injektív. ■

5.0.0. megjegyzés. Az 5.0.3. tételbeli állítás tehát a következőt jelenti: tetszőleges $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_d) \in \mathbb{R}^d$ esetén az

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}, \qquad \text{ill. az} \qquad M\mathbf{x} = \mathbf{y},$$

vagy még részletesebben az

$$\begin{array}{rcl} m_{11}x_1 + \ldots + m_{1d}x_d & = & y_1 \\ & \vdots & \\ m_{d1}x_1 + \ldots + m_{dd}x_d & = & y_d \end{array}$$

egyenletnek pontosan akkor van egyértelmű megoldása, ha M reguláris: $\det(M) \neq 0$.

5.0.1. feladat. Döntsük el, hogy az

$$f(x, y, z) := (3x - y + z, 3x - y, x - z) \qquad ((x, y, z) \in \mathbb{R}^3)$$

függvény invertálható-e! Invertálhatóság esetén számítsuk ki f^{-1}-et!

Útm. Világos, hogy

$$f(\mathbf{r}) = M\mathbf{r} \qquad (\mathbf{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3),$$

ahol

$$M := \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Mivel

$$\det(M) = \det \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = -3 + 4 = 1 \neq 0,$$

ezért

$$f^{-1}(\mathbf{s}) = M^{-1}\mathbf{s} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -4 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{s} = \begin{bmatrix} u - v + w \\ 3u - 4v + 3w \\ u - v \end{bmatrix} \qquad (\mathbf{s} = (u, v, w) \in \mathbb{R}^3). \quad \blacksquare$$

A továbbiakban azt szeretnénk megvizsgálni, hogy nem-lineáris egyenlet esetén mi a megoldhatóság feltétele, azaz milyen feltételeket kell teljesítenie valamely

$$f = (f_1, \ldots, f_d) \in \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$$

függvénynek ahhoz, hogy adott $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_d) \in \mathbb{R}^d$ vektor esetén az

$$\left.\begin{array}{rcl} f_1(x_1, \ldots, x_d) & = & y_1 \\ & \vdots & \\ f_d(x_1, \ldots, x_d) & = & y_d \end{array}\right\}$$

egyenlet megoldható legyen. **Ötlet:** tegyük fel, hogy f differenciálható, majd (valamely a pont elegendő kicsiny környezetében) helyettesítsük f-et a

$$T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d, \qquad T(\mathbf{x}) := f(\mathbf{a}) + f'(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a})$$

függvénnyel. A $\det[f'(\mathbf{a})] \neq 0$ esetben ugyanis T invertálható, hiszen bármely $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$ esetén az

$$f(\mathbf{a}) + f'(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}) = \mathbf{y}$$

egyenlet egyértelműen megoldható:

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} - [f'(\mathbf{a})]^{-1}(f(\mathbf{a}) - \mathbf{y}).$$

Mivel T (legalábbis az a pont elegendően kicsi környzetében) jól közelíti f-et, ezért remélhető, hogy T injektivitása öröklődik f-re.

5.0.2. tétel. Legyen $d \in \mathbb{N}$, $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^d$ nyílt halmaz, $f : \Omega \to \mathbb{R}^d$ folytonosan differenciálható függvény. Ha valamely $\mathbf{a} \in \Omega$ pontra $\det[f'(\mathbf{a})] \neq 0$ teljesül, akkor

1. van olyan $U \subset \Omega$, ill. $V \subset \mathbb{R}^d$ nyílt halmaz, hogy $\mathbf{a} \in U$, ill. $f(\mathbf{a}) \in V$, továbbá $f|_U$ injektív és $f[U] = V$;
2. a $\mathbf{g} := (f|_U)^{-1}$ függvényre $\mathbf{g} \in \mathfrak{C}^1$, és

$$\left(f^{-1}\right)'(\mathbf{y}) = \mathbf{g}'(\mathbf{y}) = \left[\left(f'(f^{-1}(\mathbf{y})\right)\right]^{-1} \qquad (\mathbf{y} \in V).$$

5.0.0. megjegyzés.

1. Ha $d = 1$, akkor a fenti formula

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \qquad (y \in V)$$

alakú.

2. Az iménti állítás globális változata a következő. Ha $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, az $f : I \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható, továbbá $f' > 0$ vagy $f' < 0$, akkor f invertálható, f^{-1} differenciálható és

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \qquad (y \in f[I]).$$

5.0.4. példa. Ha

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad f(x, y) := (x^2 - y^2, 2xy),$$

akkor f differenciálható,

$$f'(x, y) = \begin{bmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{bmatrix} \qquad ((x, y) \in \mathbb{R}^2),$$

így f folytonosan differenciálható. Mivel

$$\det[f'(1, -1)] = \det \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = 8 \neq 0,$$

ezért az $(1, -1) \in \mathbb{R}^2$ pontnak van olyan U környezete és az $f(1, -1) = (0, -2)$ pontnak olyan V környezete, hogy az $f|_U$ függvény injektív, $f[U] = V$, továbbá

$$(f^{-1})'(f(1,1)) = [f'(1,1)]^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

5.0.0. megjegyzés. Ha $d \in \mathbb{N}$, $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ lineáris, azaz alkalmas $M \in \mathbb{R}^{d \times d}$ esetén

$$f(\mathbf{r}) = M\mathbf{r} \qquad (\mathbf{r} \in \mathbb{R}^d),$$

úgy

$$f'(\mathbf{r}) = M \qquad (\mathbf{r} \in \mathbb{R}^d),$$

ezért ha f lokálisan invertálható, akkor globálisan is, továbbá bármely $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d$ esetén

$$(f^{-1})'(f(\mathbf{a})) = [f'(\mathbf{a})]^{-1} = M^{-1}.$$

Ha $2 \leq d \in \mathbb{R}$, akkor nem-lineáris $f : \Omega \to \mathbb{R}^d$ folytonosan differenciálható függvény esetén a lokális invertálhatóságból nem következik a globális invertálhatóság, még akkor sem, ha bármely $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d$ pont esetén $\det[f'(\mathbf{a})] \neq 0$ teljesül. Ezt igazolja az

5.0.5. példa. Ha

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad f(x,y) := (e^x \cos(y), e^x \sin(y)),$$

akkor f deriválható,

$$f'(x,y) = \begin{bmatrix} e^x \cos(y) & -e^x \sin(y) \\ e^x \sin(y) & e^x \cos(y) \end{bmatrix} \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2),$$

így f folytonosan deriválható, továbbá bármely $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ esetén

$$\det[f'(x,y)] = e^{2x} \cos^2(y) - (-e^{2x} \sin^2(y)) = e^{2x} \neq 0.$$

Viszont

$$f(0,0) = (1,0) = f(0,2\pi)$$

miatt f nem injektív.

5.0.2. feladat. Számítsuk ki az 5.0.5. példabeli f függvény esetében a lokális inverz deriváltját az $f(0, \pi/2)$ pontban kétféleképpen: az 5.0.3. tétel alkalmazásával, majd explicit módon is (elosztjuk a két egyenletet egymással, ill. négyzetreemelés után összeadjuk)!

Útm. coming soon

5.0.3. feladat. Igazoljuk, hogy az

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad f(x,y) := (xy^2 + x^2 y, e^{xy^2})$$

függvény lokálisan invertálható a $(2,1)$ pontban, majd határozzuk meg a lokális inverz deriváltját az $f(2,1)$ pontban! Mutassuk meg, hogy a függvény globálisan nem invertálható (nem injektív), továbbá adjunk meg végtelen sok olyan pontot, ahol a függvény lokálisan sem invertálható!

Útm. Világos, hogy f differenciálható, sőt

$$f'(x,y) = \begin{bmatrix} y^2 + 2xy & 2xy + x^2 \\ y^2 e^{xy^2} & 2xye^{xy^2} \end{bmatrix} \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$$

következtében f folytonosan is differenciálható. Mivel

$$\det[f'(2,1)] = \det \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ e^2 & 4e^2 \end{bmatrix} = 12e^2 \neq 0,$$

ezért a $(2,1)$ pontnak van olyan U környezete és az $f(2,1) = (6, e^2)$ pontnak olyan V környezete, hogy $f|_U$ injektív, $f[U] = V$, továbbá

$$(f^{-1})'(f(2,1)) = [f'(2,1)]^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ e^2 & 4e^2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{12e^2} \begin{bmatrix} 4e^2 & -8 \\ -e^2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Mivel bármely $x, y \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x,0) = (0,1) = f(0,y),$$

ezért f az x-, ill. az y-tengely pontjaiban lokálisan sem invertálható. ■

2017.12.29.

6. fejezet

Feltételes szélsőérték

Tegyük fel, hogy egységnyi sugarú körbe írt téglalapok között a legnagyobb területű megahtározása a feladat! Vegyük fel a koordináta-rendszert, és jelöljük (x, y)-nal az egyik csúcs koordinátáit! Ekkor a téglalap területe:

$$T(x, y) := 4xy \quad (x, y \in (0,1)).$$

Mivel a téglalap csúcsai a körön vannak, ezért $x^2 + y^2 = 1$. Ha

$$H := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x, y \in (0,1), \ x^2 + y^2 = 1\right\},$$

akkor a szóbanforgó feladat a T függvény H-ra vonatkozó leszűkítésének maximumhelyének megkeresését jelenti.

A következőkben valamivel általánosabb esetben megvizsgáljuk a most megfogalmazott feladatot, azaz legyen $m, n \in \mathbb{N}$, $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ (ún. **célfüggvény**) és $g = (g_1, \ldots, g_m) : \Omega \to \mathbb{R}^m$, majd tegyük fel, hogy a

$$\{g = 0\} := \{\mathbf{r} \in \Omega : \ g(\mathbf{r}) = \mathbf{0}\}$$

ún. **feltételi halmaz**ra $\{g = 0\} \neq \emptyset$ teljesül

6.0.1. definíció. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek a $g = 0$ feltételre vonatkozóan **feltételes** lokális [abszolút] **szélsőértéke** van a $\mathbf{c} \in \{g = 0\}$ pontban, ha az f függvény $\{g = 0\}$ halmazra való leszűkítésének, azaz az

$$F(\mathbf{r}) := f(\mathbf{r}) \qquad (\mathbf{r} \in \{g = 0\})$$

függvénynek lokális [abszolút] szélsőértéke van a $\mathbf{c}$ pontban.

A korábbiakkal összehangban $f(\mathbf{c})$-re használjuk a **feltételes** lokális [abszolút] **szélsőérték**, ill. c-re a **feltételes** lokális [abszolút] **szélsőértékhely** elnevezést is.

6.0.1. tétel. (Elsőrendű szükséges feltétel a feltételes lokális szélsőérték létezésére). Tegyük fel, hogy

1. $f \in \mathfrak{D}$, $g \in \mathfrak{C}^1$;
2. f-nek a $\mathbf{c} \in \{g = 0\}$ pontban feltételes lokális szélsőértéke van $g = 0$ feltételre vonatkozóan;
3. $m < n$, $\operatorname{rang}(g'(\mathbf{c})) = m$, azaz a
$$g'_k(\mathbf{c})) \qquad (k \in \{1, \ldots, m\})$$
(oszlop)vektorok lineárisan függetlenek (**rangfeltétel**).

akkor van olyan $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ vektor (ún. **Lagrange-multiplikátor**), hogy az

$$L := f + \langle \boldsymbol{\lambda}, g \rangle := f + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k g_k : \Omega \to \mathbb{R}$$

ún. **Lagrange-függvény**re

$$L'(\mathbf{c}) = \mathbf{0}, \qquad \text{azaz} \qquad \partial_l f(\mathbf{c}) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \partial_l g_k(\mathbf{c}) = 0 \quad (1 \leq l \leq n)$$

teljesül.

6.0.2. tétel. (Másodrendű elésgséges feltétel a feltételes lokális szélsőéréték létezésére). Tegyük fel, hogy

- $f \in \mathfrak{D}^2$, $g \in \mathfrak{D}^2$;
- $\mathbf{c} \in \{g = 0\}$, $\operatorname{rang}(g'(\mathbf{c})) = m < n$;
- valamely $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m$ vektorral az
$$L := f + \langle \boldsymbol{\lambda}, g \rangle$$
függvényre
  - $L'(\mathbf{c}) = \operatorname{grad} L(\mathbf{c}) = \mathbf{0}$;
  - a
$$Q^L_{\mathbf{c}} := \langle L''(\mathbf{c})\mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle \qquad (\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n)$$
kvadratikus alak a $g'(\mathbf{c})$ mátrixra nézve feltételesen pozitív (negatív) definit.

Ekkor az f függvénynek $\mathbf{c}$-ben a $g = 0$ feltételre vonatkozóan feltételes lokális minimuma (maximuma) van.

6.0.1. feladat. Határozzuk meg az egységnyi sugarú körbe írt téglalapok között a legnagyobb területűt!

Útm. Legyen

$$f(x,y) := 4xy, \quad g(x,y) := x^2 + y^2 - 1 \qquad (x, y \in \Omega := (0,1)^2).$$

Így valamely $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

$$L(x,y) = 4xy + \lambda(x^2 + y^2 - 1) \qquad ((x,y) \in \Omega)\,.$$

Ekkor a feltételes lokális szélsőértékre vonatkozó elsőrendű szükséges feltétel olyan $(x^*, y^*) \in \Omega$ pontban teljesül, amelyre

$$\mathrm{rang}\,(g'(x^*, y^*)) = \mathrm{rang}\,[2x^*, 2y^*] = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (x^*)^2 + (y^*)^2 > 0$$

és

$$\left.\begin{array}{ll} \partial_1 L(x^*, y^*) = 4y^* + 2\lambda x^* = 0, & (I.) \\ \\ \partial_2 L(x^*, y^*) = 4x^* + 2\lambda y^* = 0, & (II.) \\ \\ g(x^*, y^*) = (x^*)^2 + (y^*)^2 - 1 = 0. & (III.) \end{array}\right\}$$

Ekkor $(I.)$ és $(II.)$ különbsége

$$2(y^* - x^*) + \lambda(x^* - y^*) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (x^* - y^*)(\lambda - 2) = 0.$$

Ha $x^* = y^*$, akkor

$$x^* = y^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{és} \qquad \lambda = -2.$$

Ha $\lambda = 2$, akkor $x^* = -y^*$, ami nem lehetséges. Most megvizsgáljuk, hogy teljesül-e az

$$(x^*, y^*) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

pontban a feltételes lokális szélsőértékre vonatkozó másodrendű elégséges feltétel. Az

$$L''(x^*, y^*) = \begin{bmatrix} 2\lambda & 4 \\ 4 & 2\lambda \end{bmatrix}$$

mátrix szemidefinit, de az

$$\mathbb{R}^2 \ni \mathbf{h} \mapsto \langle L''(x^*, y^*)\mathbf{h}, \mathbf{h} \rangle = 2\lambda(h_1^2 + h_2^2) + 8h_1h_2 = -4(h_1 - h_2)^2$$

kvadratikus alak definit a

$$g'(x^*, y^*) \cdot \mathbf{h} = 0 \qquad (0 \neq \mathbf{h} \in \mathbb{R}^2)$$

feltételre vonatkozóan, ui. $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^2$ esetén

$$g'(x^*, y^*) \cdot \mathbf{h} \quad = \quad \begin{bmatrix} 2x^* & 2y^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = 2x^*h_1 + 2y^*h_2 = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad h_1 = -\frac{y^*}{x^*} h_2.$$

Tehát

$$g'(x^*, y^*) \cdot \mathbf{h} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathbf{h} = (\xi, -\xi) \quad (\xi \in \mathbb{R}),$$

azaz $\xi \neq 0$ esetén

$$\langle L''(x^*, y^*)\mathbf{h}, \mathbf{h} \rangle = -4(2\xi)^2 = -16\xi^2.$$

Így az f függvénynek az $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ pontban a $g = 0$ feltételre vonatkozóan feltételes lokális maximuma van. ■

6.0.0. megjegyzés. A fenti feladat esetében $m = 1$, $n = 2$, továbbá

$$C = \begin{bmatrix} L''(\mathbf{c}) & g'(\mathbf{c})^T \\ g'(\mathbf{c}) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\lambda & 4 & 2x^* \\ 4 & 2\lambda & 2y^* \\ 2x^* & 2y^* & 0 \end{bmatrix}.$$

Mivel

$$\det(C) = \ldots = -8\lambda\{(x^*)^2 + (y^*)^2\} + 32x^*y^* = \ldots = 32 > 0,$$

ezért (x^*, y^*)-ban feltételes lokális maximum van.

6.0.2. feladat. Számítsuk ki az

$$f(x, y, z) := x + 2y + 3z \qquad \left((x, y, z) \in \mathbb{R}^3\right)$$

függvény feltételes szélsőértékeit az $x^2 + y^2 = 2$, $y + z = 1$ feltételekre nézve!

Útm. Legyen

$$g(x, y, z) := (x^2 + y^2 - 2, y + z - 1) \qquad \left((x, y, z) \in \mathbb{R}^3\right).$$

Ekkor valamely $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ esetén

$$L(x, y, z) = x + 2y + 3z + \lambda(x^2 + y^2 - 2) + \mu(y + z - 1) \qquad \left((x, y, z) \in \mathbb{R}^3\right),$$

ezért a feltételes lokális szélsőértékre vonatkozó elsőrendű szükséges feltétel olyan $(x^*, y^*, z^*) \in \mathbb{R}^3$ pontban teljesül, amelyre

$$\operatorname{rang}\left(g'(x^*, y^*, z^*)\right) = \operatorname{rang} \begin{bmatrix} 2x^* & 2y^* & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 2$$

és

$$\left.\begin{array}{ll} \partial_1 L(x^*, y^*, z^*) = 1 + \lambda 2x^* = 0, & (I.) \\ \partial_2 L(x^*, y^*, z^*) = 2 + \lambda 2y^* + \mu = 0, & (II.) \\ \partial_3 L(x^*, y^*, z^*) = 3 + \mu = 0, & (III.) \\ g_1(x^*, y^*, z^*) = (x^*)^2 + (y^*)^2 - 2 = 0 & (IV.) \\ g_2(x^*, y^*, z^*) = y^* + z^* - 1 = 0. & (V.) \end{array}\right\}$$

Ekkor $(x^*)^2 + (y^*)^2 \neq 0$, ami teljesül, ui. $(IV.)$ miatt $(x^*)^2 + (y^*)^2 = 2$, és $(III.)$ miatt $\mu = -3$, így $(I.)$ és $(II.)$ összege $2\lambda(x^* + y^*) = 0$. $(I.)$ miatt azonban $\lambda \neq 0$, így $x^* = -y^*$. Ezt $(IV.)$-be helyettesítve azt kapjuk, hogy $(x^*)^2 = 1$, azaz $x^* = \pm 1$. Így $y^* = \mp 1$, és $y^* = 1$ esetén $z^* = 0$, ill. $y^* = -1$ mellett $z^* = 2$. Továbbá $(I.)$-ből $x^* = 1$ esetén $\lambda = -\frac{1}{2}$, ill. $x^* = -1$ esetén $\lambda = \frac{1}{2}$. Most megvizsgáljuk, hogy teljesül-e az

$$(x^*, y^*, z^*) \in \{(1, -1{,}2); (-1{,}1{,}0)\}$$

pontban a feltételes lokális szélsőértékre vonatkozó másodrendű elégséges feltétel. Az

$$L''(x^*, y^*, z^*) = \begin{bmatrix} 2\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrix szemidefinit, de az

$$\mathbb{R}^3 \ni \mathbf{h} \mapsto \left\langle L''(x^*, y^*, z^*)\mathbf{h}, \mathbf{h} \right\rangle = 2\lambda(h_1^2 + h_2^2)$$

kvadratikus alak definit a

$$g'(x^*, y^*, z^*) \cdot \mathbf{h} = 0 \qquad (0 \neq \mathbf{h} \in \mathbb{R}^3)$$

feltételre vonatkozóan, ui. $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^3$ esetén

$$g'(x^*, y^*, z^*) \cdot \mathbf{h} = \begin{bmatrix} 2x^* & 2y^* & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x^* h_1 + 2y^* h_2 \\ h_2 + h_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff$$

$$\iff \left(h_1 = -\frac{y^*}{x^*} h_2 \quad \& \quad h_2 = -h_3 \right).$$

Tehát

$$g'(x^*, y^*, z^*) \cdot \mathbf{h} = 0 \qquad \iff \qquad \mathbf{h} = (\xi, \xi, -\xi) \quad (\xi \in \mathbb{R}),$$

azaz $\xi \neq 0$ esetén

$$\left\langle L''(x^*, y^*, z^*)\mathbf{h}, \mathbf{h} \right\rangle = \begin{cases} 4\lambda\xi^2 > 0 & \left(\lambda = \frac{1}{2}\right), \\ \\ 4\lambda\xi^2 < 0 & \left(\lambda = -\frac{1}{2}\right). \end{cases}$$

Így f-nek az $(1, -1{,}2)$, ill. a $(-1{,}1{,}0)$ pontban a $g = 0$ feltételre vonatkozóan feltételes lokális maximuma, ill. minimuma van, és $f(1, -1{,}2) = 5$, ill. $f(-1{,}1{,}0) = 1$. ■

6.0.0. megjegyzés. Ha a $\{g = 0\}$ feltételi halmaz kompakt (korlátos és zárt) és f folytonos függvény, akkor a Weierstraß-tétel következtében még a feltételes abszolút szélsőértékek létezése is biztosított.

6.0.1. példa. A fenti feladatban is ez az eset áll fenn, ui. azon $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ pontok halmaza, amelyre $g(x, y, z) = (0,0)$ az $x^2 + y^2 = 2$ egyenletű körhenger és az $y + z = 1$ egyenletű sík által meghatározott ellipszis, ezért a $\{g = 0\}$ halmaz kompakt. Lévén, hogy f folytonos, $f|_{g=0}$ szélsőértékeinek létezése a Weierstraß-tétel alapján biztosított. Mivel $f(1, -1,2) = 5$ és $f(-1,1,0) = 1$, ezért az $(1, -1,2)$, ill. a $(-1,1,0)$ pontokban f-nek a $g = 0$ feltételre vonatkozóan feltételes lokális maximuma, ill. minimuma van.

6.0.0. megjegyzés. A fenti feladatban

$$C = \begin{bmatrix} L''(\mathbf{c}) & g'(\mathbf{c})^T \\ g'(\mathbf{c}) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\lambda & 0 & 0 & 0 & 2x^* \\ 0 & 2\lambda & 0 & 1 & 2x^* \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2x^* & 2y^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

szegélyezett mátrix esetében $/m = 2,\ n = 3,\ 2m + 1 = 7 = n + m/$

$$\det(C) = -8\lambda([x^*]^2 + [y^*]^2),$$

így tehát az $(1, -1,2)$ pontban feltételes lokális maximum van $/\lambda = -\frac{1}{2}/$, a $(-1,1,0)$ pontban pedig feltételes lokális minimum van $/\lambda = \frac{1}{2}/$.

6.0.3. feladat. Számítsuk ki az

$$f(x, y) := 4x + 2y - 9 \qquad \left((x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + \frac{y^2}{4} = 1\right)$$

függvény lokális szélsőértékeit!

Útm. Legyen

$$g(x, y) := x^2 + \frac{y^2}{4} - 1 \qquad ((x, y) \in \mathbb{R}^2).$$

Ekkor valamely $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

$$L(x, y) := 4x + 2y - 9 + \lambda \left(x^2 + \frac{y^2}{4} - 1\right) \qquad ((x, y) \in \mathbb{R}^2),$$

így a feltételes lokális szélsőértékre vonatkozó elsőrendű szükséges feltétel olyan

$$(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2$$

pontban teljesül, amelyre

$$\operatorname{rang}(g'(x^*, y^*)) = \left(2x^*, \frac{y^*}{2}\right) = 1$$

és

$$\left.\begin{array}{ll} \partial_1 L(x^* x, y^*) = 4 + 2\lambda x^* = 0, & (I.) \\[2ex] \partial_2 L(x^*, y^*) = 2 + \dfrac{\lambda y^*}{2} = 0, & (II.) \\[2ex] g(x^*, y^*) = (x^*)^2 + \dfrac{(y^*)^2}{4} - 1 = 0. & (III.) \end{array}\right\}$$

Ekkor $(I.) - 2 \cdot (II.)$:

$$\lambda(2x^* - y^*) = 0, \qquad \text{azaz} \qquad y^* = 2x^*.$$

Ez esetben $(III.)$-ba, ill. $(I.) - (II.)$-be való helyettesítéssel azt kapjuk, hogy

$$x^* = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad y^* = \pm\sqrt{2}, \qquad \lambda = \mp 2\sqrt{2}.$$

Most megvizsgáljuk, hogy teljesül-e az

$$(x^*, y^*) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right), \qquad \text{ill. az} \qquad (x^*, y^*) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\right)$$

pontban a feltételes lokális szélsőértékre vonatkozó másodrendű elégséges feltétel. A

$$L''(x^*, y^*) = \begin{bmatrix} 2\lambda & 0 \\ 0 & \dfrac{\lambda}{2} \end{bmatrix}$$

mátrix (feltételesen) is definit, ezért f-nek az

$$(x^*, y^*) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right)$$

pontban feltételes lokális maximuma van $/\lambda = -2\sqrt{2}/$, az

$$(x^*, y^*) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\right)$$

pontban pedig feltételes lokális minimuma van $/\lambda = 2\sqrt{2}/$.

Megjegyzés. Az

$$\Omega := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; g(x, y) = 0\right\}$$

halmaz kompakt (korlátos és zárt). Lévén, hogy f folytonos, $f|_\Omega$ szélsőértékeinek létezése a Weierstraß-tétel alapján biztosított. Mivel

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right) = 4\sqrt{2} - 9 \qquad \text{és} \qquad f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right) = -4\sqrt{2} - 9,$$

ezért az

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right), \qquad \text{ill. a} \qquad \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right)$$

pontokban az f függvénynek a $g = 0$ feltételre vonatkozóan feltételes maximuma, ill. minimuma van. ■

6.0.4. feladat. Számítsuk ki az

$$f(x,y) := e^{xy} \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 < x, y, \ x^2 + y^2 = 1)$$

függvény lokális szélsőértékeit!

Útm. Legyen

$$g(x,y) := x^2 + y^2 - 1 \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$$

Ekkor valamely $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

$$L(x,y) = e^{xy} + \lambda(x^2 + y^2 - 1) \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2),$$

így a feltételes lokális szélsőértékre vonatkozó elsőrendű szükséges feltétel olyan

$$(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2$$

pontban teljesül, amelyre

$$\mathrm{rang}\,(g'(x^*, y^*)) = (2x^*, 2y^*) = 1$$

és

$$\left.\begin{array}{ll} \partial_1 L(x^* x, y^*) = y^* e^{x^* y^*} + 2\lambda x^* = 0, & (I.) \\ \\ \partial_2 L(x^*, y^*) = x^* e^{x^* y^*} + 2\lambda y^* = 0, & (II.) \\ \\ g(x^*, y^*) = (x^*)^2 + (y^*)^2 - 1 = 0. & (III.) \end{array}\right\}$$

Ekkor $(I.)$ és $(II.)$ különbsége:

$$e^{x^* y^*}(y^* - x^*) + 2\lambda(y^* - x^*) = 0, \qquad \text{azaz} \qquad \left\{e^{x^* y^*} - 2\lambda\right)(y^* - x^*) = 0.$$

Két eset lehetséges:

– az első tényező zérus:

$$e^{x^* y^*} - 2\lambda = 0.$$

Így $(I.)$-be helyettesítve azt kapjuk, hogy

$$2\lambda y^* + 2\lambda x^* = 0, \qquad \text{azaz} \qquad \lambda(x^* + y^*) = 0.$$

Tehát $\lambda \neq 0$ következtében $y^* = -x^*$, ami a feltételek miatt nem lehetséges.

– a második tényező zérus:

$$y^* - x^* = 0.$$

Ez esetben $(III.)$-ba, ill. $(I.) - (II.)$-be való helyettesítéssel azt kapjuk, hogy

$$x^* = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad y^* = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \lambda = -\frac{\sqrt{e}}{2}.$$

Most megvizsgáljuk, hogy teljesül-e az

$$(x^*, y^*) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

pontban a feltételes lokális szélsőértékre vonatkozó másodrendű elégséges feltétel. A

$$L''(x^*, y^*) = \begin{bmatrix} (y^*)^2 e^{x^*y^*} & e^{x^*y^*} + y^*x^*e^{x^*y^*} \\ e^{x^*y^*} + x^*y^*e^{x^*y^*} & (x^*)^2 e^{x^*y^*} + 2\lambda \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{e}}{2} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

mátrix indefinit, de az

$$\mathbb{R}^2 \ni \mathbf{h} \mapsto \left\langle L''(x^*, y^*)\mathbf{h}, \mathbf{h} \right\rangle = \frac{\sqrt{e}}{2}\left(-h_1^2 - h_2^2 + 6h_1h_2\right)$$

kvadratikus alak definit a

$$\left\langle g'(x^*, y^*) \cdot \mathbf{h} \right\rangle = 0 \qquad (\mathbf{0} \neq \mathbf{h} = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2)$$

feltételre vonatkozóan, ui. bármely $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^2$ esetén

$$\begin{aligned} \langle \operatorname{grad} g(x^*, y^*), \mathbf{h} \rangle \quad &= \quad \begin{pmatrix} 2x^* & 2y^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 2x^*h_1 + 2y^*h_2 = \sqrt{2}(h_1 + h_2) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad (h_1 = -h_2)\,. \end{aligned}$$

Tehát

$$g'(x^*, y^*) \cdot \mathbf{h} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathbf{h} = (\xi, -\xi) \quad (\xi \in \mathbb{R}),$$

azaz $\xi \neq 0$ esetén

$$\left\langle L''(x^*, y^*)\mathbf{h}, \mathbf{h} \right\rangle = -4\sqrt{e}h_1 < 0.$$

Így f-nek az $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ pontban lokális maximuma van, és

$$f(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = \sqrt{e}. \quad \blacksquare$$

6.0.5. feladat. Számítsuk ki az

$$f(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2 \quad ((x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x + 2y + z = 1; \; 2x - y - 3z = 4)$$

függvény lokális szélsőértékeit!

Útm. Legyen

$$g(x, y, z) := (g_1(x, y, z), g_2(x, y, z)) := (x + 2y + z - 1, 2x - y - 3z - 4) \quad ((x, y, z) \in \mathbb{R}^3).$$

Ekkor valamely $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ esetén

$$L(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x + 2y + z - 1) + \mu(2x - y - 3z - 4) \quad ((x, y, z) \in \mathbb{R}^3),$$

ezért a feltételes lokális szélsőértékre vonatkozó elsőrendű szükséges feltétel olyan

$$(x^*, y^*, z^*) \in \mathbb{R}^3$$

pontban teljesül, amelyre

$$\operatorname{rang}\left(g'(x^*, y^*, z^*)\right) = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} = 2$$

és

$$\left.\begin{array}{ll} \partial_1 L(x^*x, y^*, z^*) = 2x^* - \lambda - 2\mu = 0, & (I.) \\[2ex] \partial_2 L(x^*, y^*, z^*) = 2y^* + \lambda + \mu = 0, & (II.) \\[2ex] \partial_3 L(x^*, y^*, z^*) = 2z^* - \lambda + 3\mu = 0, & (III.) \\[2ex] g_1(x^*, y^*, z^*) = x^* + 2y^* + z^* - 1 = 0, & (IV.) \\[2ex] g_2(x^*, y^*, z^*) = 2x^* - y^* - 3z^* - 4 = 0. & (V.) \end{array}\right\}$$

Ekkor

$$\operatorname{rang}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{bmatrix} = \operatorname{rang}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -5 \end{bmatrix} = 2$$

miatt a rangfeltétel teljesül, és $(I.)$-et, ill. $(II.)$-t λ-ra, ill. μ-re megoldva

$$\lambda = \frac{2}{5}x^* + \frac{4}{5}y^*, \qquad \mu = \frac{4}{5}x^* - \frac{2}{5}y^*$$

adódik. Ezeket $(III.)$-ba írva és átrendezve kapjuk, hogy

$$x^* - y^* + z^* = 0.$$

Ez az egyenlet $(IV.)$-gyel és $(V.)$-tel olyan háromismeretlenes egyenletrendszert alkot, amelyben már csak x^*, y^* és z^* az ismeretlen:

$$\left.\begin{array}{lcl} x^* + 2y^* + z^* & = & 1, \\ 2x^* - y^* - 3z^* & = & 4, \\ x^* - y^* + z^* & = & 0. \end{array}\right\}$$

Nézzük meg, hogy van-e ennek az egyenletrendszernek megoldása:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -5 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & -1 \end{array}\right].$$

Tehát ez az egyenletrendszer megoldható, és (visszahelyettesítéssel) a megoldása:

$$x^* = \frac{16}{15}, \qquad y^* = \frac{1}{3}, \qquad z^* = -\frac{11}{15}.$$

Most megvizsgáljuk, hogy teljesül-e ebben az (x^*, y^*, z^*)-ban a feltételes lokális szélsőértékre vonatkozó másodrendű elégséges feltétel.
Mivel az

$$L''(x^*, y^*, z^*) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrix (feltételesen is) pozitív definit, ezért ebben az (x^*, y^*, z^*) pontban f-nek lokális minimuma van és

$$f(x^*, y^*, z^*) = \frac{16^2 + 5^2 + 11^2}{15^2} = \frac{134}{75}.$$

Megjegyzés. A $g = 0$ feltétel két síkot határoz meg $\mathbb{R}^3$-ban, következésképpen a mindkét feltételt kielégítő pontok halmaza a két sík metszésvonalán helyezkedik el. Az $f(x, y, z)$ az (x, y, z) pont origótól mért távolságának a négyzete. Tehát olyan (x^*, y^*, z^*) pontot kerestünk ezen az egyenesen, amely az origóhoz legközelebb, ill. legtávolabb van. Geometrialilag nyilvánvaló, hogy van ilyen minimális távolságú pont, ill. maximális távolságú pont nincsen. ■

6.0.6. feladat. Adott $a, b \in \mathbb{R}$: $ab \neq 0$, ill.

$$H := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1\right\}$$

esetén számítsuk ki az

$$f(x, y) := x^2 + y^2 \qquad ((x, y) \in H)$$

függvény lokális szélsőértékhelyeit!

Útm.

1. módszer.. Világos, hogy $(s, t) \in H$ pontosan akkor teljesül, ha

$$t = b - \frac{b}{a}s.$$

Így, ha

$$\varphi(s) := f\left(s, b - \frac{b}{a}s\right) = s^2 + b^2 - \frac{2b^2}{a}s + \frac{b^2}{a^2}s^2 \qquad (s \in \mathbb{R}),$$

akkor

$$\varphi'(s) = 2s - \frac{2b^2}{a} + \frac{2b^2}{a^2}s = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad s = \frac{ab^2}{a^2 + b^2}.$$

Ekkor

$$t = b - \frac{b}{a} \cdot \frac{ab^2}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 b}{a^2 + b^2},$$

ill.

$$\varphi''(s) = 2 + \frac{2b^2}{a^2} > 0 \qquad (s \in \mathbb{R}).$$

Ez azt jekenti, hogy f-nek az

$$\left(\frac{ab^2}{a^2 + b^2}, \frac{a^2 b}{a^2 + b^2}\right)$$

pontban van lokális minimuma.

2. módszer..

Legyen

$$g(x,y) := \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2).$$

Ekkor valamely $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

$$L(x,y) = f(x,y) + \lambda g(x,y) \qquad \left((x,y) \in \mathbb{R}^2\right),$$

ezért a feltételes lokális szélsőértékre vonatkozó elsőrendű szükséges feltétel olyan $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2$ pontban teljesül, amelyre

$$\mathrm{rang}\,(g'(x^*,y^*)) = \mathrm{rang}\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right) = 1$$

és

$$\left.\begin{aligned}
\partial_1 L(x^*,y^*) &= 2x^* + \frac{\lambda}{a} = 0, && (I.)\\
\partial_2 L(x^*,y^*) &= 2y^* + \frac{\lambda}{b} = 0, && (II.)\\
g(x^*,y^*) &= \frac{x^*}{a} + \frac{y^*}{b} - 1 = 0. && (III.)
\end{aligned}\right\}$$

$(I.)$-ből azt kapjuk, hogy $\lambda = -2ax^*$. Ezt $(II.)$-be helyettesítve

$$2y^* - \frac{2a}{b}x^* = 0, \quad \text{azaz} \quad x^* = \frac{b}{a}y^*$$

adódik. Így $(III.)$ miatt

$$\frac{b}{a^2}y^* + \frac{y^*}{b} = 1, \quad \text{azaz} \quad y^*\left(\frac{b}{a^2} + \frac{1}{b}\right) = 1,$$

ahonnan

$$x^* = \frac{ab^2}{a^2+b^2}, \qquad y^* = \frac{a^2 b}{a^2+b^2}$$

következik. Most megvizsgáljuk, hogy teljesül-e (x^*, y^*)-ban a feltételes lokális szélsőértékre vonatkozó másodrendű elégséges feltétel. Az

$$L''(x^*,y^*) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrix (feltételesen is) pozitív definit, így az (x^*, y^*) pontban f-nek lokális minimuma van. ■

6.0.7. feladat. Számítsuk ki az

$$f(x,y) := x + y \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$$

függvény feltételes lokális szélsőértékhelyeit az

$$x^4 + y^4 = 1$$

feltételre nézve!

Útm. Legyen

$$g(x,y,z) := x^4 + y^4 - 1 \qquad \left((x,y) \in \mathbb{R}^2\right).$$

Ekkor valamely $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

$$L(x, y, z) = x + y + \lambda(x^4 + y^4 - 1) \qquad \left((x, y) \in \mathbb{R}^2\right),$$

ezért a feltételes lokális szélsőértékre vonatkozó elsőrendű szükséges feltétel olyan $(\widetilde{x}, \widetilde{y}) \in \mathbb{R}^2$ pontban teljesül, amelyre

$$\operatorname{rang}\left(g'(\widetilde{x}, \widetilde{y})\right) = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 4\widetilde{x} & 4\widetilde{y} \end{pmatrix} = 1, \qquad \text{azaz} \qquad \widetilde{x}^2 + \widetilde{y}^2 > 0,$$

és

$$\left.\begin{aligned} \partial_1 L(\widetilde{x}, \widetilde{y}) &= 1 + 4\lambda\widetilde{x}^3 = 0, \quad (I.) \\ \partial_2 L(\widetilde{x}, \widetilde{y}) &= 1 + 4\lambda\widetilde{y}^3 = 0, \quad (II.) \\ g(\widetilde{x}, \widetilde{y}) &= \widetilde{x}^4 + \widetilde{y}^4 - 1 = 0. \quad (III.) \end{aligned}\right\}$$

Az $(I.) - (III.)$ egyenlet-rendszer megoldása: az $(I.) - (II.)$ egyenletek különbsége:

$$0 = 4\lambda\left(\widetilde{x}^3 - \widetilde{y}^3\right) = 4\lambda\left(\widetilde{x} - \widetilde{y}\right)\left(\widetilde{x}^2 + \widetilde{x}\widetilde{y} + \widetilde{y}^2\right) = 4\lambda\left(\widetilde{x} - \widetilde{y}\right)\left[\left(\widetilde{x} + \frac{\widetilde{y}}{2}\right)^2 + \frac{3\widetilde{y}^2}{4}\right],$$

amiből $\widetilde{x} = \widetilde{y}$ adódik. Ezt $(III.)$-ba helyettesítve két stacionárius pontot kapunk:

$$(\widetilde{x}, \widetilde{y}) \in \left\{\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)\right\}.$$

Most megvizsgáljuk, hogy teljesül-e az $(\widetilde{x}, \widetilde{y})$-ban a feltételes lokális szélsőértékre vonatkozó másodrendű elégséges feltétel:

1. módszer:. A

$$L''(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = \begin{bmatrix} 8\lambda\widetilde{x}^2 & 0 \\ 0 & 8\lambda\widetilde{y}^2 \end{bmatrix}$$

(feltételesen is) definit, méghozzá

$$(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = \left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$$

esetén negatív definit, hiszen ekkor $\lambda < 0$ (lásd: $(I.) - (II.)$), ill.

$$(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = \left(-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$$

esetén pozitív definit, hiszen ekkor $\lambda > 0$ (lásd: $(I.) - (II.)$). Így tehát az

$$\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right), \qquad \text{ill.} \qquad \left(-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$$

pontokban f-nek a $g = 0$ feltételre vonatkozóan feltételes lokális maximuma, ill. minimuma van.

2. módszer:. Az

$$\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ g(x,y) = 0\}$$

halmaz kompakt (korlátos és zárt). Lévén, hogy f folytonos, $f|_\Omega$ szélsőértékeinek létezése a Weierstraß-tétel alapján biztosított. Mivel

$$f\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right) = \frac{2}{\sqrt[4]{2}} \qquad \text{és} \qquad f\left(-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right) = -\frac{2}{\sqrt[4]{2}},$$

ezért az

$$\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right), \qquad \text{ill. a} \qquad \left(-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$$

pontokban az f függvénynek a $g = 0$ feltételre vonatkozóan feltételes maximuma, ill. minimuma van. ■

6.0.8. feladat. Számítsuk ki az

$$f(x,y,z) := x^2 - 2x + 2y^2 + z^2 + z \qquad ((x,y,z) \in \mathbb{R}^3)$$

függvény feltételes szélsőértékeit az $x + y + z = 1$, $2x - y - z = 5$ feltételekre nézve!

Útm. Ha tetszőleges $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ esetén

$$\left.\begin{array}{l} g(x,y,z) := (x+y+z-1{,}2x-y-z-5) \\ L(x,y,z) := x^2 - 2x + 2y^2 + z^2 + z + \lambda(x+y+z-1) + \mu(2x-y-z-5) \end{array}\right\},$$

akkor a feltételes lokális szélsőértékre vonatkozó elsőrendű szükséges feltétel olyan $(x^*, y^*, z^*) \in \mathbb{R}^3$ pontban teljesül, amelyre

$$\operatorname{rang}\left[g'(x^*, y^*, z^*)\right] = \operatorname{rang}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} = 2$$

és

$$\left.\begin{array}{ll} \partial_1 L(x^*x, y^*, z^*) = 2x^* - 2 + \lambda + 2\mu = 0 & (I.) \\ \partial_2 L(x^*, y^*, z^*) = 4y^* + \lambda - \mu = 0 & (II.) \\ \partial_3 L(x^*, y^*, z^*) = 2z^* + 2 + \lambda - \mu = 0 & (III.) \\ g_1(x^*, y^*, z^*) = x^* + y^* + z^* - 1 = 0 & (IV.) \\ g_2(x^*, y^*, z^*) = 2x^* - y^* - z^* - 5 = 0. & (V.) \end{array}\right\}.$$

Ekkor

$$\operatorname{rang}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \operatorname{rang}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \end{bmatrix} = 2,$$

tehát a rangfeltétel tetszőleges $(x^*, y^*, z^*) \in \mathbb{R}^3$ pontban teljesül. Az $(I.) - (V.)$ lineáris egyenletrendszer megoldása:

$$(x^*, y^*, z^*, \lambda, \mu) = \left(2{,}0, -1, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right),$$

ui. $(IV.)$ és $(V.)$ összege $3x^* - 6 = 0$, azaz $x^* = 2$. Ezt $(IV.)$-ben figyelembe véve $z^* = -1 - y^*$ adódik, amit $(III.)$-ba helyettesítve $-2y^* + \lambda + \mu = 0$ adódik. Ha ezt kivonjuk $(II.)$-ből, akkor azt kapjuk, hogy $6y^* = 0$, azaz $y^* = 0$. Ezért $(IV.)$-ből az következik, hogy $z^* = -1$. $y^* = 0$ miatt $(II.)$-ben $\lambda = \mu$, amit $(I.)$-ben figyelembe véve: $\lambda = \mu = -\frac{3}{2}$.

Most megvizsgáljuk, hogy teljesül-e az $(x^*, y^*, z^*) = (2{,}0, -1)$-ben a feltételes lokális szélsőértékre vonatkozó másodrendű elégséges feltétel: Mivel a

$$L''(x^*, y^*, z^*) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrix (feltételesen is) pozitív definit, ezért ebben az (x^*, y^*, z^*)-ban f-nek a $g = 0$ feltételre vonatkozóan feltételes lokális minimuma van és

$$f(x^*, y^*, z^*) = 4 - 4 + 0 + 1 - 1 = 0. \quad \blacksquare$$

6.0.9. feladat. Legyen $d \in \mathbb{N}$, $M = [m_{ij}]_{i,j=1}^d \in \mathbb{R}^{d\times d}$ szimmetrikus mátrix, majd határozzuk meg a

$$Q(\mathbf{r}) := \langle M\mathbf{r}, \mathbf{r}\rangle = \sum_{i,j=1}^d m_{ij}x_ix_j \qquad \left(\mathbf{r} = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d : \ \|\mathbf{r}\| = 1\right)$$

függvény (vö. 1.4.1. definíció) lokális szélsőlrékhelyeeit!

Útm. Legyen

$$g(\mathbf{r}) := \|\mathbf{r}\| - 1 \qquad (\mathbf{r} \in \mathbb{R}^d).$$

Ekkor valamely $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

$$L(\mathbf{r}) := Q(\mathbf{r}) + \lambda g(\mathbf{r}) = \langle M\mathbf{r}, \mathbf{r}\rangle + \lambda(\|\mathbf{r}\| - 1) \qquad (\mathbf{r} \in \mathbb{R}^d)$$

ezért a feltételes lokális szélsőértékre vonatkozó elsőrendű szükséges feltétel olyan $\widetilde{\mathbf{r}} \in \mathbb{R}^d$ pontban teljesül, amelyre

$$\operatorname{rang}\,[g'(\widetilde{\mathbf{r}})] = \operatorname{rang}\,[2\widetilde{\mathbf{r}}] = 1, \qquad \text{azaz} \qquad \widetilde{\mathbf{r}} \in \mathbb{R}^d \backslash \{\mathbf{0}\},$$

és

$$L'(\widetilde{\mathbf{r}}) = \mathbf{0}, \qquad \text{ill.} \qquad g(\widetilde{\mathbf{r}}) = 0$$

teljesül. Mivel

$$L'(\mathbf{r}) \equiv Q'(\mathbf{r}) + g'(\mathbf{r})$$

és bármely $k \in \{1, \ldots, d\}$ esetén

$$\begin{aligned} \partial_k Q(\mathbf{r}) &= \partial_k \left(\sum_{i,j=1}^d m_{ij}x_ix_j\right) = \sum_{i,j=1}^d \partial_k(m_{ij}x_ix_j) = \sum_{i,j=1}^d m_{ij}(\partial_k x_i)x_j + \sum_{i,j=1}^d m_{ij}x_i(\partial_k x_j) = \\ &= \sum_{j=1}^d m_{kj}x_j + \sum_{i=1}^d m_{ik}x_i = 2\sum_{i=1}^d m_{ki}x_i, \end{aligned}$$

hiszen $M^T = M$, ezért
$$Q'(\mathbf{r}) \equiv 2M\mathbf{r}.$$
Mivel az
$$\Omega := \left\{\mathbf{r} = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d : \ \|\mathbf{r}\| = 1\right\}$$
halmaz kompakt (korlátos és zárt), L folytonos, ezért $L|_\Omega$ szélsőértékeinek létezése a Weiertraß-tétel alapján biztosított. Így alkalmas $\widetilde{\mathbf{r}} \in \Omega$ esetén
$$2M\widetilde{\mathbf{r}} + \lambda 2\widetilde{\mathbf{r}} = L'(\widetilde{\mathbf{r}}) = \mathbf{0},$$
ahonnan a $\mu := -\lambda$ jelöléssel
$$M\widetilde{\mathbf{r}} = \mu\widetilde{\mathbf{r}}$$
következik. Ez azt jelenti, hogy $\widetilde{\mathbf{r}}$ sajátvektora M-nek. Mivel
$$Q(\widetilde{\mathbf{r}}) = \langle M\widetilde{\mathbf{r}}, \widetilde{\mathbf{r}}\rangle = \langle \mu\widetilde{\mathbf{r}}, \widetilde{\mathbf{r}}\rangle = \mu,$$
ezért Q maximumát, ill. minimumát az M mátrix olyan sajátvektorain veszi fel, amelyek M legnagyobb, ill. legkisebb sajátértékeihez tartoznak.

Megjegyzés. Ez azt jelenti, hogy minden valós elemű szimmetrikus mátrixnak van valós sajátértéke. ■

6.0.10. feladat. Az
$$x^2 + y^2 + z^2 = 9$$
gömbfelület mely pontjai vannak a legnagyobb (legkisebb) távolságra az

- $(4{,}4{,}2)$;
- $(1{,}2{,}2)$;
- $(-2{,}1{,}0)$;

ponttól?

Útm. Legyen $P(x, y, z)$ a gömbfelület egy pontja. Ekkor P-nek P_0-tól való távolságnégyzete:

- $d^2 = \overrightarrow{P_0P}^2 = (x-4)^2 + (y-4)^2 + (z-2)^2 =: f(x, y, z)\ ((x, y, z) \in \mathbb{R}^2)$;
- $d^2 = \overrightarrow{P_0P}^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 =: f(x, y, z)\ ((x, y, z) \in \mathbb{R}^2)$;
- $d^2 = \overrightarrow{P_0P}^2 = (x+2)^2 + (y-1)^2 + z^2 =: f(x, y, z)\ ((x, y, z) \in \mathbb{R}^2)$.

A feltételi halmaz a gömb felülete:
$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 = 9\right\},$$

- $L(x, y, z) = (x-4)^2 + (y-4)^2 + (z-2)^2 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 9)\ ((x, y, z) \in \mathbb{R}^2)$;
- $L(x, y, z) = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 9)\ ((x, y, z) \in \mathbb{R}^2)$;
- $L(x, y, z) = (x+2)^2 + (y-1)^2 + z^2 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 9)\ ((x, y, z) \in \mathbb{R}^2)$.

Az elsőrendű szükséges feltétel szerint

- $$\begin{array}{lclcl} \partial_1 L(x,y,z) & = & 2(x-4)+2\lambda x & = & 0 \\ \partial_2 L(x,y,z) & = & 2(y-4)+2\lambda y & = & 0 \\ \partial_3 L(x,y,z) & = & 2(z-2)+2\lambda z & = & 0 \\ g(x,y,z) & = & x^2+y^2+z^2-9 & = & 0\,; \end{array}$$
- $$\begin{array}{lclcl} \partial_1 L(x,y,z) & = & 2(x-1)+2\lambda x & = & 0 \\ \partial_2 L(x,y,z) & = & 2(y-2)+2\lambda y & = & 0 \\ \partial_3 L(x,y,z) & = & 2(z-2)+2\lambda z & = & 0 \\ g(x,y,z) & = & x^2+y^2+z^2-9 & = & 0\,; \end{array}$$
- $$\begin{array}{lclcl} \partial_1 L(x,y,z) & = & 2(x+2)+2\lambda x & = & 0 \\ \partial_2 L(x,y,z) & = & 2(y-1)+2\lambda y & = & 0 \\ \partial_3 L(x,y,z) & = & 2z+2\lambda z & = & 0 \\ g(x,y,z) & = & x^2+y^2+z^2-9 & = & 0\,. \end{array}$$

Ezeknek az egyenletrendszereknek a megoldása (**HF**):

- $(x^*,y^*,z^*) \in \left\{\left(1,1,\frac{1}{2}\right);\left(-1,-1,-\frac{1}{2}\right)\right\}$ $(\lambda \in \{3;-5\})$;
- $(x^*,y^*,z^*) \in \left\{\left(\frac{-1}{3},\frac{-2}{3},\frac{-2}{3}\right);(1,2,2)\right\}$ $(\lambda \in \{-2;0\})$;
- $(x^*,y^*,z^*) \in \left\{\left(\frac{6\sqrt{5}}{5},\frac{-3\sqrt{5}}{5},0\right);\left(\frac{-6\sqrt{5}}{5},\frac{3\sqrt{5}}{5}\right)\right\}$ $(\lambda \in \{\frac{-\sqrt{5}}{3}-1,\frac{\sqrt{5}}{3}-1\})$;

$$\operatorname{rang}\left(g'(x^*,y^*,z^*)\right) = (2x^*,2y^*,2z^*) = 1,$$

továbbá

$$L''\left(x^*,y^*,z^*\right) = \begin{bmatrix} 2+2\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2+2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2+2\lambda \end{bmatrix}$$

(minden esetben), így

- $L''\left(x^*,y^*,z^*\right)$ (feltételesen is) pozitív definit, ha $\lambda = 3$, ill. negatív definit, ha $\lambda = -5$;
- $L''\left(x^*,y^*,z^*\right)$ (feltételesen is) pozitív definit, ha $\lambda = 0$, ill. negatív definit, ha $\lambda = -2$;
- $L''\left(x^*,y^*,z^*\right)$ (feltételesen is) pozitív definit, ha $\lambda = \frac{\sqrt{5}}{3} - 1$, ill. negatív definit, ha $\lambda = \frac{\sqrt{-5}}{3} - 1$.

Mivel a gömbfelület kompakt halmaz, f folytonos, szélsőértékeinek létezése a Weierstraß-tétel alapján biztosított. A szükséges felteél csak két lehetséges szélsőértékhelyet szolgáltat, így ezek közül az egyikben lesz f minimális, a másikban pedig maximális a $g = 0$ feltételre vonatkozóan.
■

2017.12.29.

7. fejezet

Differenciálegyenletek

7.1. Bevezetés

A differenciálegyenletek a természet, a társadalom- és a műszaki tudományok különféle területein fordulnak elő – általában mindenütt, ahol folytonos változások (fejlődési folyamatok) leírására matematikai modelleket alkalmaznak. A modellezendő jelenségek jellegétől függően használnak közönséges, parciális, retardált, funkcionális stb. differenciálegyenleteket.

Egy jelenség közönséges differenciálegyenletekkel modellezhető, ha

– **determinisztikus**: a múlt és a jövő egyértelműen meghatározható a jelen állapotból; ilyen például a klasszikus mechanika. Nem determinisztikus a kvantummechanika, ill. félig determinisztikus a hővezetés folyamata: a jövőt meghatározza a jelen, de a múltat nem.

– **véges dimenziós**: a rendszer állapotának leírásához szükséges adatok száma véges; ilyen például a szilárd testek (véges számú anyagi pontból álló rendszerek) mechanikája. Nem lehet véges számú adattal leírni pl. a hidrodinamikában a folyadékmozgást, a húr és a membrán rezgését vagy a fénytanban, ill. a hangtanban tanulmányozott hullámterjedést.

– **differenciálható**: a változást leíró függvények simák; ilyenek például a klasszikus mechanikai rendszer helyét és sebességét leíró függvények. Nem differenciálhatók viszont az ütközések elméletében vizsgált mozgások.

Hogy néz ki egy ilyen modellalkotási folyamat?

Egy adott valós problémát (1) először matematikailag kell megfogalmazni (2) (pl. egy függvény szélsőérték-helyeit, ill. szélsőértékeit keressük, ahol a függvény bizonyos feltételeknek tesz eleget), majd fel kell állítani a vizsgált folyamat differenciálegyenletét (3).

A differenciálegyenletek elmélete biztosítja a $(3) \to (4)$ átmenetet, azaz a felállított differenciálegyenletet integráljuk, és meghatározzuk az általános megoldását, ill. az adott kezdeti feltételek alapján meghatározzuk a feladatnak megfelelő partikuláris megoldást. A matematikai feladat megoldásával (5) (pl. a fentebb kapott függvénynek meghatározzuk szélsőértékhelyeit, ill. szélsőértékeit) jutunk az eredeti feladat (6) megoldásához: megadjuk a vizsgált folyamat általános törvényét, majd a keresett mennyiségeket számszerűen jellemezzük. Végül a kapott eredmény diszkussziója és a feladat kiindulási helyzetének ellenőrzése következik (az adott feladat jellegétől függően némely fázis kimaradhat).

	valóság	matematika	differenciálegyenletek elmélete
feladat	(1)	(2)	(3)
megoldás	(6)	(5)	(4)

7.2. Közönséges differenciálegyenletre vezető gyakorlati feladatok

7.2.1. feladat. Egy nemrég kivágott fa megfelelően előkészített darabjának a – szén-14 izotóptól származó – **aktivitás**a 15 beütés/óra volt. Egy ugyanolyan tömegű, azonos módon előkészített régi fadarabot vizsgálva a beütésszám óránként csupán 8,5 volt. A méréseket 1971-ben végezték. A második fadarab Szenofern fáraó koporsójának töredéke volt. Igazolható-e a történészeknek az a feltevése, hogy a fáraó i. e. 2700 és 2550 között halhatott meg (**radiokarbonos kormeghatározás**)?

Útm.
Legyen a megfelelő radioaktív anyag tömege a $t=0$ időpillanatban M_0, a $t>0$ időpillanatban pedig $M(t)$. Az $M \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényről pedig tegyük fel, hogy differenciálható. A megfigyelések szerint a radioaktív anyagoknak a bomlási sebessége egyenesen arányos a még el nem bomlott anyag mennyiségével. A $[t, t+h]$ $(h>0)$ időintervallumban elbomlott anyag mennyisége nem más, mint $M(t)-M(t+h)$. Az ún. átlagos bomlási sebesség a $[t,t+h]$ időintervallumban így

$$\frac{M(t)-M(t+h)}{h} = -\frac{M(t+h)-M(t)}{h}.$$

Ez az átlagos bomlási sebesség annál jobban jellemzi a t pillanatbeli viszonyokat, minél kisebb h. Matematikailag tehát jól modellezi a bomlási sebességet a

$$\lim_{h\to 0}\frac{M(t)-M(t+h)}{h} = -\lim_{h\to 0}\frac{M(t+h)-M(t)}{h} = -M'(t)$$

határérték, azaz M deriváltja. Az arányossági tényezőt (amely kizárólag a bomló atomfajtára jellemző (ún. **bomlási állandó**)) $0<\alpha$-val jelölve a feladat matematikai modellje a következő:

$$\boxed{M'(t) = -\alpha M(t) \quad (t \in [0,+\infty)), \qquad M(0) = M_0.} \tag{7.2.1}$$

Melyik az a függvény, amelyiknek a deriváltja arányos önmagával?
Beszorozva $e^{\alpha t}$-vel, majd átrendezve azt kapjuk, hogy

$$\underbrace{M'(t)e^{\alpha t} + \alpha M(t)e^{\alpha t}}_{\frac{d}{dt}(M(t)e^{\alpha t})} = 0 \qquad (t \in [0, +\infty)),$$

így mindkét oldalt integrálva $\int_0^t ds$ a radiokatív anyag mennyiségének időtől való függése a következőképpen jellemezhető:

$$M(t)e^{\alpha t} - M(0) = 0, \quad \text{azaz} \quad M(t) = M_0 \exp(-\alpha t) \qquad (t \in [0, +\infty)).$$

Legyen T az az idő, amely alatt a szén-14 fele elbomlik (**felezési idő**), ekkor

$$\frac{M_0}{2} = M_0 \exp(-\alpha T),$$

azaz $T = \frac{\ln(2)}{\alpha}$. A felezési idő sok esetben a sugárzás intenzitásának időbeli csökkenéséből vagy a bizonyos idő alatt elbomló atomok közvetlen megszámlálásából határozható meg; a szén-14 esetében ez 5760 év. Ezért, ha $M_0 = 15$ és $M(t) = 8{,}5$, akkor a fáraó i. e. 2750 körül halhatott meg. ■

7.2.2. feladat. Egy m (> 0) tömegű rakétát v_0 (> 0) kezdősebességgel függőlegesen fellövünk. Tegyük fel, hogy a mozgás során a rakétára mindössze két erő hat: a **nehézségi erő** (jelöljük g-vel a **nehézségi gyorsulást**) és a pillanatnyi sebesség négyzetével arányos **súrlódási erő** (az ezzel kapcsolatos arányossági tényező legyen α (> 0))! Mennyi ideig emelkedik a rakéta?

Útm.
Ha $v \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jelenti a **sebesség-idő-függvény**t, akkor – feltételezve, hogy $v \in \mathfrak{D}$, valamely $T > 0$ esetén $\mathcal{D}_v = [0, T]$, – a feladat matematikai modellje a következő (ld. a fizika **Newton-féle mozgástörvény**eit): adott $m, g, \alpha, v_0 > 0$ számok mellett olyan deriválható v függvényt keresünk, amelyre

$$\boxed{\begin{aligned} mv' &= -mg - \alpha v^2, \\ v(0) &= v_0, \end{aligned}} \tag{7.2.2}$$

továbbá $v(T) = 0$. (7.2.2)-ban az első egyenlőség átrendezésével azt kapjuk, hogy

$$v' = -g\left(1 + \frac{\alpha}{mg}v^2\right) \quad \Longleftrightarrow \quad \underbrace{\frac{v'}{1 + \left(\sqrt{\frac{\alpha}{mg}} \cdot v\right)^2}}_{\left\{\sqrt{\frac{mg}{\alpha}}\,\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{\alpha}{mg}}v\right)\right\}'} = -g,$$

majd mindkét oldalt integrálva $\int_0^t ds$ a rakéta sebességének időtől való függése a következőképpen jellemezhető:

$$\kappa\,\mathrm{arctg}\left(\frac{v(t)}{\kappa}\right) - \kappa\,\mathrm{arctg}\left(\frac{v(0)}{\kappa}\right) = -gt,$$

azaz

$$v(t) = \kappa\,\mathrm{tg}\left(\mathrm{arctg}\left(\frac{v_0}{\kappa}\right) - \frac{gt}{\kappa}\right) \qquad (t \in \mathcal{D}_v),$$

ahol

$$\kappa := \sqrt{\frac{mg}{\alpha}}.$$

Ha T ideig emelkedik a rakéta, akkor $v(T) = 0$, azaz

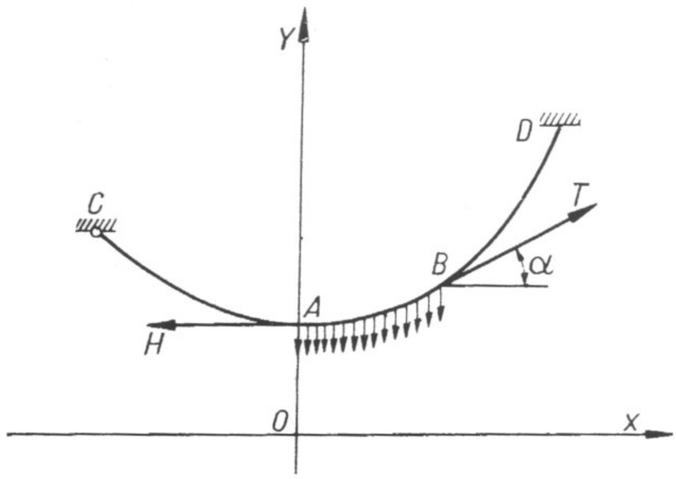
$$T = \frac{\kappa}{g}\operatorname{arctg}\left(\frac{v_0}{\kappa}\right) = \sqrt{\frac{m}{\alpha g}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{\alpha}{mg}}v_0\right). \quad \blacksquare$$

7.2.3. feladat. Határozzuk meg, milyen alakot vesz fel saját súlyának hatására a C és D végein felfüggesztett hajlékony, súlyos fonal!

Útm. Vegyük fel a koordináta-rendszert a fonal síkjában úgy, hogy a nehézségi erő iránya a második tengellyel párhuzamosan negatív irányba mutasson. Jelölje m a fonál egységnyi hosszúságára eső tömegét, és paraméterezzük a fonalat az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f \in \mathfrak{D}^2$ függvénnyel:

$$C = (a, f(a)), \qquad A = (0, f(0)), \qquad B = (x, f(x)), \qquad D = (b, f(b))$$

(vö. 7.2.1. ábra). A fonal AB darabjára a következő erők hatnak: az A pontban a vízszintes H nagyságú húzóerő, a B pontban az érintőirányú, T nagyságú húzóerő, és a fonal AB darabjának súlya, amely arányos az AB fonaldarab hosszával. Az AB fonaldarab tényleges súlya mgs, ahol s az AB ív hossza.



7.2.1. ábra. Két végpontján felfüggesztett (kötél) lánc alakja.

Az AB fonaldarab egyensúlyának feltétele az, hogy a függőlegesen, ill. a vízszintesen ható erők összege zérus legyen:

$$H = T\cos(\alpha) \quad \text{és} \quad mgs = T\sin(\alpha), \qquad \text{azaz} \quad \frac{mgs}{H} = \operatorname{tg}(\alpha) \tag{7.2.3}$$

teljesüljön.

Mivel

$$f'(x) = \mathrm{tg}\,(\alpha) = \frac{mgs(x)}{H} =: \kappa s(x) \qquad (x \in [0,b]),$$

és

$$s(x) = \int_0^x \sqrt{1+[f'(t)]^2}\,\mathrm{d}t, \quad \text{azaz} \quad s'(x) = \sqrt{1+[f'(x)]^2} \qquad (x \in [0,b]),$$

ezért

$$f''(x) = \kappa\sqrt{1+[f'(x)]^2} \qquad (x \in [0,b]).$$

Tudjuk, hogy

$$\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}\,, \qquad \mathrm{ch}' = \mathrm{sh}\,, \qquad \mathrm{ch}^2 - \mathrm{sh}^2 = 1,$$

így

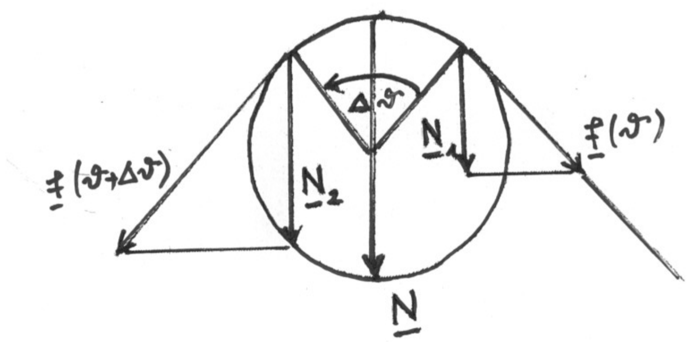
$$s(x) \equiv \mathrm{sh}\,(\kappa x + c)\,, \qquad f(x) \equiv \frac{1}{\kappa}\mathrm{ch}\,(\kappa x + c) + d \qquad /c, d \in \mathbb{R}/.$$

Mivel $x = 0$ esetén $f'(0) = s(0) = 0$, továbbá, ha $\|\overrightarrow{OA}\| = \dfrac{1}{\kappa}$, akkor $c = 0 = d$, ezért

$$f(x) \equiv \frac{1}{\kappa}\mathrm{ch}\,(\kappa x)\,. \quad \blacksquare$$

7.2.4. feladat. Miért érdemes kikötéskor a hajókötelet henger alakú oszlopra („gombára”) tekerni? Hány hurkot készítsünk? Számítsuk ki, hogy mekkora erővel kell tartani a kötél végét a rácsavart kötél hosszának függvényében, ha μ a súrlódási együttható a kötél és a gomba között, és f_0 erővel feszíti a hajó a kötél másik végét!

Útm. Mérjük a felcsavart kötél hosszát a hajóhoz kapcsolódó kötélrésznek a hengeren lévő érintkezési pontjától számított forgásszöggel. Jelölje $f(\vartheta)$ a ϑ szöggel jellemzett pontban a kötélben ébredő tartóerő nagyságát (vö. 7.2.2. ábra). A kötélnek a ϑ és $\Delta\vartheta$ közé eső része



7.2.2. ábra.

nyugalomban van, ugyanis a rá ható erők eredője nulla. Hat rá a két végén a kötélben ébredő erő, a súrlódási erő és a felület tartóereje. A ϑ és $\Delta\vartheta$ pontban ható erők eredőjének sugárirányú komponense adja meg közelítőleg[1] a felületre ható N nyomóerőt:

$$N \approx f(\vartheta)\sin\left(\frac{\Delta\vartheta}{2}\right) + f(\vartheta+\Delta\vartheta)\sin\left(\frac{\Delta\vartheta}{2}\right).$$

Mivel az F_s súrlódási erőre

$$-f(\vartheta+\Delta\vartheta) + f(\vartheta) = F_s = \mu N,$$

ezért

$$\frac{f(\vartheta+\Delta\vartheta) - f(\vartheta)}{\Delta\vartheta} \approx -\mu\frac{f(\vartheta+\Delta\vartheta) + f(\vartheta)}{2}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\Delta\vartheta}{2}\right)}{\frac{\Delta\vartheta}{2}}$$

A $\Delta\vartheta \to 0$ határátmenet elvégzése után – feltéve, hogy f deriválható –, azt kapjuk, hogy

$$f' = -\mu f, \qquad f(0) = f_0.$$

Ez ugyanolyan alakú, mint a (7.2.1) összefüggés, így

$$f(\vartheta) = f_0 e^{-\mu\vartheta} \qquad (\vartheta \in [0, +\infty)).$$

Látható, hogy sok hurok rátekerésével „exponenciálisan könnyebb” megtartani a hajót.[2] ■

7.2.5. feladat. András és Béla kávét és tejszínt rendelnek egy eszpresszóban. András azonnal beleönti a tejszínt a forró kávéba, összekeveri, lefedi egy szalvétával, és 10 percre elmegy telefonálni. Béla lefedi szalvétával a csészéjét, és várja Andrást, majd amikor az visszajön, akkor önti bele a kávéjába a tejszínt. Ki ivott melegebb kávét, András vagy Béla? (Feltesszük, hogy a szalvéta és az asztallap tökéletes hőszigetelő, továbbá a levegő és a tejszín hőmérséklete megegyezik.)

Útm.

1. lépés. Oldjuk meg először a következő részfeladatot! A csészébe adott hőmérsékletű folyadékot töltünk (ez lehet kávé vagy kávé és tejszín keveréke), és lefedjük. Mennyi a hőmérséklete 10 perc múlva? Ha

$T(t)$: a folyadék hőmérséklete a t időpontban,

$Q(t)$: a folyadékban lévő hőmennyiség a t időpontban,

η : hőátadási együttható,

T_l : levegő hőmérséklete (állandó),

m : a folyadék tömege,

c : fajhő (a folyadék hőtárolási képességének mértéke),

[1] Feltéve, hogy $\Delta\vartheta$ elég kicsi, radiánban mérve: $\Delta\vartheta \ll 1$.
[2] Vö: gombvarrás technikája.

akkor (vö. hőtani törvények)

$$\Delta Q = Q(t + \Delta t) - Q(t) \approx -\eta\{T(t) - T_l\}\Delta t, \tag{7.2.4}$$

amennyiben Δt elég kicsi, azaz (a különböző hőmérsékletű anyagok érintkezésénél) az átadott hőmennyiség arányos a hőmérséklet-különbséggel és az eltelt idővel, továbbá

$$\Delta Q = Q(t + \Delta t) - Q(t) = cm\{T(t + \Delta t) - T(t)\} = cm\Delta T, \tag{7.2.5}$$

azaz valamely test által leadott hőmennyiség arányos a hőmérséklet-csökkenéssel és a tömeggel. Így az

$$x(t) := T(t) - T_l$$

jelölés bevezetésével a (7.2.4) és (7.2.5) összefüggések összehasonlításából

$$-\eta x(t)\Delta t \approx cm\Delta x$$

adódik. Mivel

$$\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t) = T(t + \Delta t) - T(t) = \Delta T,$$

ezért Δt-vel való osztás, ill. a $\Delta t \to 0$ határátmenet elvégzése után – feltéve, hogy x deriválható függvény –, azt kapjuk, hogy

$$-\eta x(t) = cm \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = cm \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = cmx'(t).$$

Tehát

$$x'(t) = -\frac{\eta}{cm} x(t) =: -\alpha x(t) \quad (t \in [0, +\infty)), \qquad x(0) = T(0) - T_l.$$

Ez ugyanolyan alakú, mint a (7.2.1) összefüggés, így

$$T(t) = T_l + \{T(0) - T_l\} \exp\left(-\frac{\eta}{cm} t\right) \qquad (t \in [0, +\infty)). \tag{7.2.6}$$

2. lépés. Ha összekeverjük az m_k tömegű, $T_k(0)$ hőmérsékletű, ill. c_k fajhőjű kávét az m_τ tömegű, T_l mőmérsékletű, ill.c_τ fajhőjű tejszínnel, akkor elmondható, hogy

$$c_k m_k (T_k - T_\kappa) = c_\tau m_\tau (T_\kappa - T_\tau).$$

Így, ha $T_A(t)$ András keverékének hőmérséklete a t időpontban, akkor

$$c_k m_k (T_k(0) - T_A(0)) = c_\tau m_\tau (T_A(0) - T_\tau),$$

azaz

$$T_A(0) = \frac{c_k m_k T_k(0) + c_\tau m_\tau T_l}{c_k m_k + c_\tau m_\tau}. \tag{7.2.7}$$

A (7.2.6) összefüggés alapján így

$$T_A(10) = T_l + \{T_A(0) - T_l\} \exp\left(-10 \frac{\eta}{c_k m_k + c_\tau m_\tau}\right)$$

adódik. Amikor Béla összekeveri a kávét a tejszínnel, akkor a kávé

$$T_k(10) = T_l + (T_k(0) - T_l)\exp\left(-10\frac{\eta}{c_k m_k}\right),$$

hőmérsékletű. Ha T_B jelöli a keverék hőmérsékletét, akkor

$$c_k m_k\left(T_k(10) - T_B\right) = c_\tau m_\tau\left(T_B - T_l\right),$$

azaz

$$T_B = \frac{c_k m_k T_k(10) + c_\tau m_\tau T_l}{c_k m_k + c_\tau m_\tau}. \tag{7.2.8}$$

A (7.2.7)-(7.2.8) összefüggések összevetéséből azt kapjuk, hogy

$$T_B = T_l + \{T_A(0) - T_l\}\exp\left(-10\frac{\eta}{c_k m_k}\right).$$

Így a korábbiakat összevetve:

$$T_A(10) = \frac{c_k m_k T_l + c_\tau m_\tau T_l}{c_k m_k + c_\tau m_\tau} + \frac{c_k m_k\{T_k(0) - T_l\}}{c_k m_k + c_\tau m_\tau}\exp\left(-10\frac{\eta}{c_k m_k + c_\tau m_\tau}\right),$$

$$T_B = \frac{c_k m_k T_l + c_\tau m_\tau T_l}{c_k m_k + c_\tau m_\tau} + \frac{c_k m_k\{T_k(0) - T_l\}}{c_k m_k + c_\tau m_\tau}\exp\left(-10\frac{\eta}{c_k m_k}\right).$$

Tehát $T_A(10) > T_B$. ■

7.2.6. feladat. Egy hengeres tartály (boroshordó), melynek belső sugara $r > 0$, $h > 0$ magasságig folyadékkal (vörösborral) van töltve. A tartály fenekén ρ sugarú kör alakú nyílás van ($\rho/r \ll 1$). Mennyi idő alatt folyik ki a drága nedű a tartályból?

Útm. A nyíláson viszonylag kis Δt idő alatt

$$\rho^2 \pi v \Delta t$$

mennyiségű nedű folyik ki, ahol $v(z)$ jelöli a kiömlő folyadék sebességét, a folyadékoszlop z magasságának függvényében. Ez idő alatt a folyadékszint Δz magassággal csökken, ezért

$$\rho^2 \pi v \Delta t = -r^2 \pi \Delta z, \qquad \text{azaz} \qquad \frac{\Delta z}{\Delta t} = -\frac{\rho^2}{r^2} v,$$

ahol a negatív előjelet az magyarázza, hogy a folyadékoszlop magasságának csökkenése az idő előrehaladtával történik. A második egyenlőségben lévő bal oldali tört annál jobban jellemzi a t pillanatbeli viszonyokat, minél kisebb Δt. Matematikailag tehát jól modellezi a tartályban a folyadékszint csökkenését a z' deriválT. Így a feladat matematikai modellje a következő:

$$z' = -\frac{\rho^2}{r^2} v(z).$$

Mivel ($\rho/r \ll 1$), ezért a kiömlő nedű sebességére vonatkozó **Toricelli-törvény** felhasználásával

$$v(z) = c\sqrt{2gz},$$

ahol a $c > 0$ a nyílás alakjától függő állandó. Így olyan deriválható $z : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ függvényt keresünk, amelyre

$$z' = -\frac{\rho^2}{r^2} c\sqrt{2gz}, \qquad z(0) = h.$$

Mivel $h > 0$, ezért $z(t) \not\equiv 0$, így

$$(2\sqrt{z})' = \frac{z'}{\sqrt{z}} = \frac{\rho^2}{r^2} c\sqrt{2g},$$

ahonnan $z(0) = h$ figyelembevételével

$$z(t) = \frac{1}{4}\left(2\sqrt{h} - \frac{\rho^2}{r^2} c\sqrt{2gt}\right)^2$$

következik. Látható, hogy z szigorúan monoton csökken és

$$\lim_{t \to T} z(t) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad T = r^2\sqrt{2h}/c\rho^2\sqrt{g}.$$

Így a keresett függvény

$$z(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}\left(2\sqrt{h} - \frac{\rho^2}{r^2} c\sqrt{2gt}\right)^2 & (t \in [0, T)), \\ \\ 0 & (t \in [T, +\infty)). \end{cases}$$

Látható az is, hogy a tartály a

$$T = \frac{r^2}{c\rho^2}\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

időpontban ürül ki. ■

A biológusok körében igen nagy ismeretségnek örvend az ún. **ragadozó-zsákmány-modell**. Ezt a modellt egy amerikai biofizikus, A. J. Lotka és egy olasz matematikus, V. Volterra állította fel (1922 körül). Tegyük fel, hogy, két faj él egy területen, egy zsákmány-populáció, melynek méretét (egyedszám, egyedsűrűség, ill. biomassza) jelölje $Z(t)$ és egy ragadozópopuláció, melynek mérete $R(t)$. A zsákmány-populáció számára korlátlan élelem áll rendelkezésre úgy, hogy ha a ragadozó nincs jelen, akkor az időegységre eső szaporodása arányos a meglévő egyedek számával:

$$\dot{Z}(t) \equiv \alpha \cdot Z(t),$$

ahol $\alpha > 0$. Ragadozó jelenlétében a zsákmány-populáció csökken, azaz $\dot{Z}(t)$ kisebb lesz. Tegyük fel, hogy ez a csökkenés arányos a ragadozó- és a zsákmányállatok közötti érintkezéssel, amelyet a $Z(t) \cdot R(t)$ szorzattal írunk le:

$$\dot{Z}(t) \equiv \alpha \cdot Z(t) - \beta \cdot Z(t) \cdot R(t),$$

ahol $\beta > 0$. A ragadozó-populáció kizárólag a zsákmány-populáció egyedeivel táplálkozik úgy, hogy zsákmány távollétében (éhenhalás miatt) a halálozási ráta magasabb, mint a születési ráta. Tegyük fel, hogy ebben az esetben is az időegységre eső szaporodás arányos a meglévő egyedek számával:

$$\dot{R}(t) \equiv -\gamma R(t),$$

ahol $\gamma > 0$. Zsákmány jelenlétében a ragadozó-populáció mérete a következőképpen alakul:

$$\dot{R}(t) \equiv -\gamma R(t) + \delta \cdot Z(t) \cdot R(t),$$

ahol $\delta > 0$. A ragadozó-zsákmány együttest tehát a következő kétdimenziós differenciálegyenlet-rendszer írja le:

$$\left.\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & x(\alpha - \beta y), \\ \dot{y} & = & y(\delta x - \gamma). \end{array}\right\}$$

A fenti egyenlet konstans megoldásai azt a jelenséget írják le, amikor az egyes populációk egyensúlyi állapotban vannak:

$$(Z(t), R(t)) \equiv (0,0), \qquad \text{ill.} \qquad (Z(t), R(t)) \equiv \left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right).$$

Ha az egyik populáció nincs jelen, akkor a rendszer dinamikája a következőképpen alakul:

$$(Z(t), R(t)) \equiv (e^{\alpha t},0), \qquad \text{ill.} \qquad (Z(t), R(t)) \equiv (0, e^{-\gamma t})$$

Míg a második esetben a ragadozópopuláció kihal:

$$\lim_{t \to +\infty} e^{-\gamma t} = 0,$$

addig az első esetben a zsákmánypopuláció minden határon túl növekszik:

$$\lim_{t \to +\infty} e^{\alpha t} = +\infty,$$

így ez a modell nem valósághű. Ezen pl. úgy lehet segíteni, hogy beépítünk egy olyan tagot, amely a korlátlan növekedésnek határt szab:

$$\left.\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & x(\alpha - \beta y - \varepsilon x), \\ \dot{y} & = & y(\delta x - \gamma - \kappa y). \end{array}\right\}$$

Ezt az egyenlet(rendszer)et, mint ahogy a „legtöbb” egyenletet közvetlenül nem lehet megoldani, azaz a megoldást nem lehet analitikus kifejezés formájában előállítani. Megmutatható azonban, hogy van megoldása, sőt a megoldás bizonyos geometriai tulajdonságai is ismertek.

7.3. Alapvető definíciók, jelölések

Mi a közös az eddigi feladatokban? Mindegyikben egy olyan „egyenletet” kellett megoldani, amelyben az „ismeretlen” egy differenciálható egyváltozós függvény; a szóbanforgó egyenletben a keresett függvény deriváltja (is) szerepel.
Adott

$$m, n \in \mathbb{N}, \qquad \text{ill.} \qquad \mathbf{F} \in \mathbb{R}^{1+(n+1)m} \to \mathbb{R}^m$$

esetén az alábbi feladatot tűzzük ki:

HATÁROZZUNK MEG OLYAN $\varphi \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ FÜGGVÉNYT, AMELYRE

$$i) \;\; \mathcal{D}_{\varphi} =: I \subset \mathbb{R} : \text{intervallum}, \quad \varphi \in \mathfrak{D}^n,$$

$$ii) \;\; (x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)) \in \mathcal{D}_F \quad (x \in I),$$

$$iii) \;\; \mathbf{F}\left(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)\right) = \mathbf{0} \quad (x \in I)$$

TELJESÜL!

7.3.1. definíció. A fenti feladatot **közönséges n-edrendű differenciálegyenlet**nek (esetenként röviden **differenciálegyenlet**nek (d.e.)) nevezzük, és az

$$\mathbf{F} \circ \left(\mathrm{id}\,, \mathbf{y}, \mathbf{y}', \ldots, \mathbf{y}^{(n)}\right) = \mathbf{0}$$
$$/\mathbf{F}\left(x, \mathbf{y}(x), \mathbf{y}'(x), \ldots, \mathbf{y}^{(n)}(x)\right) = \mathbf{0} \quad (x \in \mathcal{D}_{\mathbf{y}})/ \tag{7.3.1}$$

szimbólummal jelöljük, ahol id az ún. **identitásfüggvény**t jelöli:

$$\mathrm{id}\, : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \mathrm{id}\,(x) := x.$$

Magát a φ függvényt a d.e. **megoldás**ának nevezzük.

A fenti definícióval kapcsolatban az alábbi megjegyzéseket tesszük.

1. Ha valamilyen okból kifolyólag az I intervallumot hangsúlyozni akarjuk, akkor szokásos a következő szóhasználat: „φ a (7.3.1) megoldása az I intervallumon”.

2. Ha $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^{1+nm} \to \mathbb{R}^m$ olyan, hogy $\mathcal{D}_{\mathbf{F}} = \mathcal{D}_{\mathbf{f}} \times \mathbb{R}^m$ és

$$\mathbf{F} \circ \left(\mathrm{id}\,, \mathbf{y}, \mathbf{y}', \ldots, \mathbf{y}^{(n)}\right) = \mathbf{y}^{(n)} - \mathbf{f} \circ \left(\mathrm{id}\,, \mathbf{y}, \mathbf{y}', \ldots, \mathbf{y}^{(n-1)}\right)$$

$$/\mathbf{F}\left(x, \mathbf{y}(x), \mathbf{y}'(x), \ldots, \mathbf{y}^{(n)}(x)\right) = \mathbf{y}^{(n)}(x) - \mathbf{f}\left(x, \mathbf{y}(x), \mathbf{y}'(x), \ldots, \mathbf{y}^{(n-1)}(x)\right) \;\; (x \in \mathcal{D}_{\mathbf{y}})/\,,$$

akkor a (7.3.1) – ún. **implicit alakú** – differenciálegyenlet az

$$\mathbf{y}^{(n)} = \mathbf{f} \circ \left(\mathrm{id}\,, \mathbf{y}, \mathbf{y}', \ldots, \mathbf{y}^{(n-1)}\right)$$
$$/\mathbf{y}^{(n)}(x) = \mathbf{f}\left(x, \mathbf{y}(x), \mathbf{y}'(x), \ldots, \mathbf{y}^{(n-1)}(x)\right) \quad (x \in \mathcal{D}_{\mathbf{y}})/ \tag{7.3.2}$$

ún. **explicit** alakba írható.

3. Sokszor $\mathbf{F}$, ill. $\mathbf{f}$ értelmezési tartománya nem $\mathbb{R}^{1+(n+1)m}$-nek, ill. $\mathbb{R}^{1+nm}$-nek részhalmaza, hanem csak $\mathbb{R}^{(n+1)m}$-nek, ill. $\mathbb{R}^{nm}$-nek, ilyenkor az

$$\mathbf{F} \circ \left(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \ldots, \mathbf{y}^{(n)}\right) = \mathbf{0} \quad / \mathbf{F}\left(\mathbf{y}(x), \mathbf{y}'(x), \ldots, \mathbf{y}^{(n)}(x)\right) = \mathbf{0}\ (x \in \mathcal{D}_{\mathbf{y}})/\,, \tag{7.3.3}$$

ill. az

$$\mathbf{y}^{(n)} = \mathbf{f} \circ \left(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \ldots, \mathbf{y}^{(n-1)}\right) \quad / \mathbf{y}^{(n)}(x) = \mathbf{f}\left(\mathbf{y}(x), \mathbf{y}'(x), \ldots, \mathbf{y}^{(n-1)}(x)\right)\ (x \in \mathcal{D}_{\mathbf{y}})/ \tag{7.3.4}$$

implicit, ill. **explicit** n-edrendű **autonóm** differenciálegyenletről beszélünk. $n = 1$ esetén szokásos a **dinamikai rendszer** elnevezés is.

4. (7.3.2)-ben, ill. (7.3.4)-ben az $\mathbf{f}$ függvényt a d.e. **jobb oldal**ának nevezzük. Az *autonóm* jelző tehát azt jelenti, hogy a jobb oldal explicit módon nem függ id-től.

5. Valamely differenciálegyenlet megoldásának megkeresését szokás a **differenciálegyenlet integrálásának** nevezni. Ha a differenciálegyenlet megoldásait véges sok integrál kiszámításával tudjuk előállítani, akkor azt mondjuk, hogy a differenciálegyenlet **kvadratúrával oldható meg**.

6. A definícióban a *közönséges*, ill. az *n-edrendű* jelző arra utal, hogy a differenciálegyenletben szereplő ismeretlen egyváltozós függvény, amelynek n-edik deriváltja is szerepel az egyenletben.

7. Világos, hogy ha a $\boldsymbol{\varphi} : I \to \mathbb{R}^m$ megoldása valamely differenciálegyenletnek, akkor tetszőleges $J \subsetneq I$ intervallum esetén a

$$\boldsymbol{\psi}(x) := \boldsymbol{\varphi}(x) \qquad (x \in J)$$

függvény is megoldás. Ilyen esetben a $\boldsymbol{\varphi}$ megoldást a $\boldsymbol{\psi}$ megoldás **folytatás**ának nevezzük. Azt mondjuk, hogy a $\boldsymbol{\varphi}$ megoldás **nem folytatható**, ha nincs folytatása.

8. Mint ahogy a bevezető példák is mutatják, sok differenciálegyenlet fizikai motivációval rendelkezik, ezért a derivált jelölésére gyakran vessző helyett pontot, ill. a független változó esetében x helyett t-t írunk (sőt előfordulhat az is, hogy magát az ismeretlent x-szel jelöljük), hiszen ha a

$$\boldsymbol{\varphi}(t) \qquad (t \in I)$$

megoldás, akkor fizikai szóhasználattal élve a $\boldsymbol{\varphi}(t)$ vektor a mozgó anyagi pont **helyvektor**át (az origóból az anyagi pontba mutató vektort), a $\dot{\varphi}(t)$ a **pillanatnyi sebességé**t, a $\ddot{\varphi}(t)$ vektor pedig a **pillanatnyi gyorsulás**át jelenti a t időpillanatban. Ezzel a szóhasználattal élve tehát azt mondhatjuk, hogy autonóm az az egyenlet, amelynek jobb oldala a t időváltozótól független.

9. Az $m > 1$ esetben differenciálegyenlet helyett szokás **differenciálegyenlet-rendszert** (d.e.r.) mondani. Ha a d.e.r. jobb oldalában szereplő függvények koordinátafüggvényei $F_1, \ldots, F_m$, ill. $y_1, \ldots, y_m$, akkor (7.3.1) „koordinátás" alakban a következőt jelenti:

$$\begin{array}{rcl} F_1 \circ \left(\mathrm{id}\,, y_1, \ldots, y_m, y_1', \ldots, y_m', \ldots, y_1^{(n-1)}, \ldots, y_m^{(n-1)}, y_1^{(n)}, \ldots, y_m^{(n)}\right) & = & 0, \\ \vdots & & \vdots \\ F_m \circ \left(\mathrm{id}\,, y_1, \ldots, y_m, y_1', \ldots, y_m', \ldots, y_1^{(n-1)}, \ldots, y_m^{(n-1)}, y_1^{(n)}, \ldots, y_m^{(n)}\right) & = & 0. \end{array}$$

7.3.1. példa. Tetszőleges $A, B \in \mathbb{R}$ esetén a

$$\varphi(x) := A\sin(\alpha x) + B\cos(\alpha x) \qquad (0 \le x \in \mathbb{R})$$

függvény megoldása az

$$y'' + \alpha^2 y = 0 \tag{7.3.5}$$

$$/y'' = f \circ (\mathrm{id}\,, y, y') : \quad f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(a, b, c) := -\alpha^2 b/$$

másodrendű differenciálegyenletnek (a **rugalmas szál differenciálegyenlete**), ui. bármely $0 \le x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\varphi'(x) = A\alpha\cos(\alpha x) - B\alpha\sin(\alpha x), \qquad \text{ill.} \qquad \varphi''(x) = -A\alpha^2\sin(\alpha x) - B\alpha^2\cos(\alpha x).$$

7.3.2. példa. Ha valamely **körvezető** ohmos ellenállása R, önindukciós tényezője L, továbbá a körvezetőben

$$E(t) \qquad (t \in [0, T) \quad /T \in (0, +\infty]/)$$

elektromotoros erejű áramforrás működik, akkor a körvezetőben folyó áram I erősségének időbeli lefolyását leíró differenciálegyenlet

$$L\dot{I} + RI = E \tag{7.3.6}$$

alakú. **Kirchhoff II. törvénye** értelmében ugyanis az áramkörben fellépő eredő feszültségesésnek egyenlőnek kell lennie a bekapcsolt áramforrás elektromotoros erejével.

7.3.3. példa. Az

$$y' = \chi_{\mathbb{Q}}$$

$$/y' = f \circ (\mathrm{id}\,, y) : \quad f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(a, b) := \chi_{\mathbb{Q}}(a)/$$

elsőrendű differenciálegyenletnek nincsen megoldása, ui. a $\chi_{\mathbb{Q}}$ függvény nem Darboux-tulajdonságú.

7.3.4. példa. Tetszőleges $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén a

$$\varphi(x) := \alpha x + \beta x^2 - x\ln(x) \qquad (0 < x \in \mathbb{R})$$

függvény megoldása az

$$y''(x) = \frac{2}{x}y'(x) - \frac{2}{x^2}y(x) + \frac{1}{x} \qquad (x \in \mathcal{D}_y) \tag{7.3.7}$$

$$\Big/ y'' = f \circ (\mathrm{id}, y, y') : \quad f : (\mathbb{R}\backslash\{0\}) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(a,b,c) := \frac{2c}{a} - \frac{2b}{a^2} + \frac{1}{a} \Big/$$

másodrendű differenciálegyenletnek, ui. bármely $0 < x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\varphi''(x) = 2\beta - \frac{1}{x} = \frac{2}{x}(\alpha + 2\beta x - \ln(x) - 1) - \frac{2}{x^2}\big(\alpha x + \beta x^2 - x\ln(x)\big) + \frac{1}{x}.$$

7.3.5. példa. Tetszőleges $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén a

$$\varphi(x) := 2 + 2x + x^2 + \alpha e^x \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény megoldása az

$$y'(x) = y(x) - x^2 \qquad (x \in \mathcal{D}_y) \tag{7.3.8}$$

$$/ y' = f \circ (\mathrm{id}, y) : \quad f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(a,b) := b - a^2 /$$

elsőrendű differenciálegyenletnek, ui.

$$\varphi'(x) = 2 + 2x + \alpha e^x = 2 + 2x + x^2 + \alpha e^x - x^2 = \varphi(x) - x^2 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

7.3.1. feladat. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ esetén a

$$\boldsymbol{\varphi}(x) := \big(\alpha e^{-x}, \alpha x e^{-x} + \beta e^{-x}, \gamma - (1 + \alpha + \beta)e^{-x} - \alpha x e^{-x}\big) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény megoldása az

$$\left.\begin{aligned} y_1'(x) &= -y_1(x), \\ y_2'(x) &= y_1(x) - y_2(x), \\ y_3'(x) &= y_2(x) + e^{-x} \end{aligned}\right\} \qquad (x \in \mathcal{D}_y) \tag{7.3.9}$$

$$/ \mathbf{y}' = \mathbf{f} \circ (\mathrm{id}, y_1, y_2, y_3) : \quad \mathbf{f} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{f}(a,b,c,d) := \big(-b, b - c, c + e^{-a}\big)/$$

elsőrendű differenciálegyenlet-rendszernek!

Útm. Világos, hogy

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_1'(x) &= -\alpha e^{-x} = -\varphi_1(x), \\
\varphi_2'(x) &= \alpha e^{-x} - \alpha x e^{-x} - \beta e^{-x} = \varphi_1(x) - \varphi_2(x), \\
\varphi_3'(x) &= (1+\alpha+\beta)e^{-x} - \alpha e^{-x} + \alpha x e^{-x} = \varphi_2(x) + e^{-x}
\end{aligned}\right\} \quad (x \in \mathbb{R}). \quad \blacksquare$$

7.3.2. feladat. Lássuk be, hogy tetszőleges $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ esetén a

$$\varphi(x) := \big(\alpha e^{-x} + \beta e^{x} + \gamma \sin(x) + \delta \cos(x), \alpha e^{-x} + \beta e^{x} - \gamma \sin(x) - \delta \cos(x)\big)$$

$$(x \in \mathbb{R})$$

függvény megoldása az

$$\left.\begin{aligned}
y_1'' &= y_2, \\
y_2'' &= y_1
\end{aligned}\right\} \tag{7.3.10}$$

$$\Big/ \mathbf{y}'' = \mathbf{f} \circ (y_1, y_2, y_1', y_2') : \quad \mathbf{f} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{f}(a,b,c,d) := (b,a) \Big/$$

másodrendű differenciálegyenlet-rendszernek!

Útm. Tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_1''(x) &= \alpha e^{-x} + \beta e^{x} - \gamma \sin(x) - \delta \cos(x) = \varphi_2(x), \\
\varphi_2''(x) &= \alpha e^{-x} + \beta e^{x} + \gamma \sin(x) + \delta \cos(x) = \varphi_1(x)
\end{aligned}\right\} \quad (x \in \mathbb{R}). \quad \blacksquare$$

7.3.3. feladat. Igazoljuk, hogy tetszőleges $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ esetén a

$$\varphi(x) := \alpha + \beta x + \gamma e^{x} + \delta e^{-x} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény megoldása az

$$y^{(4)} = y'' \tag{7.3.11}$$

$$\Big/ y^{(4)} = f \circ (y, y', y'', y''') : \quad f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}, \quad f(a,b,c,d) := c \Big/$$

negyedrendű differenciálegyenletnek

Útm. Deriválással azt kapjuk, hogy

$$\varphi^{(4)}(x) = \gamma e^{x} + \delta e^{-x} = \varphi''(x) \qquad (x \in \mathbb{R}). \quad \blacksquare$$

Ugyanúgy, mint az egész matematikában, a differenciálegyenletek elméletében is nagy szerepet játszanak a lineáris struktúrák.

7.3.2. definíció. Azt mondjuk, hogy a (7.3.2) egyenlet **lineáris**, ha van olyan $I \subset \mathbb{R}$ intervallum és olyan

$$\mathbf{b} : I \to \mathbb{R}^m, \qquad \text{ill.} \qquad A_k : I \to \mathbb{R}^{m \times m} \quad (k \in \{0, \ldots, n-1\})$$

függvény, hogy

$$\mathbf{f} \circ \left(\mathrm{id}\,, \mathbf{y}, \mathbf{y}', \ldots, \mathbf{y}^{(n-1)}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} A_k \mathbf{y}^{(k)} + \mathbf{b}$$

$$\Big/ \mathbf{f}\left(x, \mathbf{y}(x), \mathbf{y}'(x), \ldots, \mathbf{y}^{(n-1)}(x)\right) = \sum_{k=0}^{n-1} A_k \mathbf{y}^{(k)}(x) + \mathbf{b}(x) \qquad (x \in \mathcal{D}_{\mathbf{y}}) \Big/,$$

azaz (7.3.2)

$$\mathbf{y}^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} A_k \mathbf{y}^{(k)} + \mathbf{b} \tag{7.3.12}$$

alakú. $\mathbf{b} \equiv \mathbf{0}$ esetén azt mondjuk, hogy (7.3.12) **homogén lineáris**, $\mathbf{b} \not\equiv \mathbf{0}$ esetén pedig **inhomogén lineáris**. Az A_k függvényeket **együtthatómátrix**oknak, a $\mathbf{b}$ függvényt pedig **inhomogenitás**nak nevezzük.

7.3.6. példa. Az

$$A_0(t) := -\frac{R}{L}, \quad b(t) := \frac{E(t)}{L} \qquad (t \in [0, T))$$

jelölések bevezetésével látható, hogy a (7.3.6) egyenlet inhomogén lineáris.

7.3.7. példa. A (7.3.8) differenciálegyenlet inhomogén lineáris:

$$A_0(x) = 1, \qquad b(x) = -x^2 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

7.3.8. példa. A (7.3.11) differenciálegyenlet homogén lineáris:

$$A_0(x) = A_1(x) = 0, \quad A_2(x) = 1, \quad A_3(x) = 0 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

7.3.9. példa. A (7.3.9) differenciálegyenlet inhomogén lineáris:

$$A_0(x) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{-x} \end{bmatrix} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

7.3.10. példa. A (7.3.10) differenciálegyenlet homogén lineáris:

$$A_0(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A_1(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

7.3.1. gyakorló feladat. Igazoljuk, hogy ha $m, n \in \mathbb{N}$ és az $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^{1+nm} \to \mathbb{R}^m$ függvény folytonos: $\mathbf{f} \in \mathfrak{C}$, akkor a (7.3.2) differenciálegyenlet minden $\boldsymbol{\varphi}$ megoldására $\boldsymbol{\varphi} \in \mathfrak{C}^n$ teljesül!

Útm.

7.3.2. gyakorló feladat. Mutassuk meg, hogy ha a (7.3.2) differenciálegyenlet jobb oldala a nulladik változójában periodikus, pontosabban $\mathbf{f} : \mathbb{R}^{1+nm} \to \mathbb{R}^m$ olyan függvény, hogy alkalmas $0 < p \in \mathbb{R}$ számmal

$$\mathbf{f}(x + p, \mathbf{b}_0, \ldots, \mathbf{b}_{n-1}) = \mathbf{f}(x, \mathbf{b}_0, \ldots, \mathbf{b}_{n-1}) \qquad \big((x, \mathbf{b}_0, \ldots, \mathbf{b}_{n-1}) \in \mathbb{R}^{1+nm}\big)$$

teljesül, úgy, ha $k \in \mathbb{Z}$ és $\boldsymbol{\varphi} : I \to \mathbb{R}^m$ megoldása (7.3.2)-nek, akkor a

$$\boldsymbol{\psi}_k(x) := \boldsymbol{\varphi}(x + kp) \qquad (x \in \mathbb{R} : \; x + kp \in I)$$

függvény is megoldása (7.3.2)-nek!

Útm.

Ha egy differenciálegyenlet megoldható, akkor általában több (végtelen sok) megoldása van. A megoldások közül bizonyos „mellékfeltételek” hozzávételével tudjuk a számunkra megfelelőt vagy megfelelőket kiválasztani. Ha a differenciálegyenlethez mellékfeltételként előírjuk a keresett függvény, ill. deriváltjainak értékét egy adott helyen, akkor azt mondjuk, hogy **kezdeti feltétel**t adtunk meg. Ha a mellékfeltétel olyan, hogy legalább két pontban írjuk elő a függvény (vagy esetleg deriváltjainak) értékét, akkor azt mondjuk, hogy **peremfeltétel**t adtunk meg.

7.3.11. példa. Az

$$y'' = 2$$

differenciálegyenletnek – mint erről integrálással könnyen meggyőződhetünk – megoldásai az

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto \alpha + \beta x + x^2$$

függvények, ahol $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Ha megadjuk az

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 1$$

kezdeti feltételt, akkor a

$$\varphi(x) := x^2 + x \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény a differenciálegyenlet e kezdeti feltételt is kielégítő megoldása. Ha az

$$y(0) = 0, \qquad y(1) = 0$$

peremfeltételt írjuk elő, akkor a

$$\psi(x) := x^2 - x \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény a differenciálegyenlet e peremfeltételt is kielégítő megoldása.

7.3.3. definíció. Ha a (7.3.2) differenciálegyenlethez mellékfeltételként előírjuk, hogy a $\boldsymbol{\varphi}$ megoldás adott $(\tau, \boldsymbol{\xi}_0, \ldots, \boldsymbol{\xi}_{n-1}) \in \mathcal{D}_{\mathbf{f}}$ esetén eleget tegyen a

$$\boldsymbol{\varphi}(\tau) = \boldsymbol{\xi}_0, \quad \boldsymbol{\varphi}'(\tau) = \boldsymbol{\xi}_1, \quad \ldots, \quad \boldsymbol{\varphi}^{(n-2)}(\tau) = \boldsymbol{\xi}_{n-2}, \quad \boldsymbol{\varphi}^{(n-1)}(\tau) = \boldsymbol{\xi}_{n-1}$$

feltételnek is, akkor az így „kibővített" feladatot **kezdetiérték-feladat**nak (k.é.f.) vagy **Cauchy-feladat**nak nevezzük és a továbbiakban minderre az

$$\left.\begin{array}{c} \mathbf{F} \circ \left(\mathrm{id}\,, \mathbf{y}, \mathbf{y}', \ldots, \mathbf{y}^{(n)}\right) = \mathbf{0}, \\ \underline{\mathbf{y}(\tau) = \boldsymbol{\xi}_0, \quad \mathbf{y}'(\tau) = \boldsymbol{\xi}_1, \ \ldots \ \mathbf{y}^{(n-1)}(\tau) = \boldsymbol{\xi}_{n-1},} \end{array}\right\} \tag{7.3.13}$$

ill. az

$$\left.\begin{array}{c} \mathbf{y}^{(n)} = \mathbf{f} \circ \left(\mathrm{id}\,, \mathbf{y}, \mathbf{y}', \ldots, \mathbf{y}^{(n-1)}\right), \\ \underline{\mathbf{y}(\tau) = \boldsymbol{\xi}_0, \quad \mathbf{y}'(\tau) = \boldsymbol{\xi}_1, \ \ldots \ \mathbf{y}^{(n-1)}(\tau) = \boldsymbol{\xi}_{n-1}} \end{array}\right\} \tag{7.3.14}$$

jelölést fogjuk használni. Magát a $\boldsymbol{\varphi}$ függvényt a k.é.f. **megoldás**ának nevezzük.

A (7.3.13), ill. (7.3.22) k.é.f. egy megoldását szokás a (7.3.13)-beli, ill. a (7.3.22)-beli differenciálegyenlet **partikuláris megoldás**ának is nevezni. Sok esetben a (7.3.13), ill. a

(7.3.22) k.é.f. megoldását a (7.3.13)-beli, ill. a (7.3.22)-beli differenciálegyenlet

$$\mathbf{y}(\tau) = \boldsymbol{\xi}_0, \quad \mathbf{y}'(\tau) = \boldsymbol{\xi}_1, \ \ldots \ \mathbf{y}^{(n-1)}(\tau) = \boldsymbol{\xi}_{n-1}$$

kezdeti feltételt kielégítő megoldásának mondjuk.

7.3.12. példa. Korábbról tudjuk (vö. 7.3.3. példa), hogy tetszőleges $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ esetén a

$$\varphi(x) := \alpha + \beta x + \gamma e^x + \delta e^{-x} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény megoldása a (7.3.11) differenciálegyenletnek. Ha a megoldásra előírjuk a

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi''(0) = \varphi'''(0) = 0$$

feltétel teljesülését, akkor azt kapjuk, hogy

$$\alpha + \gamma + \delta = 0, \qquad \beta + \gamma - \delta = 0, \qquad \gamma + \delta = 0, \qquad \gamma - \delta = 0,$$

azaz $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$. Az így adódó

$$\varphi(x) = 0 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény megoldása tehát az

$$y^{(4)} = y'', \qquad y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$$

kezdetiérték-feladatnak.

7.3.13. példa. Könnyen belátható, hogy tetszőleges $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$: $\alpha < \beta$ esetén a

$$\varphi(x) := \begin{cases} (x-\alpha)^3 & (x \in (-\infty, \alpha]), \\ 0 & (x \in (\alpha, \beta)), \\ (x-\beta)^3 & (x \in [\beta, +\infty)) \end{cases}$$

függvény megoldása az

$$y' = 3\sqrt[3]{y^2}, \qquad y(0) = 0 \tag{7.3.15}$$

kezdetiérték-feladatnak, sőt a

$$\psi(x) := 0 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény is megoldás. (Ahhoz, hogy belássuk, hogy a legfeljebb három részből összerakott φ függvény megoldás, azt kell megmutatni φ differenciálható, és hogy értelmezési tartományának minden pontjában telesül a (7.3.15)-beli összefüggés. Ez legfeljebb az α és β pontokban jelenthet többletfeladatot: a megfelelő leszűkítések és deriváltjaik (egyoldali) határértékének eltűnését kell kimutatni).

7.3.14. példa. Könnyen belátható, hogy tetszőleges $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén a

$$\varphi_\alpha(x) := \frac{2\alpha}{2 - \alpha x^2} \qquad (x \in I_\alpha)$$

függvény megoldása az

$$y'(x) = x(y(x))^2 \qquad (x \in \mathcal{D}_y) \tag{7.3.16}$$

differenciálegyenletnek, ahol I_α a

$$(-\infty, -\sqrt{2/\alpha}), \qquad (-\sqrt{2/\alpha}, \sqrt{2/\alpha}), \qquad \text{ill. a} \qquad (\sqrt{2/\alpha}, +\infty)$$

intervallumok valamelyike. Ha előírjuk, hogy

$$\varphi_\alpha(0) = 2 \qquad (\Longleftrightarrow \quad \alpha = 2)$$

teljesüljön, akkor az így adódó

$$\varphi_2(x) := \frac{2}{1 - x^2} \qquad (x \in (-1{,}1)) \tag{7.3.17}$$

függvény megoldása az

$$\left.\begin{array}{c} y'(x) = x(y(x))^2 \quad (x \in \mathcal{D}_y) \\ y(0) = 2 \end{array}\right\} \tag{7.3.18}$$

kezdetiérték-feladatnak. Világos, hogy míg ($\alpha = 2$ esetén) a

$$(-\infty, -1) \ni x \mapsto \varphi_2(x), \qquad (-1{,}1) \ni x \mapsto \varphi_2(x), \qquad \text{ill. a} \qquad (-1, +\infty) \ni x \mapsto \varphi_2(x)$$

függvények mindegyike megoldása a (7.3.16) differenciálegyenletnek, addig a (7.3.18) kezdetiérték-feladat esetében csak a (7.3.17)-beli megoldás-intervallum jöhet szóba.

7.3.3. gyakorló feladat. Van-e megoldása az

$$y' = \operatorname{sgn}(y), \qquad y(0) = 0$$

Cauchy-feladatnak?

Útm.

Hasonlóan a differenciálegyenletekhez, a Cauchy-feladatok közül sincs mindegyiknek megoldása. Ezt igazolja a

7.3.15. példa. Az

$$y'(x) = \operatorname{sgn}(x) \quad (x \in \mathcal{D}_y), \qquad y(0) = 0$$

kezdetiérték-feladatnak nyilvánvalóan nincsen megoldása; ellenkező esetben ui. a megoldás értelmezési tartománya egy, a 0-t tartalmazó intervallum lenne, és így, ha 0 az intervallum belsejében van, akkor a megoldás deriváltja $x < 0$-ra -1, $x > 0$-ra pedig 1 lenne, ha pedig 0 az intervallum valamelyik határán lenne, akkor a megoldás deriváltja ott zérus lenne, mindenhol máshol pedig -1 vagy 1 (attól függően, hogy a 0 az intervallum jobb oldali határán vagy a bal oldali határán van). Ez pedig ellentmond a derivált Darboux-tulajdonságának.

7.3.4. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan folytonos függvény, amelyre

$$f(x) > -1 \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

akkor az

$$y'(x) = 1 - f(y(x)) \cdot y'(x) + f(x) \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad y(0) = 0$$

kezdetiérték-feladat φ megoldására

$$\varphi(x) = x \qquad (x \in \mathbb{R})$$

teljesül!

Útm. Mivel f folytonos, ezért az

$$F(x) := \int_0^x (1 + f(s))\,\mathrm{d}s \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény deriválható és az f-re tett feltétel miatt deriváltjára

$$F'(x) = 1 + f(x) > 0 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

teljesül. Ez azt jelenti, hogy F szigorúan monoton növekedő. Mivel bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$y'(x) = 1 - f(y(x)) \cdot y'(x) + f(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad y'(x)(1 + f(y(x))) = 1 + f(x),$$

ezért a φ függvény pontosan akkor megoldása a kezdetiérték-feladatnak, ha $\varphi(0) = 0$ és

$$\int_0^x \varphi'(s)(1 + f(\varphi(s)))\,\mathrm{d}s = \int_0^x (1 + f(s))\,\mathrm{d}s \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

azaz

$$[F(\varphi(s))]_0^x = F(x), \qquad \text{ill.} \qquad F(\varphi(x)) - F(\varphi(0)) = F(x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

teljesül. $\varphi(0) = 0$ következtében $F(0) = 0$, így

$$F(\varphi(x)) = F(x) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ami F injektivitása folytán azt jelenti, hogy

$$\varphi(x) = x \qquad (x \in \mathbb{R}). \quad \blacksquare$$

7.3.5. feladat. Igazoljuk, hogy ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, $\varphi : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ pedig az

$$y'(x) = 1 + f(y(x)) - f(x) \quad (x \in \mathcal{D}_y), \qquad y(0) = 0$$

kezdetiérték-feladat megoldása, akkor fennáll a

$$\varphi(x) \leq x \qquad (x \in [0, +\infty))$$

egyenlőtlenség!

Útm. Mivel bármely $x \in [0, +\infty)$ esetén

$$y'(x) = 1 + f(y(x)) - f(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad y'(x) - 1 = f(y(x)) - f(x),$$

ezért az exponenciális függvény injektivitását felhasználva azt kapjuk, hogy, ha φ megoldása a differenciálegyenletnek, akkor

$$e^{\varphi'(x)-1} = e^{f(\varphi(x))-f(x)} \qquad (x \in [0, +\infty)),$$

így (vö. **??**. feladat)

$$\varphi'(x) \leq e^{\varphi'(x)-1} = e^{f(\varphi(x))} \cdot e^{-f(x)} \quad (x \in [0, +\infty)),$$

ill.

$$\varphi'(x) \cdot e^{-f(\varphi(x))} \leq e^{-f(x)} \quad (x \in [0, +\infty))$$

Mindkét oldalt integrálva és a $\varphi(0) = 0$ egyenlőséget felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\int_0^x e^{-f(s)}\,\mathrm{d}s \geq \int_0^x \varphi'(s) \cdot e^{-f(\varphi(s))}\,\mathrm{d}s = \int_0^{\varphi(x)} e^{-f(z)}\,\mathrm{d}z.$$

Mivel az

$$F : [0, +\infty) \to \mathbb{R}, \qquad F(z) := \int_0^z e^{-f(s)}\,\mathrm{d}s$$

függvényre

$$F'(z) = e^{-f(z)} > 0 \qquad (z \in [0, +\infty)),$$

ezért F szigorúan monoton növekedő, ahonnan

$$\varphi(x) \leq x \qquad (x \in [0, +\infty))$$

következik. ■

7.3.4. definíció. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, $\emptyset \neq P \subset \mathbb{R}$ („paraméter-tartomány”) és $g : I \times P \to \mathbb{R}$. Az

$$\Big\{\big\{(x, g(x,p)) \in \mathbb{R}^2 : \; x \in I\big\} : \; p \in P\Big\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^2) \tag{7.3.19}$$

halmazt (a g által megadott) **egyparaméteres görbeseregnek**, az

$$y = g(x, p)$$

egyenletet pedig a **görbesereg egyenletének** nevezzük.

7.3.16. példa.

1. $g(x,p) := px\ ((x,p) \in \mathbb{R}^2)$;
2. $g(x,p) := \sqrt{p^2 - x^2}\ (0 \leq p \in \mathbb{R};\ x \in [-p,p])$.

7.3.5. definíció. Tegyük fel, hogy minden $p \in P$ esetén az

$$I \ni x \mapsto g_p(x) := g(x,p)$$

függvény differenciálható és $F : I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan, hogy

$$F(x, g_p(x), g_p'(x)) = 0 \quad (x \in I,\ p \in P).$$

Ekkor az F által meghatározott implicit differenciálegyenlet a (7.3.19) **görbesereg differenciálegyenletének** nevezzük.

7.3.0. megjegyzés. Ha bármely $p \in P$ esetén

$$g_p'(x) \neq 0 \qquad (x \in I),$$

akkor a görbesereg egyenletéből p lokálisan kifejezhető x és y függvényeként. A görbesereg differenciálegyenletét úgy kaphatjuk meg, hogy az

$$y = g_p(x), \qquad y' = g_p'(x)$$

egyenletrendszerből kiküszöböljük a p paramétert.

7.3.6. feladat. Adjuk meg az alábbi egyparaméteres görbeseregek differenciálegyenletét!

1. $g(x,p) := \dfrac{x^2}{2p} - \dfrac{p}{2}\ ((x,p) \in \mathbb{R}^2 :\ p \neq 0)$;
2. $g(x,p) := px^3\ ((x,p) \in \mathbb{R}^2)$;
3. $g(x,p) := \sin(x+p)\ ((x,p) \in \mathbb{R}^2)$.

Útm.

1. $y = \dfrac{x^2}{2p} - \dfrac{p}{2}$, $y' = \dfrac{x}{p} \rightsquigarrow p = x/y' \rightsquigarrow 2yy' = xy'^2 - x$, azaz

$$x(y'^2(x) - 1) = 2y(x)y'(x) \qquad (x \in \mathcal{D}_y).$$

2. Két esetet különböztetünk meg:

   a) $p = 0$: ekkor az $y = 0$ egyenes megoldása az $y' = 0$ egyenletnek;

b) $p \neq 0$: $y = px^3$, $y' = 3px^2 \rightsquigarrow$

$$3y(x) = xy'(x) \qquad (x \in \mathcal{D}_y).$$

3. $y = \sin(x + p)$, $y' = \cos(x + p) \rightsquigarrow$

$$y'(x) = \sqrt{1 - y^2(x)} \qquad (x \in \mathcal{D}_y). \quad \blacksquare$$

7.3.4. gyakorló feladat. Adjuk meg az alábbi egyparaméteres görbeseregek differenciálegyenletét!

1. $g(x, p) := (x - p)^3$ $((x, p) \in \mathbb{R}^2)$;
2. $g(x, p) := e^{px}$ $((x, p) \in \mathbb{R}^2)$.

Útm.

A továbbiakban többnyire elsőrendű egyenletekre vonatkozó állításokkal foglalkozunk. Megmutatható ui., hogy bármely magasabbrendű rendszer minden tekintetben valamely elsőrendű rendszerrel helyettesíthető (vele egyenértékű). Ennek a helyettesítésnek persze megvan az az ára, hogy az egyenlet n rendjének csökkenése megnöveli az egyenletek m számát, éspedig úgy, hogy az mn szorzat nem változik. Ezt pontosítja a következő, **átviteli elv**ként (is) ismert

7.3.1. tétel. Ha $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^{1+nm} \to \mathbb{R}^m$, akkor (7.3.2), azaz az

$$\boxed{\mathbf{y}^{(n)} = \mathbf{f} \circ \left(\mathrm{id}\,, \mathbf{y}, \mathbf{y}', \ldots, \mathbf{y}^{(n-1)}\right)} \tag{7.3.20}$$

rendszer egyenértékű az

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \mathbf{z}_1' &=& \mathbf{z}_2, \\ \mathbf{z}_2' &=& \mathbf{z}_3, \\ &\vdots& \\ \mathbf{z}_{n-1}' &=& \mathbf{z}_n, \\ \mathbf{z}_n' &=& \mathbf{f} \circ (\mathrm{id}\,, \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_n) \end{array}} \tag{7.3.21}$$

elsőrendű rendszerrel, pontosabban

1. ha $\boldsymbol{\varphi}$ megoldása (7.3.20)-nek, akkor $(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varphi}', \ldots, \boldsymbol{\varphi}^{(n-1)})$ megoldása (7.3.21)-nek.
2. Ha $(\boldsymbol{\psi}_1, \ldots, \boldsymbol{\psi}_n)$ megoldása (7.3.21)-nak, akkor $\boldsymbol{\psi}_1$ megoldása (7.3.20)-nek.

Továbbá, ha adott $(\tau, \boldsymbol{\xi}_0, \boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_{n-1}) \in \mathcal{D}_{\mathbf{f}}$ esetén (7.3.20) valamely megoldása kielégíti az

$$\mathbf{y}(\tau) = \boldsymbol{\xi}_0, \qquad \mathbf{y}'(\tau) = \boldsymbol{\xi}_1, \qquad \ldots, \qquad \mathbf{y}^{(n-1)}(\tau) = \boldsymbol{\xi}_{n-1}$$

kezdeti feltételt, akkor (7.3.21) megfelelő megoldása kielégíti a

$$\mathbf{z}_1(\tau) = \boldsymbol{\xi}_0, \qquad \mathbf{z}_2(\tau) = \boldsymbol{\xi}_1, \qquad \ldots, \qquad \mathbf{z}_n(\tau) = \boldsymbol{\xi}_{n-1}$$

kezdeti feltételt, és fordítva.

Biz. Ha

$$\mathbf{g} : \mathcal{D}_{\mathbf{f}} \to \mathbb{R}^{nm}, \qquad \mathbf{g}(x, \mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{n-1}) := (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{n-1}, \mathbf{f}(x, \mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{n-1})),$$

és $\mathcal{M}_{(7.3.22)}$, ill. $\mathcal{M}_{(7.3.23)}$ jelöli az

$$\left.\begin{array}{c} \mathbf{y}^{(n)} = \mathbf{f} \circ \left(\mathrm{id}\,, \mathbf{y}, \mathbf{y}', \ldots, \mathbf{y}^{(n-1)}\right), \\ \\ \underline{\mathbf{y}(\tau) = \boldsymbol{\xi}_0, \quad \mathbf{y}'(\tau) = \boldsymbol{\xi}_1, \ \ldots, \ \mathbf{y}^{(n-1)}(\tau) = \boldsymbol{\xi}_{n-1}} \end{array}\right\}, \tag{7.3.22}$$

ill. a

$$\mathbf{z}' = \mathbf{g} \circ (\mathrm{id}\,, \mathbf{z}), \qquad \mathbf{z}(\tau) = (\boldsymbol{\xi}_0, \boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_{n-1}) \tag{7.3.23}$$

kezdetiérték-feladat megoldásainak halmazát, úgy

– ha $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{M}_{(7.3.22)}$, akkor

$$\boldsymbol{\varphi}^{(n)} = \mathbf{f} \circ (\mathrm{id}\,, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varphi}', \ldots, \boldsymbol{\varphi}^{(n-1)}),$$

így a $\boldsymbol{\psi} := (\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varphi}', \ldots, \boldsymbol{\varphi}^{(n-1)})$ függvény koordinátafüggvényeire

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\psi}_0' &= \boldsymbol{\varphi}' = \boldsymbol{\psi}_1, \\
\boldsymbol{\psi}_1' &= \boldsymbol{\varphi}'' = \boldsymbol{\psi}_2, \\
&\vdots \\
\boldsymbol{\psi}_{n-2}' &= \boldsymbol{\varphi}^{(n-1)} = \boldsymbol{\psi}_{n-1}, \\
\boldsymbol{\psi}_{n-1}' &= \boldsymbol{\varphi}^{(n)} = \mathbf{f} \circ (\mathrm{id}\,, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varphi}', \ldots, \boldsymbol{\varphi}^{(n-1)}) = \\
&= \mathbf{f} \circ (\mathrm{id}\,, \boldsymbol{\psi}_0, \boldsymbol{\psi}_1, \ldots, \boldsymbol{\psi}_{n-1}),
\end{aligned}$$

továbbá

$$\boldsymbol{\psi}(\tau) = (\boldsymbol{\varphi}(\tau), \boldsymbol{\varphi}'(\tau), \ldots, \boldsymbol{\varphi}^{(n-1)}(\tau)) = (\boldsymbol{\xi}_0, \boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_{n-1}),$$

azaz $\boldsymbol{\psi} \in \mathcal{M}_{(7.3.23)}$.

– ha $\boldsymbol{\psi} := (\boldsymbol{\psi}_0, \ldots, \boldsymbol{\psi}_{n-1}) \in \mathcal{M}_{(7.3.23)}$, akkor egyrészt

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\psi}_0' &= \boldsymbol{\psi}_1, \\
\boldsymbol{\psi}_1' &= \boldsymbol{\psi}_2 = \boldsymbol{\psi}_0'', \\
&\vdots \\
\boldsymbol{\psi}_{n-2}' &= \boldsymbol{\psi}_{n-1} = \boldsymbol{\psi}_0^{(n-1)}, \\
\boldsymbol{\psi}_{n-1}' &= \mathbf{f} \circ (\mathrm{id}\,, \boldsymbol{\psi}_0, \ldots, \boldsymbol{\psi}_{n-1}) = \\
&= \mathbf{f} \circ \left(\mathrm{id}\,, \boldsymbol{\psi}_0, \boldsymbol{\psi}_0', \ldots, \boldsymbol{\psi}_0^{(n-1)}\right),
\end{aligned}$$

azaz

$$\boldsymbol{\psi}_0^{(n)} = \mathbf{f} \circ \left(\mathrm{id}\,, \boldsymbol{\psi}_0, \boldsymbol{\psi}_0', \ldots, \boldsymbol{\psi}_0^{(n-1)}\right),$$

másrészt pedig

$$\boldsymbol{\psi}(\tau) = (\boldsymbol{\xi}_0, \boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_{n-1})$$

következtében

$$\boldsymbol{\psi}_0(\tau) = \boldsymbol{\xi}_0, \quad \psi_0'(\tau) = \boldsymbol{\psi}_1(\tau) = \boldsymbol{\xi}_1, \ \ldots \ \boldsymbol{\psi}_0^{(n-1)}(\tau) = \boldsymbol{\psi}_{n-1}(\tau) = \boldsymbol{\xi}_{n-1},$$

így $\boldsymbol{\psi}_0 \in \mathcal{M}_{(7.3.22)}$. ■

7.3.0. megjegyzés. Az iménti tétel bizonyításából kitűnik, hogy hogyan alakítható át az (7.3.22) n-edrendű rendszer egy vele egyenértékű (7.3.23) nm egyenletből álló elsőrendű rendszerré: formálisan a

$$\mathbf{z}_1 := \mathbf{y}, \qquad \mathbf{z}_2 := \mathbf{y}', \qquad \ldots, \qquad \mathbf{z}_{n-1} := \mathbf{y}^{(n-2)}, \qquad \mathbf{z}_n := \mathbf{y}^{(n-1)}$$

változók bevezetésével

$$\mathbf{z}_1' = \mathbf{z}_2, \qquad \mathbf{z}_2' = \mathbf{z}_3, \qquad \ldots, \qquad \mathbf{z}_{n-1}' = \mathbf{z}_n, \qquad \mathbf{z}_n' = \mathbf{y}^{(n)}$$

adódik.

7.3.17. példa. Az

$$y''(x) - (\alpha - \beta x^2)y'(x) + y(x) = 0 \qquad (x \in \mathcal{D}_y)$$

differenciálegyenlet a

$$z_1 := y, \qquad z_2 := y'$$

változók bevezetésével egyenértékű a

$$\mathbf{z}'(x) :\equiv \begin{bmatrix} z_1'(x) \\ z_2'(x) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \alpha - \beta x^2 \end{bmatrix} \mathbf{z}(x) \tag{7.3.24}$$

elsőrendű differenciálegyenlet-rendszerrel.

7.3.7. feladat. Jellemezzük elsőrendű differenciálegyenlet-rendszer segítségével valamely – az origóba helyezett – állócsillag körül keringő bolygó síkmozgását!

Útm. Az origóba elhelyezett M (> 0) tömegű anyagi pontnak az $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \backslash \{\mathbf{0}\}$ helyvektorú pontban lévő, m (> 0) tömegű anyagi pontra gyakorolt gravitációs ereje:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) := -\gamma \frac{mM}{\|\mathbf{r}\|^3} \mathbf{r} \qquad (\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \backslash \{\mathbf{0}\}),$$

ezért a bolygó síkmozgására – a Newton-féle mozgástörvényeket alkalmazva – az

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}), \qquad \text{azaz} \qquad \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = -\gamma \frac{M}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{7.3.25}$$

matematikai modell adódik, ahol $\mathbf{0} \neq (x, y) = \mathbf{r} \in \mathbb{R}^2$. A

$$\mathbf{z}_1 := (x, y), \qquad \mathbf{z}_2 := (\dot{x}, \dot{y})$$

változók bevezetésével, ha $\mathbf{z}_1$, ill. $\mathbf{z}_2$ koordinátái (a, b), ill. (c, d):

$$(a, b) := \mathbf{z}_1 = (x, y), \qquad (c, d) := \mathbf{z}_2 = (\dot{x}, \dot{y}),$$

akkor a (7.3.25) másodrendű differenciálegyenlet-rendszer egyenértékű az

$$\left.\begin{array}{rcl}
\dot{a} & = & \dot{x} = c, \\[2ex]
\dot{b} & = & \dot{y} = d, \\[2ex]
\dot{c} & = & \ddot{x} = -\gamma \dfrac{M}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} x = -\gamma \dfrac{M}{\sqrt{(a^2+b^2)^3}} a, \\[2ex]
\dot{d} & = & \ddot{y} = -\gamma \dfrac{M}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} y = -\gamma \dfrac{M}{\sqrt{(a^2+b^2)^3}} b
\end{array}\right\}$$

elsőrendű differenciálegyenlet-rendszerrel. ■

7.3.8. feladat. Tegyük fel, hogy egy egyenes mentén mozgó m (> 0) tömegű anyagi pontra az alábbi erők hatnak:

- valamilyen (időtől is függhető) külső F $(\in \mathbb{R} \to \mathbb{R})$ erő,
- rugalmas visszatérítő erő, amelynek nagysága egy ún. nyugalmi ponttól mért kitéréssel egyenesen arányos (az ezzel kapcsolatos arányossági tényező legyen D (> 0)), iránya pedig ellentétes az elmozdulással; valamint
- a mindenkori sebességgel egyenesen arányos fékező erő (az ezzel kapcsolatos arányossági tényező legyen k (≥ 0)).

Jellemezzük elsőrendű kezdetiérték-feladat segítségével a tömegpont mozgását, ha ismerjük a megfigyelés kezdetekor elfoglalt s_0 helyzetét és az akkori v_0 sebességét!

Útm. Jelöljük x-szel az elmozdulás-idő-függvényt, és tegyük fel, hogy $\mathcal{D}_F$ és $I := \mathcal{D}_x \subset \mathcal{D}_F$ nyílt intervallumok, $0 \in I$, $x \in \mathfrak{D}^2$, továbbá legyen

$$s_0 := x(0), \qquad \text{ill.} \qquad v_0 := \dot{x}(0)$$

a megfigyelés kezdetekor észlelt helyzet, ill. sebesség. A Newton-féle mozgástörvényeket alkalmazva az

$$\left.\begin{array}{c}
m\ddot{x} = F - Dx - k\dot{x}, \\[2ex]
x(0) = s_0, \; \dot{x}(0) = v_0
\end{array}\right\} \tag{7.3.26}$$

matematikai modell adódik. A

$$z_1 := x, \qquad z_2 := \dot{x}$$

változók bevezetésével a fenti másodrendű kezdetiérték-feladat egyenértékű a

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -D/m & -k/m \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} 0 \\ F/m \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{z}(0) = \begin{bmatrix} s_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \tag{7.3.27}$$

elsőrendű kezdetiérték-feladattal. ■

7.3.5. gyakorló feladat. Adjuk meg az

$$y'' + y - \frac{2y}{\sqrt{1+y^2}} = 0$$

másodrendű differenciálegyenlettel egyenértékű elsőrendű differenciálegyenlet-rendszert!

Útm.

7.3.6. gyakorló feladat. Adjuk meg az

$$\left.\begin{aligned} y_1''(x) &= y_2(x)\sin(x) + y_1'(x)y_2'(x), \\ y_2''(x) &= y_1(x)y_2(x) + (y_1'(x))^2x^2 \end{aligned}\right\} \qquad (x \in \mathcal{D}_{\mathbf{y}})$$

másodrendű differenciálegyenlet-rendszerrel egyenértékű elsőrendű differenciálegyenlet-rendszert!

Útm.

7.3.7. gyakorló feladat. Adjunk meg az

1. $y^{(5)}(x) + xy^{(3)}(x) + (x-1)y(x) = 0$ $(x \in \mathbb{R})$, ill.
2. $y''(x) + 0.25y'(x) + 4y(x) = 2\cos(3x)$ $(x \in \mathbb{R})$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$

differenciálegyenlettel, ill. kezdetiérték-feladattal egyenértékű elsőrendű differenciálegyenlet-rendszert, ill. kezdetiérték-feladatot!

Útm.

7.3.9. feladat. Adjuk meg az

$$\left.\begin{aligned} u'(x) &= v(x), \\ v'(x) &= \frac{2}{x}v(x) - \frac{2}{x^2}u(x) + \frac{1}{x} \end{aligned}\right\} \quad \left(x \in \mathcal{D}_{(u,v)}\right), \qquad \begin{bmatrix} u(1) \\ v(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

elsőrendű kezdetiérték-feladat egy megoldását!

Útm. Világos, hogy ha (μ, ν) megoldása a fenti kezdetiértékfeladatnak, akkor (μ, ν) kétszer deriválható és

$$\mu''(x) \equiv \nu'(x) \equiv \frac{2}{x}\nu(x) - \frac{2}{x^2}\mu(x) + \frac{1}{x} \equiv \frac{2}{x}\mu'(x) - \frac{2}{x^2}\mu(x) + \frac{1}{x}$$

Így μ megoldása az

$$y''(x) = \frac{2}{x}y'(x) - \frac{2}{x^2}y(x) + \frac{1}{x} \quad (x \in \mathcal{D}_y), \qquad y(1) = 1, \quad y'(1) = 0$$

másodrendű kezdetiérték-feladatnak, azaz (vö. 7.3.4. példa)

$$\mu(x) = x - x\ln(x) \qquad (0 < x \in \mathbb{R}).$$

Ezért a

$$\varphi(x) := \begin{bmatrix} \mu(x) \\ \mu'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - x\ln(x) \\ -\ln(x) \end{bmatrix} \qquad (0 < x \in \mathbb{R})$$

függvény megoldása a fenti elsőrendű kezdetiérték-feladatnak. ■

Az alábbiakban vektor-skalár-függvények deriválására és integrálására vonatkozó néhány dolgot tekintünk át.

7.3.6. definíció. Legyen $d \in \mathbb{N}$, $I \subset \mathbb{R}$ intervallum és $\mathbf{f} : I \to \mathbb{R}^d$. Azt mondjuk, hogy a $\mathbf{F}$ függvény a $\mathbf{f}$ **primitív függvénye**, ha

1. $\mathbf{F} \in \mathfrak{D}(I, \mathbb{R}^d)$ és
2. $\mathbf{F}'(t) = \mathbf{f}(t)$ $(t \in I)$.

Az $\mathbf{f}$ primitív függvényeinek

$$\int \mathbf{f} \left(=: \int \mathbf{f}(t)\,\mathrm{d}t \right)$$

halmazát $\mathbf{f}$ **határozatlan integrál**jának nevezzük.

Nyilvánvaló, hogy ha

$$\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_d) \in \mathfrak{C}(I, \mathbb{R}^d),$$

akkor

$$\int \mathbf{f} \neq \emptyset \qquad \text{és} \qquad \int \mathbf{f} = \left(\int f_1, \ldots, \int f_d \right).$$

7.3.7. definíció. Legyen $-\infty < a < b < +\infty$,

$$f_k : [a, b] \to \mathbb{R} \qquad (k \in \{1, \ldots, d\})$$

korlátos függvény. Azt mondjuk, hogy

$$\mathbf{f} := (f_1, \ldots, f_d) \in \mathfrak{R}[a, b],$$

ha minden $k \in \{1, \ldots, d\}$ esetén $f_k \in \mathfrak{R}[a, b]$, és ekkor

$$\int_a^b \mathbf{f} := \int_a^b \mathbf{f}(t)\,\mathrm{d}t := \left(\int_a^b f_1(t)\,dt, \ldots, \int_a^b f_d(t)\,dt \right).$$

7.3.1. állítás. Ha

$$\mathbf{f} := (f_1, \ldots, f_d) \in \mathfrak{R}[a,b] \qquad \text{és} \qquad \|\mathbf{f}\| := \sqrt{f_1^2 + \ldots + f_d^2},$$

akkor

$$\left\| \int_a^b \mathbf{f} \right\| \leq \int_a^b \|\mathbf{f}\|. \tag{7.3.28}$$

Biz. Világos, hogy ha minden $k \in \{1, \ldots, d\}$ esetén $f_k \in \mathcal{R}[a,b]$, akkor $\|\mathbf{f}\| \in \mathcal{R}[a,b]$, ahol $\mathbf{f} := (f_1, \ldots, f_d)$, ui. $\|\mathbf{f}\| = \sqrt{f_1^2 + \ldots + f_d^2}$. Legyen most

$$\delta := \frac{b-a}{m}, \qquad t_k := a + k\delta \quad (k \in \{1, \ldots, m\}), \ m \in \mathbb{N}.$$

Ekkor

$$\begin{aligned} \left\| \int_a^b \mathbf{f} \right\| &= \left\| \left(\int_a^b f_1, \ldots, \int_a^b f_d \right) \right\| = \left\| \left(\lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^m f_1(t_k)\delta, \ldots \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^m f_d(t_k)\delta \right) \right\| = \\ &= \lim_{m\to\infty} \left\| \left(\sum_{k=1}^m f_1(t_k)\delta, \ldots, \sum_{k=1}^m f_d(t_k)\delta \right) \right\| = \lim_{m\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^m f(t_k)\delta \right\| \leq \\ &\leq \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^m |f(t_k)|\, \delta = \int_a^b \|\mathbf{f}\|. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

7.4. A megoldások ábrázolása

Adott $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^{1+m} \to \mathbb{R}^m$ jobb oldal, ill.

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f} \circ (\mathrm{id}\,, \mathbf{y}) \tag{7.4.1}$$

elsőrendű differenciálegyenlet(-rendszer) esetében a következő elnevezések használatosak. $\mathbb{R}^m$-et, ill. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$-et szokás a (7.4.1) differenciálegyenlet **fázisterének** vagy **állapotterének**, ill. **kibővített fázisterének** vagy **kibővített állapotterének** nevezni. Ha kifejezetten mást nem mondunk, akkor autonóm egyenletek esetében a fázistérre, nem autonóm rendszerek esetében pedig a kibővített fázistérre fogunk hivatkozni. Ha a differenciálható $\boldsymbol{\varphi} : I \to \mathbb{R}^m$ függvény megoldása (7.4.1)-nek, azaz az $I \subset \mathbb{R}$ intervallum és bármely $t \in I$ esetén

$$\boldsymbol{\varphi}'(t) = \mathbf{f}(t, \boldsymbol{\varphi}(t))$$

teljesül, akkor grafikonját, azaz a

$$\Gamma_{\boldsymbol{\varphi}} := \{(x, \boldsymbol{\varphi}(x)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m : \ x \in I\}$$

ponthalmazt a (7.4.1) differenciálegyenlet **integrálgörbéjének** (**megoldásgörbéjének**) nevezzük. Ha φ a (7.4.1) nem folytatható megoldása,[3] akkor $\Gamma_{\boldsymbol{\varphi}}$-nek az állapottérre való vetületét, azaz a

$$\mathbb{T}_{\boldsymbol{\varphi}} := \mathcal{R}_{\boldsymbol{\varphi}} = \boldsymbol{\varphi}[I] = \{\boldsymbol{\varphi}(x) \in \mathbb{R}^m : \ x \in I\}$$

halmazt a (7.4.1) differenciálegyenlet **trajektóriájának** vagy **pályagörbéjének** nevezzük.

Korábbi tanulmányainkból ismeretes, hogy – az $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$-beli – $\Gamma_{\boldsymbol{\varphi}}$ görbének érintője a $\tau \in I$ paraméterértéknél $(\tau, \boldsymbol{\varphi}'(\tau))$, a görbe $(\tau, \boldsymbol{\varphi}(\tau))$ pontbeli érintőegyenese

$$\begin{aligned} E_\tau &:= \{(x, \boldsymbol{\varphi}(\tau) + \boldsymbol{\varphi}'(\tau)(x-\tau)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m : \ x \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{(\tau, \boldsymbol{\varphi}(\tau)) + (x-\tau)(1, \boldsymbol{\varphi}'(\tau)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m : \ x \in \mathbb{R}\}, \end{aligned}$$

alakú, az $(1, \boldsymbol{\varphi}'(\tau))$ vektor pedig kifejezhető (7.4.1) jobb oldalának segítségével:

$$(1, \boldsymbol{\varphi}'(\tau)) = (1, \mathbf{f}(\tau, \boldsymbol{\varphi}(\tau))).$$

Így teszőleges $(\tau, \boldsymbol{\xi}) \in \mathcal{D}_{\mathbf{f}}$ esetén a (7.4.1) egyenlet minden e ponton átmenő integrálgörbéjének, azaz a

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f} \circ (\mathrm{id}\,, \mathbf{y}), \qquad \mathbf{y}(\tau) = \boldsymbol{\xi} \tag{7.4.2}$$

Cauchy-feladat minden megoldásának a $(\tau, \xi) = (\tau, \boldsymbol{\varphi}(\tau))$ pontban ugyanaz az érintővektora: $(1, \mathbf{f}(\tau, \boldsymbol{\varphi}(\tau))$. Következésképpen (7.4.1) integrálgörbéjének menetét egyedül a

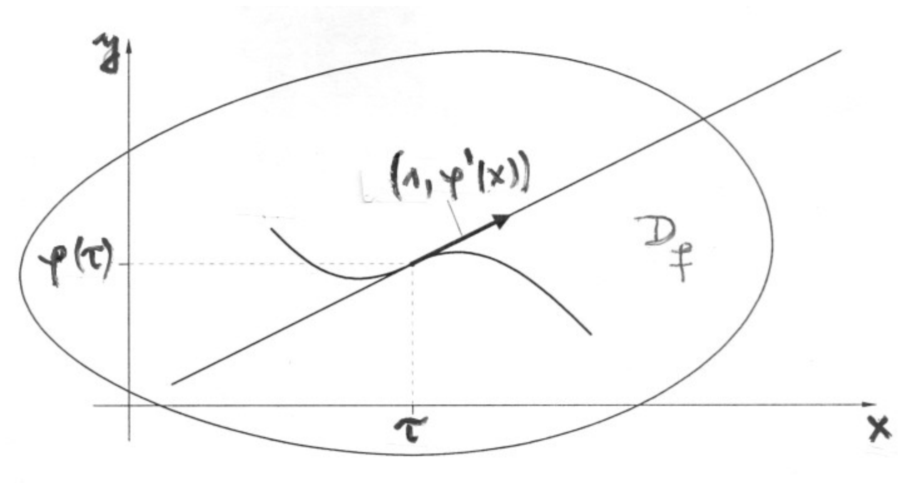
$$\mathcal{D}_{\mathbf{f}} \ni (x, \mathbf{y}) \mapsto (1, \mathbf{f}(x, \mathbf{y})) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \tag{7.4.3}$$

vektormező határozza meg. Ezt úgy is szokás mondani, hogy (7.4.1) integrálgörbéi „belesimulnak” a (7.4.1) vektormezőbe. $m = 1$ esetén a (7.4.1) differenciálegyenletnek könnyen geometriai szemléltetését tulajdoníthatunk, ha – bevezetve a síkon az (x, y) Descartes-féle derékszögű koordinátarendszert – $\mathcal{D}_f$ minden pontjához berajzolunk egy kicsiny egyenes szakaszt, ún. **ívelem**et vagy **vonalelem**et, amelynek iránytangense $f(x, y)$. A $\mathcal{D}_f$ halmaz pontjaihoz rendelt ívelemek összességét, pontosabban az

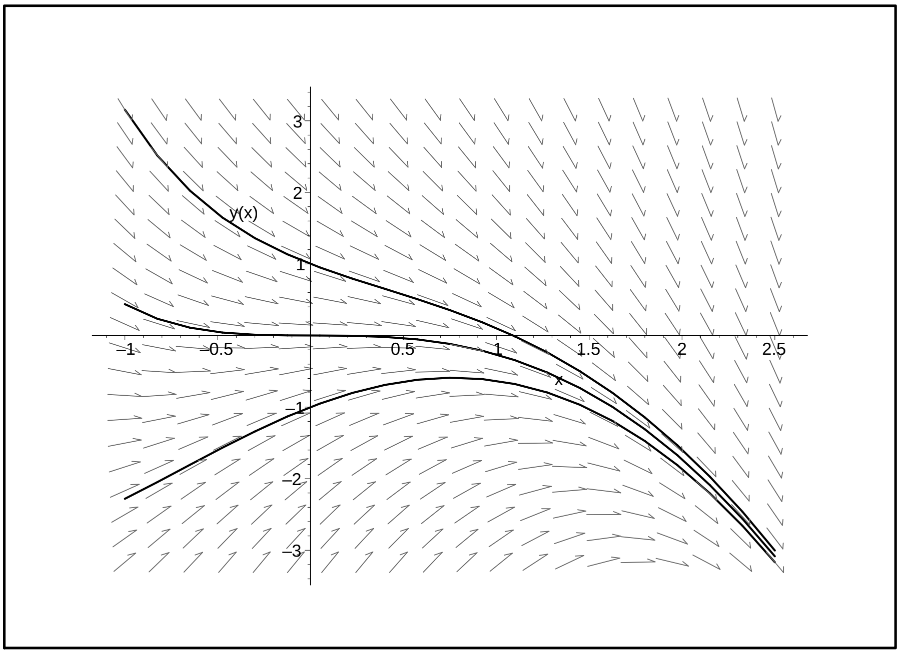
$$\{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \ (x, y) \in \mathcal{D}_f\}$$

halmazt a (7.4.1) differenciálegyenlet **iránymezejének** nevezzük.
Geometriailag a (7.4.1) differenciálegyenlet megoldása tehát azt jelenti, hogy megkeressük azt a görbét, amely „belesimul” az iránymezőbe, azaz amelynek minden pontjában

[3] Sok tankönyv ugyan nem említi a megoldás nem folytatható voltát, hanem csak hallgatólagosan feltételezi azt. Ha φ a (7.4.1) olyan megoldása, amelynek van valódi folytatása, akkor a $\varphi[I]$ halmazt **pályagörbedarab**nak fogjuk nevezni.



7.4.1. ábra. A $(\tau, \varphi(\tau))$ ponton áthaladó megoldásgörbe.



7.4.2. ábra. Az $y'(x) = -y(x) - x^2 \;\; (x \in \mathcal{D}_y)$ differenciálegyenlet iránymezeje és néhány integrálgörbéje.

az érintő irányát az iránymező e pontbeli vonaleleme adja meg. Az iránymezőt – vázlatosan – véges sok ívelemmel szokás szemléltetni: kijelölünk D_f-ben véges sok pontot és azokban kis egyenesszakaszt húzunk a (7.4.1) jobb oldala ottani értékének megfelelő iránytangenssel. Ennek az a jelentősége, hogy ha egy adott φ függvényről tudjuk, hogy megoldása a (7.4.1) differenciálegyenletnek, akkor $\varphi(\tau)$ ismeretében meg tudjuk rajzolni φ grafikonjához a $(\tau, \varphi(\tau))$ pontban az érintőjét **a φ függvény ismerete nélkül**.

7.4.1. példa. Ha tetszőleges $a, \xi, \tau \in \mathbb{R}$ esetén a

$$\varphi(x) := \xi e^{a(x-\tau)} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

függvény megoldása az

$$y' = ay, \qquad y(\tau) = \xi \tag{7.4.4}$$

kezdetiérték-feladatnak. Látható (vö. 7.4.3. ábra), hogy ha

– $a > 0$, akkor

$$\lim_{+\infty} \varphi = \operatorname{sgn}(\xi)\infty \quad (\xi \neq 0), \qquad \text{ill.} \qquad \lim_{-\infty} \varphi = 0,$$

– $a = 0$, akkor

$$\lim_{+\infty} \varphi = \xi, \qquad \text{ill.} \qquad \lim_{-\infty} \varphi = \xi,$$

– $a < 0$, akkor

$$\lim_{-\infty} \varphi = \operatorname{sgn}(\xi)\infty \quad (\xi \neq 0), \qquad \text{ill.} \qquad \lim_{+\infty} \varphi = 0.$$

A 7.4.3. ábrán vázoltuk φ grafikonját a

$$/\tau = 0/ \qquad \xi \in [-5{,}5] \cap \mathbb{Z}$$

kezdeti értékekkel. Tehát a (7.4.4)-beli differenciálegyenlet esetében

$$\mathbb{T}(\xi) = \{\xi e^{ax} \in \mathbb{R} : \ x \in \mathbb{R}\},$$

ezért

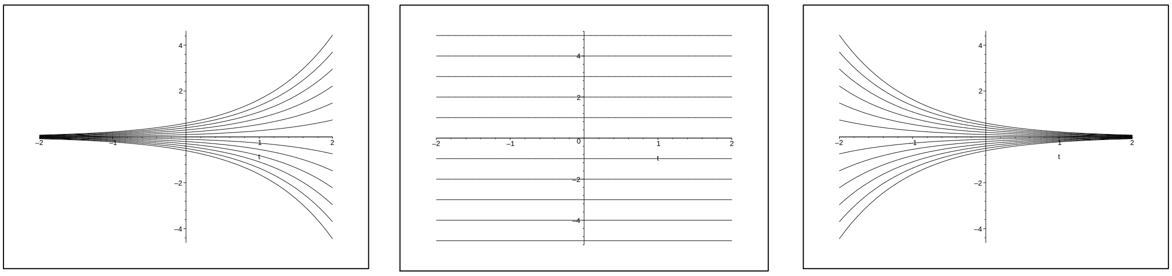
– $a = 0$ esetén

$$\mathbb{T}(\xi) = \{\xi\};$$

– $a \neq 0$ esetén

$$\mathbb{T}(\xi) = \{0\}, \quad \text{ha} \quad \xi = 0;$$

$$\mathbb{T}(\xi) = (0, +\infty), \quad \text{ha} \quad \xi > 0 \qquad \text{és} \qquad \mathbb{T}(\xi) = (-\infty{,}0), \quad \text{ha} \quad \xi < 0.$$



7.4.3. ábra. (7.4.4) megoldásainak grafikonjai $a > 0$, $a = 0$, ill. $a < 0$ esetén.

7.4.2. példa. Tetszőleges $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén a

$$\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2) = (x, y) := (\alpha \cos + \beta \sin, \beta \cos - \alpha \sin)$$

$$/(x(t), y(t)) := (\alpha \cos(t) + \beta \sin(t), \beta \cos(t) - \alpha \sin(t)) \qquad (t \in \mathbb{R})/$$

függvény megoldása a

$$\dot{z}_1 = z_2, \qquad \dot{z}_2 = -z_1 \tag{7.4.5}$$

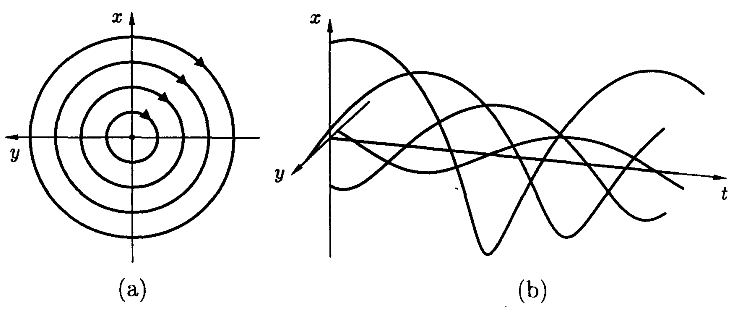
differenciálegyenlet-rendszernek, ui.

$$\varphi_1' = -\alpha \sin + \beta \cos = \varphi_2 \qquad \text{és} \qquad \varphi_2' = -\alpha \cos - \beta \sin = -\varphi_1.$$

Mivel tetszőleges $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ esetén

$$\|\boldsymbol{\varphi}(t)\| = \|(\alpha, \beta)\| \qquad (t \in \mathbb{R}),$$

ezért a trajektóriák origó körüli koncentrikus körök, beleértve magát az origót is, mint egyelemű halmazt (vö. 7.4.4 ábra).



7.4.4. ábra. A (7.4.5) rendszer öt (a) trajektóriája (b) integrálgörbéje.

Az iránymező megrajzolását megkönnyíti, ha ismerjük az f függvény

$$\{(x, y) \in \mathcal{D}_f : \ f(x, y) = c\} \qquad (c \in \mathcal{R}_f)$$

szintvonalait, amelyek mentén az egyes vonalelemeknek ugyanaz az iránytangense: c. Ezeket a differenciálegyenlet **izoklin vonal**ainak vagy **izoklináinak** nevezzük.

7.4.3. példa. Az

$$\dot{x}(t) = \ln(t) \qquad (t > 0)$$

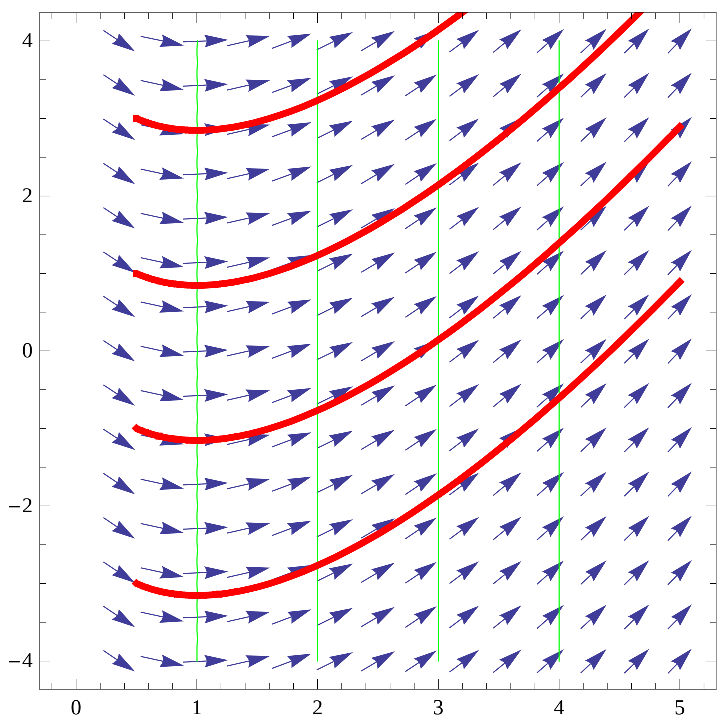
differenciálegyenlet esetében minden

$$t = a > 0$$

függőleges egyenes izoklina, melynek mentén minden egyes vonalelem meredeksége

$$c = \ln(a)$$

(vö. 7.4.5. ábra). Az iránymezőből az is látszik, hogy bármely megoldásgörbét függőlegesen eltolva ismét megoldásgörbét kapunk

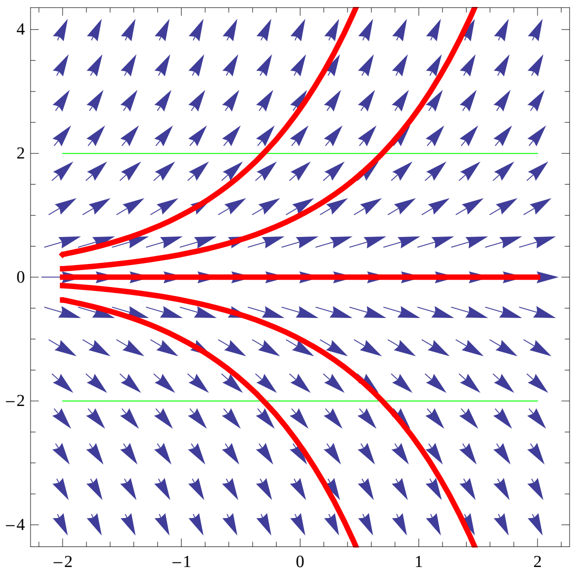


7.4.5. ábra. Az $\dot{x}(t) = \ln(t)$ $(t > 0)$ egyenlet iránymezeje, izoklinái, ill. integrálgörbéi.

7.4.4. példa. Az

$$\dot{x} = x$$

differenciálegyenlet esetében minden vízszintes egyenes izoklina (vö. 7.4.6. ábra). Látható, hogy bármely megoldásgörbét vízszintesen eltolva ismét megoldásgörbét kapunk.



7.4.6. ábra. Az $\dot{x} = x$ egyenlet iránymezeje, izoklinái, ill. integrálgörbéi.

7.4.5. példa. Az

$$y'(x) = \frac{y(x)}{x} \qquad (x > 0) \tag{7.4.6}$$

differenciálegyenlet esetében az izoklin vonalak egyenlete:

$$y = cx,$$

azaz az origóból kiinduló félegyenesek a jobb oldali félsíkon ($c \in \mathbb{R}$ tetszőleges). Itt minden (x, cx) pontban az integrálgörbe iránytangense c, azaz a vonalelem „benne van az $y = cx$ egyenletű egyenesben”. Következésképpen az integrálgörbék az

$$y = cx \qquad (x > 0)$$

félegyenesek. Valóban, a

$$\varphi(x) := cx \qquad (x \in (0, +\infty))$$

függvény megoldása (7.4.6)-nek.

7.4.6. példa. Az

$$y'(x) = -\frac{x}{y(x)} \qquad (x \in \mathcal{D}_y : \ y(x) < 0) \tag{7.4.7}$$

differenciálegyenlet esetében az izoklin vonalak egyenlete:

$$y = (-1/c)x \quad (c \neq 0) \qquad \text{és} \qquad x = 0,$$

azaz az origóból kiinduló félegyenesek az alsó félsíkon és az y-tengely negatív része. Az

$$y = -\frac{1}{c}x$$

izoklina minden pontjában az integrálgörbe érintőjének iránytangense c, tehát az érintő merőleges az izoklinákra, azaz az integrálgörbék origó középpontú körök, egyenletük

$$y = -\sqrt{k^2 - x^2}.$$

Valóban, tetszőleges $k > 0$ esetén a

$$\varphi(x) := -\sqrt{k^2 - x^2} \qquad (x \in (0, k))$$

függvény az megoldása (7.4.7)-nek.

Sok esetben az iránymező nem áttekinthető, így belőle nem nyerhetünk mindig felvilágosítást az integrálgörbe menetéről. Nehéz dolgunk lenne, ha ebbe az iránymezőbe kellene berajzolnunk az integrálgörbéket. Ha $m = 1$ és a jobb oldal differenciálható: $f \in \mathfrak{D}$, akkor az integrálgörbék érintőinek meredeksége mellett a görbületi viszonyokról is szerezhetünk némi felvilágosítást, ui. ebben az esetben az

$$\{(x, y) \in \mathcal{D}_f : \ \partial_1 f(x, y) + \partial_2 f(x, y) f(x, y) = 0\}$$

halmaz tartalmazza a (7.4.1) egyenlet integrálgörbéinek inflexiós pontjait, hiszen ha a $\varphi : I \to \mathbb{R}$ a (7.4.1) megoldása, azaz bármely $x \in I$ esetén $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$, akkor $\varphi \in \mathfrak{D}^2$ (vö. korábbi állítás), ill. minden $x \in I$ esetén

$$\varphi''(x) = \partial_1 f(x, \varphi(x)) + \partial_2 f(x, \varphi(x))\varphi'(x) = \partial_1 f(x, \varphi(x)) + \partial_2 f(x, \varphi(x)) f(x, \varphi(x)),$$

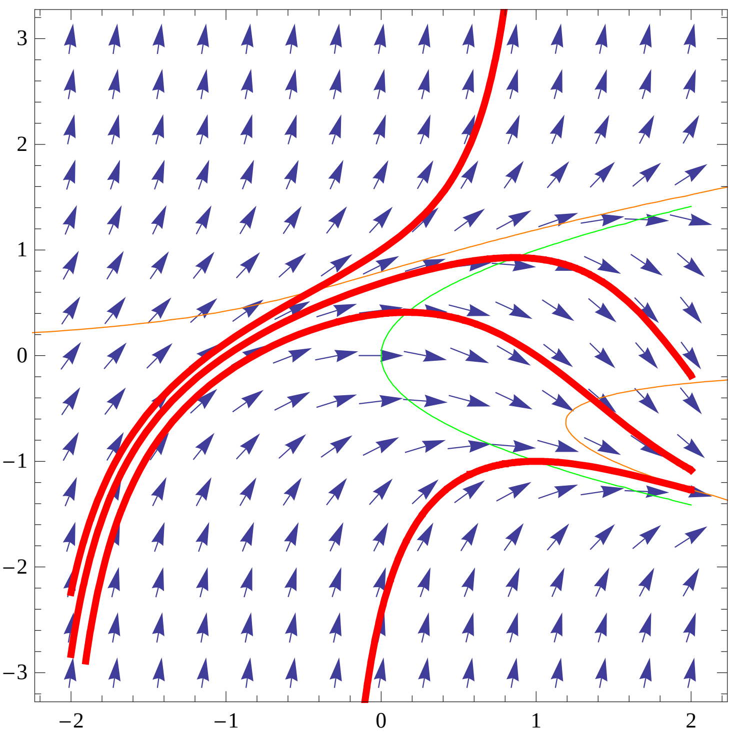
és $\varphi(\tau) = \xi$ esetén φ-nek csak akkor van τ-ban inflexiója, ha

$$\partial_1 f(\tau, \xi) + \partial_2 f(\tau, \xi) f(\tau, \xi) = 0.$$

7.4.7. példa. Az

$$\dot{x}(t) = [x(t)]^2 - t \qquad (t \in \mathbb{R})$$

differenciálegyenlet esetében minden $c \in \mathbb{R}$ esetén a $t = x^2 - c$ egyenletű parabola izoklina. Az 7.4.7. ábráról az is leolvasható, hogy minden a $t = x^2$ paraboláról induló integrálgörbe a negyedik síknegyedbe torkollik, és nem mászik ki onnan.



7.4.7. ábra. Az $\dot{x}(t) = [x(t)]^2 - t \;\; (t \in \mathbb{R})$ egyenlet integrálgörbéi.

7.4.1. definíció. Adott $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ esetén azt mondjuk, hogy

$$y' = f \circ (\mathrm{id}\,, y) \tag{7.4.8}$$

homogén differenciálegyenlet, ha jobb oldalára

$$f : (\mathbb{R}\backslash\{0\}) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y) \quad (0 \neq \lambda \in \mathbb{R},\; (x, y) \in \mathcal{D}_f)$$

teljesül.

Homogén differenciálegyenlet esetében tetszőleges $c \in \mathbb{R}$ esetén az

$$y = cx \qquad (x < 0, \quad \text{ill.} \quad x > 0)$$

félegyenesek izoklinák, hiszen az $y = cx$ egyenes minden $(\tau, c\tau)$, $\tau \neq 0$ pontjára

$$f(\tau, c\tau) = f(\alpha\tau, \alpha c\tau) = f(1, c)$$

teljesül, ahol

$$\alpha := \frac{1}{\tau}.$$

Ha (7.4.8) homogén differenciálegyenlet, akkor

$$f(-x, -y) \equiv f(x, y)$$

következtében (7.4.8) integrálgörbéi szimmetrikusak az origóra, hiszen ha $\varphi : I \to \mathbb{R}$ megoldása (7.4.8)-nek, akkor a

$$\psi(x) := -\varphi(-x) \qquad (x \in \mathbb{R} : \ -x \in I)$$

függvény is megoldás:

$$\psi'(x) = \varphi'(-x) = f(-x, \varphi(-x)) = f(-x, -\psi(x)) = f(x, \psi(x)) \qquad (x \in \mathbb{R} : \ -x \in I).$$

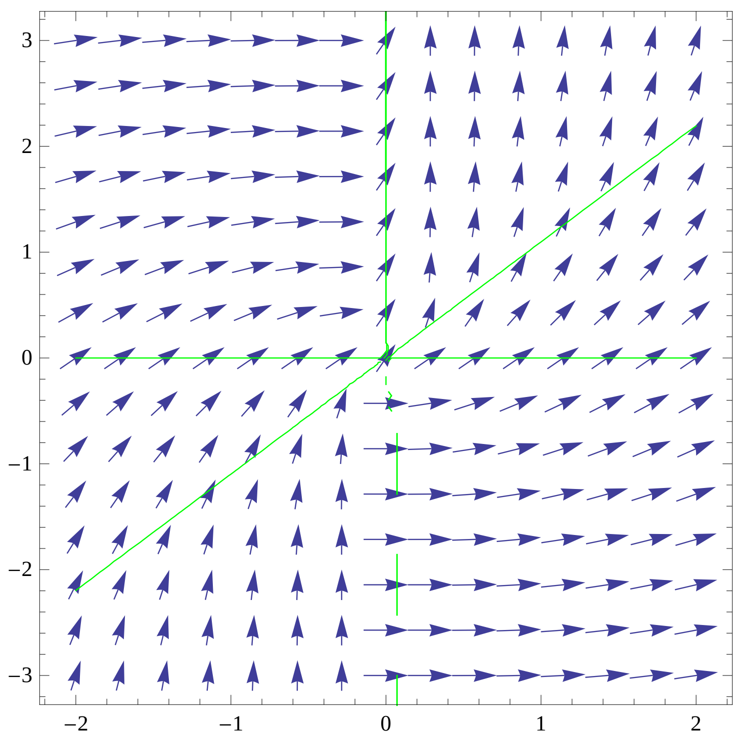
7.4.8. példa. Az

$$y'(x) = \exp\left(\frac{y(x)}{x}\right) \qquad (0 \neq x \in \mathbb{R})$$

differenciálegyenlet esetében az

$$y = cx \qquad (x \neq 0)$$

egyenesek mentén az integrálgörbék érintőinek meredeksége e^c.



7.4.8. ábra. Az $y'(x) = \exp(y(x)/x)$ $(0 \neq x \in \mathbb{R})$ egyenlet iránymezeje.

7.5. Megoldások létezése és egyértelműsége

7.5.1. feladat. Mutassuk meg, hogy

1. tetszőleges $\alpha, \tau, \xi \in \mathbb{R}$ esetén a
$$\varphi(x) := \xi \exp(\alpha(x-\tau)) \qquad (x \in \mathbb{R})$$
függvényre
$$\varphi' = \alpha\varphi, \qquad \varphi(\tau) = \xi$$
teljesül;
2. ha $J \subset \mathbb{R}$ olyan intervallum, hogy $\tau \in J$ és a $\psi : J \to \mathbb{R}$ függvényre
$$\psi' = \alpha\psi, \qquad \psi(\tau) = \xi$$
teljesül, akkor fennáll a
$$\psi(x) = \varphi(x) \qquad (x \in J)$$
egyenlőség!

Útm.

1. Világos, hogy
$$\varphi'(x) = \xi\alpha \exp(\alpha(x-\tau)) = \alpha\varphi(x) \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad \varphi(\tau) = \xi \exp(\alpha(\tau-\tau)) = \xi.$$
2. Ha $J \subset \mathbb{R}$ olyan intervallum, hogy $\tau \in J$ és a $\psi : J \to \mathbb{R}$ függvényre
$$\psi' = \alpha\psi, \qquad \psi(\tau) = \xi,$$
akkor a
$$\mu(x) := \psi(x) \exp(-\alpha x) \qquad (x \in J)$$
függvényre
$$\mu'(x) = \psi'(x) \exp(-\alpha x) - \alpha\psi(x) \exp(-\alpha x) = 0 \qquad (x \in J)$$
teljesül. Ezért alkalmas $c \in \mathbb{R}$ számmal
$$\mu(x) = c \qquad (x \in J),$$
ahonnan
$$\psi(x) = c \exp(\alpha x) \qquad (x \in J)$$
következik. Így
$$c = \xi \exp(-\alpha\tau), \qquad \text{azaz} \qquad \psi(x) = \xi \exp(\alpha(x-\tau)) = \varphi(x) \qquad (x \in J). \quad \blacksquare$$

Most rátérünk a megoldás egyértelműségének értelmezésére.

7.5.1. definíció. Azt mondjuk, hogy a (7.3.22) k.é.f. (**globálisan**) **egyértelműen megoldható**, ha (7.3.22)-nek van olyan $\varphi : I \to \mathbb{R}^m$ megoldása, hogy (7.3.22) bármely $\psi : J \to \mathbb{R}^m$ megoldására

$$J \subset I \qquad \text{és} \qquad \varphi(x) = \psi(x) \quad (x \in J)$$

teljesül. Az ilyen φ megoldást a (7.3.22) k.é.f. **teljes megoldás**ának nevezzük.

Az egyértelmű megoldhatóság tehát azt jelenti, hogy az adott kezdetiérték-feladatnak van olyan megoldása (teljes megoldás), hogy bármely más megoldás ezen megoldás leszűkítéseként áll elő.

7.5.2. feladat. Igazoljuk, hogy ha $\tau, \xi \in \mathbb{R}$, továbbá $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor az

$$y'(x) = a(x)y(x) \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad y(\tau) = \xi \tag{7.5.1}$$

kezdetiérték-feladatnak pontosan egy megoldása van: (7.5.1) egyértelműen megoldható!

Útm. Az a függvény folytonosságából, ill. a 7.5.1. feladatból kiindulva tekintsük a

$$\varphi(x) := \xi \exp(A(x)) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvényt, ahol $A' = a$ és $A(\tau) = 0$, azaz

$$A(x) := \int_\tau^x a(s)\,\mathrm{d}s \qquad (x \in \mathbb{R})$$

teljesül. Világos, hogy φ megoldása a (7.5.1) kezdetiérték-feladatnak, azaz $\varphi(\tau) = \xi$ és

$$\varphi'(x) = \xi \exp(A(x)) \cdot A'(x) = \xi \exp(A(x)) \cdot a(x) = a(x)\varphi(x) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Ha most $J \subset \mathbb{R}$ olyan intervallum, hogy $\tau \in J$ és a $\psi : J \to \mathbb{R}$ függvényre

$$\psi' = a\psi, \qquad \psi(\tau) = \xi$$

teljesül, akkor a

$$\mu(x) := \psi(x) \exp(-A(x)) \qquad (x \in J)$$

függvényre

$$\mu'(x) = \psi'(x) \exp(-A(x)) - A'(x)\psi(x) \exp(-A(x)) = 0 \qquad (x \in J).$$

Ezért alkalmas $c \in \mathbb{R}$ számmal

$$\mu(x) = c \qquad (x \in J),$$

ahonnan

$$\psi(x) = c \exp(A(x)) \qquad (x \in J)$$

következik. Így

$$c=\xi\exp(-A(\tau))=\xi, \qquad \text{azaz} \qquad \psi(x)=\xi\exp(A(x))=\varphi(x) \qquad (x\in J). \quad \blacksquare$$

Az egyértelműség egy, a 7.5.1. definícióbelivel egyenértékű megfogalmazását adja a

7.5.1. tétel. A (7.3.22) kezdetiérték-feladat megoldása pontosan akkor egyértelmű, ha (7.3.22) bármely φ, ψ megoldására

$$\boldsymbol{\varphi}(x)=\boldsymbol{\psi}(x) \qquad (x\in\mathcal{D}_{\boldsymbol{\varphi}}\cap\mathcal{D}_{\boldsymbol{\psi}}) \tag{7.5.2}$$

teljesül.

Biz.

1. lépés.. Ha a (7.3.22) egyértelműen megoldható, akkor nyilván bármely φ, ψ megoldására (7.5.2) teljesül.

2. lépés.. Ha pedig (7.3.22) bármely φ, ψ megoldására (7.5.2) teljesül, és $\mathcal{M}$ jelöli (7.3.22) megoldásainak halmazát, továbbá

$$J:=\bigcup_{\boldsymbol{\varphi}\in\mathcal{M}}\mathcal{D}_{\boldsymbol{\varphi}},$$

akkor $\tau\in J\subset I$. Így a $\mathbf{\Phi}: J\to\mathbb{R}^m$,

$$\mathbf{\Phi}(x):=\boldsymbol{\varphi}(x) \qquad (\boldsymbol{\varphi}\in\mathcal{M},\ x\in\mathcal{D}_{\boldsymbol{\varphi}})$$

függvény a (7.3.22) k.é.f. teljes megoldása lesz, hiszen $\mathbf{\Phi}$ n-szer differenciálható, továbbá bármely $x\in J$ esetén

$$\mathbf{\Phi}^{(n)}(x)=\boldsymbol{\varphi}^{(n)}(x)=\mathbf{f}\left(x,\boldsymbol{\varphi}(x),\boldsymbol{\varphi}'(x),\ldots,\boldsymbol{\varphi}^{(n-1)}(x)\right)=\mathbf{f}\left(x,\mathbf{\Phi}(x),\mathbf{\Phi}'(x),\ldots,\mathbf{\Phi}^{(n-1)}(x)\right)$$

és

$$\mathbf{\Phi}(\tau)=\boldsymbol{\xi}_0, \qquad \mathbf{\Phi}'(\tau)=\boldsymbol{\xi}_1, \qquad \ldots \qquad \mathbf{\Phi}^{n-1}(\tau)=\boldsymbol{\xi}_{n-1}. \quad \blacksquare$$

Mint ahogy azt később látni fogjuk, az $\mathbf{f}$ függvényre vonatkozó alkalmas feltételek teljesülése esetén a (7.3.22) kezdetiérték-feladatnak pontosan egy megoldása létezik a τ körüli valamely intervallumon. Az ilyen megoldás jellegéből adódik a

7.5.2. definíció. Azt mondjuk, hogy az (7.3.22) kezdetiérték-feladatnak van **lokális megoldása** vagy (7.3.22) **lokálisan megoldható**, ha van olyan $I\subset\mathbb{R}$ intervallum és olyan $\boldsymbol{\varphi}: I\to\mathbb{R}^m$ függvény, hogy $\tau\in\operatorname{int}(I)$ és $\boldsymbol{\varphi}$ megoldása (7.3.22)-nek.

Felmerül a kérdés, hogy mondható-e valami az I intervallum nagyságáról, ill. hogy adható-e esetleg bővebb megoldásintervallum, és ha igen, akkor ehhez mely feltételeknek kell teljesülniük. Ezzel kapcsolatos a

7.5.3. definíció. A (7.3.22) kezdetiérték-feladat **maximális megoldás**ának nevezzük a (7.3.22)-beli differenciálegyenlet olyan nem folytatható megoldását, amely kielégíti a kezdeti feltételt.

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a maximális megoldás nem mindig egyértelmű. A (7.3.15) k.é.f. esetében pl. végtelen sok maximális megoldás van. Ha azonban valamely k.é.f. megoldása (globálisan) egyértelmű – mint pl. (7.5.1) esetében –, akkor a teljes megoldás megegyezik a maximális megoldással. Ebben az esetben (7.3.22) teljes megoldását és annak értelmezési tartományát

$$\boldsymbol{\varphi}(\cdot;\tau,\boldsymbol{\xi}) \qquad \text{és} \qquad I(\tau,\boldsymbol{\xi}),$$

ill. ennek bal és jobboldali határpontjait

$$I^-(\tau,\boldsymbol{\xi}) \qquad \text{és} \qquad I^+(\tau,\boldsymbol{\xi})$$

jelöli. Azt is szokás mondani, hogy $\boldsymbol{\varphi}(\cdot;\tau,\boldsymbol{\xi})$ a $(\tau,\boldsymbol{\xi})$ **ponton áthaladó megoldás**:

$$\boldsymbol{\varphi}(\tau;\tau,\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\xi}.$$

7.5.1. példa. Ha $\alpha = 1$, ill. $\tau,\xi \in \mathbb{R}$, akkor az (7.5.1) kezdetiérték-feladat esetén

$$\varphi(x;\tau,\xi) = \xi\exp(A(x)), \qquad \text{ill.} \qquad I(\tau,\xi) = (-\infty,+\infty).$$

ahol

$$A(x) := \int_\tau^x a(s)\,\mathrm{d}s \qquad (x\in\mathbb{R}).$$

7.5.3. feladat. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $\tau,\xi\in\mathbb{R}$, ill. az

$$y'(x) = x(y(x))^2, \qquad y(\tau) = \xi \tag{7.5.3}$$

kezdetiérték-feladat esetén

$$\varphi(x;\tau,\xi) = \frac{2\xi}{2+\xi(\tau^2-x^2)} \qquad (x\in I(\tau,\xi)),$$

ill.

$$I(\tau,\xi) = \begin{cases} (-\infty,\infty), & \text{ha } -\dfrac{2}{\tau^2} < \xi \leq 0, \\[2ex] \left(-\sqrt{\dfrac{2}{\xi}+\tau^2}, \sqrt{\dfrac{2}{\xi}+\tau^2}\right), & \text{ha } \xi > 0, \\[2ex] \left(\sqrt{\dfrac{2}{\xi}+\tau^2}, +\infty\right), & \text{ha } \xi < -\dfrac{2}{\tau^2},\ \tau > 0, \\[2ex] \left(-\infty, -\sqrt{\dfrac{2}{\xi}+\tau^2}\right), & \text{ha } \xi < -\dfrac{2}{\tau^2},\ \tau < 0 \end{cases}$$

teljesül!

Útm. Ha $\xi \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ és valamely $I \subset \mathbb{R}$, $\tau \in \operatorname{int}(I)$ esetén a

$$\varphi : I \to \mathbb{R}$$

megoldása (7.5.4)-nak, azaz $\varphi \in \mathfrak{D}$,

$$\varphi(\tau) = \xi \qquad \text{és} \qquad \varphi'(x) = x(\varphi(x))^2 \quad (x \in I),$$

akkor $\xi \neq 0$, ill. φ folytonossága következtében van olyan $\varepsilon > 0$ szám, hogy

$$\varphi(x) \neq 0 \qquad (|x-\tau| < \varepsilon),$$

következésképpen

$$x = \varphi'(x)/(\varphi(x))^2 = (-1/\varphi)'(x) \qquad (x \in (\tau-\varepsilon, \tau+\varepsilon)),$$

így – mindkét oldalt integrálva – a $\varphi(\tau) = \xi$ egyenlőség figyelembevételével azt kapjuk, hogy

$$\varphi(x) = \frac{2\xi}{2+\xi(\tau^2-x^2)} \qquad (x \in (\tau-\varepsilon, \tau+\varepsilon)),$$

és mivel φ sosem lesz zérus, ezért az $y(\tau) = 0$ kezdeti feltételt kielégítő egyetlen megoldás

$$\psi(x) = 0 \qquad (x \in \mathbb{R}). \quad \blacksquare$$

7.5.1. gyakorló feladat. Igazoljuk, hogy tetszőleges $c, \xi \in \mathbb{R}$, $2 \leq n \in \mathbb{N}$, ill. az

$$y' = cy^n, \qquad y(0) = \xi \tag{7.5.4}$$

kezdetiérték-feladat esetén

$$\varphi(x;0,\xi) = \frac{\xi}{(1-(n-1)cx\xi^{n-1})^{\frac{1}{n-1}}} \qquad (x \in I(\xi) := I(0,\xi)),$$

ill.

$$I(\xi) = \begin{cases} \left(-\infty, \dfrac{1}{(n-1)c\xi^{n-1}}\right), & \text{ha } c\xi^{n-1} > 0, \\[2ex] (-\infty, +\infty), & \text{ha } \xi = 0, \\[2ex] \left(\dfrac{1}{(n-1)c\xi^{n-1}}, +\infty\right), & \text{ha } c\xi^{n-1} < 0 \end{cases}$$

teljesül!

Útm.

7.5.4. definíció. Azt mondjuk, hogy a (7.3.22) k.é.f. **lokálisan egyértelműen megoldható** vagy megoldása **lokálisan egyértelmű**, ha van olyan $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, hogy $\tau \in \operatorname{int}(I)$ és (7.3.22)-nek pontosan egy megoldása van az I intervallumon.

Világos, hogy ha a (7.3.22) kezdetiérték-feladat egyértelműen megoldható, akkor lokálisan egyértelműen is megoldható. Az állítás megfordítása általában nem érvényes. Igaz viszont a

7.5.2. tétel. Ha $\mathbf{f} : \mathbb{R}^{1+m} \to \mathbb{R}^m$ és bármely $(\tau, \boldsymbol{\xi}) \in \mathcal{D}_{\mathbf{f}}$ esetén az

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f} \circ (\mathrm{id}\,, \mathbf{y}), \qquad \mathbf{y}(\tau) = \boldsymbol{\xi} \tag{7.5.5}$$

kezdetiérték-feladat lokálisan egyértelműen megoldható, akkor (7.5.5) (globálisan) egyértelműen is megoldható.

Biz. Ha van olyan $(\tau, \boldsymbol{\xi}) \in \mathcal{D}_{\mathbf{f}}$ pont, hogy a (7.5.5) kezdetiérték-feladat nem oldható meg egyértelműen, akkor (7.5.5)-nek van két olyan

$$\boldsymbol{\varphi} : I_{\boldsymbol{\varphi}} \to \mathbb{R}^m, \qquad \boldsymbol{\psi} : I_{\boldsymbol{\psi}} \to \mathbb{R}^m$$

megoldása és létezik olyan

$$\tau \neq \tau^* \in I := I_{\boldsymbol{\varphi}} \cap I_{\boldsymbol{\psi}}$$

pont, hogy

$$\boldsymbol{\varphi}(\tau) = \boldsymbol{\psi}(\tau) = \boldsymbol{\xi} \qquad \text{és} \qquad \boldsymbol{\varphi}(\tau^*) \neq \boldsymbol{\psi}(\tau^*).$$

Ha $\tau^* > \tau$ (hasonlóan tárgyalható a $\tau^* < \tau$ eset is), akkor a

$$\boldsymbol{\mu} : [\tau, \tau^*] \to \mathbb{R}^m, \qquad \boldsymbol{\mu}(x) := \boldsymbol{\varphi}(x) - \boldsymbol{\psi}(x)$$

függvény folytonos, ezért a

$$H := \{x \in [\tau, \tau^*] : \ \boldsymbol{\varphi}(x) = \boldsymbol{\psi}(x)\} = \boldsymbol{\mu}^{-1}[\{0\}] \neq \emptyset$$

halmaz zárt, így H-nak van maximuma:

$$\tau_* := \max H < \tau^*.$$

Erre a maximumra

$$\boldsymbol{\varphi}(\tau_*) = \boldsymbol{\psi}(\tau_*) \qquad \text{és} \qquad \boldsymbol{\varphi}(x) \neq \boldsymbol{\psi}(x) \quad (x \in (\tau_*, \tau^*])$$

teljesül. Ha most

$$\tau := \tau_*, \qquad \boldsymbol{\xi} := \boldsymbol{\varphi}(\tau_*) = \boldsymbol{\psi}(\tau_*),$$

akkor a feltétel szerint a (7.5.5) kezdetiérték-feladatnak pontosan egy megoldása van valamely

$$J \subset I, \qquad \tau \in \operatorname{int}(J)$$

intervallumon. Ez viszont ellentmond annak a ténynek, hogy φ és ψ a (7.5.5) k.é.f. két olyan megoldása a J intervallumon, amelyek a

$$J \cap (\tau_*, \tau^*]$$

intervallumon különbözőek. ■

Az alábbiakban egy, az

$$\left.\begin{array}{c} \mathbf{y}^{(n)} = \mathbf{f} \circ \left(\mathrm{id}\,, \mathbf{y}, \mathbf{y}', \ldots, \mathbf{y}^{(n-1)}\right), \\[2ex] \hline \mathbf{y}(\tau) = \boldsymbol{\xi}_0, \quad \mathbf{y}'(\tau) = \boldsymbol{\xi}_1, \ \ldots, \ \mathbf{y}^{(n-1)}(\tau) = \boldsymbol{\xi}_{n-1} \end{array}\right\} \tag{7.5.6}$$

kezdetiérték-feladat megoldhatóságával kapcsolatos fogalomról lesz szó.

7.5.5. definíció. Azt mondjuk, hogy a (7.5.6) kezdetiérték-feladat **korrekt kitűzésű**, ha a következő három feltétel mindegyike teljesül:

– (7.5.6) megoldható,

– (7.5.6) megoldása egyértelmű,

– a „megoldás folytonosan függ a kezdeti értékektől”, azaz a

$$\mathbf{\Phi} : \left\{(x, \tau, \boldsymbol{\xi}) \in \mathbb{R}^{2+m} : \ (\tau, \boldsymbol{\xi}) \in \mathcal{D}_{\mathbf{f}}, \ x \in I(\tau, \boldsymbol{\xi})\right\} \to \mathbb{R}^m, \qquad \mathbf{\Phi}(x, \tau, \boldsymbol{\xi}) := \boldsymbol{\varphi}(x; \tau, \boldsymbol{\xi})$$

függvény folytonos.

Az iménti definícióban bevezetett Φ függvényt a (7.3.22)-beli differenciálegyenlet **karakterisztikus függvény**ének nevezzük.

7.5.2. példa. Ha $(\tau, \xi) \in \mathbb{R}^2$, akkor az

$$y' = y, \qquad y(\tau) = \xi \tag{7.5.7}$$

kezdetiérték-feladat esetén

$$\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad \Phi(x, \tau, \xi) = \xi \exp(x - \tau)$$

(vö. 7.5.1. feladat).

7.5.4. feladat. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $\tau, \xi \in \mathbb{R}$ esetén az

$$y'(x) = 2xy(x) \quad (x \in \mathcal{D}_y), \qquad y\,(\tau) = \xi \tag{7.5.8}$$

kezdetiérték-feladat korrekt kitűzésű!

Útm. Megmutatjuk, hogy

$$\varphi(x; \tau, \xi) = \xi \exp(x^2 - \tau^2) \qquad \text{ill.} \qquad I(\tau, \xi) = (-\infty, +\infty)\,,$$

így

$$\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad \Phi(x,\tau,\xi) = \xi \exp(x^2 - \tau^2).$$

Valóban, ha $\xi \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ és valamely $I \subset \mathbb{R}$, $\tau \in \operatorname{int}(I)$ esetén a $\varphi : I \to \mathbb{R}$ megoldása (7.5.8)-nek, azaz

$$\varphi \in \mathfrak{D}, \qquad \varphi(\tau) = \xi \qquad \text{és} \qquad \varphi'(x) = 2x\varphi(x) \quad (x \in I),$$

akkor $\xi \neq 0$, ill. φ folytonossága következtében van olyan $\varepsilon > 0$ szám, hogy

$$\varphi(x) \neq 0 \qquad (|x - \tau| < \varepsilon),$$

következésképpen tetszőleges $x \in (\tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon)$ esetén

$$2x = \varphi'(x)/\varphi(x) = (\ln \circ |\varphi|)'(x),$$

így – mindkét oldalt integrálva – a $\varphi(\tau) = \xi$ egyenlőség figyelembevételével azt kapjuk, hogy ha $x \in (\tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon)$, akkor

$$\varphi(x) = \xi \exp(x^2 - \tau^2),$$

és mivel φ sosem lesz zérus, ezért az $y(\tau) = 0$ kezdeti feltételt kielégítő egyetlen megoldás $\psi(x) = 0$ $(x \in \mathbb{R})$. ■

A továbbiakban adott $I \subset \mathbb{R}$ (valódi) intervallum, $\tau \in I$, $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^m$ $\mathbf{f} \in \mathfrak{C}(I \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ függvény esetén tekintsük az

$$\left.\begin{array}{c} \mathbf{y}'(x) = \mathbf{f}\,(x, \mathbf{y}(x)) \quad (x \in \mathcal{D}_{\mathbf{y}}), \\ \mathbf{y}(\tau) = \boldsymbol{\xi} \end{array}\right\} \tag{7.5.9}$$

elsőrendű kezdetiérték-feladatot!

7.5.3. tétel. Valamely $J \subset I$ intervallum esetén a $\boldsymbol{\varphi} : J \to \mathbb{R}^m$ differenciálható függvény pontosan akkor megoldása a (7.5.9) kezdetiérték-feladatnak, ha

$$\boldsymbol{\varphi}(x) = \boldsymbol{\xi} + \int_\tau^x \mathbf{f}(s, \boldsymbol{\varphi}(s))\, ds \qquad (x \in J). \tag{7.5.10}$$

Biz.

1. lépés.. Ha a $\boldsymbol{\varphi}$ függvény a (7.5.9) k.é.f. megoldása, akkor $\boldsymbol{\varphi} \in \mathfrak{C}^1(I, \mathbb{R}^m)$ és tetszőleges $x \in I$ esetén

$$\boldsymbol{\varphi}(x) - \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\varphi}(x) - \boldsymbol{\varphi}(\tau) = \int_\tau^x \boldsymbol{\varphi}'(s)\,\mathrm{d}s = \int_\tau^x \mathbf{f}(s, \boldsymbol{\varphi}(s))\,\mathrm{d}s.$$

2. lépés.. Ha a $\boldsymbol{\varphi} \in \mathfrak{C}(I, \mathbb{R}^m)$ függvényre teljesül a (7.5.10) egyenlőség, akkor $\boldsymbol{\varphi} \in \mathfrak{D}(I)$, ill.

$$\boldsymbol{\varphi}'(x) = \mathbf{f}(x, \boldsymbol{\varphi}(x)) \quad (x \in I) \qquad \text{és} \qquad \boldsymbol{\varphi}(\tau) = \boldsymbol{\xi} + 0 = \boldsymbol{\xi}. \quad ■$$

7.5.5. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^{1+2m} \to \mathbb{R}^m$ folytonos függvény, $(\tau, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) \in \mathcal{D}_{\mathbf{f}}$, $I \subset \mathbb{R}$ olyan intervallum, hogy $\tau \in I$ és $\boldsymbol{\varphi} : I \to \mathbb{R}^m$ olyan deriválható függvény, hogy

$$\left\{(x, \boldsymbol{\varphi}(x), \boldsymbol{\varphi}'(x)) \in \mathbb{R}^{1+2m} : \ x \in I\right\} \subset \mathcal{D}_{\mathbf{f}},$$

akkor a φ függvény pontosan abban az esetben lesz az

$$\mathbf{y}'' = \mathbf{f} \circ (\mathrm{id}\,, \mathbf{y}, \mathbf{y}'), \qquad \mathbf{y}(\tau) = \boldsymbol{\xi}, \quad \mathbf{y}'(\tau) = \boldsymbol{\eta} \tag{7.5.11}$$

kezdetiérték-feladat megoldása, ha $\varphi \in \mathfrak{C}^1$ és

$$\boldsymbol{\varphi}(x) = \boldsymbol{\xi} + (x - \tau)\boldsymbol{\eta} + \int_\tau^x (x - s)\mathbf{f}(s, \boldsymbol{\varphi}(s), \boldsymbol{\varphi}'(s))\,\mathrm{d}s \qquad (x \in I) \tag{7.5.12}$$

teljesül, majd alkalmazzuk ezt az állítást az

$$\left.\begin{array}{lll} y_1'' = y_2, & y_1(0) = 0, & y_1'(0) = 1, \\ & & \\ y_2'' = y_1, & y_2(0) = 0, & y_2'(0) = -1 \end{array}\right\} \tag{7.5.13}$$

kezdetiérték-feladatra!

Útm.

1. lépés.. Ha φ a (7.5.11) kezdetiérték-feladat megoldása, akkor $\varphi \in \mathfrak{C}^2(I, \mathbb{R}^m)$ (vö. 7.3.1. feladat) és tetszőleges $x \in I$ esetén

$$\boldsymbol{\varphi}'(x) - \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\varphi}'(x) - \boldsymbol{\varphi}'(\tau) = \int_\tau^x \boldsymbol{\varphi}'(s)\,\mathrm{d}s = \int_\tau^x \mathbf{f}(s, \boldsymbol{\varphi}(s), \boldsymbol{\varphi}'(s))\,\mathrm{d}s,$$

ezért mindkét oldalt integrálva $\displaystyle\int_\tau^x \, ds$ azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\varphi}'(x) - \boldsymbol{\xi} - (x - \tau)\boldsymbol{\eta} &= \int_\tau^x \left\{\int_\tau^u \mathbf{f}(s, \boldsymbol{\varphi}(s), \boldsymbol{\varphi}'(s))\,\mathrm{d}s\right\} \mathrm{d}u = \\
&= \int_\tau^x \left\{1 \cdot \int_\tau^u \mathbf{f}(s, \boldsymbol{\varphi}(s), \boldsymbol{\varphi}'(s))\,ds\right\} du = \\
&= \left[u \int_\tau^u \mathbf{f}(s, \boldsymbol{\varphi}(s), \boldsymbol{\varphi}'(s))\,\mathrm{d}s\right]_\tau^x - \\
&\quad - \int_\tau^x u\mathbf{f}(u, \boldsymbol{\varphi}(u), \boldsymbol{\varphi}'(u))\,\mathrm{d}u = \\
&= \int_\tau^x (x - u)\mathbf{f}(u, \boldsymbol{\varphi}(u), \boldsymbol{\varphi}'(u))\,\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

adódik.

2. lépés.. Ha a $\varphi \in \mathfrak{C}^1(I, \mathbb{R}^m)$ függvényre teljesül a (7.5.12) egyenlőség, akkor $\varphi \in \mathfrak{D}^2(I, \mathbb{R}^m)$

és

$$\boldsymbol{\varphi}'(x) = \boldsymbol{\eta} + 0 + \int_\tau^x \mathbf{f}(s, \boldsymbol{\varphi}(s), \boldsymbol{\varphi}'(s))\,\mathrm{d}s, \qquad \boldsymbol{\varphi}''(x) = \mathbf{f}(x, \boldsymbol{\varphi}(x), \boldsymbol{\varphi}'(x)) \qquad (x \in I),$$

ill.

$$\boldsymbol{\varphi}(\tau) = \boldsymbol{\xi} + \mathbf{0} + \mathbf{0} = \boldsymbol{\xi} \qquad \text{és} \qquad \boldsymbol{\varphi}'(\tau) = \boldsymbol{\eta} + \mathbf{0} = \boldsymbol{\eta}.$$

3. lépés.. Tudjuk, hogy tetszőleges $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ esetén a

$$\boldsymbol{\varphi}(x) := \big(\alpha e^{-x} + \beta e^{-x} + \gamma \sin(x) + \delta \cos(x), \alpha e^{-x} + \beta e^{-x} - \gamma \sin(x) - \delta \cos(x)\big) \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvény megoldása a (7.5.13)-beli, ill. a (7.3.10)-beli differenciálegyenlet-rendszernek, így a (7.5.13)-beli kezdeti feltételek következtében

$$\alpha + \beta + \delta = 0, \quad -\alpha + \beta + \gamma = 1, \qquad \alpha + \beta - \delta = 0, \quad -\alpha + \beta - \gamma = -1,$$

ahonnan

$$\alpha = \beta = \delta = 0 \qquad \text{és} \qquad \gamma = 1$$

adódik. Így a

$$\boldsymbol{\varphi} := (\sin, -\sin)$$

függvény megoldása a (7.5.13) kezdetiérték-feladatnak. Az

$$\mathbf{f}(a, b, c, d) := (b, a) \qquad ((a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4)$$

jelöléssel ezért bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$x \cdot (1, -1) + \int_0^x ((s - x)\sin(x), (x - s)\sin(s))\,ds =$$

$$= \left(x + \int_0^x (s - x)\sin(x)\,ds, -x + x\int_0^x \sin(x)\,ds - \int_0^x s\sin(s))\,ds\right) =$$

$$= \left(x + \int_0^x s\sin(s)\,ds + x\cos(x) - x, -x - x\cos(x) + x - \int_0^x s\sin(s)\,ds\right) =$$

$$= (\sin(x), -\sin(x)). \quad \blacksquare$$

7.5.4. tétel. Ha $I \subset \mathbb{R}$ (valódi) intervallum és alkalmas $L : I \to \mathbb{R}_0^+$ folytonos függvénnyel

$$\|\mathbf{f}(x, \mathbf{y}) - \mathbf{f}(x, \mathbf{z})\| \leq L(x)\|\mathbf{y} - \mathbf{z}\| \qquad (x \in I,\, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^m),$$

akkor bármely $(\tau, \boldsymbol{\xi}) \in I \times \mathbb{R}^m$ kezdetiérték esetén a (7.5.9) kezdetiérték-feladatnak pontosan egy $\boldsymbol{\varphi} : I \to \mathbb{R}^m$ megoldása van. Továbbá tetszőleges $\boldsymbol{\varphi}_0 : I \to \mathbb{R}^m$ folytonos függvény esetén a

$$\boldsymbol{\varphi}_n(x) := \boldsymbol{\xi} + \int_\tau^x \mathbf{f}(t, \boldsymbol{\varphi}_{n-1}(t))\, dt \qquad (x \in I,\, n \in \mathbb{N})$$

rekurzióval értelmezett sorozat (**szukcesszív approximáció**) pontonként konvergál a $\boldsymbol{\varphi}$ megoldáshoz és a konvergencia I minden korlátos és zárt részintervallumán egyenletes.

Biz. ■

7.5.6. feladat. Igazoljuk, hogy a

$$y'(x) = x^2 + |y(x)| \quad (x \in \mathcal{D}_y)$$

kezdetiérték-feladatnak pontosan egy megoldása van, majd mutassuk meg, hogy ez a megoldás monoton növekedő és páratlan!

Útm. Ha

$$f(x, y) := x^2 + |y| \qquad (x \in \mathbb{R},\, y \in \mathbb{R}),$$

akkor

$$|f(x, y) - f(x, z)| = ||y| - |z|| \leq |y - z| \qquad (x \in \mathbb{R},\, y, z \in \mathbb{R}),$$

ezért az

$$L(x) := 1 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény megfelel a 7.5.4. tétel feltételeinek. Ha φ a kezdetiérték-feladat megoldása, akkor

$$\varphi'(x) = x^2 + |\varphi(x)| \geq 0 \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi),$$

ezért φ monoton növekedő. Ha

$$\psi(x) := -\varphi(-x) \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi),$$

akkor $\psi(0) = 0$ és

$$\psi'(x) = \varphi'(-x) = (-x)^2 + |\varphi(-x)| = x^2 + |\psi(x)| \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi),$$

így az egyértelműség következtében $\psi = \varphi$. ■

7.5.7. feladat. Adott $\tau, \xi \in \mathbb{R}$ számok és az $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvény esetén közelítsük a 7.5.2. példabeli (7.5.1) kezdetiérték-feladat φ teljes megoldását a szukcesszív approximáció módszerét használva!

Útm. Ha

$$\varphi_0(x) := \xi \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

akkor φ_0 folytonos függvény, így a

$$\varphi_n(x) := \xi + \int_\tau^x a(t)\varphi_{n-1}(t)\,dt \qquad (x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N})$$

függvénysorozat első néhány tagjára

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x) &= \xi + \xi A(x) \qquad (x \in \mathbb{R}),\\
\varphi_2(x) &= \xi + \int_\tau^x a(t)\xi(1 + A(t))\,\mathrm{d}t =\\
&= \xi + \xi\left\{\int_\tau^x a(t)\,\mathrm{d}t + \int_\tau^x a(t)A(t)\,\mathrm{d}t\right\} = \xi + \xi A(x) + \xi\frac{A^2(x)}{2} \qquad (x \in \mathbb{R}),\\
\varphi_3(x) &= \xi + \int_\tau^x a(t)\xi\left(1 + A(t) + \frac{A^2(t)}{2}\right)\mathrm{d}t =\\
&= \xi + \xi\left(\int_\tau^x a(t)\,\mathrm{d}t + \int_\tau^x a(t)A(t)\,\mathrm{d}t + \int_\tau^x a(t)\frac{A^2(t)}{2}\,\mathrm{d}t\right) =\\
&= \xi + A(x) + \xi\frac{A^2(x)}{2} + \xi\frac{A^3(x)}{6} \qquad (x \in \mathbb{R}),
\end{aligned}$$

ahol

$$A(x) := \int_\tau^x a(t)\,\mathrm{d}t \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Teljes indukcióval könnyen belátható, hogy

$$\varphi_n(x) = \xi\sum_{k=0}^n \frac{A^k(x)}{k!} \qquad (n \in \mathbb{N}_0,\ x \in \mathbb{R}).$$

Mivel bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\varphi_n(x) \longrightarrow \xi\sum_{k=0}^\infty \frac{A^k(x)}{k!} \qquad (n \to \infty),$$

ezért a teljes megoldásra

$$\varphi(x) = \xi\exp(A(x)) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

teljesül (vö. 7.5.2. példa). ■

7.5.8. feladat. Alkalmazzuk a szukcesszív approximáció elvét az

$$y'(x) = x + y(x) \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad y(0) = 0$$

kezdetiérték-feladat megoldásának közelítésére!

Útm. Ha

$$f(x,y) := x + y \qquad (x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}),$$

akkor

$$|f(x,y) - f(x,z)| = |y - z| \qquad (x \in \mathbb{R},\ y, z \in \mathbb{R}),$$

ezért az

$$L(x) := 1 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény megfelel a 7.5.4. tétel feltételeinek. Ha tehát

$$\varphi_0(x) := 0 \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

akkor a $\varphi_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény folytonos, és

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x) &= 0 + \int_0^x (t + \varphi_0(t))\,dt = \int_0^x t\,dt = \frac{x^2}{2} \qquad (x \in \mathbb{R}),\\
\varphi_2(x) &= 0 + \int_0^x (t + \varphi_1(t))\,dt = \int_0^x \left(t + \frac{t^2}{2}\right) dt = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \qquad (x \in \mathbb{R}),\\
\varphi_3(x) &= 0 + \int_0^x (t + \varphi_2(t))\,dt = \int_0^x \left(t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6}\right) dt = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} \qquad (x \in \mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Teljes indukcióval könnyen belátható, hogy

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{x^k}{k!} \qquad (2 \le n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}),$$

így bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\varphi_n(x) \longrightarrow \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x - x - 1 \qquad (n \to \infty).$$

Ezért a

$$\varphi(x) := e^x - x - 1 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény a k.é.f. teljes megoldása. ■

7.5.5. tétel. Ha $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, $\tau \in I$, $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^m$,

$$A := [a_{ij}]_{i,j=1}^{m,m} : I \to \mathbb{R}^{m \times m}, \qquad \mathbf{b} : I \to \mathbb{R}^m$$

folytonos függvények, akkor az

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{b}, \qquad \mathbf{y}(\tau) = \boldsymbol{\xi} \tag{7.5.14}$$

lineáris kezdetiérték-feladat egyértelműen megoldható.

Biz. Ha

$$\mathbf{f}(x,\mathbf{y}) := A(x)\mathbf{y} + \mathbf{b}(x) \qquad ((x,y) \in I \times \mathbb{R}^m),$$

akkor $\mathbf{f}$ is folytonos, és

$$\|\mathbf{f}(x,\mathbf{u}) - \mathbf{f}(x,\mathbf{v})\| = \|A(x)(\mathbf{u}-\mathbf{v})\| \leq \|A(x)\| \cdot \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\| \qquad (\mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m)$$

teljesül. ■

7.5.9. feladat. Adjuk meg az

$$\mathbf{y}'(x) = (2y_1(x) + 4y_2(x),\, 2y_1(x)) \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad \mathbf{y}(0) = (1{,}2)$$

kezdetiérték-feladat teljes megoldását!

Útm. Látható, hogy a kezdetiérték-feladat

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{b}, \qquad \mathbf{y}(\tau) = \boldsymbol{\xi}$$

alakú, ahol

$$A(x) = M := \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}(x) := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad \tau := 0, \qquad \boldsymbol{\xi} := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ha

$$\varphi_0(x) := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

akkor a $\varphi_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ függvény folytonos, és

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \int_0^x \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \varphi_0(t)\,\mathrm{d}t = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \int_0^x \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} dt = \\
&= \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + x \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (x \in \mathbb{R}), \\
\varphi_2(x) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \int_0^x \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \varphi_1(t)\,\mathrm{d}t = \\
&= \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + x \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + \frac{x^2}{2} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}^2 \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad (x \in \mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Teljes indukcióval könnyen belátható, hogy

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} M^k \boldsymbol{\xi} \qquad (n \in \mathbb{N}_0,\, x \in \mathbb{R}).$$

Mivel az M mátrix sajátértékei:

$$\lambda = 4, \quad \mu = -2 \quad \text{és a megfelelő sajátvektorok:} \quad \mathbf{u} = (1{,}1/2), \quad \mathbf{v} = (-1{,}1),$$

továbbá

$$\boldsymbol{\xi} = (1{,}2) = 2\mathbf{u} + \mathbf{v},$$

ezért

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}^k \mathbf{u} + \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}^k \mathbf{v} = 2 \cdot 4^k \mathbf{u} + (-2)^k \mathbf{v},$$

azaz

$$\boldsymbol{\varphi}_n(x) = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(4x)^k}{k!} \right) 2\mathbf{u} + \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-2x)^k}{k!} \right) \mathbf{v} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Az $n \to \infty$ határátmenettel azt kapjuk, hogy bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\boldsymbol{\varphi}_n(x) \longrightarrow \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4x)^k}{k!} \right) \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2x)^k}{k!} \right) \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = e^{4x} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + e^{-2x} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

ezért a

$$\boldsymbol{\varphi}(x) := e^{4x} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + e^{-2x} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény a fenti kezdetiérték-feladat teljes megoldása. ■

7.5.2. gyakorló feladat. Alkalmazzuk a szukcesszív approximáció elvét az alábbi kezdetiérték-feladatok megoldásának közelítésére!

1. $y'(x) = 2x(y(x) + 1)$ $(x \in \mathbb{R})$, $y(0) = 0$;
2. $y'(x) = x \cdot y(x)$ $(x \in \mathbb{R})$, $y(0) = 1$;
3. $y'(x) = y(x)\cos(x)$ $(x \in \mathbb{R})$, $y(0) = 1$;
4. $\mathbf{y}'(x) = (2y_2(x) - 3y_1(x), y_2(x) - 2y_1(x))$ $(x \in \mathbb{R})$, $\mathbf{y}(0) = (-1, -1)$;
5. $\mathbf{y}'(x) = (y_2(x) - 1, y_1(x) + 1)$ $(x \in \mathbb{R})$, $\mathbf{y}(0) = (0{,}0)$;
6. $\mathbf{y}'(x) = (y_2(x)y_3(x), -y_1(x)y_3(x), 2)$ $(x \in \mathbb{R})$, $\mathbf{y}(0) = (0{,}1{,}0)$;
7. $y^{(4)} = y$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 0$, $y'''(0) = 0$;
8. $\mathbf{y}'(x) = (-y_1(x), y_1(x) - y_2(x), y_2(x) + e^{-x})$ $(x \in \mathbb{R})$, $\mathbf{y}(0) = (-1{,}0{,}0)$.

Útm.

7.5.10. feladat. Igazoljuk, hogy ha a $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deriválható függvényre

$$\varphi'(x) = x + \varphi(x) \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad \varphi(0) = 0$$

teljesül, akkor $\varphi \in \mathfrak{D}^\infty$, majd írjuk fel a φ függvény 0-körüli n-edik Taylor-polinomját! A Taylor-polinom felhasználásával számítsuk ki a $\varphi(1)$ helyettesítési értéket!

Útm. Világos, hogy $\varphi \in \mathfrak{D}^\infty$ és

$$\varphi^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & (n \in \{0; 1\}), \\ \\ 1 & (1 < n \in \mathbb{N}), \end{cases}$$

ui. $\varphi(0) = 0$, továbbá bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{array}{ll}
\varphi'(x) = x + \varphi(x), & \varphi'(0) = 0 + \varphi(0) = 0 + 0 = 0, \\
\varphi''(x) = 1 + \varphi'(x), & \varphi''(0) = \ldots = 1, \\
\varphi'''(x) = \varphi''(x), & \varphi'''(0) = \ldots = 1, \\
\varphi^{(4)}(x) = \varphi'''(x), & \varphi^{(4)}(0) = \ldots = 1, \\
\varphi^{(5)}(x) = \varphi^{(4)}(x), & \varphi^{(5)}(0) = \ldots = 1, \\
\vdots & \vdots
\end{array}$$

Így φ-nek a 0-körüli n-edik Taylor-polinomja:

$$T^{\varphi}_{0,n}(x) = \sum_{k=2}^{n} \frac{x^k}{k!} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Látható, hogy bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$T^{\varphi}_{0,n}(x) \longrightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x - x - 1 \qquad (n \to \infty).$$

Ezért

$$\varphi(x) = e^x - x - 1 \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ahonnan

$$\varphi(1) = e - 2$$

következik. ■

A 7.5.4. tételbeli állítás csak elégséges feltételt ad a (7.5.9) kezdetiérték-feladat egyértelműségére. Az

$$y'(x) = y(x) \cdot \ln(1/y(x)) \qquad (x \in \mathcal{D}_y), \qquad y(0) = \xi > 0,$$

ill. az

$$y' = 1 + \sqrt[3]{y^2}, \qquad y(0) = 0$$

kezdetiérték-feladat pl. egyértelműen megoldható (vö. 7.6.1. szakasz), viszont egyikre sem teljesül a 7.5.4. tételbeli feltétel, hiszen ha

$$f(x,y) := y \cdot \ln(1/y) \quad (y > 0), \qquad \text{ill.} \qquad f(x,y) := 1 + \sqrt[3]{y^2} \quad (y \in \mathbb{R}),$$

akkor f folytonos és

$$\partial_2 f(x,y) \equiv \ln(1/y) - 1 \to +\infty \quad (y \to 0), \qquad \text{ill.} \qquad \partial_2 f(x,y) \equiv \frac{2}{\sqrt[3]{y}} \to \pm\infty \quad (y \to \pm 0).$$

7.5.6. tétel. Legyen $\tau \in \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f \in \mathfrak{C}(I, \mathbb{R})$, és a $\xi \in I$ pont az f függvény izolált zérushelye, azaz $f(\xi) = 0$ és alkalmas $\varepsilon > 0$, ill. bármely

$$\xi \neq y \in (\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$$

esetén $f(y) \neq 0$. Ha valamely

$$\xi \neq \omega \in (\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$$

esetén az

$$\int_\xi^\omega \frac{1}{f} \tag{7.5.15}$$

improprius integrál divergens, akkor az

$$y' = f \circ y, \qquad y(\tau) = \xi, \tag{7.5.16}$$

kezdetiérték-feladat

$$\psi(x) := \xi \qquad (x \in \mathbb{R})$$

megoldása egyértelmű.

Biz. Ha $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény a (7.5.16) Cauchy-feladat nem állandó (ψ-től különböző) megoldása, akkor φ folytonossága miatt alkalmas

$$\xi \neq \omega \in (\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$$

esetén van olyan $\tau \neq T \in \mathbb{R}$, hogy $\varphi(T) = \omega$. Így, ha $\omega > \xi$ és $T > \tau$ (többi három eset, azaz $T < \tau, \omega > \xi$; $T > \tau, \omega < \xi$; $T < \tau, \omega < \xi$ hasonlóan tárgyalható), akkor

$$f(y) \neq 0 \qquad (y \in (\xi, \omega])$$

és

$$\frac{\varphi'}{f \circ \varphi}(x) = 1 \qquad (x \in (\tau^*, T]),$$

ahol

$$\tau^* := \sup\{x \in [\tau, T] : \ \varphi(x) = \xi\}.$$

Így mindkét oldalt integrálva azt kapjuk, hogy

$$\int_{\varphi(x)}^{\omega} \frac{1}{f(u)}\,\mathrm{d}u \overset{u:=\varphi(s)}{=} \int_x^T \frac{\varphi'(s)}{f(\varphi(s))}\,\mathrm{d}s = \int_x^T \frac{\varphi'(s)}{(f\circ\varphi)(s)}\,\mathrm{d}s = T - x \qquad (x \in (\tau^*, T)).$$

φ folytonossága miatt

$$\varphi(x) \longrightarrow \varphi(\tau^*) = \xi \qquad (x \to \tau^*).$$

Ez pedig ellentmond annak, hogy a (7.5.15) improprius integrál divergens, hiszen f folytonossága miatt $1/f$ nem vált előjelet, így a (7.5.15) improprius integrál divergenciája azt jelenti, hogy

$$\left|\int_\xi^\omega \frac{1}{f}\right| = +\infty. \quad \blacksquare$$

7.6. Elemi úton integrálható differenciálegyenletek

7.6.1. Két nagyon egyszerű d.e.-típus

7.6.1. feladat. Adott $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, ill. $f : I \to \mathbb{R}$ folytonos függvény esetén adjunk meg olyan $\varphi : I \to \mathbb{R}$ deriválható függvényt, amely eleget tesz a $\varphi' = f$ egyenlőségnek!

Útm. Az integrálszámításból tudjuk , hogy csak azok a φ függvények tesznek eleget a $\varphi' = f$ egyenlőségnek, amelyek így írhatók:

$$\varphi(x) = \int_\tau^x f(s)\,\mathrm{d}s + c \qquad (x \in I)$$

(**Barrow**[4]**-formula**), ahol $\tau \in I$ és $c \in \mathbb{R}$. ■

Az is viszonylag egyszerűen látható be, hogy a fenti φ függvény esetében

$$\varphi(\tau) = \xi \qquad \Longleftrightarrow \qquad \boxed{\varphi(x) = \int_\tau^x f(s)\,\mathrm{d}s + \xi \qquad (x \in I)},$$

azaz φ teljes megoldása az

$$y'(t) = f(t) \quad (t \in I), \qquad y(\tau) = \xi \tag{7.6.1}$$

kezdetiérték-feladatnak.

7.6.1. példa. A deriválható $\varphi : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor teljes megoldása az

$$y' = \ln, \qquad y(1) = 0$$

kezdetiérték-feladatnak, ha

$$\varphi(x) = x\ln(x) - x + 1 \qquad (0 < x \in \mathbb{R}).$$

7.6.2. példa. A deriválható $\varphi : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor teljes megoldása az

$$y'(x) = -\frac{1}{x^2} \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) \quad (0 < x \in \mathbb{R}), \qquad y\left(\frac{1}{\pi}\right) = 0$$

kezdetiérték-feladatnak, ha

$$\varphi(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (0 < x \in \mathbb{R}).$$

[4] Isaac Barrow $(1630 - 1677)$, Newton tanára.

Szintén az elemi analízisből ismeretes, hogy ha $\varphi \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan deriválható függvény, amelyre $\mathcal{D}_\varphi$ intervallum,

$$\varphi'(x) \neq 0 \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi),$$

akkor φ invertálható, és inverzének deriváltjára

$$\left(\varphi^{-1}\right)' = \frac{1}{\varphi' \circ \varphi^{-1}} \qquad \Big/ \left(\varphi^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(y))} = \frac{1}{\varphi'(x)} \quad (y \in \mathcal{R}_\varphi : \; \varphi(x) = y) \Big/ .$$

teljesül. Sőt azt is tudjuk, hogy $\mathcal{R}_\varphi =: I$ intervallum, így tehát ha f olyan függvény, amelyre

$$f \in \mathfrak{C}(I, \mathbb{R}), \qquad f(y) \neq 0 \quad (y \in I),$$

és a φ függvényre

$$\varphi' = f(\varphi), \qquad \varphi(\tau) = \xi, \tag{7.6.2}$$

akkor a $\psi := \varphi^{-1}$ inverzre

$$\psi'(y) = \frac{1}{f(y)} \quad (y \in I), \qquad \psi(\xi) = \tau \tag{7.6.3}$$

teljesül, és ez fordítva is igaz: (7.6.2) és (7.6.3) ekvivalensek. Így a korábbiak értelmében

$$\boxed{\psi(y) = \int_\xi^y \frac{1}{f(s)}\, \mathrm{d}s + \tau \quad (y \in I)}.$$

7.6.2. feladat. Adott $\tau, \xi \in \mathbb{R}$ esetén határozzuk meg az

$$y' = 1 + y^2, \qquad y(\tau) = \xi \tag{7.6.4}$$

kezdetiérték-feladat teljes megoldását!

Útm. Ha

$$f(y) := 1 + y^2 \qquad (y \in \mathbb{R}),$$

akkor a (7.6.4) kezdetiérték-feladat ekvivalens az

$$x'(y) = \frac{1}{1 + y^2} \quad (y \in \mathbb{R}), \qquad x(\xi) = \tau$$

kezdetiérték-feladattal, amelynek ψ teljes megoldására:

$$\psi(y) = \int_\xi^y \frac{1}{1 + s^2}\, \mathrm{d}s + \tau = \operatorname{arctg}(y) - \operatorname{arctg}(\xi) + \tau \qquad (y \in \mathbb{R}).$$

Így tehát (7.6.4) teljes megoldása a

$$\varphi(x) = \psi^{-1}(x) = \operatorname{tg}(x - \tau + \operatorname{arctg}(\xi)) \qquad \left(x \in \mathbb{R} : \; |x - \tau + \operatorname{arctg}(\xi)| < \frac{\pi}{2}\right).$$

függvény. ■

7.6.1. definíció. Valamely populáció létszámváltozását leíró

$$\dot{N} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) \tag{7.6.5}$$

differenciálegyenletet klasszikus **logisztikus differenciálegyenlet**nek nevezzük, ahol $r > 0$ jelöli a **növekedési rátát**, $K > 0$ pedig a **környezet eltartóképességét**.

7.6.3. feladat. Adott $a, b, \xi \in \mathbb{R}$: $a > 0$, $b > 0$, $\xi \geq 0$ esetén határozzuk meg az

$$\dot{N} = aN - bN^2, \qquad N(0) = \xi \tag{7.6.6}$$

ún. **logisztikus kezdetiérték-feladat** φ megoldását, majd vizsgáljuk meg a φ megoldás aszimptotikáját! Szemléltessük az integrálgörbéket és a trajektóriákat!

Útm. Világos, hogy ha

$$a\xi - b\xi^2 = \xi(a - b\xi) = 0, \qquad \text{azaz} \qquad \xi \in \left\{0, \frac{a}{b}\right\},$$

akkor a

$$\varphi(t) := \xi \qquad (t \in [0, +\infty))$$

függvény megoldása a (7.6.6) kezdetiérték-feladatnak, továbbá $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t) = \xi$. Ez a megoldás egyértelmű, hiszen tetszőleges $\omega \in (0, a/b)$ esetén

$$\begin{aligned}\int_\xi^\omega \frac{1}{as - bs^2}\,\mathrm{d}s &= \frac{1}{a}\lim_{\alpha\to\xi}\int_\alpha^\omega \frac{1}{s\left(1 - \frac{b}{a}s\right)}\,\mathrm{d}s = \frac{b}{a}\lim_{\alpha\to\xi}\int_\alpha^\omega \left\{\frac{1}{bs} + \frac{1}{a - bs}\right\}\mathrm{d}s = \\ &= \frac{1}{a}\lim_{\alpha\to\xi}\left[\ln(bs) - \ln(a - bs)\right]_\alpha^\omega = \begin{cases} +\infty & (\xi = 0), \\ \\ -\infty & (\xi = a/b).\end{cases}\end{aligned}$$

Ha

$$f(N) := aN - bN^2 \quad (N \in I), \qquad \text{ill.} \qquad \xi \in I,$$

ahol

$$I := \left(0, \frac{a}{b}\right) \qquad \text{vagy} \qquad I := \left(\frac{a}{b}, +\infty\right),$$

akkor $f : I \to \mathbb{R}$ folytonos,

$$f(N) \neq 0 \qquad (N \in I),$$

így a (7.6.6)-beli kezdetiérték-feladat φ teljes megoldása invertálható és $\psi := \varphi^{-1}$ inverze a

$$t'(N) = \frac{1}{f(N)} \qquad (N \in I), \qquad t(\xi) = 0$$

kezdetiérték-feladat teljes megoldása:

$$\psi(N) = \int_\xi^N \frac{1}{s(a - bs)}\,\mathrm{d}s + 0 = \frac{1}{a}\int_\xi^N \frac{bs + (a - bs)}{s(a - bs)}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{a}\left[\ln\left(\frac{s}{|a - bs|}\right)\right]_\xi^N \qquad (N \in I),$$

ahonnan $I := (0, a/b)$, ill. $I := (a/b, +\infty)$ esetén

$$\boxed{\varphi(t) = \psi^{-1}(t) = \frac{a\xi}{b\xi + (a - b\xi)e^{-at}} \qquad (t \in [0, +\infty))} \tag{7.6.7}$$

következik. Látható, hogy

$$\lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = \frac{a\xi}{b\xi} = \frac{a}{b}.$$

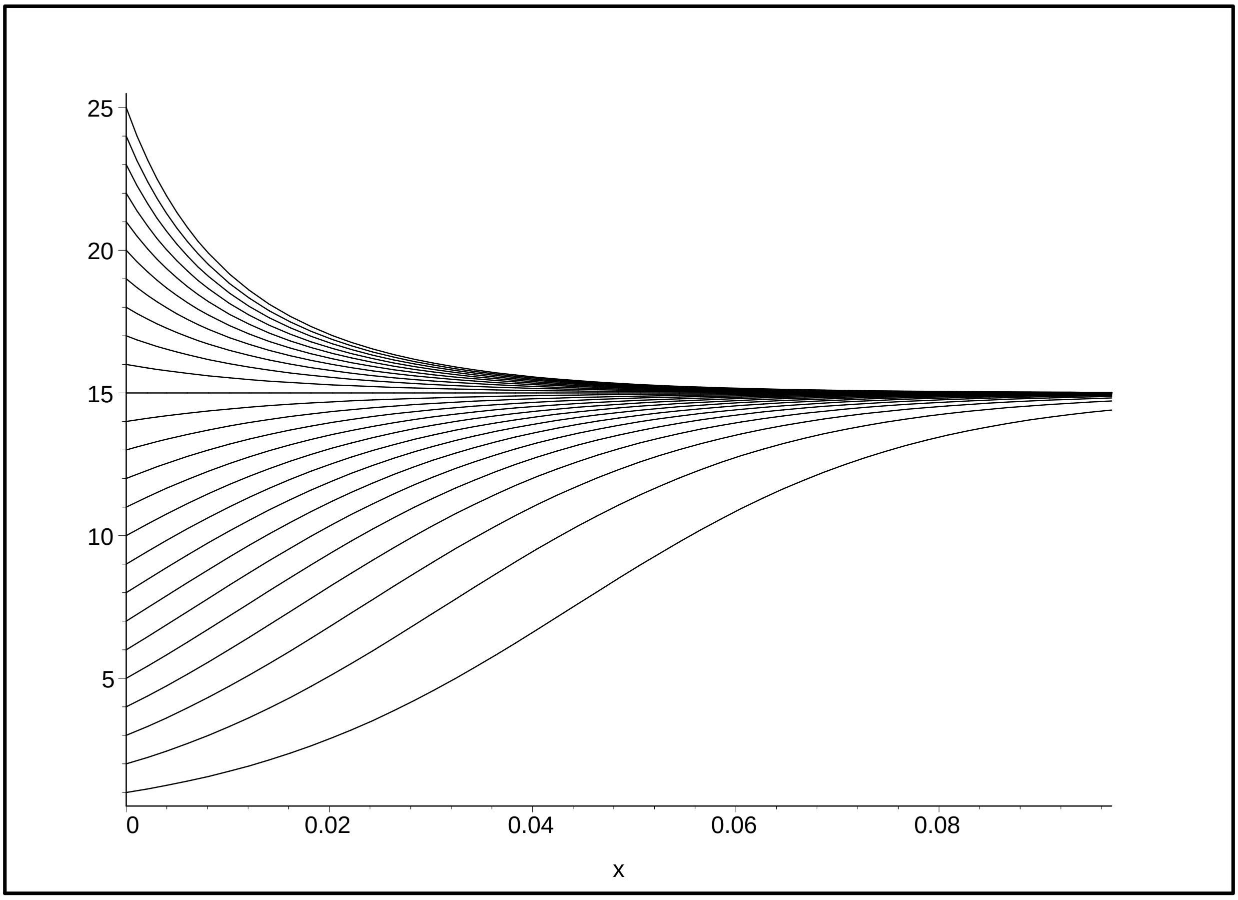
A megoldás (7.6.7) alakjából az is látható (vö. 7.6.1. ábra), hogy

1. ha $\xi \in \left(\frac{a}{b}, +\infty\right)$, akkor φ szigorúan monoton csökkenő és alulról korlátos, ui. ekkor

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{a^2\xi(a - b\xi)e^{-at}}{[b\xi + (a - b\xi)e^{-at}]^2} < 0 \quad (t \in [0, +\infty)) \qquad \text{és} \qquad \lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = \frac{a}{b}$$

2. $\xi \in \left(0, \frac{a}{b}\right)$, akkor φ szigorúan monoton növekedő és felülről korlátos, ui. ekkor

$$\dot{\varphi}(t) > 0 \quad (t \in [0, +\infty)) \qquad \text{és} \qquad \lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = \frac{a}{b}. \quad \blacksquare$$



7.6.1. ábra.

7.6.4. feladat. Adott $\tau, \xi \in \mathbb{R}$ esetén vizsgáljuk az

$$y' = \sqrt{|y|}, \qquad y(\tau) = \xi \tag{7.6.8}$$

kezdetiérték-feladatot!

Útm. (7.6.8) megoldható, hiszen ha $\xi = 0$, akkor a

$$\varphi(x) := 0 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény nyilván megoldás; ha viszont $\xi \neq 0$, akkor

– $\xi > 0$ esetén az

$$y' = f_+(y) := \sqrt{y}, \qquad y(\tau) = \xi \tag{7.6.9}$$

k.é.f. minden megoldása nyilván (7.6.8)-nek is megoldása, ahol a jobb oldal $f_+ : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ függvény. A korábbiak alapján a (7.6.9) k.é.f. teljes megoldása a

$$\psi_+(y) := \int_\xi^y \frac{1}{\sqrt{s}}\,\mathrm{d}s + \tau = 2(\sqrt{y} - \sqrt{\xi}) + \tau \qquad (y \in (0, +\infty))$$

függvény inverze:

$$\varphi_+(x) := \left(\sqrt{\xi} + \frac{x - \tau}{2}\right)^2 \qquad \left(x \in \left(\tau - 2\sqrt{\xi}, +\infty\right)\right).$$

– $\xi < 0$ esetén az

$$y' = f_-(y) := \sqrt{-y}, \qquad y(\tau) = \xi \tag{7.6.10}$$

k.é.f. minden megoldása nyilván (7.6.8)-nek is megoldása, ahol a jobb oldal $f_- : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$ függvény. A korábbiak alapján a (7.6.10) k.é.f. teljes megoldása a

$$\psi_-(y) := \int_\xi^y \frac{1}{\sqrt{-s}}\,\mathrm{d}s + \tau = 2(\sqrt{-\xi} - \sqrt{-y}) + \tau \qquad (y \in (-\infty, 0))$$

függvény inverze:

$$\varphi_-(x) := \left(\sqrt{-\xi} - \frac{x - \tau}{2}\right)^2 \qquad \left(x \in \left(-\infty, \tau + 2\sqrt{-\xi}\right)\right).$$

Világos, hogy tetszőleges $k \in \{0, 1\}$ esetén

$$\lim_{x \downarrow (\tau - 2\sqrt{\xi})} \varphi_+^{(k)}(x) = 0 = \lim_{x \uparrow (\tau + 2\sqrt{-\xi})} \varphi_-^{(k)}(x).$$

Így az első, ill. a második esetben kapott (félparabola grafikonú) megoldásokat összekapcsolva ismét megoldáshoz jutunk (vö. **??**. ábra).
A (7.6.8) kezdetiérték-feladattal kapcsolatban tehát a következő mondható el:

– (7.6.8) megoldása semmilyen ξ esetén nem egyértelmű, hiszen tetszőleges ξ esetén végtelen sok olyan megoldás van, amely grafikonja átmegy a (τ, ξ) ponton.

– ha $\xi \neq 0$, akkor (7.6.8) megoldása lokálisan egyértelmű, hiszen ebben az esetben egyetlen olyan megoldása van, amelynek grafikonja (félparabola) átmegy (τ, ξ) ponton.

– ha $\xi = 0$, akkor (7.6.8) megoldása lokálisan sem egyértelmű, hiszen az azonosan ξ függvény megoldása a kezdetiérték-feladatnak, másrészt az összekapcsolt megoldásokból kiválasztható olyan függvény, amely az előbbivel a τ pont egyetlen környezetében sem egyezhet meg. ■

7.6.5. feladat. Írjuk le valamely $m > 0$ tömegű anyagi pontnak a Föld nehézségi erőterében történő mozgását!

Útm. A Newton-féle mozgástörvények szerint a pont mozgását az

$$m\ddot{x} = 0, \qquad m\ddot{y} = 0, \qquad m\ddot{z} = -mg$$

differenciálegyenlet-rendszer írja le, ahol g jelöli a nehézségi gyorsulást x, y, ill. z pedig a tömegpont helyzetének koordinátáit (olyan koordináta-rendszert használunk, amelynek z tengelyét a nehézségi erővel párhuzamosnak, de ellentétes irányúnak választjuk). Így, ha $I := [0, \omega)$ jelöli a mozgás időintervallumát, akkor bármely $t \in I$ esetén

$$\begin{aligned} \ddot{z}(t) = -g \quad &\Longrightarrow \quad \int_0^t \ddot{z}(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^t -g\,\mathrm{d}s \qquad \Longrightarrow \quad \dot{z}(t) - \dot{z}(0) = -gt \\ &\Longrightarrow \quad \int_0^t \dot{z}(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^t (\dot{z}(0) - gs)\,\mathrm{d}s \quad \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow \quad z(t) = z(0) + \dot{z}(0)t - \frac{1}{2}gt^2, \end{aligned}$$

és hasonlóan

$$x(t) = x(0) + \dot{x}(0)t, \qquad \text{ill.} \qquad y(t) = y(0) + \dot{y}(0)t.$$

Megjegyzések.

– Ezzel igazoltuk Galilei 1683-ban megfogalmazott állítását, miszerint „a nyugalmi helzetből induló szabadon eső test által egyenlő időközönként megtett távolságok úgy aránylanak egymáshoz, mint a páratlan számok, 1-től kezdődően”, hiszen a nyugalmi helyzetből induló anyagi pont esetén

$$\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = \dot{z}(0) = 0,$$

így a szabadon eső test az első Δt idő alatt

$$s_1 = \frac{1}{2}g(\Delta t)^2$$

távolságot tesz meg, továbbá az n-edik Δt idő alatt megtett út:

$$s_n = \frac{1}{2}g(n\Delta t)^2 - \frac{1}{2}g((n-1)\Delta t)^2 = \frac{1}{2}g(\Delta t)^2(2n-1),$$

ezért tetszőleges $m, n \in \mathbb{N}$ esetén a megtett utak aránya:

$$\frac{s_m}{s_n} = \frac{2m-1}{2n-1}.$$

– Eredményünk azt is jelenti, hogy nehézségi erő hatására a mozgás mindig a függőleges (z-vel párhuzamos) síkban megy végbe, hiszen

$$\dot{y}(0)x(t) - \dot{x}(0)y(t) + \dot{x}(0)y(0) - \dot{y}(0)x(0) = 0 \qquad (t \in I),$$

így az

$$A := \dot{y}(0), \qquad B := -\dot{x}(0), \qquad C := \dot{x}(0)y(0) - \dot{y}(0)x(0)$$

jelöléssel a mozgás egy

$$Ax + By + C = 0$$

egyenletű (függőleges) síkban történik.

– Ha

$$x(0) = y(0) = z(0) = 0,$$

azaz az anyagi pont $t = 0$-kor a koordinátarendszer kezdőpontjában van, és a

$$(\dot{x}(0), \dot{y}(0), \dot{z}(0)) = v(0)$$

(kezdősebesség)vektor pedig az (xz)-síkban van és az x-tengellyel α szöget zár be, akkor

$$\dot{x}(0) = \|v(0)\|\cos(\alpha), \qquad \dot{y}(0) = 0, \qquad \dot{z}(0) = \|v(0)\|\sin(\alpha).$$

Így tetszőleges $t \in I$ esetén

$$x(t) = \|v(0)\|\cos(\alpha)t, \qquad y(t) = 0, \qquad z(t) = \|v(0)\|\sin(\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2. \tag{7.6.11}$$

A mozgás pályáját úgy kaphatjuk meg, hogy kiküszöböljük t-t:

$$z = -\frac{g}{2\|v(0)\|^2\cos^2(\alpha)}x^2 + x\mathrm{tg}\,(\alpha).$$

Ez pedig egy parabola egyenlete. A tömegpont tehát egy ideig emelkedik, majd a pálya második szakaszán lefelé esik. Az emelkedés t_e idejét úgy számíthatjuk ki, hogy ebben az időpontban a sebesség párhuzamos az x-tengellyel, tehát a z-komponens zérus:

$$-gt_e + \|v(0)\|\sin(\alpha) = 0,$$

amiből

$$t_e = \frac{\|v(0)\|\sin(\alpha)}{g}.$$

A mozgás ideje ennek kétszerese: $t_m = 2t_e$. Az emelkedés h magassága t_e-nek (7.6.11)-be való helyettesítésével számítható ki:

$$h = \frac{\|v(0)\|^2\sin(2\alpha)}{2g}.$$

A hajítás d távolságára (7.6.11) első komponenséből azt kapjuk, hogy

$$d = \frac{\|v(0)\|^2\sin(2\alpha)}{g}.$$

Ebből látszik, hogy adott $v(0)$ esetén d az $\alpha = 45°$-nál lesz maximális. ∎

7.6.6. feladat. Írjuk le annak az első tengelyen fekvő egységnyi hosszúságú, $(0,0)$, ill. $(1,0)$ végpontú nyújthatalan rúd jobb oldali végpontjának mozgását, amelynek bal oldali végpontját a második tengely mentén mozgatjuk, pozitív irányban, azaz adjunk példát olyan $\varphi : [0,1) \to \mathbb{R}^2$ függvényre, amelynek $\mathcal{R}_\varphi$ értékkészletére, azaz az

$$\left\{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2 : \ \mathbf{r} = \varphi(t), \ t \in [0,1)\right\}$$

görbére az alábbi két állítás teljesül!

– $(1,0) \in \mathcal{R}_\varphi$.

– Tetszőleges $t \in [0,1)$ esetén a $\varphi(t)$-beli érintőegyenes olyan pontban metszi a második tengelyt, amelynek $\varphi(t)$-től vett távolsága állandó: 1.

Útm. Alkalmas $\alpha, \beta : [0,1) \to \mathbb{R}$ sima függvények esetén a rúd bal, ill. jobb oldali végpontja a

$$\mathbf{b}(t) := (0, \beta(t)) \quad (t \in [0,1))$$

ill. a

$$\varphi(t) := (1-t, \alpha(t)) \quad (t \in [0,1))$$

függvények értékkészletét járja be, ha a t paraméternek az adott pont első tengelyre való vetületének az $(1,0)$ ponttól mért távolságát választjuk. Az érintőfeltételből:

$$\mathbf{b}(t) - \varphi(t) = \frac{\varphi'(t)}{\|\varphi'(t)\|} \qquad (t \in [0,1)), \tag{7.6.12}$$

azaz az első komponensek egyenlőségéből

$$1 - t = \frac{1}{\sqrt{1 + [\alpha'(t)]^2}} \qquad (t \in [0,1))$$

vagy

$$[\alpha'(t)]^2 = \frac{1}{(1-t)^2} - 1 = \frac{2t - t^2}{(1-t)^2} \qquad (t \in [0,1))$$

ill.

$$\alpha'(t) = \frac{\sqrt{2t - t^2}}{1 - t} \qquad (t \in [0,1))$$

adódik. Világos, hogy α' pozitív előjelű, ui. (7.6.12) következtében

$$\beta(t) - \alpha(t) = \frac{\alpha'(t)}{\sqrt{1 + [\alpha'(t)]^2}} \quad \text{és} \quad \beta(t) > \alpha(t) \qquad (t \in [0,1)).$$

Így, ha $t \in [0,1)$, akkor $\alpha(0) = 0$ figyelembevételével

$$\alpha(t) = \int_0^t \frac{\sqrt{2s - s^2}}{1 - s}\, \mathrm{d}s \qquad (t \in [0,1)).$$

Az $u := 1 - s$ helyettesítéssel így tetszőleges $t \in [0,1)$ esetén

$$\begin{aligned}
\alpha(t) &= \int_1^{1-t} \frac{\sqrt{1-u^2}}{u}(-1)\,\mathrm{d}u = \int_{1-t}^1 \frac{\sqrt{1-u^2}}{u}\,\mathrm{d}u = \int_{1-t}^1 \frac{1-u^2}{u\sqrt{1-u^2}}\,\mathrm{d}u = \\
&= \int_{1-t}^1 \left(\frac{1}{u\sqrt{1-u^2}} - \frac{u}{\sqrt{1^2-u^2}}\right)\mathrm{d}u = \int_{1-t}^1 \left(\frac{1}{u^2\sqrt{\frac{1}{u^2}-1}} - \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right)\mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

Ismét helyettesítve: $v := 1/u$, ill. $w := u^2$, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\alpha(t) &= \int_{\frac{1}{1-t}}^1 \frac{-1}{\sqrt{v^2-1}}\,\mathrm{d}v - \int_{(1-t)^2}^1 \frac{\sqrt{w}}{\sqrt{1-w}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{w}}\,\mathrm{d}w = \\
&= \int_1^{\frac{1}{1-t}} \frac{1}{\sqrt{v^2-1}}\,\mathrm{d}v - \frac{1}{2}\int_{(1-t)^2}^1 \frac{1}{\sqrt{1-w}}\,\mathrm{d}w = \\
&= \mathrm{arch}\left(\frac{1}{1-t}\right) - \sqrt{2t-t^2} \qquad (t\in[0,1)). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Megjegyzés. Az így adódó görbét szokás **traktrix**nak, **kutyagörbének**,[5] **vonszolási görbének**[6] vagy **üldözési görbéknek** is nevezni. Alkalmazása pl. a közlekedés-tervezésben ... ■

7.6.7. feladat. Írjuk le a nyugvónak képzelt Föld középpontjától x $(> R > 0)$ távolságban lévő m (> 0) tömegű anyagi pontnak a mozgását, ha a levegő ellenállásától eltekintünk: rá csak a gravitációs (ill. a nehézségi) erő hat!

Útm. Az anyagi pont mozgásegyenlete:

$$mx'' = -\gamma\frac{mM}{x^2}, \tag{7.6.13}$$

ahol M (> 0) a Föld tömege[7], γ (> 0) pedig a gravitációs állandó[8]. Így, ha $I := [0,\omega]$ jelöli a mozgás időintervallumát, akkor bármely $t \in I$ esetén

$$\begin{aligned}
\int_0^t \ddot{x}(s)\dot{x}(s)\,\mathrm{d}s &= -\gamma M\int_0^t \frac{\dot{x}(s)}{(x(s))^2}\,\mathrm{d}s \\
\Longrightarrow \qquad \frac{(\dot{x}(t))^2}{2} &= \frac{(\dot{x}(0))^2}{2} + \gamma M\left(\frac{1}{x(t)} - \frac{1}{x(0)}\right) \\
\Longrightarrow \qquad (\dot{x}(t))^2 &= (\dot{x}(0))^2 + 2\gamma M\left(\frac{1}{x(t)} - \frac{1}{x(0)}\right).
\end{aligned}$$

[5] A traktrixot Huygens nevezte kutyagörbének, mert ha a vonakodó kutyát pórázon húzzuk a második tengely mentén, akkor a kutya traktrix mentén mozog.
[6] A latin *traho* jelentése: 'vonszol'.
[7] A Föld tömege $M \approx 5.97\cdot 10^{24}\ kg$.
[8] $\gamma \approx 6.67\cdot 10^{11}\ \frac{m^3}{kgs^2}$.

Ezért egy igen nagy távolságból eső anyagi pont (pl. meteor) végsebessége a Földre érkezéskor (az „$x(0) = +\infty$”, $\dot{x}(0) = 0$ feltételek figyelembevételével)

$$x(\omega) = R \quad\Longrightarrow\quad \dot{x}(\omega) = \sqrt{\frac{2\gamma M}{R}} \approx 11.18\,\frac{km}{s}.\text{[9]} \quad \blacksquare$$

7.6.8. feladat. Határozzuk meg annak a v_0 (≥ 0) kezdősebességgel függőlegesen lefelé indított m (> 0) tömegű anyagi pontnak a sebességét az idő függvényében, amelyre csak a **nehézségi erő** és **közegellenállás** vagy **súrlódási erő** hat!

Útm. A tapasztalat szerint a közegellenállás a test alakjától és sebességétől függ, közelebbi meghatározása az áramló közegek dinamikájának egyik nehéz problémája (vö. [**?**]). A súrlódási erő iránya az anyagi pont sebességével ellentétes, az erő nagysága pedig, $F(v)$, igen kicsiny testek és kis v sebességek esetén a v sebességgel, egyébként pedig – így közönséges testeknek levegőben való mozgásánál – közelítőleg a v^2-tel arányosnak vehető.[10] A közegellenállás figyelembevételével tehát az esés mozgásegyenlete (a lefelé mutató irányt véve pozitívnak, és mg-n az Archimédesz-féle felhajtóerővel csökkentett súlyt értve[11]):

$$m\dot{v} = mg - F(v). \tag{7.6.14}$$

Ha α (> 0) jelöli a közegellenállással kapcsolatos arányossági tényezőt, az eső test sebesség-idő-függvénye a következő kezdetiérték-feladatnak lesz a megoldása:

– $F(v) \equiv \alpha v$ esetén („**lineáris ellenállástörvény**”):

$$m\dot{y} = mg - \alpha y, \qquad y(0) = v_0 \geq 0. \tag{7.6.15}$$

Világos, hogy ha $v_0 := \kappa := \dfrac{mg}{\alpha}$, akkor a

$$v(t) := \kappa \qquad (t \in \mathbb{R})$$

függvény megoldása a (7.6.15) kezdetiérték-feladatnak, és ez a megoldás egyértelmű, hiszen ha $\omega \in [0, +\infty)\colon \omega \neq \kappa$, akkor

$$\begin{aligned}\int_\kappa^\omega \frac{1}{g - (\alpha/m)s}\,\mathrm{d}s &= \frac{1}{g}\lim_{\alpha\to\kappa}\int_\alpha^\omega \frac{1}{1-\frac{s}{\kappa}}\,\mathrm{d}s = -\frac{\kappa}{g}\lim_{\alpha\to\kappa}\left[\ln\left(\left|1-\frac{s}{\kappa}\right|\right)\right]_\alpha^\omega = \\ &= \frac{\kappa}{g}\lim_{\alpha\to\kappa}\left\{\ln\left(\left|1-\frac{\alpha}{\kappa}\right|\right) - \ln\left(\left|1-\frac{\omega}{\kappa}\right|\right)\right\} = -\infty.\end{aligned}$$

Ha

$$f(y) := g - \frac{\alpha}{m}y = g\left(1 - \frac{y}{\kappa}\right) \qquad (y \in I),$$

[9] A Föld sugara $R \approx 6.37 \cdot 10^3\ km$.

[10] Pl. kis $r > 0$ sugarú gömb esetében a **Stokes-féle hidrodinamikai ellenállástörvény** szerint $F(v) = 6\pi\eta r v$, ahol η a közeg belső súrlódási együtthatója (**viszkozitás**a).

[11] Ha ρ a testnek, $\tilde{\rho}$ a levegőnek a sűrűsége, akkor a felhajtóerő a test súlyának $\tilde{\rho}/\rho$-szorosa, azaz a csökkentett súly: $mg(1 - \tilde{\rho}/\rho)$. Ez az eltérés azonban legtöbbször jelentéktelen (pl. normális sűrűségű levegőben eső vasdarab esetén csak 0.02%).

ill. $v_0 \in I$, ahol $I := [0, \kappa)$ vagy $I := (\kappa, \underline{\underline{c}})$,[12] akkor

$$f \in \mathfrak{C}(I, \mathbb{R}), \qquad f(y) \neq 0 \quad (y \in I),$$

így a (7.6.15)-beli kezdetiérték-feladat v teljes megoldásának $\psi := v^{-1}$ inverze az

$$x'(y) = \frac{1}{f(y)} \qquad (y \in I), \qquad x(v_0) = 0$$

k.é.f. teljes megoldása:

$$\psi(y) = \frac{1}{g} \int_{v_0}^{y} \frac{1}{1 - \frac{s}{\kappa}} \, \mathrm{d}s + 0 = \frac{\kappa}{g} \left\{ \ln \left(\left| 1 - \frac{v_0}{\kappa} \right| \right) - \ln \left(\left| 1 - \frac{y}{\kappa} \right| \right) \right\} \qquad (y \in I),$$

ahonnan $I := [0, \kappa)$, ill. $I := (\kappa, \underline{\underline{c}})$ esetén

$$v(t) = \psi^{-1}(t) = \kappa \left\{ 1 - \exp \left(\ln \left(1 - \frac{v_0}{\kappa} \right) - \frac{gt}{\kappa} \right) \right\} \qquad (t \in [0, +\infty)),$$

ill.

$$v(t) = \psi^{-1}(t) = \kappa \left\{ 1 + \exp \left(\ln \left(\frac{v_0}{\kappa} - 1 \right) - \frac{gt}{\kappa} \right) \right\} \qquad (t \in [0, +\infty)).$$

Látható, hogy tetszőleges v_0 $(\in [0, \underline{\underline{c}}))$ esetén

$$v_\infty := \lim_{t \to +\infty} v(t) = \kappa = \frac{mg}{\alpha}, \tag{7.6.16}$$

azaz kellően nagy idő elteltével az anyagi pont sebessége közelítőleg κ lesz.

– $F(v) \equiv \alpha v^2$ esetén („**négyzetes ellenállástörvény**”):

$$m\dot{y} = mg - \alpha y^2, \qquad y(0) = v_0 \geq 0. \tag{7.6.17}$$

Világos, hogy ha $v_0 := \kappa := \sqrt{\dfrac{mg}{\alpha}}$, akkor a

$$v(t) := \kappa \qquad (t \in [0, +\infty))$$

függvény megoldása a (7.6.17) kezdetiérték-feladatnak, és ez a megoldás egyértelmű, hiszen ha $\omega \in [0, +\infty)$: $\omega \neq \kappa$, akkor

$$\begin{aligned}
\int_{\kappa}^{\omega} \frac{1}{g - (\alpha/m)s^2} \, \mathrm{d}s &= \frac{1}{g} \int_{\kappa}^{\omega} \frac{1}{1 - \left(\frac{s}{\kappa}\right)^2} \, \mathrm{d}s = \frac{1}{g} \lim_{\alpha \to \kappa} \int_{\alpha}^{\omega} \frac{1}{1 - \left(\frac{s}{\kappa}\right)^2} \, \mathrm{d}s = \\
&= \frac{\kappa}{g} \lim_{\alpha \to \kappa} \left[\mathrm{ar(c)th} \left(\frac{s}{\kappa} \right) \right]_{\alpha}^{\omega} = \\
&= \frac{\kappa}{g} \lim_{\alpha \to \kappa} \left\{ \mathrm{ar(c)th} \left(\frac{\omega}{\kappa} \right) - \mathrm{ar(c)th} \left(\frac{\alpha}{\kappa} \right) \right\} = -\infty.
\end{aligned}$$

Ha

$$f(y) := g - \frac{\alpha}{m} y^2 = g \left(1 - \frac{y^2}{\kappa^2} \right) \qquad (y \in I),$$

[12] $c \approx 3 \cdot 10^8 \; m/s$ a fény sebessége vákuumban. A (7.6.14) mozgásegyenlet csak olyan v sebességekre érvényes, amelyek c-vel nem összemérhetők.

ill. $v_0 \in I$, ahol $I := [0, \kappa)$ vagy $I := (\kappa, \underset{\equiv}{c})$, akkor

$$f \in \mathfrak{C}(I), \qquad f(y) \neq 0 \quad (y \in I),$$

így a (7.6.17)-beli kezdetiérték-feladat v teljes megoldásának $\psi := v^{-1}$ inverze a

$$x'(y) = \frac{1}{f(y)} \qquad (y \in I), \qquad x(v_0) = 0$$

k.é.f. teljes megoldása:

$$\psi(y) = \frac{1}{g}\int_{v_0}^{y} \frac{1}{1-\left(\frac{s}{\kappa}\right)^2}\,\mathrm{d}s + 0 = \frac{\kappa}{g}\left\{\mathrm{ar(c)th}\left(\frac{y}{\kappa}\right) - \mathrm{ar(c)th}\left(\frac{v_0}{\kappa}\right)\right\} \qquad (y \in I),$$

ahonnan $I := [0, \kappa)$, ill. $I := (\kappa, \underset{\equiv}{c})$ esetén

$$v(t) = \psi^{-1}(t) = \kappa \mathrm{cth}\left(\frac{gt}{\kappa} + \mathrm{arth}\left(\frac{v_0}{\kappa}\right)\right) \qquad (t \in [0, +\infty)),$$

ill.

$$v(t) = \psi^{-1}(t) = \kappa \mathrm{th}\left(\frac{gt}{\kappa} + \mathrm{arcth}\left(\frac{v_0}{\kappa}\right)\right) \qquad (t \in [0, +\infty)).$$

Látható, hogy tetszőleges v_0 $(\in [0, \underset{\equiv}{c}))$ esetén

$$v_\infty := \lim_{t \to +\infty} v(t) = \kappa = \sqrt{\frac{mg}{\alpha}}, \tag{7.6.18}$$

azaz kellően nagy idő elteltétevel az anyagi pont sebessége közelítőleg κ lesz. ■

7.6.9. feladat. Adott $\mathbf{0} \neq \boldsymbol{\omega}, \mathbf{e} \in \mathbb{R}^3$: $\|\mathbf{e}\| = 1$ vektorok esetén jellemezzük annak a $\boldsymbol{\varphi} \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ mozgásnak a pályáját, amelyre fennállnak az alábbi egyenlőségek!

1. $\boldsymbol{\varphi}' = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\varphi}$;
2. $\boldsymbol{\varphi}' = \mathbf{e} \times (\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{e})$.

Útm.

1. Az egyenlőséget skalárisan megszorozva $\boldsymbol{\omega}$-val, ill. $\boldsymbol{\varphi}$-vel azt kapjuk, hogy

$$\langle \boldsymbol{\varphi}', \boldsymbol{\omega} \rangle = \langle \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\omega} \rangle = 0, \qquad \text{ill.} \qquad \langle \boldsymbol{\varphi}', \boldsymbol{\varphi} \rangle = \langle \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varphi} \rangle = 0,$$

ahonnan alkalmas $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén

$$\langle \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\omega} \rangle = \alpha, \qquad \text{ill.} \qquad \langle \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varphi} \rangle = \beta$$

következik. Ez azt jelenti, hogy $\mathcal{R}_{\boldsymbol{\varphi}}$ nem más, mint egy az $\boldsymbol{\omega}$ vektorra merőleges sík és egy gömb metszete, azaz $\mathcal{R}_{\boldsymbol{\varphi}}$ olyan körvonal, amelynek középpontja az origón áthaladó, $\boldsymbol{\omega}$-val párhuzamos egyenesen van, síkja pedig merőleges erre az egyenesre.

2. Az egyszerűség kedvéért legyen $\mathbf{e} = \mathbf{k}$ (vezessünk be egy Descartes-féle koordináta-rendszert úgy, hogy a harmadik tengely az $\mathbf{e}$ vektorral párhuzamos legyen). Ekkor

$$\mathbf{e} \times (\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{e}) = \mathbf{k} \times (\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{k}) = \langle \mathbf{k}, \mathbf{k} \rangle \boldsymbol{\varphi} - \langle \mathbf{k}, \boldsymbol{\varphi} \rangle \mathbf{k} = \boldsymbol{\varphi} - \varphi_3 \mathbf{k} = \varphi_1 \mathbf{i} + \varphi_2 \mathbf{j}.$$

Ezért a

$$\boldsymbol{\varphi}' = \mathbf{e} \times (\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{e})$$

vektoregyenlet nem más, mint a

$$\varphi_1' = \varphi_1, \qquad \varphi_2' = \varphi_2, \qquad \varphi_3' = 0$$

egyenletrendszer. Így bármely $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ esetén

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = (\alpha e^t, \beta e^t, \gamma) \qquad (t \in \mathbb{R}),$$

azaz a mozgás pályái olyan egyenesekből állnak, amelyek az $\mathbf{e}$ vektorra merőleges sík és a harmadik tengelyre illeszkedő síkok metszésvonalaiként adódnak. ■

7.6.2. Egzakt differenciálegyenletek

7.6.10. feladat. Oldjuk meg az

$$x + y(x) \cdot y'(x) = 0 \qquad (x \in \mathcal{D}_y).$$

differenciálegyenletet!

Útm. Világos, hogy ha $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, és a

$$\varphi : I \to \mathbb{R}$$

differenciálható függvény megoldása az egyenletnek, akkor

$$x + \varphi(x) \cdot \varphi'(x) = 0 \qquad (x \in I).$$

Látható, hogy ennek az egyenlőségnek a bal oldala nem más, mint az

$$\omega(x) := \frac{x^2 + \varphi^2(x)}{2} \qquad (x \in I)$$

függvény deriváltja. Így alkalmas $c \in \mathbb{R}$ számmal

$$\omega'(x) = 0 \qquad (x \in I),$$

azaz

$$x^2 + \varphi^2(x) = c \qquad (x \in I)$$

teljesül. Ha $I \neq [0,0]$, akkor $c > 0$ és

$$\varphi(x) = \pm\sqrt{c - x^2} \qquad \left(x \in (-\sqrt{c}, \sqrt{c})\right). \quad ■$$

A 7.6.10. feladatbeli differenciálegyenlet megoldását tehát úgy kapjuk meg, hogy a

$$P(x, y) :\equiv x^2 + y^2 = c$$

algebrai egyenletből kifejezzük y-t. Látható az is, hogy a differenciálegyenlet a

$$\partial_1 P(x, y(x)) + \partial_2 P(x, y(x))y'(x) = 0 \qquad (x \in \mathcal{D}_y)$$

alakba írható.

Legyen most $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ tartomány, ill. $g, h : \Omega \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, és tekintsük az alábbi feladatot:

Határozzunk meg olyan nyílt $I \subset \mathbb{R}$ intervallumot és $\varphi \in \mathfrak{D}(I, \mathbb{R})$ függvényt, amelyre igaz a

$$\boxed{g(x, \varphi(x)) + h(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = 0 \qquad (x \in I)} \tag{7.6.19}$$

állítás!

7.6.2. definíció. Az imént megfogalmazott feladatot **egzakt differenciálegyenlet**nek nevezzük, ha alkalmas

$$P \in \mathfrak{D}(\Omega, \mathbb{R})$$

(primitív) függvényre

$$\operatorname{grad} P = (g, h), \qquad \text{azaz} \qquad \partial_1 P = g, \ \ \partial_2 P = h$$

teljesül.

A (7.6.19) feladatra a továbbiakban a

$$g(x, y(x)) + h(x, y(x)) \cdot y'(x) = 0 \qquad (x \in \mathcal{D}_y), \tag{7.6.20}$$

ill. a hagyományos

$$g(x, y)\,\mathrm{d}x + h(x, y)\,\mathrm{d}y = 0 \tag{7.6.21}$$

jelölést fogjuk használni.

A 7.6.2. definícióbeli P függvény nem más, mint az

$$\Omega \ni (x, y) \mapsto (g(x, y), h(x, y))$$

vektormező (skalár)potenciálja.

7.6.3. példa. Az

$$x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y = 0 \qquad ((x,y)\in\Omega := \mathbb{R}^2)$$

egyenlet egzakt, ui. a

$$g(x,y) := x, \quad h(x,y) := y \qquad ((x,y)\in\Omega)$$

függvények esetében a

$$P(x,y) := \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + 5 \qquad ((x,y)\in\Omega)$$

függvényre

$$\partial_1 P(x,y) = x = g(x,y), \quad \partial_2 P(x,y) = y = h(x,y) \qquad ((x,y)\in\Omega).$$

7.6.4. példa. A

$$(2x + 3\cos(y))\,\mathrm{d}x + (2y - 3x\sin(y))\,\mathrm{d}y = 0 \qquad ((x,y)\in\Omega := \mathbb{R}^2)$$

egyenlet egzakt, ui. a

$$g(x,y) := 2x + 3\cos(y), \quad h(x,y) := 2y - 3x\sin(y) \qquad ((x,y)\in\Omega)$$

függvények esetében a

$$P(x,y) := x^2 + y^2 + 3x\cos(y) + 6 \qquad ((x,y)\in\Omega)$$

függvényre

$$\partial_1 P(x,y) = 2x+3\cos(y) = g(x,y), \quad \partial_2 P(x,y) = 2y-3x\sin(y) = h(x,y) \qquad ((x,y)\in\Omega)$$

teljesül.

7.6.11. feladat. Mutassuk meg, hogy a

$$-\frac{y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x + \frac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y = 0 \qquad ((x,y)\in\Omega := \{(u,v)\in\mathbb{R}^2 :\ u>0\})$$

egyenlet egzakt!

Útm. A

$$g(x,y) := -\frac{y}{x^2+y^2}, \quad h(x,y) := \frac{x}{x^2+y^2} \qquad ((x,y)\in\Omega)$$

függvények esetében a

$$P(x,y) := \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + \pi \qquad ((x,y)\in\Omega)$$

függvényre

$$\partial_1 P(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2} = g(x,y), \quad \partial_2 P(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} = h(x,y) \qquad ((x,y)\in\Omega)$$

teljesül. ■

7.6.1. tétel. Tegyük fel, hogy a (7.6.19) egyenlet egzakt. Valamely $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, ill.

$$\varphi : I \to \mathbb{R}$$

differenciálható függvény esetén φ pontosan akkor lesz a (7.6.19) megoldása, ha van olyan $c \in \mathbb{R}$, hogy a 7.6.2. definícióbeli P függvényre

$$P(x,\varphi(x)) = c \qquad (x \in I)$$

teljesül.

Biz. A láncszabály következtében az

$$\omega(x) := P(x,\varphi(x)) \qquad (x \in I)$$

egyváltozós valós függvény differenciálható, és bármely $x \in I$ esetén

$$\begin{aligned}\omega'(x) &= \left\langle \operatorname{grad} P(x,\varphi(x)), (1,\varphi'(x)) \right\rangle = \left\langle (\partial_1 P(x,\varphi(x)), \partial_2 P(x,\varphi(x))), (1,\varphi'(x)) \right\rangle = \\ &= g(x,\varphi(x)) \cdot 1 + h(x,\varphi(x)) \cdot \varphi'(x).\end{aligned}$$

Az iménti egyenlőség jobb oldala pontosan akkor tűnik el I-n, ha ω állandófüggvény I-n. ■

Ez azt jelenti, hogy a (7.6.19) egzakt differenciálegyenlet megoldásait a

$$P(x,y(x)) = c \qquad (x \in \mathcal{D}_y)$$

(algebrai) egyenlet megoldásával kapjuk meg.
A (7.6.19) alakú differenciálegyenletekkel kapcsolatban az alábbi két kérdésre keressük a választ.

- Hogyan lehet megállapítani, hogy (7.6.19) egzakt egyenlet?
- Ha (7.6.19) egzakt egyenlet, akkor miképp lehet előállítani a P függvényt?

A gyakorlati alkalmazások nagy többségében a g, ill. a h függvény differenciálható: $g, h \in \mathfrak{D}$, ezért

$$\operatorname{grad} P = (g,h)$$

következtében $P \in \mathfrak{D}^2$. Így a Young-tétel miatt

$$\partial_2 g = \partial_{12} P = \partial_{21} P = \partial_1 h,$$

azaz a

$$\partial_2 g = \partial_1 h$$

feltétel teljesülése szükséges az „egzaktsághoz”. Ha Ω csillagtartomány és

$$g, h \in \mathfrak{C}^1(\Omega, \mathbb{R}),$$

akkor ez a feltétel elégséges is. Igaz tehát a

7.6.1. tétel. Ha $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ csillagtartomány,

$$g, h : \Omega \to \mathbb{R}$$

folytonosan differenciálható kétváltozós függvények, úgy a (7.6.19) egyenlet pontosan akkor egzakt, ha

$$\boxed{\partial_2 g = \partial_1 h}$$

teljesül.

7.6.2. tétel. Ha Ω csillagtartomány, melynek csillagpontja $(\tau, \xi) \in \Omega$, akkor a 7.6.1. tételbeli feltételek mellett a

$$\boxed{P(x,y) := \int_\tau^x g(t,\xi)\,\mathrm{d}t + \int_\xi^y h(x,s)\,\mathrm{d}s \qquad ((x,y) \in \Omega)}$$

függvényre $P(\tau, \xi) = 0$, ill.

$$\partial_1 P(x,y) = g(x,y), \quad \partial_2 P(x,y) = h(x,y) \qquad ((x,y) \in \Omega)$$

teljesül.

Biz. Világos, hogy

$$P(\tau, \xi) = 0 + 0 = 0,$$

továbbá (vö. 3.0.2. tétel) bármely $(x,y) \in \Omega$ esetén

$$\begin{aligned}
\partial_1 P(x,y) &= g(x,\xi) + \int_\xi^y \partial_1 h(x,s)\,\mathrm{d}s = g(x,\xi) + \int_\xi^y \partial_2 g(x,s)\,\mathrm{d}s = \\
&= g(x,\xi) + g(x,y) - g(x,\xi) = g(x,y)
\end{aligned}$$

és

$$\partial_2 P(x,y) = 0 + h(x,y) = h(x,y). \quad \blacksquare$$

7.6.5. példa. Az

$$\ln(1+y^2)\,\mathrm{d}x + \frac{2y(x-1)}{1+y^2}\,\mathrm{d}y = 0 \tag{7.6.22}$$

egyenlet egzakt, hiszen az $\Omega := \mathbb{R}^2$ csillagtartománnyal a

$$g(x,y) := \ln(1+y^2), \quad h(x,y) := \frac{2y(x-1)}{1+y^2} \qquad ((x,y)\in\Omega)$$

függvényekre $\partial_2 g = \partial_1 h$ teljesül. Mivel $(0,0)$ az Ω csillagpontja és

$$P(x,y) := \int_0^x \ln(1+0)\,\mathrm{d}t + \int_0^y \frac{2s(x-1)}{1+s^2}\,\mathrm{d}s = (x-1)\ln(1+y^2) \qquad (x,y\in\Omega),$$

ezért valamely

$$\varphi : I \to \mathbb{R}$$

(differenciálható) függvény pontosan akkor lesz a (7.6.22) egyelet megoldása, ha alkalmas $c\in\mathbb{R}$ esetén

$$(x-1)\ln(1+\varphi^2(x)) = c \qquad (x\in I)$$

teljesül.

7.6.6. példa. A

$$(3x^2+y^2)\,\mathrm{d}x + 2xy\,\mathrm{d}y = 0 \tag{7.6.23}$$

egyenlet egzakt, hiszen az $\Omega := \mathbb{R}^2$ csillagtartománnyal a

$$g(x,y) := 3x^2+y^2, \quad h(x,y) := 2xy \qquad ((x,y)\in\Omega)$$

függvényekre $\partial_2 g = \partial_1 h$ teljesül. Mivel $(0,0)$ az Ω csillagpontja és

$$P(x,y) := \int_0^x 3t^2\,\mathrm{d}t + \int_0^y 2xs\,\mathrm{d}s = x^3 + xy^2 \qquad (x,y\in\Omega),$$

ezért valamely

$$\varphi : I \to \mathbb{R}$$

(differenciálható) függvény pontosan akkor lesz a (7.6.23) egyelet megoldása, ha alkalmas $c\in\mathbb{R}$ esetén

$$x^3 + x\varphi^2(x) = c \qquad (x\in I)$$

teljesül.

7.6.3. definíció. Ha a φ függvény megoldása az egzakt egyenletnek, és azt is megköveteljük, hogy alkalmas $\tau,\xi\in\mathbb{R}$ esetén φ eleget tegyen a $\varphi(\tau)=\xi$ feltételnek, akkor az **egzakt egyenletre vonatkozó kezdetiérték-feladat**ról beszélünk.

7.6.12. feladat. Oldjuk meg az alábbi kezdetiérték-feladatokat!

1. $(2xy+3y^2)\,\mathrm{d}x+(x^2+6xy-2y)\,\mathrm{d}y=0$, $y(1)=-1/2$;
2. $(2x+y)\,\mathrm{d}x+(x-2y)\,\mathrm{d}y=0$, $y(1)=1$.

Útm.

1. A
$$g(x,y):=2xy+3y^2,\quad h(x,y):=x^2+6xy-2y\qquad ((x,y)\in\mathbb{R}^2)$$
választással
$$\partial_2 g(x,y)=2x+6y=\partial_1 h(x,y)\qquad ((x,y)\in\mathbb{R}^2),$$
tehát a fenti kezdetiérték-feladat egzakt. Ha a
$$P:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$$
függvényre
$$\operatorname{grad}P=(g,h),$$
akkor $\partial_1 P=g$, azaz
$$P(x,y)=x^2y+3xy^2+k(y)\qquad ((x,y)\in\mathbb{R}^2),$$
ahol $k:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ deriválható függvény. Mivel tetszőleges $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ esetén
$$x^2+6xy-2y=h(x,y)=\partial_2 P(x,y)=x^2+6xy+k'(y),$$
ezért pl. a
$$k(y):=-y^2\qquad (y\in\mathbb{R})$$
választás megfelelő. Ha tehát a φ függvény megoldása az egzakt egyenletnek, akkor van olyan $c\in\mathbb{R}$, hogy minden $x\in\mathcal{D}_\varphi$ esetén
$$x^2\varphi(x)+(3x-1)\varphi^2(x)=c.$$
Azonban olyan φ megoldást keresünk, amelyre $\varphi(1)=-1/2$, így $c=0$, és a megoldás implicit alakja:
$$x^2\varphi(x)+(3x-1)\varphi^2(x)=0\qquad (x\in\mathcal{D}_\varphi)\,.$$

2. A
$$g(x,y):=2x+y,\quad h(x,y):=x-2y\qquad ((x,y)\in\mathbb{R}^2)$$
választással
$$\partial_2 g(x,y)=1=\partial_1 h(x,y)\qquad ((x,y)\in\mathbb{R}^2),$$
tehát a fenti kezdetiérték-feladat egzakt. Ha a
$$P:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$$

függvényre

$$\operatorname{grad} P = (g, h),$$

akkor $\partial_1 P = g$, azaz

$$P(x,y) = x^2 + xy + k(y) \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2),$$

ahol $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deriválható függvény. Mivel tetszőleges $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ esetén

$$x - 2y = h(x,y) = \partial_2 P(x,y) = x + k'(y),$$

ezért pl. a

$$k(y) := -y^2 \qquad (y \in \mathbb{R})$$

választás megfelelő. Ha tehát a φ függvény megoldása az egzakt egyenletnek, akkor van olyan $c \in \mathbb{R}$, hogy minden $x \in \mathcal{D}_\varphi$ esetén

$$x^2 + x \cdot \varphi(x) - \varphi^2(x) = c.$$

Azonban olyan φ megoldást keresünk, amelyre $\varphi(1) = 1$, így $c = 1$ és a megoldás implicit alakja:

$$x^2 + x \cdot \varphi(x) - \varphi^2(x) = 1 \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi). \quad \blacksquare$$

7.6.13. feladat. Oldjuk meg az

$$y'(x) = -\frac{1 + e^x y(x) + xe^x y(x)}{xe^x + 2} \qquad (x \in \mathcal{D}_y)$$

differenciálegyenletet, ill. az

$$e^{-x}(2x - x^2 - y^2(x)) + 2y(x)e^{-x}y'(x) = 0 \quad (x \in \mathcal{D}_y), \qquad y(1) = 1$$

kezdetiérték-feladatot!

Útm.

1. lépés.. Az egyenlet

$$g(x,y)\,\mathrm{d}x + h(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$$

alakú, ahol

$$g(x,y) := 1 + e^x y + xe^x y, \quad h(x,y) := xe^x + 2 \qquad ((x,y) \in \Omega := \mathbb{R}^2).$$

Az egyenlet egzakt, hiszen

$$\partial_2 g(x,y) = e^x + xe^x = \partial_1 h(x,y) \qquad ((x,y) \in \Omega).$$

Mivel $(0,0)$ az Ω csillagpontja és

$$P(x,y) := \int_0^x (1 + e^t \cdot 0 + te^t \cdot 0)\,\mathrm{d}t + \int_0^y (xe^x + 2)\,\mathrm{d}s = x + xye^x + 2y \qquad ((x,y) \in \Omega),$$

ezért valamely
$$\varphi : I \to \mathbb{R}$$
(differenciálható) függvény pontosan akkor lesz az egyenlet megoldása, ha alkalmas $c \in \mathbb{R}$ esetén
$$x + x\varphi(x)e^x + 2\varphi(x) = c, \quad \text{ill.} \quad \varphi(x) = \frac{c-x}{xe^x+2} \qquad (x \in I)$$
teljesül. Mivel bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén $xe^x + 2 > 0$, ezért $I = \mathbb{R}$.

2. lépés.. Az egyenlet egzakt, hiszen az $\Omega := \mathbb{R}^2$ csillagtartománnyal a
$$g(x,y) := e^{-x}(2x - x^2 - y^2), \quad h(x,y) := 2ye^{-x} \qquad ((x,y) \in \Omega)$$
függvényekre $\partial_2 g = \partial_1 h$ teljesül. Mivel $(1,1)$ az Ω csillagpontja és
$$P(x,y) := \int_1^x e^{-t}(2t - t^2 - 1)\,\mathrm{d}t + \int_1^y 2se3{-}x\,\mathrm{d}s = \ldots = (x^2+y^2)e^{-x} - \frac{2}{e} \qquad (x, y \in \Omega),$$
ui.
$$\int_1^y 2se^{-x}\,\mathrm{d}s = (y^2-1)e^{-x}, \qquad \int_1^x -e^{-t}\,\mathrm{d}t = e^{-x} - \frac{1}{e},$$
továbbá
$$\int_1^x 2te^{-t}\,\mathrm{d}t = 2\left[-te^{-t}\right]_1^x - 2\int_1^x -e^{-t}\,\mathrm{d}t = -2xe^{-x} + \frac{2}{e} - 2e^{-x} - \frac{2}{e} = -2xe^{-x} - 2e^{-x},$$
ill.
$$\int_1^x -t^2e^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[t^2e^{-t}\right]_1^x - \int_1^x 2te^{-t}\,\mathrm{d}t = x^2e^{-x} - \frac{1}{e} + 2xe^{-x} + 2e^{-x}.$$
Így valamely
$$\varphi : I \to \mathbb{R}$$
(differenciálható) függvény pontosan akkor lesz a (7.6.23) egyelet megoldása, ha alkalmas $c \in \mathbb{R}$ esetén
$$(x^2 + \varphi^2(x))e^{-x} - \frac{2}{e} = c \quad (x \in I), \qquad \text{azaz} \qquad \varphi^2(x) = e^x(c + 2/e) - x^2 \quad (x \in I)$$
teljesül. Olyan megoldást keresünk, amelyre $\varphi(1) = 1$, így $c = 0$, és a megoldás explicit alakja:
$$\varphi(x) = \sqrt{2e^{x-1} - x^2} \qquad (x \in I),$$
ahol $I \subset \mathbb{R}$ valamely, az 1-et belsejében tartalmazó intervallum. Ilyen létezik, hiszen
$$\lim_{x\to\pm\infty} 2e^{x-1} - x^2 = \pm\infty. \quad \blacksquare$$

A 7.6.12 feladat útmutatójában csak azt láttuk be, hogy ha van az adott kezdetiérték-feladatnak megoldása, akkor az mely (implicit) algebrai egyenletnek tesz eleget. Azt, hogy van-e megoldás, minden esetben a megfelelő implicit egyenlet megoldásával (vö. 7.6.13) vagy az implicit függvényre vonatkozó tétel feltételeinek ellenőrzésével kaphatjuk meg.

7.6.3. tétel. Ha a (7.6.19) differenciálegyenlet egzakt, és valamely $(\tau,\xi) \in \Omega$ pontra

$$h(\tau,\xi) \neq 0,$$

akkor a (7.6.19)-ra vonatkozó k.é.f. (globálisan) egyértelműen megoldható.

Biz. Ha a

$$P : \Omega \to \mathbb{R}$$

függvényre

$$\operatorname{grad} P = (g,h),$$

továbbá

$$\pi(x,y) := P(x,y) - P(\tau,\xi) \qquad ((x,y) \in \Omega),$$

akkor

- π folytonosan deriválható: $\pi \in \mathfrak{C}^1$,
- $\partial_2\pi(\tau,\xi) = h(\tau,\xi) \neq 0$;
- $\pi(\tau,\xi) = 0$.

Teljesülnek tehát az implicit függvényre vonatkozó tétel feltételei, így alkalmas $\tau \in I \subset \mathbb{R}$ (nyílt) intervallum esetén pontosan egy olyan $\varphi : I \to \mathbb{R}$ deriválható függvény van, amelyre

$$\varphi(\tau) = \xi \qquad \text{és} \qquad \pi(x,\varphi(x)) = P(x,\varphi(x)) - P(\tau,\xi) = 0 \quad (x \in I). \quad \blacksquare$$

Előfordulhat, hogy a (7.6.19)-beli g, ill. h deriválható függvény nem tesz eleget az ún. egzaktsági feltételnek, azaz

$$\partial_2 g \neq \partial_1 h.$$

Ilyenkor megpróbáljuk (7.6.19)-et ekvivalens átalakításokkal „egzakt alakra hozni”, azaz keresünk olyan

$$\mu : \Omega \to \mathbb{R}, \qquad \mu \not\equiv 0$$

differenciálható függvényt, amellyel (7.6.21) megszorozva egzakt lesz.

7.6.4. definíció. Ha $\widetilde{\Omega} \subset \Omega$ tartomány és

$$\mu : \widetilde{\Omega} \to \mathbb{R}$$

olyan folytonos függvény, hogy valamely $(x,y) \in \widetilde{\Omega}$ esetén $\mu(x,y) \neq 0$, úgy azt mondjuk, hogy μ **integráló tényező** vagy **Euler-féle multiplikátor** a (7.6.21) egyenletre vonatkozóan, ha a

$$g(x,y)\mu(x,y)\,\mathrm{d}x + h(x,y)\mu(x,y)\,\mathrm{d}y = 0 \tag{7.6.24}$$

egyenlet egzakt. (7.6.24)-et szokás **egzakttá tett egyenlet**nek nevezni.

7.6.7. példa. A

$$4xy(x) + 3y^2(x) - x + (x^2 + 2xy(x))y'(x) = 0 \qquad (x \in \mathcal{D}_y)$$

egyenlet nem egzakt, hiszen ha $\Omega := \mathbb{R}^2$, ill.

$$g(x,y) := 4xy + 3y^2 - x, \quad h(x,y) := x^2 + 2xy \qquad ((x,y) \in \Omega)$$

akkor

$$\partial_2 g(x,y) \equiv 4x + 6y \not\equiv 2x + 2y \equiv \partial_1 h(x,y).$$

A

$$\mu(x,y) := x^2 \qquad ((x,y) \in \Omega)$$

függvény integráló tényező, hiszen ezzel beszorozva az

$$4x^3y(x) + 3x^2y^2(x) - x^3 + (x^4 + 2x^3y(x))y'(x) = 0 \qquad (x \in \mathcal{D}_y)$$

egyenlet egzakt:

$$\partial_y(4x^3y + 3x^2y^2 - x^5) \equiv 4x^3 + 6x^2y \equiv \partial_x(x^4 + 2x^3y).$$

7.6.0. megjegyzés. Ha $\widetilde{\Omega}$ csillagtartomány és

$$\mu : \widetilde{\Omega} \to \mathbb{R}$$

deriválható, úgy (vö. 7.6.1. tétel előtti megjegyzés) μ pontosan akkor integráló tényező, ha

$$\mu\partial_2 g + g\partial_2\mu = \boxed{\partial_2(g\mu) = \partial_1(h\mu)} = \mu\partial_1 h + h\partial_1\mu, \tag{7.6.25}$$

azaz

$$g\partial_2\mu - h\partial_1\mu = \mu(\partial_1 h - \partial_2 g) \tag{7.6.26}$$

teljesül.

7.6.8. példa.

$$y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y = 0 \tag{7.6.27}$$

egyenlet esetében a

$$g(x,y) := y, \quad h(x,y) := -x \qquad ((x,y) \in \Omega := \mathbb{R}^2)$$

függvényekre

$$\partial_2 g = 1 \neq -1 = \partial_1 h,$$

azaz (7.6.27) nem egzakt. Valamely μ függvény a (7.6.26) feltétel szerint tehát pontosan akkor integráló tényező a (7.6.27) egyenletre vonatkozóan, ha

$$x\partial_1\mu(x,y) + y\partial_2(x,y) = -2\mu(x,y) \qquad ((x,y) \in \widetilde{\Omega}).$$

Könnyen belátható, hogy μ-re az alábbi három függvény megfelelő lesz:

$$\textbf{(1)} \quad \mu(x,y) \equiv \frac{1}{x^2}, \qquad \textbf{(2)} \quad \mu(x,y) \equiv \frac{1}{y^2}, \qquad \textbf{(3)} \quad \mu(x,y) \equiv \frac{1}{xy}.$$

Az **(1)** esetben, ha

$$\widetilde{\Omega} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x > 0\} \qquad \text{vagy} \qquad \widetilde{\Omega} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x < 0\}$$

akkor $\mu : \widetilde{\Omega} \to \mathbb{R}$ integráló tényező, az egzaktá tett egyenlet

$$\frac{y}{x^2}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{x}\,\mathrm{d}y = 0 \qquad ((x,y) \in \widetilde{\Omega}),$$

alakú.

A **(2)** esetben, ha

$$\widetilde{\Omega} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y > 0\} \qquad \text{vagy} \qquad \widetilde{\Omega} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y < 0\}$$

akkor $\mu : \widetilde{\Omega} \to \mathbb{R}$ integráló tényező, az egzaktá tett egyenlet

$$\frac{1}{y}\,\mathrm{d}x - \frac{x}{y^2}\,\mathrm{d}y = 0 \qquad ((x,y) \in \widetilde{\Omega}),$$

alakú.

A **(3)** esetben, ha

$$\widetilde{\Omega} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ xy \neq 0\},$$

akkor $\mu : \widetilde{\Omega} \to \mathbb{R}$ integráló tényező, az egzaktá tett egyenlet

$$\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = 0 \qquad ((x,y) \in \widetilde{\Omega}),$$

alakú.

7.6.14. feladat. Mutassuk meg, hogy alkalmas $m, n \in \mathbb{Z}$, ill. az

$$y(x)(x^3 - y(x)) - x(x^3 + y(x))y'(x) = 0 \qquad (x \in \mathcal{D}_y)$$

differenciálegyenlet esetén

$$\mu(x,y) := x^m y^n \qquad ((x,y) \in \Omega := \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : \, u, v > 0\right\})$$

integráló tényező!

Útm. Az egyenletet $x^m y^n$-nel szorozva azt kapjuk, hogy

$$(x^{m+3}y^{n+1} - x^m y^{n+2})\,\mathrm{d}x + (x^{m+4}y^n + x^{m+1}y^{n+1})\,\mathrm{d}y = 0.$$

Mivel Ω csillagtartomány, ezért ez az egyenlet pontosan akkor egzakt Ω-n, ha

$$(n+1)x^{m+3}y^n - (n+2)x^m y^{n+1} = -(m+4)x^{m+3}y^n - (m+1)x^m y^{n+1} \qquad ((x,y) \in \Omega),$$

azaz

$$(n+1 = -m-4 \quad \text{és} \quad -n-2 = -m-1) \qquad \Longleftrightarrow \qquad (m = -2, \quad \text{ill.} \quad n = -3)$$

teljesül. ■

A (7.6.25) vagy (7.6.26) valójában parciális differenciálegyenlet μ-re nézve, aminek megoldása lényegesen bonyolultabb feladat, mint az eredeti. Egyszerűsíthetünk a dolgon, ha μ-t a

$$\mu := v \circ u,$$

alakban keressük, ahol

$$v \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad u : \widetilde{\Omega} \to \mathbb{R}$$

alkalmas deriválható függvények. Ekkor ui. (7.6.25) nem más, mint

$$v(u) \cdot \partial_2 g + g \cdot v'(u) \cdot \partial_2 u = \boxed{\ldots = \ldots} = v(u) \cdot \partial_1 h + h \cdot v'(u) \cdot \partial_1 u$$

azaz

$$v'(u) \cdot \{\partial_2 u \cdot g - \partial_1 u \cdot h\} = v(u) \{\partial_1 h - \partial_2 g\},$$

ahonnan

$$\frac{\partial_1 h - \partial_2 g}{\partial_2 u \cdot g - \partial_1 u \cdot h} = \frac{v'}{v}(u) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} \ln(v(u))$$

következik. Ha tehát az iménti egyenlőség bal oldala u függvénye, azaz alkalmas $m \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény esetén

$$\frac{\partial_1 h - \partial_2 g}{\partial_2 u \cdot g - \partial_1 u \cdot h} = m(u),$$

és M a m egy primitív függvénye: $M' = m$, akkor

$$\mu(x, y) = v(u(x, y)) = e^{M(u(x,y))} \qquad ((x, y) \in \widetilde{\Omega}).$$

7.6.9. példa. Ha

$$u(x, y) = x \qquad ((x, y) \in \widetilde{\Omega}),$$

akkor

$$\partial_2 u(x, y) \equiv 0 \qquad \text{és} \qquad \partial_1 u(x, y) \equiv 1.$$

Így, ha $M \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan deriválható függvény, amelyre $M' = m$, és

$$\frac{\partial_2 g(x, y) - \partial_1 h(x, y)}{h(x, y)} \equiv m(x),$$

akkor

$$\mu(x, y) :\equiv e^{M(x)}$$

integráló tényező.

7.6.10. példa. Ha

$$u(x, y) = y \qquad ((x, y) \in \widetilde{\Omega}),$$

akkor

$$\partial_2 u(x, y) \equiv 1 \qquad \text{és} \qquad \partial_1 u(x, y) \equiv 0.$$

Így, ha $M \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan deriválható függvény, amelyre $M' = m$, és

$$\frac{\partial_1 h(x, y) - \partial_2 g(x, y)}{g(x, y)} \equiv m(y),$$

akkor

$$\mu(x, y) :\equiv e^{M(y)}$$

integráló tényező.

7.6.11. példa. Ha

$$u(x, y) = xy \qquad ((x, y) \in \widetilde{\Omega}),$$

akkor

$$\partial_2 u(x, y) \equiv x \qquad \text{és} \qquad \partial_1 u(x, y) \equiv y.$$

Így, ha $M \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan deriválható függvény, amelyre $M' = m$, és

$$\frac{\partial_2 g(x, y) - \partial_1 h(x, y)}{yh(x, y) - xg(x, y)} \equiv m(xy),$$

akkor

$$\mu(x, y) :\equiv e^{M(xy)}$$

integráló tényező.

7.6.12. példa. Ha

$$u(x,y) = x + y \qquad ((x,y) \in \widetilde{\Omega}),$$

akkor

$$\partial_2 u(x,y) \equiv 1 \qquad \text{és} \qquad \partial_1 u(x,y) \equiv 1.$$

Így, ha $M \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan deriválható függvény, amelyre $M' = m$, és

$$\frac{\partial_2 g(x,y) - \partial_1 h(x,y)}{h(x,y) - g(x,y)} \equiv m(x+y),$$

akkor

$$\mu(x,y) :\equiv e^{M(x+y)}$$

integráló tényező.

7.6.13. példa. Ha

$$u(x,y) = x^2 + y^2 \qquad ((x,y) \in \widetilde{\Omega}),$$

akkor

$$\partial_2 u(x,y) \equiv 2x \qquad \text{és} \qquad \partial_1 u(x,y) \equiv 2y.$$

Így, ha $M \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan deriválható függvény, amelyre $M' = m$, és

$$\frac{\partial_2 g(x,y) - \partial_1 h(x,y)}{2xh(x,y) - 2yg(x,y)} \equiv m(x^2+y^2),$$

akkor

$$\mu(x,y) :\equiv e^{M(x^2+y^2)}$$

integráló tényező.

7.6.14. példa. Ha

$$u(x,y) = \frac{y}{x} \qquad ((x,y) \in \widetilde{\Omega}),$$

akkor

$$\partial_2 u(x,y) \equiv \frac{1}{x} \qquad \text{és} \qquad \partial_1 u(x,y) \equiv -\frac{y}{x^2}.$$

Így, ha $M \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan deriválható függvény, amelyre $M' = m$, és

$$\frac{\partial_2 g(x,y) - \partial_1 h(x,y)}{-\frac{yh(x,y)}{x^2} + \frac{g(x,y)}{x}} \equiv -x^2 \cdot \frac{\partial_2 g(x,y) - \partial_1 h(x,y)}{yh(x,y) + xg(x,y)} \equiv m(y/x),$$

akkor

$$\mu(x,y) :\equiv e^{M(y/x)}$$

integráló tényező.

7.6.15. feladat. Keressünk integráló tényezőt az alábbi feladatok esetében, majd adjuk meg egy megoldásukat is!

1. $(-y^2 - xy)\,\mathrm{d}x + (x^2 + xy)\,\mathrm{d}y = 0$, $y(1) = 1$;
2. $(x^2 + x + y^2)\,\mathrm{d}x + xy\,\mathrm{d}y = 0$, $y(-1) = 1/\sqrt{6}$;
3. $y\,\mathrm{d}x - (x + y)\,\mathrm{d}y = 0$;
4. $(y - x^2y^2)\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = 0$, $y(1) = 1$;
5. $(y - xy)\,\mathrm{d}x + (x - xy)\,\mathrm{d}y = 0$;
6. $y\,\mathrm{d}x - (y^2 + x^2 + x)\,\mathrm{d}y = 0$;
7. $(2x^2 + xy^2)\,\mathrm{d}x + \left(\frac{x^3}{y} + 3x^2y\right)\,\mathrm{d}y = 0$.

Útm.

1. A
$$g(x,y) := -y^2 - xy, \quad h(x,y) := x^2 + xy \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$$
választással
$$\partial_2 g(x,y) = -2y - x \neq 2x + y = \partial_1 h(x,y) \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2),$$
tehát a fenti kezdetiérték-feladat nem egzakt. Mivel
$$\frac{\partial_2 g(x,y) - \partial_1 h(x,y)}{h(x,y)} = \frac{-3(x+y)}{x(x+y)} = -\frac{3}{x} =: m(x) \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ h(x,y) \neq 0),$$
ezért pl.
$$M(s) := -3\ln(s) \qquad (s > 0)$$
esetén a
$$\mu(x,y) := e^{-3\ln(x)} = \frac{1}{x^3} \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x > 0)$$
függvény multiplikátor. Könnyen ellenőrizhető, hogy μ tetszőleges $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \neq 0$ esetén is multiplikátor. Ekkor tehát az
$$\frac{-y^2 - xy}{x^3}\,\mathrm{d}x + \frac{x^2 + xy}{x^3}\,\mathrm{d}y = 0$$
egyenlet egzakt. Ha a
$$P \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
függvényre
$$\operatorname{grad} P(x,y) \equiv \left(\frac{-y^2 - xy}{x^3}, \frac{x^2 + xy}{x^3}\right),$$
akkor
$$P(x,y) \equiv \frac{y^2}{2x^2} + \frac{y}{x} + k(y)$$
ahol $k \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deriválható függvény. Mivel
$$\frac{x^2 + xy}{x^3} \equiv \partial_2 P(x,y) \equiv \frac{y}{x^2} + \frac{1}{x} + k'(y),$$

ezértalkalmas $K \in \mathbb{R}$ esetén $k(y) \equiv K$, azaz a

$$P(x,y) :\equiv \frac{y^2}{2x^2} + \frac{y}{x}$$

választás megfelelő. Ha tehát a φ függvény megoldása az egzakt egyenletnek, akkor van olyan $c \in \mathbb{R}$, hogy minden $x \in \mathcal{D}_\varphi$ esetén

$$\frac{\varphi^2(x)}{2x^2} + \frac{\varphi(x)}{x} = c.$$

Azonban olyan φ megoldást keresünk, amelyre $\varphi(1) = 1$, így $c = 3/2$, és a megoldás implicit alakja:

$$\varphi(x) = x \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi)\,.$$

2. Az egyenlet nem egzakt, hiszen

$$\partial_y(x^2 + x + y^2) \equiv 2y \not\equiv y \equiv \partial_x(xy).$$

Mivel

$$\frac{\partial_y(x^2 + x + y^2) - \partial_x(xy)}{xy} = \frac{2y - y}{xy} = \frac{1}{x} =: m(x),$$

ezért pl.

$$M(s) := \ln(s) \qquad (s > 0)$$

esetén a

$$\mu(x,y) := e^{M(x)} = x \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0)$$

függvény multiplikátor. Könnyen ellenőrizhető, hogy μ egész $\mathbb{R}^2$-en is multiplikátor.

3. Az egyenlet nem egzakt, hiszen

$$\partial_y(y) \equiv 1 \not\equiv -1 \equiv \partial_x(-(x+y)).$$

Mivel

$$\frac{\partial_x(-(x+y)) - \partial_y(y)}{y} = \frac{-1-1}{y} = \frac{-2}{y} =: m(y),$$

ezért pl.

$$M(y) := (-2)\ln(y) \qquad (y > 0)$$

esetén a

$$\mu(x,y) := e^{M(y)} = \frac{1}{y^2} \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0)$$

függvény multiplikátor. Könnyen ellenőrizhető, hogy μ egész $\mathbb{R}^2\backslash\{(0{,}0)\}$-en is multiplikátor.

4. Az egyenlet nem egzakt, hiszen

$$\partial_y(y - x^2y^2) \equiv 1 - 2x^2y \not\equiv 1 \equiv \partial_x(x).$$

Mivel

$$\frac{\partial_y(y - x^2y^2) - \partial_x(x)}{yx - x(y + x^2y^2)} = \frac{1 - 2x^2y - 1}{yx - xy + x^3y^2} = \frac{-2}{xy} =: m(xy),$$

ezért pl.

$$M(s) := \ln(1/s^2) \qquad (s > 0)$$

esetén a

$$\mu(x,y) := e^{M(xy)} = \frac{1}{x^2y^2} \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0)$$

függvény multiplikátor. Könnyen ellenőrizhető, hogy – a tengelyeket kivéve – μ egész $\mathbb{R}^2$-en is multiplikátor.

5. Az egyenlet nem egzakt, hiszen

$$\partial_y(y - xy) \equiv 1 - x \not\equiv 1 - y \equiv \partial_x(x - xy).$$

Mivel

$$\frac{\partial_y(y - xy) - \partial_x(x - xy)}{x - xy - (y - xy)} = \frac{y - x}{x - y} = -1 =: m(x + y),$$

ezért pl.

$$M(s) := -s \qquad (s \in \mathbb{R})$$

esetén a

$$\mu(x,y) := e^{M(x+y)} = e^{-x-y} \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$$

függvény multiplikátor.

6. Az egyenlet nem egzakt, hiszen

$$\partial_y(y) \equiv 1 \not\equiv -2x - 1 \equiv \partial_x(-y^2 - x^2 - x).$$

Mivel

$$\begin{aligned} \frac{\partial_y(y) - \partial_x(-y^2 - x^2 - x)}{2xh(-y^2 - x^2 - x) - 2yy} &= \frac{1 + 2x + 1}{-2x(y^2 + x^2 + x) - 2y^2} = \\ &= -\frac{x + 1}{(x + 1)(x^2 + y^2)} = -\frac{1}{x^2 + y^2} =: m(x^2 + y^2), \end{aligned}$$

ezért pl.

$$M(s) := -\ln(s) \qquad (s > 0)$$

esetén a

$$\mu(x,y) := e^{M(x^2+y^2)} = \frac{1}{x^2 + y^2} \qquad ((0,0) \neq (x,y) \in \mathbb{R}^2)$$

függvény multiplikátor.

7. Az egyenlet nem egzakt, hiszen

$$\partial_y(2x^2 + xy^2) \equiv 2xy \not\equiv \frac{3x^2}{y} + 6xy \equiv \partial_x\left(\frac{x^3}{y} + 3x^2y\right).$$

Mivel

$$\begin{aligned} -x^2 \cdot \frac{\partial_y(2x^2 + xy^2) - \partial_x\left(\frac{x^3}{y} + 3x^2y\right)}{y\left(\frac{x^3}{y} + 3x^2y\right) + x(2x^2 + xy^2)} &= x^2 \frac{\frac{3x^2}{y} + 4xy}{3x^3 + 4x^2y^2} = \\ &= \frac{x}{y} \cdot \frac{3x + 4y^2}{3x + 4y^2} = \frac{1}{\frac{y}{x}} =: m\left(\frac{y}{x}\right), \end{aligned}$$

ezért pl.

$$M(s) := \ln(s) \qquad (s > 0)$$

esetén a

$$\mu(x,y) := e^{M(y/x)} = \frac{y}{x} \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x, y > 0)$$

függvény multiplikátor. ■

7.6.1. gyakorló feladat. Keressünk integráló tényezőt az alábbi feladatok esetében, majd adjuk meg egy megoldásukat is!

1. $(2xy^2 + e^{-x^2})\,\mathrm{d}x + (2y - e^{-x^2}\sin(y))\,\mathrm{d}y = 0$;
2. $(-2y\sin(x) + 6\sin^2(x))\,\mathrm{d}x + \left(\cos(x) + \dfrac{2y}{\cos(x)}\mathrm{ch}\,(y^2)\right)\,\mathrm{d}y = 0$;
3. $\left(2xy + x^2y + \dfrac{y^3}{3}\right)\,\mathrm{d}x + (2y - e^{-x^2}\sin(y))\,\mathrm{d}y = 0$;
4. $\dfrac{x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} + \dfrac{y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y}{x^2 + y^2} = 0$;
5. $(2x - x^2 - y^2)\,\mathrm{d}x + 2y\,\mathrm{d}y = 0$, $y(1) = 1$;
6. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{-x + y + 5}{y - x - 3}$;
7. $(2xy^2 + e^{-x^2})\,\mathrm{d}x + (2y - e^{-x^2}\sin(y))\,\mathrm{d}y = 0$;
8. $(6 + (6x + y)\mathrm{ctg}(x))\,\mathrm{d}x + \,\mathrm{d}y = 0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$;
9. $(2x^3y^2 - y)\,\mathrm{d}x + (2x^2y^3 - x)\,\mathrm{d}y = 0$.

Útm.

7.6.3. Szeparábilis differenciálegyenletek

Legyenek $I, J \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallumok,

$$g \in \mathfrak{C}(I, \mathbb{R}), \quad h \in \mathfrak{C}(J, \mathbb{R}), \qquad \text{ill.} \qquad \tau \in I, \quad \xi \in J,$$

majd tekintsük a következő feladatot.

Határozzunk meg olyan $\varphi \in I \to J$ differenciálható függvényt, amelyre $\mathcal{D}_\varphi$ nyílt intervallum, továbbá

$$\varphi'(x) = g(x) \cdot h(\varphi(x)) \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi),$$

ill.

$$\varphi'(x) = g(x) \cdot h(\varphi(x)) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi), \qquad \varphi(\tau) = \xi$$

teljesül!

7.6.5. definíció. Az imént megfogalmazott feladatot **szétválasztható változójú** vagy **szeparábilis differenciálegyenlet**nek, ill. **szeparábilis differenciálegyenletre vonatkozó kezdetiérték-feladat**nak nevezzük, és az

$$y' = g \cdot (h \circ y) \qquad /y'(x) = g(x) \cdot h(y(x)) \quad (x \in \mathcal{D}_y)/\,, \tag{7.6.28}$$

ill. az

$$y' = g \cdot (h \circ y), \qquad y(\tau) = \xi \tag{7.6.29}$$

szimbólummal jelöljük.

Világos, hogy

1. a (7.5.16) kezdetiérték-feladat szeparábilis $/g(x) \equiv 1/$,
2. ha valamely $\sigma \in J$ esetén $h(\sigma) = 0$, akkor a

   $$\varphi(x) := \sigma \quad (x \in I)$$

   függvény megoldása a (7.6.28) egyenletnek.
3. ha valamely $\widetilde{J} \subset J$ nyílt intervallum esetén

   $$h(y) \neq 0 \qquad (y \in \widetilde{J}),$$

   akkor

   a) (7.6.28) az

   $$g(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{h(y)}\,\mathrm{d}y = 0 \qquad ((x, y) \in I \times \widetilde{J})$$

   ekvivalens alakba írható. Ez a differenciálegyenlet egzakt, hiszen pl. a

   $$P(x, y) := \int_\tau^x g - \int_\xi^y \frac{1}{h} \qquad ((x, y) \in I \times \widetilde{J})$$

függvényre[13] $P \in \mathfrak{D}(I \times \widetilde{J}, \mathbb{R})$ és

$$\operatorname{grad} P = (g, -1/h), \qquad \text{azaz} \qquad \partial_1 P = g,\ \partial_2 P = -1/h.$$

b) a $\widetilde{J}$ intervallumon fennáll a

$$g = \frac{\varphi'}{h \circ \varphi} = \left(\frac{1}{h} \circ \varphi\right) \cdot \varphi'.$$

egyenlőség, ahol $\varphi \in I \to \widetilde{J}$ a (7.6.28) egyenlet egy megoldása. Így – mivel g, $1/h$ nyílt intervallumon értelmezett folytonos függvények –, van olyan $G : I \to \mathbb{R}$, ill. $H : \widetilde{J} \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény, hogy $G' = g$, ill. $H' = 1/h$, továbbá

$$(H \circ \varphi)'(x) = G'(x) \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi),$$

azaz

$$(H \circ \varphi - G)'(x) = 0 \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi),$$

ahonnan alkalmas $c \in \mathbb{R}$ esetén

$$H(\varphi(x)) - G(x) = c \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi). \tag{7.6.30}$$

Az $1/h$ függvény nyilvánvalóan nem veszi fel a 0-t a $\widetilde{J}$ egyetlen pontjában sem, ezért ugyanez igaz a H' függvényre is. A deriváltfüggvény Darboux-tulajdonsága következtében tehát H' állandó előjelű, azaz H szigorúan monoton függvény. Következésképpen H invertálható, és a H^{-1} inverz segítségével (7.6.30)-ből azt kapjuk, hogy

$$\varphi(x) = H^{-1}(G(x) + c) \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi). \tag{7.6.31}$$

A gyakorlatban H^{-1} explicit előállítása többnyire komoly nehézségekbe ütközik, ezért sokszor megelégszünk a (7.6.30) egyenlőség felírásával.
A $\widetilde{J}$ intervallumon a (7.6.29) kezdetiérték-feladat φ megoldására teljesül az

$$\int_\xi^{\varphi(x)} \frac{1}{h} = \int_\tau^x g \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$$

(implicit) egyenlőség, ahol

$$\mathcal{D}_\varphi = \left\{ x \in I :\ \inf_{u \in \widetilde{J}} \int_\xi^u \frac{1}{h} < \int_\tau^x g < \sup_{u \in \widetilde{J}} \int_\xi^u \frac{1}{h} \right\}.$$

[13] Feltéve, hogy $\xi \in \widetilde{J}$ teljesül.

7.6.16. feladat. Határozzuk meg azt a differenciálható φ függvényt, amelyre

$$2\varphi(x) = x\varphi'(x)(x^2+1) \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad \lim_{+\infty} \varphi = 2$$

teljesül!

Útm. Ha $x > 0$, akkor olyan

$$\psi : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$$

differenciálható függvényt kell meghatároznunk, amelyre

$$\psi'(x) = \frac{2}{x(1+x^2)} \cdot \psi(x) =: g(x) \cdot h(\psi(x)) \qquad (x > 0).$$

Ha pl.

$$H : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$$

olyan differenciálható függvény, amelyre

$$H'(y) = \frac{1}{h(y)} = \frac{1}{y} \qquad (y > 0),$$

akkor pl.

$$H(y) = \ln(y) \qquad (y > 0).$$

Ha

$$G : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$$

olyan differenciálható függvény, amelyre

$$G'(x) = g(x) = \frac{2}{x(1+x^2)} \qquad (x > 0),$$

akkor

$$\int \frac{2}{x(1+x^2)}\, dx = \int \left\{ \frac{2}{x} - \frac{2x}{1+x^2} \right\} dx = \left[\ln(x^2) - \ln(1+x^2) \right] = \left[\ln\left(\frac{x^2}{1+x^2} \right) \right]$$

következtében pl. a

$$G(x) := \ln\left(\frac{x^2}{1+x^2} \right) \qquad (x > 0)$$

függvény megfelelő. Így alkalmas $c \in \mathbb{R}$ esetén

$$\psi(x) = H^{-1}(G(x) + c) = \exp\left(\ln\left(\frac{x^2}{1+x^2} + c \right) \right) = \frac{x^2 e^c}{1+x^2} \qquad (x > 0).$$

Behelyettesítéssel belátható, hogy a

$$\varphi(x) := \frac{x^2 e^c}{1+x^2} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény megoldás. Mivel

$$\lim_{+\infty} \varphi = e^c,$$

ezért $e^c = 2$, azaz a megoldás a

$$\varphi(x) = \frac{2x^2}{1+x^2} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

függvény. ■

7.6.17. feladat. Oldjuk meg az alábbi kezdetiérték-feladatokat!

1. $y'(x) = xy^2(x) \quad (x \in \mathcal{D}_y), \quad y(0) = 1;$
2. $y'(x) = \dfrac{e^{x-y(x)}}{1+e^x} \quad (x \in \mathcal{D}_y), \quad y(0) = 1;$
3. $y' = \sqrt{|y|}, \quad y(\tau) = \xi$, ahol $\tau, \xi \in \mathbb{R} : \xi \neq 0$.

Útm.

1. A
$$\tau := 0, \quad \xi := 1, \qquad g(x) := x \quad (x \in I := \mathbb{R}), \qquad h(y) := y^2 \quad (y \in J := (0, +\infty))$$
választással
$$(\tau, \xi) \in I \times J, \qquad g, h \in \mathfrak{C} : \quad h(y) \neq 0 \quad (y \in J).$$
Mivel
$$\int_\tau^x g = \int_0^x t \,\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2} \quad (x \in I)\,, \qquad \int_\xi^u \frac{1}{h} = \int_1^u \frac{1}{w^2}\,\mathrm{d}w = 1 - \frac{1}{u} \quad (u \in J)$$
és
$$\inf_{u\in J} \int_\xi^u \frac{1}{h} = -\infty, \qquad \text{ill.} \qquad \sup_{u\in J} \int_\xi^u \frac{1}{h} = 1,$$
ezért a fenti kezdetiérték-feladat megoldására
$$1 - \frac{1}{\varphi(x)} = \frac{x^2}{2} \qquad \left(x \in I : -\infty < \frac{x^2}{2} < 1\right),$$
azaz
$$\varphi(x) = \frac{2}{2 - x^2} \qquad \left(x \in \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)\right).$$
2. A
$$\tau := 0, \quad \xi := 1, \qquad g(x) := \frac{e^x}{1+e^x} \quad (x \in I := \mathbb{R}), \qquad h(y) := \frac{1}{e^y} \quad (y \in J := \mathbb{R})$$
választással
$$(\tau, \xi) \in I \times J, \qquad g, h \in \mathfrak{C} : \quad h(y) \neq 0 \quad (y \in J).$$
Mivel
$$\int_\tau^x g = \int_0^x \frac{e^t}{1+e^t}\,\mathrm{d}t = \ln(1+e^x) - \ln(2) \qquad (x \in I)\,,$$
$$\int_\xi^u \frac{1}{h} = \int_1^u e^w \,\mathrm{d}w = e^u - e \qquad (u \in J)$$
és
$$\inf_{u\in J} \int_\xi^u \frac{1}{h} = -e, \qquad \text{ill.} \qquad \sup_{u\in J} \int_\xi^u \frac{1}{h} = +\infty,$$
ezért a fenti kezdetiérték-feladat megoldására
$$e^{\varphi(x)} - e = \ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right) \qquad \left(x \in \mathbb{R} : -e < \ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right) < +\infty\right),$$
azaz
$$\varphi(x) = \ln\left(\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right) + e\right) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

3. ξ előjelét illetően két esetet különböztetünk meg:

   – $\boxed{\xi > 0}$: A

$$g(x) := 1 \quad (x \in I := \mathbb{R}), \qquad h(y) := \sqrt{y} \quad (y \in J := (0, +\infty)),$$

   választással

$$(\tau, \xi) \in I \times J, \qquad g, h \in \mathfrak{C}: \quad h(y) \neq 0 \quad (y \in J).$$

   Mivel

$$\int_\tau^x g = \int_\tau^x 1 \, \mathrm{d}t = x - \tau \qquad (x \in I)\,,$$

$$\int_\xi^u \frac{1}{h} = \int_\xi^u \frac{1}{\sqrt{w}} \, \mathrm{d}w = 2\sqrt{u} - 2\sqrt{\xi} \qquad (u \in J)$$

   és

$$\inf_{u \in J} \int_\xi^u \frac{1}{h} = -2\sqrt{\xi}, \qquad \text{ill.} \qquad \sup_{u \in J} \int_\xi^u \frac{1}{h} = +\infty,$$

   ezért a fenti kezdetiérték-feladat megoldására

$$2\sqrt{\varphi(x)} - 2\sqrt{\xi} = x - \tau \quad (x \in I : -2\sqrt{\xi} < x - \tau < +\infty),$$

   azaz

$$\varphi(x) = \left(\sqrt{\xi} + \frac{x - \tau}{2}\right)^2 \quad \left(x \in \left(\tau - 2\sqrt{\xi}, +\infty\right)\right).$$

   – $\boxed{\xi < 0}$: A

$$g(x) := 1 \quad (x \in I := \mathbb{R}), \qquad h(y) := \sqrt{-y} \quad (y \in J := (-\infty, 0))$$

   választással

$$(\tau, \xi) \in I \times J, \qquad g, h \in \mathfrak{C}: \quad h(y) \neq 0 \quad (y \in J).$$

   Az előző levezetéshez hasonlóan azt kapjuk, hogy

$$\varphi(x) = -\left(\sqrt{-\xi} - \frac{x - \tau}{2}\right)^2 \qquad \left(x \in \left(-\infty, \tau + 2\sqrt{-\xi}\right)\right). \quad \blacksquare$$

7.6.18. feladat. Adjunk példát olyan $c \in \mathbb{R}$ számra és olyan differenciálható $\varphi \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre, amelyre

$$\varphi'(x) = \frac{e^{2\varphi(x)}}{1 + x^2} \quad (x \in (-\infty, c)), \qquad \varphi(0) = 0$$

teljesül!

Útm. A

$$\tau := 0, \quad \xi := 0, \qquad I := \mathbb{R}, \quad J := \mathbb{R}, \qquad g(x) := \frac{1}{1 + x^2} \quad (x \in I), \quad h(y) := e^{2y} \quad (y \in J)$$

választással

$$(\tau, \xi) \in I \times J, \qquad g, h \in \mathfrak{C}, \qquad h(y) \neq 0 \quad (y \in J).$$

Így tehát, ha φ az

$$y' = g \cdot (h \circ y), \quad y(\tau) = \xi$$

(szeparábilis) kezdetiérték-feladat megoldása, akkor

$$\int_0^{\varphi(x)} \frac{1}{e^{2s}}\,\mathrm{d}s = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t, \qquad \text{azaz} \qquad 1 - 2\mathrm{arctg}\,(x) = e^{-2\varphi(x)} \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi),$$

ahonnan

$$\varphi(x) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{1 - 2\mathrm{arctg}\,(x)}}\right) \qquad (x \in (-\infty, c)),$$

ahol pl. $c := \mathrm{tg}\,(1/2)$. ■

7.6.2. gyakorló feladat. Oldjuk meg az alábbi kezdetiérték-feladatokat!

1. $y'(x) = 2x(y(x)+1)$ $(x \in \mathbb{R})$, $y(0) = 0$;
2. $y'(x) + 2xy(x) = x$ $(x \in \mathcal{D}_y)$, $y(0) = 0$.
3. $2x\sqrt{2x - x^2}\,y'(x) + 4 + y^2(x) = 0$ $(x \in \mathcal{D}_y)$, $y(2) = 2\sqrt{3}$;
4. $y'(x) = \dfrac{xy^3(x)}{\sqrt{1+x^2}}$ $(x \in \mathcal{D}_y)$, $y(0) = -1$.

Útm.

7.6.19. feladat. Igazoljuk, hogy az

$$y'(x) = x\sqrt{y^2(x) - 1} \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad y(0) = 1$$

kezdetiérték-feladatnak végtelen sok megoldása van, majd adjunk meg legalább négy olyan megoldást, amelyek grafikonjai a $(0,1)$ pont minden környezetében különböznek egymástól!

Útm. A

$$\tau := 0, \quad \xi := 1, \qquad g(x) := x \quad (x \in I := \mathbb{R}), \qquad h(y) := \sqrt{y^2 - 1} \quad (y \in J := [1, +\infty))$$

választással

$$(\tau, \xi) \in I \times J, \qquad g, h \in \mathfrak{C}.$$

Világos, hogy

$$h(y) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = 1,$$

ill. a

$$\varphi(x) := 1 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény megoldása a kezdetiérték-feladatnak. Ha $\widetilde{J} := (1, +\infty)$ és $\xi \in \widetilde{J}$, akkor

$$\int_0^x g = \int_0^x t\,\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2} \qquad (x \in I)\,,$$

$$\int_\xi^u \frac{1}{h} = \int_\xi^u \frac{1}{\sqrt{w^2-1}}\,\mathrm{d}w = \operatorname{arch}(u) - \operatorname{arch}(\xi) \qquad \left(u \in \widetilde{J}\right)$$

és

$$\inf_{u\in\widetilde{J}} \int_\xi^u \frac{1}{h} = -\operatorname{arch}(\xi), \qquad \text{ill.} \qquad \sup_{u\in\widetilde{J}} \int_\xi^u \frac{1}{h} = +\infty$$

következtében a

$$y'(x) = x\sqrt{y^2(x)-1} \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad y(0) = \xi$$

kezdetiérték-feladat ψ megoldására

$$\operatorname{arch}(\psi(x)) - \operatorname{arch}(\xi) = \frac{x^2}{2} \quad \left(x \in I : -\operatorname{arch}(\xi) < \frac{x^2}{2} < +\infty\right) = \mathbb{R},$$

azaz

$$\psi(x) = \operatorname{ch}\left(\frac{x^2}{2} + \operatorname{arch}(\xi)\right) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Látható, hogy a $\xi = 1$ helyettesítéssel ismét az eredeti kezdetiérték-feladat megoldásához jutunk. Így az eredeti kezdetiérték-feladatnak végtelen sok megoldása van, hiszen bármely $0 \leq k \in \mathbb{R}$ esetén az

$$\omega(x) := \begin{cases} 1 & (x \leq k), \\ \operatorname{ch}\left(\frac{x^2}{2}\right) & (x > k) \end{cases} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény megoldás. Így

$$\phi_1(x) := x \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad \phi_2(x) := \operatorname{ch}\left(\frac{x^2}{2}\right) \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$\phi_3(x) := \begin{cases} 1 & (x \leq 0), \\ \operatorname{ch}\left(\frac{x^2}{2}\right) & (x > 0) \end{cases} \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad \phi_4(x) := \begin{cases} 1 & (x > 0), \\ \operatorname{ch}\left(\frac{x^2}{2}\right) & (x \leq 0) \end{cases} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

négy olyan megoldása az eredeti kezdetiérték-feladatnak, amelyek grafikonjai a $(0{,}1)$ pont minden környezetében különböznek egymástól. ■

7.6.20. feladat. Tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ esetén számítsuk ki az

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(tx)e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

integrál értékét!

Útm. Ha

$$\varphi(t) := \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(tx)e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \qquad (t \in \mathbb{R}),$$

akkor egyrészt

$$\varphi(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi},$$

másrészt pedig tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} -x\sin(tx)e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(tx)(-2x)e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{2}\left\{\left[\sin(tx)e^{-x^2}\right]_{x=-\infty}^{x=+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} t\cos(tx)e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right\} = \\ &= -\frac{t}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos(tx)e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{t}{2}\varphi(t).\end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy φ teljes megoldása a

$$2y'(t) = -t\cdot y(t) \qquad (t\in\mathcal{D}_y), \qquad y(0)=\sqrt{\pi}$$

kezdetiérték-feladatnak. Így

$$\int_0^t -\frac{s}{2}\,\mathrm{d}s = \int_{\sqrt{\pi}}^{\varphi(t)} \frac{1}{w}\,\mathrm{d}w \qquad (t\in\mathcal{D}_\varphi),$$

azaz

$$-\frac{t^2}{4} = \ln(\varphi(t)) - \ln(\sqrt{\pi}) \qquad (t\in\mathcal{D}_\varphi),$$

ill.

$$\varphi(t) = \sqrt{\pi}\exp\left(-\frac{t^2}{4}\right) \qquad (t\in\mathcal{D}_\varphi),$$

ahol

$$\mathcal{D}_\varphi = \left\{t\in\mathbb{R}:\ \inf_{u>0}(\ln(u)-\ln(\sqrt{\pi})) < -\frac{t^2}{4} < \sup_{u>0}(\ln(u)-\ln(\sqrt{\pi}))\right\} = \mathbb{R}. \quad \blacksquare$$

7.6.21. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $f\in\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ és

$$y' = f\circ(\mathrm{id}\,, y)$$

homogén differenciálegyenlet (vö. 7.4.1. definíció), akkor alkalmas $h\in\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvény esetén fennáll az

$$f(x,y) = h\left(\frac{y}{x}\right)$$

egyenlőség!

Útm. A $\lambda := 1/x$ választással (vö. 7.4.1. definíció) azt kapjuk, hogy

$$f(x,y) = f\left(x, \frac{1}{x}y\right) = f\left(1,\frac{y}{x}\right) =: h\left(\frac{y}{x}\right) \qquad ((x,y)\in\mathcal{D}_f). \quad \blacksquare$$

7.6.22. feladat. Igazoljuk, hogy ha $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, $f \in \mathfrak{C}(I, \mathbb{R})$, akkor az alábbi differenciálegyenletek szeparábilis egyenletté alakíthatók!

1. $y'(x) = f(ax + by(x) + c)$ $(x \in \mathcal{D}_y)$, ahol $a, b, c \in \mathbb{R}$: $ab \neq 0$;
2. $y'(x) = f\left(\dfrac{y(x)}{x}\right)$ $(x \in \mathcal{D}_y)$, ahol $f(z) \neq z$ $(z \in I)$.

Útm.

1. Ha a φ függvény megoldása a fenti egyenletnek és
$$\psi(x) := ax + b\varphi(x) + c \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi),$$
akkor minden $x \in \mathcal{D}_\varphi$ esetén
$$\psi'(x) = a + b\varphi'(x) = a + bf(ax + b\varphi(x) + c) = a + bf(\psi(x)).$$
Ez azt jelenti, hogy ψ a
$$\boxed{z' = a + bf \circ z}$$
szeparábilis egyenlet megoldása.
2. Ha a φ függvény megoldása a fenti egyenletnek és
$$\psi(x) := \frac{\varphi(x)}{x} \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi),$$
akkor minden $x \in \mathcal{D}_\varphi$ esetén
$$\varphi'(x) = \psi(x) + x\psi'(x)\ .$$
Ez azt jelenti, hogy ψ az
$$\boxed{z'(x) = \frac{f(z(x)) - z(x)}{x} \qquad (x \in \mathcal{D}_y)}$$
szeparábilis egyenlet megoldása. ■

7.6.3. gyakorló feladat. Oldjuk meg az alábbi kezdetiérték-feladatokat!

1. $y'(x) = (2x + 2y(x) - 1)^2$ $(x \in \mathcal{D}_y)$, $y(0) = 1$;
2. $y'(x) = (y(x) + 4x - 1)^2$ $(x \in \mathcal{D}_y)$, $y(0) = 1$;
3. $y'(x) = \dfrac{y(x)}{x} - \dfrac{x}{y(x)}$ $(x \in \mathcal{D}_y)$, $y(1) = 1$;
4. $y^2(x) = x(y(x) - xy'(x)$ $(x \in \mathcal{D}_y)$, $y(1) = 1$, ill. $y(1) = -1$;
5. $y'(x) = \dfrac{x - y(x)}{x + 2y(x)}$ $(x \in \mathcal{D}_y)$, $y(1) = 0$.

Útm.

7.6.4. gyakorló feladat. Oldjuk meg az alábbi kezdetiérték-feladatokat!

1. $y'(x) = \sin^2(x - y(x))$ $(x \in \mathcal{D}_y)$, $y(0) = 0$;
2. $y'(x) = \frac{y^3(x)-x^3}{xy^2(x)}$ $(x \in \mathcal{D}_y)$, $y(1) = 1$;
3. $y'(x) = 1 + \frac{y^2(x)}{x^2+xy(x)}$ $(x \in \mathcal{D}_y)$, $y(1) = 0$.

Útm.

7.6.5. gyakorló feladat. Igazoljuk, hogy ha $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, $f \in \mathfrak{C}(I, \mathbb{R})$, akkor az alábbi differenciálegyenlet szeparábilis egyenletté alakítható!

$$y'(x) = f\left(\frac{a_1x + b_1y(x) + c_1}{a_2x + b_2y(x) + c_2}\right) \qquad (x \in \mathcal{D}_y),$$

ahol $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{R}$: $a_1b_2 - b_1a_2 = 0$ vagy $a_1b_2 - b_1a_2 \neq 0$.

Útm.

7.6.23. feladat. Igazoljuk, hogy ha $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ olyan kétszer deriválható függvény, amelyre

$$f(x, y) \neq 0 \qquad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

teljesül, úgy az

$$y' = f \circ (\mathrm{id}\,, y)$$

differenciálegyenlet pontosan akkor szeparábilis, ha fennáll az

$$f \cdot \partial_{12} f = \partial_1 f \cdot \partial_2 f$$

egyenlőség!

Útm.

1. lépés.. Ha

$$f(x, y) = g(x) \cdot h(y) \qquad ((x, y) \in \mathbb{R}^2),$$

akkor bármely $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ esetén

$$\partial_1 f(x, y) = g'(x) \cdot h(y), \qquad \partial_2 f(x, y) = g(x) \cdot h'(y),$$

így (vö. Young-tétel)

$$\begin{aligned} f(x, y)\partial_{xy} f(x, y) &= g(x) \cdot h(y) \cdot g'(x) \cdot h'(y) = g'(x) \cdot h(y) \cdot g(x) \cdot h'(y) = \\ &= \partial_1 f(x, y) \cdot \partial_2 f(x, y). \end{aligned}$$

2. lépés.. Ha bármely $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ esetén pl. $f(x, y) > 0$, akkor bármely $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ esetén

$$\begin{aligned} \partial_{12} \ln(f(x,y)) &= \partial_2 \left(\frac{\partial_1 f(x,y)}{f(x,y)} \right) = \\ &= \frac{1}{(f(x,y))^2} \cdot \{\partial_{12} f(x,y) \cdot f(x,y) - \partial_1 f(x,y) \cdot \partial_2 f(x,y)\} = 0. \end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy bármely $\tau \in \mathbb{R}$, ill. $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény esetén

$$\partial_1 \ln(f(x,y)) = c(x) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ahonnan tetszőleges $d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény esetén

$$\ln(f(x,y)) = \int_\tau^x c(t)\, \mathrm{d}t + d(y) \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2),$$

azaz a

$$g(x) :\equiv \exp\left(\int_\tau^x c(t)\, \mathrm{d}t \right) \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad h(y) :\equiv \exp(d(y)) \quad (y \in \mathbb{R})$$

jelöléssel

$$f(x,y) = g(x) \cdot h(y) \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$$

következik. ■

7.6.4. Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek

Adott $I \subset \mathbb{R}$ intervallum,

$$A, b \in \mathfrak{C}(I, \mathbb{R}), \qquad \text{ill.} \qquad \tau \in I, \quad \xi \in \mathbb{R}$$

függvények esetén tekintsük a következő feladatot.
Határozzunk meg olyan $\varphi : I \to \mathbb{R}$ differenciálható függvényt, amelyre

$$\varphi' = A \cdot \varphi + b,$$

ill.

$$\varphi' = A \cdot \varphi + b, \qquad \varphi(\tau) = \xi$$

teljesül.

7.6.6. definíció. Az imént megfogalmazott feladatot **elsőrendű lineáris differenciálegyenlet**nek, ill. **elsőrendű lineáris differenciálegyenletre vonatkozó kezdetiérték-feladat**nak nevezzük, és az

$$y' = A \cdot y + b, \tag{7.6.32}$$

ill. az

$$y' = A \cdot y + b, \qquad y(\tau) = \xi \tag{7.6.33}$$

szimbólummal jelöljük.

A (7.6.32) egyenlet elnevezésében a *lineáris* jelzőt az magyarázza, hogy az

$$L : \mathfrak{C}^1(I, \mathbb{R}) \to \mathfrak{C}^1(I, \mathbb{R}), \qquad L(y) := y' - Ay$$

leképezés lineáris, azaz bármely $u, v \in \mathfrak{C}^1(I, \mathbb{R})$, ill. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén

$$L(\alpha u + \beta v) = (\alpha u + \beta v)' - A(\alpha u + \beta v) = \alpha(u' - Au) + \beta(v' - Av) = \alpha L(u) + \beta L(v)$$

(vö. még 7.3.2. definíció).
Világos, hogy ha

1. $A(x) = 0$ $(x \in I)$, akkor a

$$\varphi(x) := \int_\tau^x b(s)\,\mathrm{d}s + \xi \qquad (x \in I)$$

függvény megoldása a (7.6.32) differenciálegyenletnek, ill. a (7.6.33) kezdetiérték-feladatnak.

2. $A \not\equiv 0$, akkor (7.6.32) a

$$g(x,y)\,\mathrm{d}x + h(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$$

ekvivalens alakba írható, ahol

$$g(x,y) := A(x)y + b(x), \quad h(x,y) := -1 \qquad ((x,y) \in I \times \mathbb{R}).$$

Mivel

$$\partial_2 g = A \not\equiv 0 = \partial_1 h,$$

ezért (7.6.32) nem egzakt. Viszont

$$\frac{\partial_2 g(x,y) - \partial_1 h(x,y)}{h(x,y)} \equiv -A(x),$$

így, ha

$$\alpha(x) := \int_\tau^x A(s)\,\mathrm{d}s \qquad (x \in I),$$

akkor $\alpha \in \mathfrak{D}(I,\mathbb{R})\colon \alpha' = A$, és

$$\mu(x,y) := e^{-\alpha(x)} \qquad ((x,y) \in I \times \mathbb{R})$$

integráló tényező, azaz az

$$y'e^{-\alpha} = Aye^{-\alpha} + be^{-\alpha} \tag{7.6.34}$$

egyenlet egzakt. Ezért az, hogy

$$\varphi : I \to \mathbb{R}$$

teljes megoldása a (7.6.33) kezdetiérték-feladatnak azzal egyenértékű, hogy

$$\underbrace{\varphi'(x)e^{-\alpha(x)} - A(x)\varphi(x)e^{-\alpha(x)}}_{\frac{d}{dx}(\varphi(x)e^{-\alpha(x)})} = b(x)e^{-\alpha(x)} \quad (x \in I) \qquad \text{és} \qquad \varphi(\tau) = \xi.$$

Innen integrálással $/\int_\tau^x \mathrm{d}s/$ azt kapjuk, hogy

$$\varphi(x)\exp(-\alpha(x)) - \varphi(\tau)\exp(-\alpha(\tau)) = \int_\tau^x \exp(-\alpha(s))b(s)\,\mathrm{d}s \qquad (x \in I),$$

ill. az

$$\exp(-\alpha(\tau)) = 1 \qquad \text{és az} \qquad \exp(-\alpha(s)) = \exp\left(-\int_\tau^s A(u)\,\mathrm{d}u\right)$$

egyenlőség figyelembevételével tetszőleges $x \in I$ esetén

$$\boxed{\varphi(x) = \left\{\xi + \int_\tau^x b(s)\exp\left(-\int_\tau^s A(u)\,\mathrm{d}u\right)\,\mathrm{d}s\right\} \cdot \exp\left(\int_\tau^x A(s)\,\mathrm{d}s\right)}. \tag{7.6.35}$$

7.6.4. tétel. Ha φ és ψ a (7.6.32) differenciálegyenlet egy-egy megoldása, akkor a $\varphi - \psi$ függvény megoldása az

$$y' = A \cdot y \tag{7.6.36}$$

homogén egyenletnek.

Biz. Mivel φ és ψ deriválható, ezért $\varphi - \psi$ is deriválható, továbbá

$$(\varphi - \psi)' = \varphi' - \psi' = A \cdot \varphi + b - (A \cdot \psi + b) = A \cdot \varphi - A \cdot \psi = A \cdot (\varphi - \psi). \quad \blacksquare$$

7.6.5. tétel. Ha

$$\varphi_H := \exp \circ \alpha, \qquad \text{ahol} \qquad \alpha' = A$$

akkor a (7.6.36) homogén egyenlet megoldáshalmaza

$$\{c\varphi_H : \ c \in \mathbb{R}\}$$

alakú.

Biz. Tetszőleges $c \in \mathbb{R}$ esetén $c\varphi_H$ megoldása (7.6.36)-nek, hiszen

$$(c\varphi_H)' = c\varphi_H' = cA\varphi_H = A(c\varphi_H),$$

továbbá, ha valamely ω függvény megoldása (7.6.36)-nek, akkor bármely $x \in I$ esetén

$$\left(\frac{\omega}{\varphi_H}\right)'(x) = \frac{\omega'(x)\varphi_H(x) - \omega(x)\varphi_H'(x)}{\varphi_H^2(x)} = \frac{A(x)\omega(x)\varphi_H(x) - \omega(x)A(x)\varphi_H(x)}{\varphi_H^2(x)} = 0,$$

azaz alkalmas $c \in \mathbb{R}$ esetén

$$\frac{\omega}{\varphi_H}(x) = c \qquad (x \in I),$$

más szóval a (7.6.36) homogén lineáris d.e. minden megoldása a következő alakú:

$$c\varphi_H, \qquad \text{ahol} \qquad c \in \mathbb{R}. \quad \blacksquare$$

7.6.6. tétel. A (7.6.32) differenciálegyenlet megoldáshalmaza

$$\{\chi + c\varphi_H : \ c \in \mathbb{R}\}$$

alakú, ahol χ a (7.6.32) egyenlet egy tetszőleges megoldása.

Biz. Ha ψ megoldása (7.6.32)-nak, akkor (vö. 7.6.4. tétel) $\psi - \chi$ megoldása (7.6.36)-nak, így a fentiek fényében van olyan $c \in \mathbb{R}$, hogy $\psi - \chi = c\varphi_H$, ahonnan

$$\psi = \chi + c\varphi_H$$

következik. $\blacksquare$

7.6.7. tétel. Ha $m : I \to \mathbb{R}$ olyan differenciálható függvény, amelyre

$$m \in \int \frac{b}{\varphi_H},$$

akkor a

$$\chi := m\varphi_H$$

függvény megoldása (7.6.32)-nak.

Biz. Világos, hogy

$$\chi' = (m\varphi_H) = m'\varphi_H + m\varphi_H' = \frac{b}{\varphi_H} \cdot \varphi_H + mA\varphi_H = b + A(m\varphi_H) = A\chi + b. \quad \blacksquare$$

7.6.0. megjegyzés. A (7.6.35) formula, ill. az iméntiek alapján (7.6.32) differenciálegyenlet megoldásának menete tehát a következő:

1. lépés.. meghatározzuk a homogén egyenlet (amikor $b \equiv 0$) egyik megoldását:

$$\varphi_H := \exp \circ \alpha \qquad /\alpha' = A/ ;$$

2. lépés.. meghatározunk egy

$$m \in \int \frac{b}{\varphi_H}$$

primitív függvényt;

3. lépés.. felírjuk a megoldáshalmazt az

$$\mathcal{M} := \{I \ni x \mapsto (c + m(x))\varphi_H(x) : \ c \in \mathbb{R}\}$$

alakban.

A 7.6.0. megjegyzésben bemutatott eljárást az „**állandók variálása**ként” szokás emlegetni. Amíg ui. a (7.6.36) egyenlet megoldásait $c\varphi_H$ alakban kapjuk valamely $c \in \mathbb{R}$ konstanssal (állandóval), addig a (7.6.32) ún. **inhomogén egyenlet** megoldásait a „helyről helyre változtatott (variált)” c-vel, azaz egy m függvénnyel számíthatjuk $m\varphi_H$-ként.

7.6.24. feladat. Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenletek megoldáshalmazát!

1. $y'(x) + x^2 y(x) = 0 \ (x \in \mathcal{D}_y)$;
2. $y'(x) - \dfrac{1}{x} y(x) = x^2 \ (x \in \mathcal{D}_y)$;
3. $y'(x) + y(x) = \sin(2x) \ (x \in \mathcal{D}_y)$.

Útm.

1. Az egyenletet átrendezve, ill. az

$$I := \mathbb{R}, \qquad A(x) := -x^2, \quad b(x) := 0 \quad (x \in I)$$

választással (homogén) lineáris differenciálegyenletet kapunk. Az

$$\alpha \in \int -x^2 \,\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^3}{3}\right]_{x\in\mathbb{R}}$$

függvénnyel az egyenlet megoldáshalmaza:

$$\mathcal{M} := \left\{\mathbb{R} \ni x \mapsto c\exp(-x^3/3) : \ c \in \mathbb{R}\right\}.$$

2. Az egyenletet átrendezve, ill. az

$$I := (-\infty,0), \qquad A(x) := \frac{1}{x}, \quad b(x) := x^2 \quad (x \in I)$$

választással lineáris differenciálegyenletet kapunk $/I := (0, +\infty)$ esetén hasonlóan járunk el/.

1. lépés.. Az

$$\alpha \in \int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = [\ln(-x)]_{x\in I}$$

függvényel a homogén egyenlet egy megoldása:

$$\varphi_H(x) = \exp(\alpha(x)) = -x \qquad (x \in I).$$

2. lépés.. Ha az $m : I \to \mathbb{R}$ deriválható függvényre $m' = b/\varphi_H$, akkor

$$m \in \int \frac{x^2}{-x} \,\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^2}{2}\right]_{x\in I}$$

3. lépés.. Az egyenlet megoldáshalmaza:

$$\mathcal{M} := \left\{I \ni x \mapsto \left(c - \frac{x^2}{2}\right)(-x) : \ c \in \mathbb{R}\right\} = \left\{I \ni x \mapsto -cx + \frac{x^3}{2} : \ c \in \mathbb{R}\right\}.$$

3. Az egyenletet átrendezve, ill. az

$$I := \mathbb{R}, \qquad A(x) := -1, \quad b(x) := \sin(2x) \quad (x \in I)$$

választással lineáris differenciálegyenletet kapunk.

1. lépés.. Az

$$\alpha \in \int (-1) \,\mathrm{d}x = [-x]_{x\in\mathbb{R}}$$

függvényel a homogén egyenlet egy megoldása:

$$\varphi_H(x) = \exp(\alpha(x)) = e^{-x} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

2. lépés.. Ha az $m : I \to \mathbb{R}$ deriválható függvényre $m' = b/\varphi_H$, akkor

$$m \in \int \frac{\sin(2x)}{e^{-x}} \,\mathrm{d}x = \int e^x \sin(2x) \,\mathrm{d}x = \left[\frac{e^x}{5}(\sin(2x) - 2\cos(2x))\right]_{x\in\mathbb{R}}$$

(vö. **??**. példa utáni megjegyzés).

3. lépés.. Az egyenlet megoldáshalmaza:

$$\begin{aligned}\mathcal{M} \quad &:= \quad \left\{I \ni x \mapsto \left(c + \frac{e^x}{5}(\sin(2x) - 2\cos(2x))\right) e^{-x} : \ c \in \mathbb{R}\right\} = \\ &= \quad \left\{I \ni x \mapsto ce^{-x} + \frac{\sin(2x) - 2\cos(2x)}{5} : \ c \in \mathbb{R}\right\}. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

7.6.6. gyakorló feladat. Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenletek megoldáshalmazát!

1. $y'(x) + xy(x) - x = 0 \ (x \in \mathcal{D}_y)$;
2. $y'(x) + 2xy(x) + xe^{-x^2} = 0 \ (x \in \mathcal{D}_y)$;
3. $xy'(x) - \dfrac{y(x)}{x+1} = x \ (x \in \mathcal{D}_y)$;
4. $y'(x)\sin(x) + \cos(x) = 1 + y(x) \ (x \in \mathcal{D}_y)$.

Útm.

7.6.25. feladat. Oldjuk meg az alábbi kezdetiérték-feladatokat!

1. $y'(x) + \dfrac{2y(x)}{x} = x^3 \ (x \in \mathcal{D}_y)$, $y(1) = 1$;
2. $y'(x) + \dfrac{y(x)}{x} = x^2 \ (x \in \mathcal{D}_y)$, $y(-1) = 1$;
3. $y'(x) + \dfrac{y(x)}{2(x-1)} = \dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \ (x \in \mathcal{D}_y)$, $y(0) = \pi$.

Útm.

1. Az egyenletet átrendezve, ill. az

$$I := (0, +\infty), \qquad A(x) := -\frac{2}{x}, \quad b(x) := x^3 \quad (x \in I)$$

választással lineáris differenciálegyenletet kapunk. A kezdetiérték-feladat megoldását „két” módon is megkaphatjuk.

1. mód.. $\alpha \in \displaystyle\int -\frac{2}{x} \,\mathrm{d}x = [-2\ln(x)]_{x\in I}$,

$$\varphi_H(x) = \exp(-2\ln(x)) = \frac{1}{x^2} \quad (x \in I), \qquad m \in \int \frac{x^3}{1/x^2} \,\mathrm{d}x = \int x^5 \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^6}{6}\right]_{x\in I}.$$

Így a differenciálegyenlet megoldáshalmaza

$$\mathcal{M} := \left\{ I \ni x \mapsto \left(c + \frac{x^6}{6}\right) \frac{1}{x^2} : \; c \in \mathbb{R} \right\}$$

alakú. Ha valamely $\varphi \in \mathcal{M}$ függvényre $\varphi(1) = 1$, akkor $c = \frac{5}{6}$, azaz a k.é.f. φ teljes megoldására:

$$\boxed{\varphi(x) = \frac{5 + x^6}{6x^2}} \qquad (x \in I).$$

2. mód.. A (7.6.35) összefüggésből a teljes megoldásra

$$\begin{aligned}
\boxed{\varphi(x)} &= \left(1 + \int_1^x t^3 \exp\left(-\int_1^t -\frac{2}{s}\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t\right) \cdot \exp\left(\int_1^x -\frac{2}{t}\,\mathrm{d}t\right) = \\
&= \left(1 + \int_1^x t^3 \exp\left(\ln\left(t^2\right)\right)\mathrm{d}t\right) \cdot \exp\left(-\ln\left(x^2\right)\right) = \\
&= \left(1 + \int_1^x t^5\,\mathrm{d}t\right) \cdot \frac{1}{x^2} = \boxed{\frac{x^6 + 5}{6x^2}} \qquad (x \in I).
\end{aligned}$$

2. Az egyenletet átrendezve, ill. az

$$I := (-\infty, 0), \qquad A(x) := -\frac{1}{x}, \quad b(x) := x^2 \quad (x \in I)$$

választással lineáris differenciálegyenletet kapunk. A kezdetiérték-feladat megoldását „két" módon is megkaphatjuk.

1. mód.. $\alpha \in \int -\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = [-\ln(-x)]_{x \in I}$,

$$\varphi_H(x) = \exp\left(-\ln(-x)\right) = -\frac{1}{x} \quad (x \in I), \qquad m \in \int \frac{x^2}{-1/x}\,\mathrm{d}x = \int -x^3\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^4}{4}\right]_{x \in I}.$$

Így a differenciálegyenlet megoldáshalmaza

$$\mathcal{M} := \left\{ I \ni x \mapsto \left(c - \frac{x^4}{4}\right) \left(-\frac{1}{x}\right) : \; c \in \mathbb{R} \right\}$$

alakú. Ha valamely $\varphi \in \mathcal{M}$ függvényre $\varphi(-1) = 1$, akkor $c = \frac{5}{4}$, azaz a k.é.f. φ teljes megoldására:

$$\boxed{\varphi(x) = \frac{x^4 - 5}{4x}} \qquad (x \in I).$$

2. mód.. A (7.6.35) összefüggésből a teljes megoldásra

$$\begin{aligned}
\boxed{\varphi(x)} &= \left(1 + \int_{-1}^x t^2 \exp\left(-\int_{-1}^t -\frac{1}{s}\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t\right) \cdot \exp\left(\int_{-1}^x -\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\right) = \\
&= \left(1 + \int_1^x t^2 \exp\left(\ln\left(-t\right)\right)\mathrm{d}t\right) \cdot \exp\left(-\ln\left(-x\right)\right) = \\
&= \left(1 - \int_1^x t^3\,\mathrm{d}t\right) \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) = \boxed{\frac{x^4 - 5}{4x}} \qquad (x \in I).
\end{aligned}$$

3. Az egyenletet átrendezve, ill. az

$$I := (-1,1), \qquad A(x) := \frac{1}{2(1-x)}, \quad b(x) := \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \quad (x \in I)$$

választással lineáris differenciálegyenletet kapunk. A kezdetiérték-feladat megoldását „két” módon is megkaphatjuk.

1. mód.. $\alpha \in \int \frac{1}{2(1-x)}\,\mathrm{d}x = \left[-\ln(\sqrt{1-x})\right]_{x\in I} = \left[\ln\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)\right]_{x\in I}$,

$$\varphi_H(x) = \exp\left(\ln\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \quad (x \in I),$$

$$m \in \int \frac{\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1-x}}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x = \left[\sqrt{1+x}\right]_{x\in I}.$$

Így a differenciálegyenlet megoldáshalmaza

$$\mathcal{M} := \left\{ I \ni x \mapsto (c + \sqrt{1+x}) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}} \,:\, c \in \mathbb{R} \right\}$$

alakú. Ha valamely $\varphi \in \mathcal{M}$ függvényre $\varphi(0) = \pi$, akkor $c = \pi - 1$, azaz a k.é.f. φ teljes megoldására:

$$\boxed{\varphi(x) = \frac{\pi - 1}{\sqrt{1-x}} + \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} \qquad (x \in I).$$

2. mód.. A (7.6.35) összefüggésből a teljes megoldásra

$$\begin{aligned}
\boxed{\varphi(x)} &= \left(\pi + \int_0^x \frac{1}{2\sqrt{1-t^2}} \exp\left(-\int_0^t \frac{1}{2(1-s)}\,\mathrm{d}s\right)\,\mathrm{d}t\right) \cdot \\
&\quad \cdot \exp\left(\int_0^x \frac{1}{2(1-t)}\,\mathrm{d}t\right) = \\
&= \left(\pi + \int_0^x \frac{1}{2\sqrt{1-t^2}} \cdot \sqrt{1-t}\,\mathrm{d}t\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \\
&= \left(\pi + \int_0^x \frac{1}{2\sqrt{1+t}}\,\mathrm{d}t\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}} = (\pi + \sqrt{1+x} - 1) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \\
&= \boxed{\frac{\pi - 1}{\sqrt{1-x}} + \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} \qquad (x \in I). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

7.6.7. gyakorló feladat. Oldjuk meg az alábbi kezdetiérték-feladatokat!

1. $y'(x) + \frac{1}{x}y(x) = \frac{1}{x^2}$ $(x \in \mathcal{D}_y)$, $y(1) = 0$;
2. $y'(x) + 2y(x) - 5 = 0$ $(x \in \mathcal{D}_y)$, $y(0) = 5/2$;
3. $y'(x)\cos(x) + y(x)\sin(x) = 1$ $(x \in \mathcal{D}_y)$, $y(0) = 1$;
4. $y'(x) + \frac{y(x)}{x}e^x = 0$ $(x \in \mathcal{D}_y)$, $y(1) = 0$;
5. $y'(x) + y(x)\cos(x) = \sin(x)\cos(x)$ $(x \in \mathcal{D}_y)$, $y\,(0) = 1$;
6. $xy'(x) = x^2 + y(x)$ $(x \in \mathcal{D}_y)$, $y(1) = 2$;
7. $y' = 3y\mathrm{tg}\, + 1$, $y(0) = 1$.

Útm.

A (7.6.32) lineáris egyenlet megoldásait megkaphatjuk az alább ismertetendő eljárással is (**Bernoulli-módszer**). Tegyük fel, hogy a (7.6.32) inhomogén lineáris differenciálegyenlet $\varphi : I \to \mathbb{R}$ (teljes) megoldása

$$\varphi = \mu \cdot \nu$$

alakú, ahol $\mu, \nu : I \to \mathbb{R}$ differenciálható függvények . Ekkor (7.6.32)-ba helyettesítve azt kapjuk, hogy

$$\mu'\nu + \mu\nu' = A\mu\nu + b, \qquad \text{azaz} \qquad \mu(\nu' - A\nu) + (\mu'\nu - b) = 0.$$

Ez azt jelenti, hogy

$$\mu(\nu' - A\nu) = 0 \qquad \text{és} \qquad \mu'\nu - b = 0,$$

ahonnan a

$$\nu := \exp\circ\alpha \quad /\alpha' = A/, \qquad \text{ill. a} \qquad \mu \in \int \frac{b}{\nu} = \int \frac{b(x)}{e^{\alpha(x)}}\,\mathrm{d}x$$

függvénnyel a megoldáshalmaz már könnyen felírható.

7.6.26. feladat. Oldjuk meg az

$$y'(x) - \frac{y(x)}{x} = x^2 + 3x - 2 \qquad (x \in \mathcal{D}_y)$$

differenciálegyenletet!

Útm. Ha pl. $I := (-\infty,0)$ $/I := (0,+\infty)$ esetén hasonlóan járunk el/ és $\varphi : I \to \mathbb{R}$ az egyenlet (teljes) megoldása, továbbá

$$\varphi(x) =: \mu(x) \cdot \nu(x) \qquad (x \in I),$$

akkor

$$\mu'(x)\nu(x) + \mu(x)\nu'(x) - \frac{\mu(x)\nu(x)}{x} = x^2 + 3x - 2 \qquad (x \in I),$$

ill.

$$\mu(x)\left(\nu'(x) - \frac{\nu(x)}{x}\right) + \mu'(x)\nu(x) - x^2 - 3x + 2 = 0 \qquad (x \in I).$$

Így

$$\nu'(x) - \frac{\nu(x)}{x} = 0 \quad (x \in I) \qquad \text{és} \qquad \mu'(x)\nu(x) - x^2 - 3x + 2 = 0 \quad (x \in I).$$

Ezért, ha

$$\nu(x) := x \quad (x \in I), \qquad \text{azaz} \qquad \mu'(x) = x + 3 - \frac{2}{x} \qquad (x \in I),$$

akkor bármely $k \in \mathbb{R}$ esetén a

$$\mu(x) = \frac{x^2}{2} + 3x - 2\ln(-x) + k \qquad (x \in I)$$

függvény megfelelő. Ez azt jelenti, hogy a differenciálegyenlet megoldáshalmaza

$$\mathcal{M} := \left\{ I \ni x \mapsto \frac{x^3}{2} + 3x - 2x\ln(-x) + kx : \ k \in \mathbb{R} \right\}$$

alakú. ■

7.6.8. gyakorló feladat. Oldjuk meg

1. az
$$y'(x) - \frac{2x}{1+x^2} y(x) = (1+x^2)^2 \qquad (x \in \mathbb{R})$$
differenciálegyenletet;
2. az
$$(1+x^2) \cdot y'(x) - 4x \cdot y(x) = x \quad (x \in \mathcal{D}_y), \qquad y(0) = 0$$
kezdetiérték-feladatot!

Útm.

7.6.27. feladat. Oldjuk meg a 7.5.6. feladatbeli kezdetiérték-feladatot!

Útm. Világos, hogy

$$x \geq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi(x) \geq 0,$$

hiszen $\varphi(0) = 0$ és φ monoton növekedő. A $[0, +\infty)$ intervallumon tehát φ az

$$y'(x) = x^2 + y(x) \quad (x \in [0, +\infty)), \qquad y(0) = 0$$

kezdetiérték-feladat megoldása:

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \left\{0+\int_0^x s^2\exp\left(-\int_0^s 1\,\mathrm{d}u\right)\,\mathrm{d}s\right\}\exp\left(\int_0^x 1\,\mathrm{d}s\right)= \\
&= \left\{0+\int_0^x s^2e^{-s}\,\mathrm{d}s\right\}e^x=\left\{\left[-s^2e^{-s}\right]_0^x+\int_0^x 2se^{-s}\,\mathrm{d}s\right\}e^x= \\
&= \left\{-x^2e^{-x}+\left[-2se^{-s}\right]_0^x+\int_0^x 2e^{-s}\,\mathrm{d}s\right\}e^x=\left\{-x^2e^{-x}-2xe^{-x}-\left[2e^{-s}\right]_0^x\right\}e^x= \\
&= \left\{-x^2e^{-x}-2xe^{-x}-2e^{-s}+2\right\}e^x=-x^2-2x-2+2e^x.
\end{aligned}$$

Így (vö. 7.5.6. feladat) a szóban forgó kezdetiérték-feladat megoldása a

$$\varphi(x):=\begin{cases}-x^2-2x-2+2e^x & (x\geq 0),\\[2ex] x^2-2x+2+2e^{-x} & (x<0)\end{cases}\qquad (x\in\mathbb{R})$$

függvény. ■

7.6.28. feladat. Kapcsoljunk sorba egy ohmos ellenállást és egy önindukciós tekercset egy adott elektromotoros erővel (feszültséggel) táplált áramkörbe! Határozzuk meg, hogy az elektromotoros erő hatására kialakult I áramerősség milyen függvénye az időnek!

Útm. Ohm törvénye alapján az áramkörre vonatkozó differenciálegyenlet, ill. kezdetiérték-feladat:

$$IR+L\dot{I}=U,\qquad I(0)=0,$$

ahol

R az ohmos ellenállás	$[\Omega]$,
L a tekercs önindukciós együtthatója	$[H]$,
U az áramforrás elektromotoros ereje (feszültsége)	$[V]$,
I az áramerősség	$[A]$.

Az alábbi két esetet fogjuk tárgyalni:

1. eset:.

$$U(t)=U_0>0\qquad (t\in[0,+\infty)),$$

azaz az áramkörbe kapcsolt áramforrás elektromotoros ereje állandó. Így

$$\dot{I}(t)=-\frac{R}{L}I(t)+\frac{U_0}{L}\quad (t\in[0,+\infty)),\qquad I(0)=0,$$

ahonnan

$$\begin{aligned}
I(t) &= \left\{0+\int_0^t \frac{U_0}{L}\exp\left(\int_0^s \frac{R}{L}\,\mathrm{d}u\right)\,\mathrm{d}s\right\}\exp\left(\int_0^t -\frac{R}{L}\,\mathrm{d}s\right)= \\
&= \left\{\int_0^t \frac{U_0}{L}\exp\left(\frac{R}{L}s\right)\,\mathrm{d}s\right\}\exp\left(-\frac{R}{L}t\right)=\left\{\frac{U_0}{R}\exp\left(\frac{R}{L}t\right)-\frac{U_0}{R}\right\}\exp\left(-\frac{R}{L}t\right)= \\
&= \frac{U_0}{R}-\frac{U_0}{R}\exp\left(-\frac{R}{L}t\right)\qquad (t\in[0,+\infty)).
\end{aligned}$$

Látható, hogy t növekedtével a második tag értéke rohamosan csökken („exponenciálisan lecseng”), s az áramkör zárása után rövid idő múlva gyakorlatilag U_0/R lesz az áramerősség. Minél nagyobb az L önindukciós együttható az R ellenálláshoz képest, annál lassabban alakul ki az U_0/R közeli erősségű áram.

Most vizsgáljuk meg azt az esetet, hogyan változik az áramerősség, ha a $t = t_0 > 0$ időpillanatban kikapcsoljuk az áramforrást, pontosabban, ha

$$U(t) = 0 \quad (t \in [t_0, +\infty)), \qquad I(t_0) = \frac{U_0}{R}.$$

Ekkor

$$\dot{I} = -\frac{R}{L}I + 0$$

ahonnan

$$I(t) = \frac{U_0}{R}\exp\left(-\frac{R}{L}(t-t_0)\right) \qquad (t \in [t_0, +\infty))$$

következik. Az áramforrás kikapcsolása után az áramerősség a $t = t_0$-hoz tartozó U_0/R értékről exponenciálisan csökken zérusra. A csökkenés annál nagyobb, minél kisebb az L önindukciós együttható az R ellenálláshoz képest. Azt láttuk tehát, hogy az áramforrás bekapcsolásakor csak fokozatosan alakul ki az U_0/R áramerősség, a kikapcsoláskor pedig fokozatosan szűnik meg. Ezt a jelenséget **tranziens jelenség**nek nevezzük. Ennek oka az indukált elektromotoros erő fellépése. Az önindukció révén ez az elektromotoros erő ellentétes irányú áramot indukál, mint a be-, ill. a kikapcsolt elektromotoros erő, ezért bekapcsoláskor csökkenti annak hatását, kikapcsoláskor pedig még egy ideig fenntartja az áramot.

2. eset:.

$$U(t) = U_0\sin(\omega t) \qquad (t \in [0, +\infty);\ \omega > 0),$$

azaz az áramkörbe kapcsolt áramforrás elektromotoros ereje az időnek periodikus függvénye, ahol ω a körfrekvencia $/[1/s]/$. Így

$$\dot{I}(t) = -\frac{R}{L}I(t) + \frac{U_0}{L}\sin(\omega t) \quad (t \in [0, +\infty)), \qquad I(0) = 0,$$

ahonnan

$$\begin{aligned} I(t) &= \left\{0 + \int_0^t \frac{U_0}{L}\sin(\omega s)\exp\left(\int_0^s \frac{R}{L}\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}s\right\}\exp\left(\int_0^t -\frac{R}{L}\,\mathrm{d}s\right) = \\ &= \left\{\int_0^t \frac{U_0}{L}\sin(\omega s)\exp\left(\frac{R}{L}s\right)\mathrm{d}s\right\}\exp\left(-\frac{R}{L}t\right) \quad (t \in [0, +\infty)). \end{aligned}$$

Kétszeres parciális integrálás után

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{U_0\omega L}{R^2+\omega^2L^2}\exp\left(-\frac{R}{L}t\right) + \frac{U_0\{R\sin(\omega t) - \omega L\cos(\omega t)\}}{R^2+\omega^2L^2} = \\ &= \frac{U_0\omega L}{R^2+\omega^2L^2}\exp\left(-\frac{R}{L}t\right) + \frac{U_0}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\sin(\omega t - \delta) \qquad (t \in [0, +\infty)), \end{aligned}$$

ahol

$$\frac{R}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}=\cos(\delta), \qquad \frac{\omega L}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}=\sin(\delta).$$

Látható, hogy az első tag (a homogén egyenlet megoldása) az idővel exponenciálisan zérushoz tart. Olyan t-re, amikor az első tagtól már eltekinthetünk, az áramerősség az időnek tiszta periodikus függvénye:

$$I(t)\approx\frac{U_0}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\sin(\omega t-\delta)=:I_0\sin(\omega t-\delta).$$

Látható tehát, hogy

– elegendően nagy idő elteltével az áramerősség ugyanolyan frekvenciával rezeg, mint az elektromotoros erő, de az áramerősség δ fázisszöggel késik az elektromotoros erőhöz képest. Ez azt jelenti, hogy az áramerősség

$$\frac{\delta}{\omega}$$

idővel később veszi fel maximumát, mint az elektromotoros erő.

– $I(t)$ az egyenáramok esetében ismert

$$I=\frac{U}{R}$$

Ohm-törvényhez hasonló alakra hozható:

$$I(t)\approx\frac{U_0\sin\left(\omega\left(1-\frac{\delta}{\omega}\right)\right)}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}=\frac{U\left(1-\frac{\delta}{\omega}\right)}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}.$$

A nevezőben az R ohmikus ellenállás helyett $\sqrt{R^2+\omega^2L^2}$ áll. Ez a vezetőkörre jellemző R-en és L-en kívül függ az elektromotoros erő (és az áramerősség) frekvenciájától is. A

$$\sqrt{R^2+\omega^2L^2}$$

mennyiséget szokás **impedanciának** nevezni. ■

7.6.29. feladat. Adott $\tau\in\mathbb{R}$, ill. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ folytonosan deriválható függvélny esetén oldjuk meg az

$$fy'+f'y=f', \qquad y(\tau)=1$$

kezdetiérték-feladatot!

Útm. Világos, hogy ha

$$f(x)=0 \qquad (x\in\mathbb{R}),$$

akkor bármely olyan differenciálható függvény megoldás, amelyre $\varphi(\tau)=1$ teljesül. Az alábbiakban feltesszük tehát, hogy $f\not\equiv 0$ teljesül.

1. módszer.. Ha $I \subset \mathbb{R}$ olyan intervallum, amelyre $\tau \in I$ és

$$f(x) \neq 0 \qquad (x \in I)$$

teljesül, akkor az egyenlet átrendezésével, ill. a

$$\xi := 1, \qquad A(x) := -\frac{f'(x)}{f(x)}, \quad b(x) := \frac{f'(x)}{f(x)} \quad (x \in I)$$

választással lineáris kezdetiérték-feladatot kapunk, amelynek megoldása (vö. (7.6.35) formua) a

$$\begin{aligned}
\psi(x) &= \left\{1 + \int_\tau^x \frac{f'(s)}{f(s)} \cdot \exp\left(-\int_\tau^s -\frac{f'(u)}{f(u)}\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}s\right\} \exp\left(\int_\tau^x -\frac{f'(s)}{f(s)}\,\mathrm{d}s\right) = \\
&= \left\{1 + \int_\tau^x \frac{f'(s)}{f(s)} \cdot \frac{f(s)}{f(\tau)}\,\mathrm{d}s\right\} \frac{f(\tau)}{f(x)} = \left\{1 + \frac{f(x) - f(\tau)}{f(\tau)}\right\} \frac{f(\tau)}{f(x)} = \\
&= 1 \quad (x \in I)
\end{aligned}$$

függvény. Látható tehát, hogy a lineáris kezdetiérték-feladat megoldása a

$$\varphi(x) = 1 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény.

2. módszer.. Mivel

$$\partial_y \left(f'(x)y - f'(x)\right) = f'(x) = \partial_x \left(f(x)\right) \qquad ((x, y) \in \mathbb{R}^2),$$

ezért az egyenlet egzakt. Tehát

$$P(x, y) := f(x)y - f(x) \qquad \left((x, y) \in \mathbb{R}^2\right)$$

primitív függvény, ezért

$$P(x, \varphi(x)) = f(x)\varphi(x) - f(x) = P(\tau, 1) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi(x) = 1 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

3. módszer.. Vegyük észre, hogy ha φ megoldása a kezdetiérték-feladatnak, akkor a $\theta := f\varphi$ függvényre

$$\theta' = f'\varphi + f\varphi'$$

teljesül. Ez azt jelenti, hogy alkalmas $c \in \mathbb{R}$ esetén

$$f\varphi - f = c, \qquad \text{azaz} \qquad f(\varphi - 1) = c.$$

A $\varphi(\tau) = 1$ feltétel figyelembe vételével látható tehát, hogy a

$$\varphi(x) = 1 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény a kezdetiérték-feladat megoldása. ■

7.6.30. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $\varphi, \psi : I \to \mathbb{R}$ a (7.6.32) lineáris differenciálegyenlet megoldásai, akkor az alábbi két állítás közül pontosan az egyik igaz!

(1). Bármely $x \in I$ esetén $\varphi(x) = \psi(x)$.

(2). Bármely $x \in I$ esetén $\varphi(x) \neq \psi(x)$.

Útm. Ha valamely $\tau \in I$ esetén

$$\varphi(\tau) = \psi(\tau) =: \xi$$

akkor φ és ψ a (7.6.33) kezdetiérték-feladat megoldása. Így az egyértelműség (vö. 7.5.5. tétel) következtében $\varphi = \psi$. ■

7.6.31. feladat. Igazoljuk, hogy ha $\varphi, \psi : I \to \mathbb{R}$ a (7.6.32) lineáris differenciálegyenlet különböző megoldásai, akkor (7.6.32) bármely $\omega, \psi : I \to \mathbb{R}$ megoldása esetén van olyan $c \in \mathbb{R}$, hogy

$$\frac{\omega(x) - \varphi(x)}{\psi(x) - \varphi(x)} = c \qquad (x \in I)$$

teljesül!

Útm. Világos, hogy alkalmas $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén

$$\omega(x) = \varphi(x) + \alpha\varphi_H(x) \quad \text{és} \quad \psi(x) = \varphi(x) + \beta\varphi_H(x) \qquad (x \in I)$$

(vö. 7.6.6. tétel). Így bármely $x \in I$ esetén

$$\frac{\omega(x) - \varphi(x)}{\psi(x) - \varphi(x)} = \frac{\alpha}{\beta} =: c. \quad ■$$

7.6.32. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $0 < a \in \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan folytonos függvény, amelyre $\lim_{+\infty} f = b \in \mathbb{R}$ teljesül, akkor az

$$y' + ay = f$$

differenciálegyenlet minden φ megoldására fennáll a

$$\lim_{+\infty} \varphi = \frac{b}{a}$$

egyenlőség!

Útm. Ha φ a szóban forgó egyenlet megoldása, akkor alkalmas $c \in \mathbb{R}$ esetén

$$\varphi(x) = \left\{ c + \int_0^x f(s)e^{as}\,\mathrm{d}s \right\} e^{-ax} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Így, ha

– $b \neq 0$, akkor a Bernoulli-l'Hospital-szabály felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\int_a^x f(t)e^{at}\,\mathrm{d}t}{e^{ax}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)e^{ax}}{ae^{ax}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{a} = \frac{b}{a}.$$

– $b = 0$, akkor (nem alkalmazható a Bernoulli-l'Hospital-szabály, így), ha ψ megoldása az

$$y' + ay = 1$$

egyenletnek, akkor a fentiek következtében

$$\lim_{+\infty} \psi = \frac{1}{a}.$$

A linearitás következtében $\varphi + \psi$ megoldása az

$$y'(x) + ay(x) = f(x) + 1 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

egyenletnek. Ennélfogva

$$\lim_{x\to+\infty} (\varphi(x) + \psi(x)) = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)+1}{a} = \frac{1}{a},$$

így

$$\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = \frac{1}{a} - \lim_{x\to+\infty} \psi(x) = \frac{1}{a} - \frac{1}{a} = 0. \quad \blacksquare$$

7.6.33. feladat. Igazoljuk, hogy ha $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan folytonos függvény, hogy

$$\inf f > 0 \qquad \text{és} \qquad \lim_{+\infty} g = 0$$

akkor az

$$y' + fy = g$$

differenciálegyenlet minden φ megoldására

$$\lim_{+\infty} \varphi = 0$$

teljesül!

Útm. Ha $\tau, \xi \in \mathbb{R}$ és φ olyan megoldása az egyenletnek, hogy $\varphi(\tau) = \xi$, akkor (vö. (7.6.35) formula)

$$\varphi(x) = \left\{\xi + \int_\xi^x g(s) \exp\left(\int_\xi^s f(u)\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}s\right\} \exp\left(-\int_\tau^x f(s)\,\mathrm{d}s\right) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Ha most

$$F(x) := \int_\xi^x f(s)\,\mathrm{d}s \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

akkor az $\inf f > 0$ feltétel következtében van olyan $c > 0$, hogy

$$f(x) \geq c \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

így

$$F(x) \geq \int_\xi^x c\,\mathrm{d}s = c(x - \xi),$$

ahonnan

$$\exp\left(-\int_{\tau}^{x} f(s)\,\mathrm{d}s\right) = e^{-F(x)} \leq e^{-c(x-\xi)} \longrightarrow 0 \qquad (x \to +\infty).$$

Ezért bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$|\varphi(x)| = e^{-F(x)} \cdot \left|\xi + \int_{\xi}^{x} g(s)e^{F(s)}\,\mathrm{d}s\right| \leq e^{-F(x)} \cdot \left\{|\xi| + \int_{\xi}^{x} |g(s)|e^{F(s)}\,\mathrm{d}s\right\}.$$

Két eset lehetséges:

– az

$$\omega(x) := \int_{\xi}^{x} |g(s)|e^{F(s)}\,\mathrm{d}s \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény korlátos. Ekkor

$$e^{-F(x)} \longrightarrow 0 \qquad (x \to \infty)$$

következtében

$$\lim_{x\to\infty} |\varphi(x)| = 0$$

ahonnan

$$\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = 0$$

következik.

– az ω függvény nem korlátos. Ekkor $\omega' \geq 0$ következtében ω monoton növekedő és így $\lim\limits_{+\infty} \omega = +\infty$ Alkalmazható tehát a Bernoulli-l'Hospital-szabály:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} |\varphi(x)| &= \lim_{x\to+\infty} e^{-F(x)} \cdot \left\{|\xi| + \int_{\xi}^{x} |g(s)|e^{F(s)}\,\mathrm{d}s\right\} = \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{|\xi| + \displaystyle\int_{\xi}^{x} |g(s)|e^{F(s)}\,\mathrm{d}s}{e^{F(x)}} = \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{|g(x)|e^{F(x)}}{f(x)e^{F(x)}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{|g(x)|}{f(x)} = 0,
\end{aligned}$$

hiszen

$$g(x) \longrightarrow 0 \quad (x \to +\infty) \qquad \text{és} \qquad f(x) \geq c > 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Ez ismét azt jeloenti, hogy

$$\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = 0. \quad \blacksquare$$

7.6.34. feladat. Lássuk be, hogy ha $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ olyan folytonos függvény, amelyre

$$f(x) \geq \frac{1}{x} \qquad (x \in (0,1])$$

teljesül, akkor az

$$y' = fy$$

differenciálegyenlet bármely φ megoldására fennáll a

$$\varphi(x) \longrightarrow 0 \qquad (x \to 0)$$

határérték-reláció!

Útm. Világos, hogy ha

$$F(x) := \int_1^x f(s)\,\mathrm{d}s \qquad (x \in (0,1]),$$

akkor az egyenlet minden megoldása

$$\varphi(x) := ce^{F(x)}$$

alakó, ahol $c \in \mathbb{R}$. Így

$$F(x) = -\int_x^1 f(s)\,\mathrm{d}s \leq -\int_x^1 \frac{1}{s}\,\mathrm{d}s = -\left[\ln(s)\right]_x^1 = \ln(x) \qquad (x \in (0,1])$$

következtében

$$F(x) \longrightarrow -\infty \quad (x \to 0), \qquad \text{azaz} \qquad \lim_{x\to 0} \varphi(x) = 0. \quad \blacksquare$$

7.6.35. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos periodiks függvény, továbbá $k \in \mathbb{R}$, akkor az

$$y' + ky = f \tag{7.6.37}$$

elsőrendű differenciálegyenletnek van periodikus megoldása!

Útm. Mivel a (7.6.37) egyenlet lineáris, ezért bármely $c \in \mathbb{R}$ esetén a

$$\varphi(x) := e^{-kx}\left(\int_0^x f(t)e^{kt}\,\mathrm{d}t + c\right) \qquad (x \in \mathbb{R}) \tag{7.6.38}$$

függvélny megoldása az (7.6.37) egyenletnek. Ha az f függvény T-periodikus, azaz alkalmas $T > 0$ esetén

$$f(x+T) = f(x) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

akkor érdemes először megvizsgálni, hogy van-e olyan $c \in \mathbb{R}$, amely esetén a (7.6.38)-beli megoldás is T-periodikus.

1. lépés.. Megmutatjuk, hogy a (7.6.38)-beli megoldás T-periodikus volta csak a

$$c := -\frac{e^{-kT}}{e^{-kT}-1}\int_0^T f(t)e^{kt}\,\mathrm{d}t$$

esetben állhat fenn. Valóban, ha (7.6.38)-beli megoldás T-periodikus, azaz

$$e^{-k(x+T)}\left(\int_0^{x+T} f(t)e^{kt}\,\mathrm{d}t + c\right) = e^{-kx}\left(\int_0^{x} f(t)e^{kt}\,\mathrm{d}t + c\right) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

akkor

$$e^{-kT}\left(\int_0^{x+T} f(t)e^{kt}\,\mathrm{d}t + c\right) = \int_0^{x} f(t)e^{kt}\,\mathrm{d}t + c \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ill.

$$\begin{aligned} c(e^{-kT}-1) &= \int_0^{x} f(t)e^{kt}\,\mathrm{d}t - e^{kT}\int_0^{x+T} f(t)e^{kt}\,\mathrm{d}t = \\ &= \int_0^{x} f(t)e^{kt}\,\mathrm{d}t - e^{-kT}\left\{\int_0^{T} f(t)e^{kt}\,\mathrm{d}t + \int_T^{T+x} f(t)e^{kt}\,\mathrm{d}t\right\}. \end{aligned}$$

Felhasználva, hogy az f függvény T-periodikus, a $\tau := t - T$ helyettesítéssel azt kapjuk, hogy

$$f(t)e^{kt} = f(\tau+T)e^{k(\tau+T)} = f(\tau)e^{k\tau}e^{kT} \qquad (t \in [T, T+x]),$$

azaz

$$\int_T^{T+x} f(t)e^{kt}\,\mathrm{d}t = e^{kT}\int_0^{x} f(\tau)e^{k\tau}\,\mathrm{d}\tau.$$

Ennélfogva

$$\begin{aligned} c(e^{-kT}-1) &= \int_0^{x} f(t)e^{kt}\,\mathrm{d}t - e^{-kT}\int_0^{T} f(t)e^{kt}\,\mathrm{d}t - \int_0^{x} f(t)e^{kt}\,\mathrm{d}t = \\ &= e^{-kT}\int_0^{T} f(t)e^{kt}\,\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

ami azza egyenértékű, hogy

$$c(e^{-kT}-1)e^{kT} = \int_0^{T} f(t)e^{kt}\,\mathrm{d}t.$$

2. lépés.. Megmutatjuk, hogy az iménti c esetén a (7.6.38)-beli megoldás, azaz a

$$\varphi(x) := e^{-kx}\left(\int_0^{x} f(t)e^{kt}\,\mathrm{d}t - \frac{e^{-kT}}{e^{-kT}-1}\int_0^{T} f(t)e^{kt}\,\mathrm{d}t\right) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény T-periodikus. Valóban, bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$
\begin{aligned}
\varphi(x+T) &= e^{-k(x+T)}\left(\int_0^{x+T} f(t)e^{kt}\,\mathrm{d}t - \frac{e^{-kT}}{e^{-kT}-1}\int_0^T f(t)e^{kt}\,\mathrm{d}t\right) = \\
&= e^{-kT}e^{-kx}\left(\int_0^{T} f(t)e^{kt}\,\mathrm{d}t + \int_T^{x+T} f(t)e^{kt}\,\mathrm{d}t - \frac{e^{-kT}}{e^{-kT}-1}\int_0^T f(t)e^{kt}\,\mathrm{d}t\right) = \\
&= e^{-kT}e^{-kx}\left(\int_0^{T} f(t)e^{kt}\,\mathrm{d}t + e^{kT}\int_0^{x} f(\tau)e^{k\tau}\,\mathrm{d}\tau - \frac{e^{-kT}}{e^{-kT}-1}\int_0^T f(t)e^{kt}\,\mathrm{d}t\right) = \\
&= e^{-kT}e^{-kx}\left(e^{kT}\int_0^{x} f(\tau)e^{k\tau}\,\mathrm{d}\tau + \left\{1 - \frac{e^{-kT}}{e^{-kT}-1}\right\}\int_0^T f(t)e^{kt}\,\mathrm{d}t\right) = \\
&= e^{-kT}e^{-kx}\left(e^{kT}\int_0^{x} f(\tau)e^{k\tau}\,\mathrm{d}\tau - \frac{1}{e^{-kT}-1}\int_0^T f(t)e^{kt}\,\mathrm{d}t\right) = \\
&= e^{-kx}\left(\int_0^{x} f(\tau)e^{k\tau}\,\mathrm{d}\tau - \frac{e^{-kT}}{e^{-kT}-1}\int_0^T f(t)e^{kt}\,\mathrm{d}t\right) = \\
&= \varphi(x). \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

7.6.5. Bernoulli-féle differenciálegyenletek

7.6.36. feladat. Adott $I \subset \mathbb{R}$ intervallum,

$$a, b \in \mathfrak{C}(I, \mathbb{R}): \qquad a \cdot b \neq 0$$

függvények, ill. $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0; 1\}$ valós számok esetén keressük meg az

$$y' = a \cdot y + b \cdot y^{\alpha}$$

Bernoulli-féle differenciálegyenlet pozitív értékkészletű megoldásait!

Útm. Tegyük fel, hogy valamely $J \subset I$ intervallum esetén a

$$\varphi : J \to (0, +\infty)$$

függvény megoldása a fenti egyenletnek, és vezessük be a

$$\psi := \varphi^{1-\alpha}$$

jelölést. Ekkor a J intervallumon differenciálható, pozitív értékkészletű függvények halmazát kölcsönösen egyértelmű módon képeztük le önmagára, továbbá

$$\begin{aligned} \psi' &= (1-\alpha)\varphi^{-\alpha} \cdot \varphi' = (1-\alpha)\varphi^{-\alpha} \cdot [a \cdot \varphi + b \cdot \varphi^{\alpha}] = (1-\alpha)a\varphi^{1-\alpha} + (1-\alpha)b = \\ &= (1-\alpha)a\psi + (1-\alpha)b. \end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy a $\psi : J \to (0, +\infty)$ függvény a

$$z' = (1-\alpha)az + (1-\alpha)b$$

elsőrendű lineáris differenciálegyenlet megoldása. ■

A Bernoulli-féle differenciálegyenletre vonatkozó kezdetiérték-feladattal kapcsolatban igaz tehát a

7.6.2. tétel. Ha $I, J \subset \mathbb{R}$ intervallum, $a, b \in \mathfrak{C}(I, \mathbb{R})$: $a \cdot b \neq 0$, ill. $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0; 1\}$, továbbá $J \subset I$, $\tau \in J$ és $\xi \in (0, +\infty)$, akkor valamely

$$\varphi : J \to (0, +\infty)$$

függvény pontosan akkor lesz az

$$y' = a \cdot y + b \cdot y^{\alpha}, \qquad y(\tau) = \xi \tag{7.6.39}$$

kezdetiérték-feladat megoldása, ha a

$$\psi := \varphi^{1-\alpha}$$

függvény megoldása a

$$z' = (1-\alpha)az + (1-\alpha)b, \qquad z(\tau) = \xi^{1-\alpha} \tag{7.6.40}$$

kezdetiérték-feladatnak.

7.6.0. megjegyzés.

1. Mivel a lineáris differenciálegyenletre vonatkozó kezdetiérték-feladat egyértelműen megoldható, ezért $\xi > 0$ esetén a (7.6.39) kezdetiérték-feladatnak is pontosan egy megoldása van.
2. Könnyen ellenőrizhető, hogy ha $\alpha \in \mathbb{Z}$, akkor $\xi < 0$ esetén a (7.6.39) kezdetiérték-feladat újabb megoldását kapjuk.

7.6.37. feladat. Oldjuk meg az alábbi kezdetiérték-feladatokat!

1. $y'(x) = y(x) + y^2(x)e^{-x}$ $(x \in D_y)$, $y(0) = 1$;
2. $y'(x) + y(x) = xy^3(x)$ $(x \in D_y)$, $y(0) = 1$;
3. $2x^3y'(x) = y(x)(y^2(x) + 3x^2)$ $(x \in D_y)$, $y(1) = 1$;
4. $y'(x) - \dfrac{y(x)}{x} = x(y(x))^3$ $(x \in D_y)$, $y(1) = 1$;
5. $y'(x) = 4y(x) - x(y(x))^2$ $(x \in D_y)$, $y(0) = 2$;
6. $y'(x) + \dfrac{y(x)}{1+x} + (1+x)y^4(x) = 0$ $(x \in D_y)$, $y(0) = -1$.

Útm.

1. Az

$$I := \mathbb{R}, \qquad a(x) := 1, \qquad b(x) := e^{-x} \qquad (x \in I),$$

ill. az $\alpha := 2$ választással Bernoulli-féle egyenletet kapunk. Tegyük fel, hogy φ a kezdetiérték-feladat megoldása, és legyen $\psi := \varphi^{-1}$. Ekkor ψ a

$$z'(x) = -z(x) - e^{-x} \quad (x \in J \subset I), \qquad z(0) = 1$$

lineáris kezdetiérték-feladat megoldása. Így tehát

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \left\{1 + \int_0^x \left[-e^{-t} \exp\left(-\int_0^t (-1)\,\mathrm{d}s\right)\right] dt\right\} \exp\left(\int_0^x (-1)\,\mathrm{d}t\right) = \\ &= e^{-x}(1-x) \quad (x \in J),\end{aligned}$$

ezért

$$\varphi(x) = \frac{e^x}{1-x} \qquad (x \in (-\infty,1)).$$

2. Az egyenletet átrendezve, az

$$I := \mathbb{R}, \qquad a(x) := -1, \qquad b(x) := x \qquad (x \in I),$$

ill. az $\alpha := 3$ választással Bernoulli-féle egyenletet kapunk. Tegyük fel, hogy φ a kezdetiérték-feladat megoldása, és legyen $\psi := \varphi^{-2}$. Ekkor ψ a

$$z'(x) = 2z(x) - 2x \quad (x \in J \subset I), \qquad z(0) = 1$$

lineáris kezdetiérték-feladat megoldása. Így tehát

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \left\{1 + \int_0^x \left[(-2t) \exp\left(-\int_0^t 2\; ds\right)\right] \mathrm{d}t\right\} \exp\left(\int_0^x 2\; dt\right) = \\ &= e^{2x}\left[1 + \int_0^x t\left(-2te^{-2t}\right)\right] = \\ &= e^{2x}\left[1 + xe^{-2x} + \left[\frac{e^{-2t}}{2}\right]_0^x\right] = \frac{e^{2x}}{2} + x + \frac{1}{2} \quad (x \in J),\end{aligned}$$

ezért

$$\varphi(x) = \sqrt{\frac{2}{e^{2x} + 2x + 1}} \qquad (x \in J).$$

3. Az egyenletet átrendezve, az

$$I := \mathbb{R}, \qquad a(x) := \frac{3}{2x}, \qquad b(x) := \frac{1}{2x^3} \qquad (x \in I),$$

ill. az $\alpha := 3$ választással Bernoulli-féle egyenletet kapunk. Tegyük fel, hogy φ a kezdetiérték-feladat megoldása, és legyen $\psi := \varphi^{-2}$. Ekkor ψ a

$$z'(x) = -\frac{3}{x} z(x) - \frac{1}{x^3} \quad (x \in J \subset I), \qquad z(1) = 1$$

lineáris kezdetiérték-feladat megoldása. Így tehát

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \left\{1 + \int_1^x \left[\left(-\frac{1}{t^3}\right\} \exp\left(-\int_1^t -\frac{3}{s}\,\mathrm{d}s\right)\right] \mathrm{d}t\right\} \exp\left(\int_1^x -\frac{3}{t}\,\mathrm{d}t\right) = \\ &= \frac{1}{x^3}\left[1 + \int_1^x (-1)\,\mathrm{d}t\right] = \frac{2-x}{x^3} \quad (x \in J),\end{aligned}$$

ezért

$$\varphi(x)=\sqrt{\frac{x^3}{2-x}}\qquad (x\in(0,2)).$$

4. Az egyenletet átrendezve, az

$$I:=(0,+\infty),\qquad a(x):=\frac{1}{x},\qquad b(x):=x\qquad (x\in I),$$

ill. az $\alpha := 3$ választással Bernoulli-féle egyenletet kapunk. Tegyük fel, hogy φ a kezdetiérték-feladat megoldása, és legyen $\psi:=\varphi^{-2}$. Ekkor ψ a

$$z'(x)=-\frac{2}{x}z(x)-2x\quad (x\in J\subset I),\qquad z(1)=1$$

lineáris kezdetiérték-feladat megoldása. Így tehát

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \left\{1+\int_1^x\left[(-2t)\exp\left(-\int_1^t -\frac{2}{s}\,\mathrm{d}s\right)\right]\,\mathrm{d}t\right\}\exp\left(\int_1^x -\frac{2}{t}\,\mathrm{d}t\right)= \\ &= \frac{1}{x^2}\left[1-2\int_1^x t^3\,\mathrm{d}t\right]=\frac{3-x^4}{2x^2}\quad (x\in J),\end{aligned}$$

ezért

$$\varphi(x)=\sqrt{\frac{2x^2}{3-x^4}}\qquad \left(x\in\left(0,\sqrt[4]{3}\right)\right).$$

5. Az

$$I:=\mathbb{R},\qquad a(x):=4,\qquad b(x):=-x\qquad (x\in I),$$

ill. az $\alpha := 2$ választással Bernoulli-féle egyenletet kapunk. Tegyük fel, hogy φ a kezdetiérték-feladat globális megoldása, és legyen $\psi:=\varphi^{-1}$. Ekkor ψ a

$$z'(x)=-4z(x)+x\quad (x\in J\subset I),\qquad z(0)=\frac{1}{2}$$

lineáris kezdetiérték-feladat teljes megoldása. Így tehát

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \left\{\frac{1}{2}+\int_0^x\left[t\exp\left(-\int_0^t(-4)\,ds\right)\right]\,\mathrm{d}t\right\}\exp\left(\int_0^x(-4)\,dt\right)= \\ &= e^{-4x}\left[\frac{1}{2}+\int_0^x te^{4t}\,dt\right]=e^{-4x}\left[1+\int_0^x t\left(-2te^{-2t}\right)\right]= \\ &= e^{-4x}\left[\frac{1}{2}+\frac{xe^{4x}}{4}-\int_0^x\frac{e^{4t}}{4}\,dt\right]=e^{-4x}\left[\frac{1}{2}+\frac{xe^{4x}}{4}-\frac{e^{4x}-1}{16}\right]= \\ &= \frac{9e^{-4x}+4x-1}{16}\quad (x\in J),\end{aligned}$$

ezért

$$\varphi(x)=\frac{16}{9e^{-4x}+4x-1}\quad (x\in J).$$

6. Az egyenletet átrendezve, ill. az

$$I := (-1, +\infty), \qquad a(x) := -\frac{1}{1+x}, \qquad b(x) := 1 + x \qquad (x \in I),$$

ill. az $\alpha := 4$ választással Bernoulli-féle egyenletet kapunk. Tegyük fel, hogy φ a kezdetiérték-feladat globális megoldása, és legyen $\psi := \varphi^{-3}$. Ekkor ψ a

$$z'(x) = \frac{3z(x)}{1+x} + 3(1+x) \quad (x \in J \subset I), \qquad z(0) = -1$$

lineáris kezdetiérték-feladat teljes megoldása. Így tehát

$$\begin{aligned}
\psi(x) &= \left\{-1 + \int_0^x 3(1+s)\exp\left(-\int_0^s \frac{3}{1+u}\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}s\right\}\exp\left(\int_0^x \frac{3}{1+s}\,\mathrm{d}s\right) = \\
&= \left\{-1 + \int_0^x \frac{3(1+s)}{(1+s)^3}\,\mathrm{d}s\right\}(1+x)^3 = \left\{-1 + \left[\frac{-3}{1+s}\right]_0^x\right\}(1+x)^3 = \\
&= \left\{-1 + 3 - \frac{3}{1+x}\right\}(1+x)^3 = 2(1+x)^3 - 3(1+x)^2 = \\
&= (1+x)^2(2x-1) \quad (x \in J),
\end{aligned}$$

ezért

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{(1+x)^2(2x-1)}} \qquad (x \in J).$$

7.6.9. gyakorló feladat. Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenleteket, ill. kezdetiérték-feladatokat!

1. $y'(x) + \dfrac{y(x)}{x} + y^2(x) = 0$ $(x \in D_y)$;
2. $y'(x) - y(x) = \dfrac{x}{y(x)}$ $(x \in D_y)$;
3. $xy'(x) + y(x) = \dfrac{\ln(x)}{y^3(x)}$ $(x \in D_y)$;
4. $y'(x) - x^3(y(x))^3 = xy(x)$ $(x \in D_y)$;
5. $y' = -y + \dfrac{1}{y}$ $(x \in D_y)$;
6. $x^2y'(x) + 2xy(x) + y^3(x) = 0$ $(x \in D_y)$, $y(1) = 1$.

Útm.

7.6.38. feladat. Adott $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $\tau \in I$, $\xi \in (0, +\infty)$,

$$a, b \in \mathfrak{C}(I, \mathbb{R}) : \qquad a \cdot b \neq 0$$

függvények, ill. $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \{0; 1\}$ valós számok esetén adjuk meg az

$$y' = a \cdot y + b \cdot y^{\alpha}, \qquad y(\tau) = \xi$$

kezdetiérték-feladat esetében a $\varphi(\cdot; \tau, \xi)$ függvényt (vö. 7.5.3. definíció utáni megjegyzés)!

Útm. Ha

$$\Omega := J \times (0, +\infty),$$

akkor az egyenlet a

$$g(x, y)\,\mathrm{d}x + h(x, y)\,\mathrm{d}y = 0$$

ekvivalens alakba írható, ahol

$$g(x, y) := -a \cdot y - b \cdot y^{\alpha}, \quad h(x, y) := 1 \qquad ((x, y) \in \Omega).$$

Mivel

$$\partial_2 g = -a - \alpha h y^{\alpha - 1} \neq 0 = \partial_1 h,$$

ezért az egyenlet nem egzakt. Ha

$$A \in \int a(x)\,\mathrm{d}x,$$

akkor

$$\mu(x, y) := (1 - \alpha) y^{-\alpha} e^{(\alpha - 1) A(x)} \qquad ((x, y) \in \Omega)$$

integráló tényező, hiszen a

$$\widetilde{g}(x, y) := \mu(x, y) g(x, y) = (\alpha - 1) e^{(\alpha - 1) A(x)} [y^{1 - \alpha} a(x) + b(x)] \qquad ((x, y) \in \Omega),$$

$$\widetilde{h}(x, y) := \mu(x, y) h(x, y) = (1 - \alpha) y^{-\alpha} e^{(\alpha - 1) A(x)} \qquad ((x, y) \in \Omega)$$

függvényekre

$$\partial_2 \widetilde{g}(x, y) \equiv (\alpha - 1) e^{(\alpha - 1) A(x)} [(1 - \alpha) y^{-\alpha} a(x)] \equiv \partial_1 \widetilde{h}(x, y),$$

azaz a

$$\widetilde{g}(x, y)\,\mathrm{d}x + \widetilde{h}(x, y)\,\mathrm{d}y = 0$$

egyenlet egzakt. Ezért bármely

$$(x, y) \in \Omega$$

esetén (vö. 7.6.2. megjegyzés)

$$\begin{aligned}
P(x,y) &= \int_\tau^x \widetilde{g}(t,\xi)\,\mathrm{d}t + \int_\xi^y \widetilde{h}(x,s)\,\mathrm{d}s = \\
&= (\alpha-1)\xi^{1-\alpha}\int_\tau^x a(t)e^{(\alpha-1)A(t)}\,\mathrm{d}t + (\alpha-1)\int_\tau^x e^{(\alpha-1)A(t)}b(t)\,\mathrm{d}t + \\
&\quad +(1-\alpha)e^{(\alpha-1)A(x)}\int_\xi^y s^{-\alpha}\,\mathrm{d}s = \\
&= \xi^{1-\alpha}\int_\tau^x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[e^{(\alpha-1)A(t)}\right]\mathrm{d}t + (\alpha-1)\int_\tau^x e^{(\alpha-1)A(t)}b(t)\,\mathrm{d}t + \\
&\quad +e^{(\alpha-1)A(x)}\left[y^{1-\alpha}-\xi^{1-\alpha}\right] = \\
&= y^{1-\alpha}e^{(\alpha-1)A(x)} - \xi^{1-\alpha}e^{(\alpha-1)A(\tau)} + (\alpha-1)\int_\tau^x e^{(\alpha-1)A(t)}b(t)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Így a

$$P(x,\varphi(x;\tau,\xi)) = P(\tau,\xi) = 0$$

implicit egyenlőségből

$$\varphi(x;\tau,\xi) = e^{A(x)}\left[\xi^{1-\alpha}e^{(\alpha-1)A(x)} + (1-\alpha)\int_\tau^x e^{(\alpha-1)A(t)}b(t)\,\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \qquad (x\in J). \quad \blacksquare$$

Az

$$I := \mathbb{R}, \quad a(x) := 1, \quad h(x) := \sin(x) \quad (x \in I) \quad \text{ill.} \quad \alpha := -1$$

választással pl. az

$$y' = y + \frac{\sin}{y}$$

egyenlet Bernoulli-típusú. Parciálisan integrálva könnyen belátható, hogy tetszőleges $\tau,\xi\in\mathbb{R}$, $\xi\neq 0$ esetén van olyan $J\subset\mathbb{R}$ intervallum, hogy minden $x\in J$ esetén

$$\varphi(x;\tau,\xi) = \mathrm{sgn}\,(\xi)\sqrt{e^{2(x-\tau)}\left\{\frac{2}{5}\cos(\tau)+\frac{4}{5}\sin(\tau)+\xi^2\right\} - \frac{2}{5}\cos(x) - \frac{4}{5}\sin(x)},$$

ui. ha pl. $\xi>0$, akkor

$$\varphi(x;\tau,\xi) = e^x\left\{\xi^2 e^{-2\tau} + 2\int_\tau^x \sin(s)e^{-2s}\,\mathrm{d}s\right\}^{\frac{1}{2}} \qquad (x\in J)$$

és így tetszőleges $x\in J$-re

$$\begin{aligned}
2\int_\tau^x \sin(s)e^{-2s}\,\mathrm{d}s &= \left[-\sin(s)e^{-2s}\right]_\tau^x + \int_\tau^x \cos(s)e^{-2s}\,\mathrm{d}s = \\
&= \left[-\sin(s)e^{-2s}\right]_\tau^x - \left[\frac{\cos(s)e^{-2s}}{2}\right]_\tau^x - \frac{1}{2}\int_\tau^x \sin(s)e^{-2s}\,\mathrm{d}s,
\end{aligned}$$

ahonnan

$$\frac{5}{2}\int_{\tau}^{x} \sin(s)e^{-2s}\,\mathrm{d}s = \left[-\sin(s)e^{-2s}\right]_{\tau}^{x} - \left[\frac{\cos(s)e^{-2s}}{2}\right]_{\tau}^{x} \qquad (x \in J),$$

így, ha $x \in J$, akkor

$$\begin{aligned}\varphi(x;\tau,\xi) &= \left\{e^{2x}\xi^2 e^{-2\tau} + 2e^{2x}\int_{\tau}^{x} \sin(s)e^{-2s}\,\mathrm{d}s\right\}^{\frac{1}{2}} = \\ &= \sqrt{e^{2(x-\tau)}\left\{\tfrac{2}{5}\cos(\tau) + \tfrac{4}{5}\sin(\tau) + \xi^2\right\} - \tfrac{2}{5}\cos(x) - \tfrac{4}{5}\sin(x)}.\end{aligned}$$

7.6.10. gyakorló feladat. Igazoljuk, hogy ha $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $\tau \in I$, $a, b \in \mathfrak{C}(I,\mathbb{R})\colon a \cdot b \neq 0$, ill. $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0;1\}$, továbbá

$$F(x) := \int_{\tau}^{x} (\alpha-1)a(t)\,\mathrm{d}t, \quad u(x) := e^{-F(x)}\int_{\tau}^{x} (1-\alpha)e^{F(t)}b(t)\,\mathrm{d}t \qquad (x \in I),$$

ill.

$$u(x) > 0 \qquad (x \in I),$$

akkor a

$$\varphi : I \to \mathbb{R}, \qquad \varphi(x) := [u(x)]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

függvény megoldása az

$$y' = a \cdot y + b \cdot y^{\alpha}$$

Bernoulli-féle differenciálegyenletnek!

Útm.

7.6.6. A Riccati-féle differenciálegyenlet

Adott $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, ill.

$$p, q, r \in \mathfrak{C}(I, \mathbb{R})$$

függvények esetén tekintsük a következő feladatot.
Határozzunk meg olyan $\varphi : I \to \mathbb{R}$ differenciálható függvényt, amelyre

$$\varphi' = p + q\varphi + r\varphi^2$$

teljesül.

7.6.7. definíció. Az imént megfogalmazott feladatot **Riccati-féle differenciálegyenlet**nek nevezzük, és az

$$y' = p + qy + ry^2 \tag{7.6.41}$$

szimbólummal jelöljük.

Néhány speciális esettől eltekintve nincs olyan eljárás, amelynek segítségével (7.6.41)-et integrálni tudnánk. Ha azonban ismeretes (7.6.41) egy megoldása, akkor minden más megoldását meg tudjuk határozni. Igaz ui. a

7.6.8. tétel. Ha valamely $J \subset I$ intervallum esetén $\varphi \in \mathfrak{D}(J, \mathbb{R})$ megoldása (7.6.41)-nek, akkor (7.6.41) minden $\psi \in \mathfrak{D}(J, \mathbb{R})$ megoldása

$$\psi = \varphi + \omega$$

alakú, ahol

$$\omega' = [2r\varphi + q]\omega + r\omega^2; \tag{7.6.42}$$

megfordítva, ha a $\omega \in \mathfrak{D}(J, \mathbb{R})$ függvényre (7.6.42) teljesül, akkor ψ megoldása (7.6.41)-nek.

Biz. Ha ui. ψ megoldása (7.6.41)-nek, akkor

$$\psi' = p + q\psi + r\psi^2.$$

Figyelembe véve, hogy φ is megoldása (7.6.41)-nek, fennáll a következő:

$$\varphi' = p + q\varphi + r\varphi^2.$$

Bevezetve az

$$\omega := \psi - \varphi$$

jelölést, az utóbb nyert két egyenlőségből kivonással az

$$\omega' = \psi' - \varphi' = 0 + q[\psi - \varphi] + r\left[\psi^2 - \varphi^2\right] = q\omega + r[\psi - \varphi]^2 - 2r\varphi^2 + 2r\psi\varphi$$

egyenlőséget kapjuk. Innen

$$\omega' = q\omega + r\omega^2 + 2r\varphi[\psi - \varphi] = q\omega + r\omega^2 + 2r\varphi\omega = [2r\varphi + q]\omega + r\omega^2.$$

A fenti lépéseket fordított sorrendben elvégezve, adódik a tétel második felének bizonyítása . ■

7.6.15. példa. Az

$$I := \mathbb{R}, \quad p(x) := 1 + xt + x^2, \quad q(x) := -2x - 1, \quad \text{ill.} \quad r(x) := 1 \quad (x \in I)$$

választással az

$$y'(xt) = [y(x)]^2 - (2x+1)y(x) + 1 + x + x^2 \qquad (x \in \mathcal{D}_y)$$

egyenlet Riccati-féle. Könnyű észrevenni, hogy a

$$\varphi(x) := x \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény megoldása az egyenletnek. Így az egyenlet minden megoldása

$$\psi := \varphi + \omega$$

alakú, ahol az ω megoldása a

$$z' = -z + z^2$$

Bernoulli-féle egyenletnek, azaz ha $\theta := \omega^{-1}$, akkor

$$\theta'(x) \equiv \theta(x) + 1.$$

Így, ha

$$\theta_H(x) :\equiv e^x, \qquad m'(x) :\equiv e^{-x},$$

akkor

$$\theta(x) \equiv 1 + ce^x, \qquad \text{azaz} \qquad \psi(x) \equiv x + \frac{1}{1+ce^x} \quad (x \in I: \ 1 + ce^x \neq 0).$$

$c < 0$ esetén például vagy a

$$(-\infty, -\ln(-c)) \qquad \text{vagy pedig a} \qquad (-\ln(-c), +\infty)$$

intervallum lesz a megoldásfüggvény értelmezési tartománya.

7.6.16. példa. Az

$$I := (0, +\infty) \qquad \text{vagy} \qquad I := (-\infty, 0),$$

$$p(x) := \frac{1}{4x^2}, \quad q(x) := 0, \quad \text{ill.} \quad r(x) := 1 \qquad (x \in I)$$

választással az

$$y'(x) = \frac{1}{4x^2} + [y(x)]^2 \qquad (x \in \mathcal{D}_y)$$

egyenlet Riccati-féle. Könnyű észrevenni, hogy a

$$\varphi(x) := -\frac{1}{2x} \qquad (x \in I)$$

függvény megoldása az egyenletnek. Így az egyenlet minden megoldása

$$\psi := \varphi + \omega$$

alakú, ahol az ω megoldása a

$$z'(x) = -\frac{z(x)}{x} + [z(x)]^2 \qquad (x \in \mathcal{D}_z)$$

Bernoulli-féle egyenletnek, azaz ha $\theta := \omega^{-1}$, akkor

$$\theta'(x) \equiv \frac{\theta(x)}{x} - 1 \qquad (x \in \mathcal{D}_\theta).$$

Így, ha pl.

$$\theta_H(x) := e^{\ln(x)} = x \quad (x > 0), \qquad m'(x) := -\frac{1}{x} \quad (x > 0),$$

akkor

$$\theta(x) \equiv \{-\ln(x) + c\}\, x,$$

azaz

$$\psi(x) = -\frac{1}{2x} + \frac{1}{\{-\ln(x) + c\}\, x} \qquad (x \in (0, e^c)).$$

7.6.39. feladat. Határozzuk meg az

$$y'(x) = \frac{y(x)}{x} + x^3 y^2(x) - x^5 \qquad (x \in \mathcal{D}_y)$$

differenciálegyenlet összes polinomiális megoldását, majd adjuk meg a differenciálegyenlet megoldáshalmazát!

Útm.

1. lépés.. Tegyük fel, hogy p n-edfokú polinom és

$$p'(x) - \frac{p(x)}{x} = x^3 (p(x))^2 - x^5 \qquad (0 \neq x \in \mathbb{R}).$$

A fenti egyenlőség bal oldalán egy $(n-1)$-edfokú polinom áll. Ha $2 \leq n \in \mathbb{N}$ lenne, akkor a fenti egyenlőség jobb oldalán egy $(2n+3)$-adfokú polinom állna. Ez azt jelenti, hogy valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$n-1 = 2n+3, \qquad \text{azaz} \qquad n = 1.$$

Ha tehát valamely $a, b \in \mathbb{R}$ esetén

$$p(x) := ax + b \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

akkor az egyenletbe helyettesítve azt kapjuk, hogy

$$a - \frac{ax+b}{x} = x^3(ax+b)^2 - x^5 \qquad (0 \neq x \in \mathbb{R}),$$

ahonnan $b = 0$ következik. Ez azt jelenti, hogy

$$0 = a - \frac{ax}{x} = x^3a^2x^2 - x^5 = x^5(a^2-1) \qquad (0 \neq x \in \mathbb{R}),$$

ahonnan $a = \pm 1$. Könnyű belátni, hogy pl. a

$$p(x) := x \quad (0 < x \in \mathbb{R}), \qquad \text{ill. a} \qquad p(x) := -x \quad (0 < x \in \mathbb{R})$$

függvény megoldása a differenciálegyenletnek.

2. lépés.. Mivel Riccati-féle differenciálegyenletről van szó, ezért először

$$z'(x) = \left(2x^4 + \frac{1}{x}\right) z(x) + x^3 z^2(x) \qquad (x \in \mathcal{D}_z)$$

Bernoulli-féle egyenlet megoldásait keressük. Tegyük fel, hogy valamely $J \subset (0, +\infty)$ esetén az $\omega : J \to (0, +\infty)$ függvény megoldás, majd legyen $\theta := \omega^{-1}$. Ekkor

$$\theta'(x) = -\left(2x^4 + \frac{1}{x}\right)\theta(x) - x^3 \qquad (x \in \mathcal{D}_\theta).$$

Így, ha

$$\alpha \in \int -\left(2x^4 + \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x = -\frac{2}{5}x^5 + \ln(x) \qquad (x \in J),$$

és

$$\theta_H(x) := \exp\left(-\frac{2}{5}x^5\right) \cdot \frac{1}{x} \qquad (x \in J)$$

továbbá

$$m \in \int \frac{-x^3}{\varphi_H(x)} \mathrm{d}x = -\int x^4 \cdot \exp\left(\frac{2}{5}x^5\right) \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\exp\left(\frac{2}{5}x^5\right),$$

akkor

$$\theta(x) \equiv (c + m(x))\theta_H(x) = \exp\left(-\frac{2}{5}x^5\right) \cdot \frac{c}{x} - \frac{1}{2x},$$

ahonnan az eredeti differenciálegyenlet megoldása a

$$\varphi(x) \equiv x + \frac{1}{\exp\left(-\frac{2}{5}x^5\right) \cdot \frac{c}{x} - \frac{1}{2x}}$$

függvény. ■

7.7. Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek

7.7.1. definíció. Adott $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $A : I \to \mathbb{R}^{m\times m}$, $\mathbf{b} : I \to \mathbb{R}^m$ folytonos függvények esetén az

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{b}$$

inhomogén elsőrendű **differenciálegyenlet-rendszer** megoldáshalmazának nevezzük az

$$\mathcal{M}_{\mathbf{b}} := \left\{\boldsymbol{\varphi} \in \mathfrak{C}^1(I, \mathbb{R}^m) : \ \boldsymbol{\varphi}' = A\boldsymbol{\varphi} + \mathbf{b}\right\}$$

függvényhalmazt. Ha az egyenlet homogén: $\mathbf{b} \equiv 0$, akkor

$$\mathcal{M}_0 := \left\{\boldsymbol{\varphi} \in \mathfrak{C}^1(I, \mathbb{R}^m) : \ \boldsymbol{\varphi}' = A\boldsymbol{\varphi}\right\}.$$

7.7.0. megjegyzés.

1. Ha $\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi} \in \mathcal{M}_{\mathbf{b}}$, akkor

$$(\boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\psi})' = A\boldsymbol{\varphi} + \mathbf{b} - (A\boldsymbol{\psi} + \mathbf{b}) = A(\boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\psi}),$$

   azaz $\boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\psi} \in \mathcal{M}_{\mathbf{0}}$.

2. Ha $\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi} \in \mathcal{M}_{\mathbf{b}}$, akkor $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\psi} + \underbrace{(\boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\psi})}_{\in \mathcal{M}_{\mathbf{0}}}$.

7.7.1. tétel. Bármely $\boldsymbol{\psi} \in \mathcal{M}_{\mathbf{b}}$ (azaz bármely **partikuláris** megoldás) esetén

$$\mathcal{M}_{\mathbf{b}} = \boldsymbol{\psi} + \mathcal{M}_{\mathbf{0}} := \left\{\boldsymbol{\psi} + \boldsymbol{\chi} \in \mathfrak{C}^1(I, \mathbb{R}^m) : \ \boldsymbol{\chi} \in \mathcal{M}_{\mathbf{0}}\right\}.$$

Biz.

1. lépés /$\mathcal{M}_{\mathbf{b}} \subset \boldsymbol{\psi} + \mathcal{M}_{\mathbf{0}}$/.. A fentiek következtében, ha $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{M}_{\mathbf{b}}$, akkor

$$\boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\psi} \in \mathcal{M}_{\mathbf{0}}, \qquad \text{ill.} \qquad \boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\psi} + \underbrace{(\boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\psi})}_{\in \mathcal{M}_{\mathbf{0}}}.$$

2. lépés /$\mathcal{M}_{\mathbf{b}} \supset \boldsymbol{\psi} + \mathcal{M}_{\mathbf{0}}$/.. Ha $\boldsymbol{\chi} \in \mathcal{M}_{\mathbf{0}}$, akkor $\boldsymbol{\psi} + \boldsymbol{\chi} \in \mathcal{M}_{\mathbf{b}}$, hiszen

$$(\boldsymbol{\psi} + \boldsymbol{\chi})' = \boldsymbol{\psi}' + \boldsymbol{\chi}' = A\boldsymbol{\psi} + \mathbf{b} + A\boldsymbol{\chi} = A(\boldsymbol{\psi} + \boldsymbol{\chi}) + \mathbf{b}. \qquad \blacksquare$$

Az $\mathcal{M}_{\mathbf{b}}$ megoldáshalmaz meghatározása tehát egyenértékű egyetlen elemének (a szóbanforgó lineáris differenciálegyenlet valamely ún. **partikuláris megoldás**ának) és $\mathcal{M}_{\mathbf{0}}$-nak meghatározásával. Az $\mathcal{M}_{\mathbf{0}}$ megoldáshalmaz szerkezetének tanulmányozásához néhány fogalomra van szükségünk.

7.7.2. definíció. Adott $k \in \mathbb{N}$, $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, ill.

$$\boldsymbol{\mu}_1, \ldots, \boldsymbol{\mu}_k : I \to \mathbb{R}^m$$

függvények esetén a

1. $\{\boldsymbol{\mu}_1, \ldots, \boldsymbol{\mu}_k\}$ rendszert **lineárisan független**nek nevezzük, ha

$$\sum_{l=1}^{k} \alpha_l \boldsymbol{\mu}_l(x) = 0 \quad (x \in I) \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0.$$

2. $\{\boldsymbol{\mu}_1, \ldots, \boldsymbol{\mu}_k\}$ rendszert **lineárisan összefüggő**nek nevezzük, ha nem független:

$$\exists\, \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}: \; \alpha_1^2 + \ldots + \alpha_k^2 > 0 \qquad \text{és} \qquad \sum_{l=1}^{k} \alpha_l \boldsymbol{\mu}_l(x) = 0 \quad (x \in I).$$

7.7.2. tétel. A

$$\boldsymbol{\mu}_1, \ldots, \boldsymbol{\mu}_m \in \mathcal{M}_{\mathbf{0}}$$

függvények pontosan akkor lineárisan függetlenek, ha alkalmas $\tau \in I$ esetén

$$\det\left[\boldsymbol{\mu}_1(\tau), \ldots, \boldsymbol{\mu}_m(\tau)\right] \neq 0.$$

Biz.

7.7.3. definíció. Azt mondjuk, hogy a

$$\boldsymbol{\mu}_1, \ldots, \boldsymbol{\mu}_m \in \mathcal{M}_{\mathbf{0}}$$

megoldások **alaprendszert** alkotnak, ha lineárisan függetlenek. Ebben az esetben a

$$\Phi = [\boldsymbol{\mu}_1, \ldots, \boldsymbol{\mu}_m] : I \to \mathbb{R}^{m \times m}$$

függvényt az

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$$

homogén rendszer egy **alapmátrix**ának nevezzük.

Mivel

$$\Phi' := \left[\boldsymbol{\mu}_1', \ldots, \boldsymbol{\mu}_m'\right],$$

ezért

$$\boldsymbol{\mu}_k' = A\boldsymbol{\mu}_k \qquad (k \in \{1, \ldots, m\}),$$

azaz Φ olyan függvény, amelyre

$$\det(\Phi(x)) \neq 0 \quad (x \in I) \qquad \text{és} \qquad \Phi' = A\Phi$$

teljesül.

7.7.1. példa. Az

$$y_1' = -y_2 + \sin, \qquad y_2' = y_1 + \cos$$

(inhomogén) egyenlet esetében a

$$\boldsymbol{\mu}_1 := \begin{bmatrix} \sin \\ -\cos \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\mu}_2 := \begin{bmatrix} \cos \\ \sin \end{bmatrix}$$

függvények a homogén egyenlet egy alaprendszerét alkotják, ui.

- mindketten megoldásai a homogén egyenletnek:

$$\boldsymbol{\mu}_1' = \begin{bmatrix} \cos \\ \sin \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_1, \qquad \boldsymbol{\mu}_2' = \begin{bmatrix} -\sin \\ \cos \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_2.$$

- lineárisan függetlenek:

$$\det \begin{bmatrix} \sin(\pi) & \cos(\pi) \\ -\cos(\pi) & \sin(\pi) \end{bmatrix} = \cos^2(\pi) = 1 \neq 0.$$

7.7.2. példa. Ha

$$A(x) := \begin{bmatrix} 1 & 2-x \\ 1/x & 1/x - 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}(x) := \begin{bmatrix} x^2 + x \\ x \end{bmatrix} \qquad (x \in (0, +\infty)),$$

akkor az

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{b}$$

(inhomogén) rendszer esetében a

$$\Phi(x) := \begin{bmatrix} x^2 & x-1 \\ x & 1 \end{bmatrix} \qquad (x \in (0, +\infty)),$$

függvény alapmátrix, hiszen bármely $x \in (0, +\infty)$ esetén

$$\det(\Phi(x)) = x \neq 0$$

és

$$\Phi'(x) = \begin{bmatrix} xt & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2-x \\ 1/x & 1/x - 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x^2 & x-1 \\ x & 1 \end{bmatrix} = A(x)\Phi(x).$$

7.7.1. feladat. Igazoljuk, hogy ha Ha $a, b : (-1,1) \to \mathbb{R}$ folytonos függvények, akkor az

$$\left.\begin{aligned} x' &= (a-b)x - by, \\ y' &= bx + (a+b)y \end{aligned}\right\}$$

rendszer akapmátrixa a

$$\Phi(x) := \exp\left(\int_0^x a(s)\,\mathrm{d}s\right)\begin{bmatrix} 1-\displaystyle\int_0^x b(s)\,\mathrm{d}s & -\displaystyle\int_0^x b(s)\,\mathrm{d}s \\ \displaystyle\int_0^x b(s)\,\mathrm{d}s & 1+\displaystyle\int_0^x b(s)\,\mathrm{d}s \end{bmatrix} \qquad (x \in (-1,1))$$

mátrixértékű függvény!

Útm. Világos, hogy bármely $x \in (-1,1)$ esetén

$$\det(\Phi(x)) = \exp\left(2\int_0^x a(s)\,\mathrm{d}s\right) \cdot 1 \neq 0,$$

továbbá

$$\begin{aligned} \Phi'(x) &= a(x)\Phi(x) + \exp\left(\int_0^x a(s)\,\mathrm{d}s\right)\begin{bmatrix} -b(x) & -b(x) \\ b(x) & b(x) \end{bmatrix} = \\ &= \exp\left(\int_0^x a(s)\,\mathrm{d}s\right) \cdot \\ &\quad \cdot \begin{bmatrix} a(x) - b(t) - a(x)\displaystyle\int_0^x b(s)\,\mathrm{d}s & -b(x) - a(x)\displaystyle\int_0^x b(s)\,\mathrm{d}s \\ b(x) + a(x)\displaystyle\int_0^x b(s)\,\mathrm{d}s & a(x) + b(x) + a(x)\displaystyle\int_0^x b(s)\,\mathrm{d}s \end{bmatrix} = \\ &= \exp\left(\int_0^x a(s)\,\mathrm{d}s\right)\begin{bmatrix} a(x) - b(x) & -b(x) \\ b(x) & a(x) + b(x) \end{bmatrix} \cdot \\ &\quad \cdot \begin{bmatrix} 1-\displaystyle\int_0^x b(s)\,\mathrm{d}s & -\displaystyle\int_0^x b(s)\,\mathrm{d}s \\ \displaystyle\int_0^x b(s)\,\mathrm{d}s & 1+\displaystyle\int_0^x b(s)\,\mathrm{d}s \end{bmatrix} = A(x)\Phi(x). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

7.7.1. gyakorló feladat. Igazoljuk, hogy az

$$y_1'(x)=\frac{y_1(x)}{x}+2xy_2(x),\qquad y_2'(x)=\frac{y_2(x)}{x}\qquad (0<x\in\mathbb{R}),$$

egyenlet esetében a

$$\boldsymbol{\mu}_1(x):=\begin{bmatrix} x\\ 0\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{\mu}_2:=\begin{bmatrix} x^3\\ x\end{bmatrix}\qquad (x>0)$$

függvények alaprendszert alkotnak!

Útm.

7.7.3. példa. Ha $I=\mathbb{R}$ és alkalmas $M\in\mathbb{R}^{m\times m}$ mátrixszal

$$A(x)=M\qquad (x\in I),$$

és az M mátrix $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ sajátértékei mind különbözőek:

$$\lambda_k\neq\lambda_l\qquad (k,l\in\{1,\ldots,m\}:\ k\neq l),$$

akkor a

$$\boldsymbol{\mu}_1(x):=e^{\lambda_1 x}\mathbf{s}_1,\quad \ldots,\quad \boldsymbol{\mu}_m(x):=e^{\lambda_m x}\mathbf{s}_m\qquad (x\in I)$$

függvények alaprendszert alkotnak, azaz az

$$\left[e^{\lambda_1 x}\mathbf{s}_1,\ldots,e^{\lambda_m x}\mathbf{s}_m\right]\qquad (x\in I)$$

mátrix az

$$\mathbf{y}'=M\mathbf{y}$$

homogén rendszer egy alapmátrixa, ahol

$$M\mathbf{s}_k=\lambda_k\mathbf{s}_k\qquad (k\in\{1,\ldots,m\}),$$

ui.

– mindannyian megoldásai a homogén rendszernek:

$$\boldsymbol{\mu}_k'(x)\equiv e^{\lambda_k x}\lambda_k\mathbf{s}_k\equiv e^{\lambda_k x}M\mathbf{s}_k\equiv M\left(e^{\lambda_k x}\mathbf{s}_k\right)\equiv M\boldsymbol{\mu}_k(x)\qquad (k\in\{1,\ldots,m\}),$$

– lineárisan függetlenek, hiszen (vö. 1.2.3. tétel) a különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek, így

$$\det\left[e^{\lambda_1 0}\mathbf{s}_1,\ldots,e^{\lambda_m 0}\mathbf{s}_m\right]=\det\left[\mathbf{s}_1,\ldots,\mathbf{s}_m\right]\neq 0.$$

Előfordulhat, hogy az M mátrix sajátértékei nem mind különbözőek (többszörös sajátértékek lépnek fel), ill. hogy a sajátértékek között vannak komplex konjugált párok. Ekkor is vannak módszerek az alaprendszer előállítására, amit most csak $m = 2$ esetén tárgyalunk. Ebben az esetben (vö. 1.2.2. tétel) M karakterisztikus polinomja:

$$p_M(z) = z^2 - \mathrm{Sp}\,(M)z + \det(M) \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

Tehát, ha az $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mátrixnak

1. két különböző valós sajátértéke van ($\mathrm{Sp}\,(M)^2 > 4\det(M)$): λ, μ és a hozzájuk tartozó sajátvektor: $\mathbf{u}, \mathbf{v}$, azaz

   $$M\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}, \qquad \text{ill.} \qquad M\mathbf{v} = \mu\mathbf{v},$$

   akkor a fentiek miatt a

   $$\boldsymbol{\mu}_1(x) := e^{\lambda x}\mathbf{u}, \quad \boldsymbol{\mu}_2(x) := e^{\mu x}\mathbf{v} \qquad (x \in I)$$

   függvények alaprendszert alkotnak.

2. egyetlen sajátértéke van ($\mathrm{Sp}\,(M)^2 = 4\det(M)$): λ, és

   a) $\mathrm{rang}\,(M - \lambda E_2) = 0$, azaz λ-hoz $2 - 0 = 2$ független sajátvektor tartozik: $\mathbf{u}, \mathbf{v}$, azaz

   $$M\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}, \qquad \text{ill.} \qquad M\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v},$$

   akkor a fentiekhez hasonlóan látható, hogy a

   $$\boldsymbol{\mu}_1(x) := e^{\lambda x}\mathbf{u}, \quad \boldsymbol{\mu}_2(x) := e^{\lambda x}\mathbf{v} \qquad (x \in I)$$

   függvények alaprendszert alkotnak.

   b) $\mathrm{rang}\,(M - \lambda E_2) = 1$, azaz λ-hoz $2 - 1 = 1$ sajátvektor tartozik: $\mathbf{u}$, akkor van olyan $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ (ún. **fővektor**), hogy $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ függetlenek (vö. 1.2.4. tétel),

   $$M\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} + \mathbf{u},$$

   és a

   $$\boldsymbol{\mu}_1(x) := e^{\lambda x}\mathbf{u}, \quad \boldsymbol{\mu}_2(x) := e^{\lambda x}(\mathbf{v} + x\mathbf{u}) \qquad (x \in I)$$

   függvények alaprendszert alkotnak, hiszen

   – mindketten megoldásai a homogén egyenletnek:

   $$\boldsymbol{\mu}_1'(x) = e^{\lambda x}\lambda\mathbf{u} = e^{\lambda x}M\mathbf{u} = M(e^{\lambda x}\mathbf{u}) = M\boldsymbol{\mu}_1(x) \qquad (x \in I),$$

   $$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}_2'(x) &= e^{\lambda x}\lambda(\mathbf{v} + x\mathbf{u}) + e^{\lambda x}\mathbf{u} = e^{\lambda x}\left\{\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v} + \lambda x\mathbf{u}\right\} = \\ &= e^{\lambda x}\left\{M\mathbf{v} + xM\mathbf{u}\right\} = M\left\{e^{\lambda x}(\mathbf{v} + x\mathbf{u})\right\} = M\boldsymbol{\mu}_2(x) \qquad (x \in I), \end{aligned}$$

– lineárisan függetlenek:

$$\det\left[e^{\lambda 0}\mathbf{u}, e^{\lambda 0}(\mathbf{v}+0\mathbf{u})\right] = \det\left[\mathbf{u},\mathbf{v}\right] \neq 0.$$

3. nincsen valós sajátértéke, pontosabban egy konjugált komplex sajátértékpárja van ($\mathrm{Sp}\,(M)^2 < 4\det(M)$): $\lambda = \alpha \pm \beta\imath$ ($\beta \neq 0$), és a hozzájuk tartozó (konjugált komplex) sajátvektorok $\mathbf{u} \pm \mathbf{v}\imath$, akkor megmutatható, hogy a

$$\boldsymbol{\mu}_1(x) := e^{\alpha x}\left\{\cos(\beta x)\mathbf{u} + \sin(\beta x)\mathbf{v}\right\},\ \boldsymbol{\mu}_2(x) := e^{\alpha x}\left\{\sin(\beta x)\mathbf{u} - \cos(\beta x)\mathbf{v}\right\} \quad (x \in I)$$

függvények alaprendszert alkotnak.

Miért jó, ha ismerünk egy alaprendszert, ill. alapmátrixot?

7.7.3. tétel. Ha Φ a homogén rendszer egy alapmátrixa, akkor

$$\mathcal{M}_{\mathbf{0}} = \left\{\Phi\mathbf{c} \in \mathfrak{C}^1(I,\mathbb{R}^m):\ \mathbf{c} \in \mathbb{R}^m\right\} = \left\{c_1\boldsymbol{\mu}_1 + \ldots + c_m\boldsymbol{\mu}_m \in \mathfrak{C}^1(I,\mathbb{R}^m):\ c_1,\ldots,c_m \in \mathbb{R}\right\}.$$

Biz. ■

Valamely alapmátrix ismeretében nem nehéz előállítani egy partikuláris megoldást. Legyen ui.

$$\mathbf{g} = (g_1,\ldots,g_m) : I \to \mathbb{R}^m$$

folytonosan differenciálható függvény, ekkor

$$(\Phi\mathbf{g})' = \Phi'\mathbf{g} + \Phi\mathbf{g}' = A\Phi\mathbf{g} + \Phi\mathbf{g}'.$$

Ha tehát $\Phi\mathbf{g}' = \mathbf{b}$, akkor

$$(\Phi\mathbf{g})' = A(\Phi\mathbf{g}) + \mathbf{b},$$

azaz $\Phi\mathbf{g} \in \mathcal{M}_{\mathbf{b}}$. Mivel bármely $x \in I$ esetén a $\Phi(x) \in \mathbb{R}^{m\times m}$ mátrixnak van inverze, ezért

$$\Phi\mathbf{g}' = \mathbf{b} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathbf{g}' = \Phi^{-1}\mathbf{b},$$

(ahol a Φ^{-1} leképezés

$$\Phi^{-1}(x) \qquad (x \in I)$$

helyettesítési értéke a $\Phi(x)$ mátrix inverze). Mivel $\Phi^{-1}\mathbf{b}$ folytonos függvény, ezért van olyan függvény, amelynek deriváltfüggvénye. Tehát az

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{b}$$

inhomogén lineáris differenciálegyenlet-rendszer megoldásának felírása az alábbi módon történik:

1. lépés.. meghatározunk egy Φ alapmátrixot,

2. lépés.. olyan differenciálható $\mathbf{g} : I \to \mathbb{R}^m$ függvényt keresünk, amelyre

$$\Phi\mathbf{g}' = \mathbf{b}, \qquad \text{azaz} \qquad \mathbf{g}' = \Phi^{-1}\mathbf{b},$$

3. lépés.. integrálás után az inhomogén egyenlet megoldáshalmazának egy eleme (az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása): $\Phi\mathrm{g}$, ezért az inhomogén egyenlet megoldáshalmaza:

$$\mathcal{M}_{\mathbf{b}} = \left\{\Phi\mathbf{c} + \Phi\mathbf{g} \in \mathfrak{C}^1(I, \mathbb{R}^m) :\ \mathbf{c} \in \mathbb{R}^m\right\} = \left\{\Phi(\mathbf{c} + \mathbf{g}) \in \mathfrak{C}^1(I, \mathbb{R}^m) :\ \mathbf{c} \in \mathbb{R}^m\right\}.$$

7.7.2. feladat. Írjuk fel az $\mathbf{y}' = M\mathbf{y}$ homogén lineáris differenciálegyenlet-rendszer megoldáshalmazát!

1. $M := \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$;
2. $M := \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$;
3. $M := \begin{bmatrix} -7 & 1 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$;
4. $M := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Útm.

1. A

$$p_M(z) := z^2 - 9z + 14 \qquad (z \in \mathbb{C})$$

karakterisztikus polinom gyökei:

$$\lambda = 2, \qquad \mu = 7.$$

A hozzájuk tartozó sajátvektorok:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Így a megoldáshalmaz:

$$\mathcal{M}_{\mathbf{0}} = \left\{\mathbb{R} \ni x \mapsto \alpha e^{2x} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \beta e^{7x} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} :\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\}.$$

2. A

$$p_M(z) := z^2 + 8z + 16 = (z + 4)^2 \qquad (z \in \mathbb{C})$$

karakterisztikus polinom gyöke:

$$\lambda = -4.$$

Mivel

$$\operatorname{rang}\begin{bmatrix} -5+4 & -1 \\ 1 & -3+4 \end{bmatrix} = 1,$$

ezért az egyetlen sajátvektor:

$$\mathbf{u} := \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

ill. az

$$M\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} + \mathbf{u}$$

egyenletből a fővektor:

$$\mathbf{v} := \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Így a megoldáshalmaz:

$$\mathcal{M}_{\mathbf{0}} = \left\{ \mathbb{R} \ni x \mapsto e^{-4x} \left\{ \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} x \\ -1-x \end{bmatrix} \right\} : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

3. A

$$p_M(z) := z^2 - 12z + 37 \qquad (z \in \mathbb{C})$$

karakterisztikus polinom gyökei:

$$\lambda = -6 + \imath, \qquad \mu = -6 - \imath.$$

A hozzájuk tartozó sajátvektorok: $\mathbf{u} \pm \mathbf{v}\imath$, ahol

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Így a megoldáshalmaz:

$$\mathcal{M}_{\mathbf{0}} = \left\{ \mathbb{R} \ni x \mapsto e^{-6x} \left\{ \left\{ \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \beta \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} \cos(x) + \left\{ \alpha \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \sin(x) \right\} \right\} : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

4. Egyetlen sajátérték van (a főátlóbeli $\lambda = 1$). Mivel

$$\operatorname{rang}\begin{bmatrix} 1-1 & 0 \\ 0 & 1-1 \end{bmatrix} = 0,$$

ezért két független sajátvektorunk van:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Így a megoldáshalmaz:

$$\mathcal{M}_{\mathbf{0}} = \left\{ \mathbb{R} \ni x \mapsto e^{x} \left\{ \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}. \quad \blacksquare$$

7.7.3. feladat. Oldjuk meg az

$$\left.\begin{array}{rcll} y_1' &=& y_1+2y_2+\exp^2, & y_1(0)=1, \\ y_2' &=& 2y_1+y_2+1, & y_2(0)=1 \end{array}\right\}$$

kezdetiérték-feladatot!

Útm. Látható, hogy a kezdetiérték-feladat

$$\mathbf{y}'=M\mathbf{y}+\mathbf{b},\qquad \mathbf{y}(0)=\boldsymbol{\xi}$$

alakú, ahol

$$M:=\begin{bmatrix}1&2\\2&1\end{bmatrix},\qquad \mathbf{b}(x):=\begin{bmatrix}e^{2x}\\1\end{bmatrix}\quad(x\in\mathbb{R})\qquad\text{és}\qquad \boldsymbol{\xi}:=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}.$$

Az M mátrix sajátértékei a

$$p_M(z):=z^2-2z-3=(z+1)(z-3)\qquad(x\in\mathbb{C})$$

karakterisztikus polinom gyökei:

$$\lambda:=-1,\qquad \mu:=3.$$

A megfelelő sajátvektorok:

$$\mathbf{u}:=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix},\qquad \mathbf{v}:=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}.$$

Így egy alapmátrix, ill. inverze:

$$\Phi(x):=\left[e^{\lambda x}\mathbf{u},e^{\mu x}\mathbf{v}\right]=\begin{bmatrix}e^{-x}&e^{3x}\\-e^{-x}&e^{3x}\end{bmatrix},\quad\text{ill.}\quad \Phi(x)^{-1}=\frac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix}e^{x}&-e^{x}\\e^{-3x}&e^{-3x}\end{bmatrix}\qquad(x\in\mathbb{R}).$$

Az állandók variálásaként olyan differenciálható $\mathbf{g}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ függvényt keresünk, amelyre

$$\Phi\mathbf{g}'=\mathbf{b}.$$

Innen

$$\mathbf{g}'(x)=\Phi(x)^{-1}\cdot\mathbf{b}(x)=\frac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix}e^{3x}-e^{x}\\e^{-x}+e^{-3x}\end{bmatrix}\qquad(x\in\mathbb{R}),$$

azaz (pl.)

$$\mathbf{g}(x)=\left(-\frac{1}{6}\right)\cdot\begin{bmatrix}-e^{3x}+3e^{x}\\3e^{-x}+e^{-3x}\end{bmatrix}\qquad(x\in\mathbb{R}).$$

Egy $\Phi\mathbf{g}$ partikuláris megoldás tehát a következő:

$$\Phi(x)\mathbf{g}(x)=\left(-\frac{1}{3}\right)\begin{bmatrix}e^{2x}+2\\2e^{2x}-1\end{bmatrix}\qquad(x\in\mathbb{R}).$$

Így az inhomogén egyenlet megoldáshalmaza:

$$\mathcal{M}=\left\{\mathbb{R}\ni x\to\Phi(x)\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\end{bmatrix}+\Phi(x)\mathbf{g}(x)=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}3\alpha e^{-x}+3\beta e^{3x}-e^{2x}-2\\-3\alpha e^{-x}+3\beta e^{3x}-2e^{2x}+1\end{bmatrix}:\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}\right\}.$$

Az

$$\mathbf{y}(0) = \boldsymbol{\xi}$$

kezdeti feltételt figyelembe véve a megfelelő α, β együtthatókat az

$$\alpha + \beta - 1 = 1, \qquad -\alpha + \beta - \frac{1}{3} = 1$$

egyenletrendszerből nyerjük:

$$\alpha = \frac{1}{3}, \qquad \beta = \frac{5}{3}.$$

Így a fenti kezdetiérték-feladat teljes megoldása a

$$\boldsymbol{\varphi}(x) := \frac{1}{3}\begin{bmatrix} e^{-x} + 5e^{3x} - e^{2x} - 2 \\ -e^{-x} + 5e^{3x} - 2e^{2x} + 1 \end{bmatrix} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

függvény. ■

7.7.4. tétel. Ha $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, $\tau \in I$, $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^m$, továbbá $A : I \to \mathbb{R}^{m\times m}$ és $\mathbf{b} : I \to \mathbb{R}^m$ folytonos függvény, akkor – hasonlóan a (7.6.35) formulához – az

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{b}, \qquad \mathbf{y}(\tau) = \boldsymbol{\xi} \tag{7.7.1}$$

kezdetiérték-feladat teljes megoldása a

$$\boldsymbol{\varphi}(x) := \Phi(x)\Phi(\tau)^{-1}\boldsymbol{\xi} + \int_\tau^x \Phi(x)\Phi(s)^{-1}\mathbf{b}(s)\,\mathrm{d}s \qquad (x \in I) \tag{7.7.2}$$

függvény, ahol a

$$\Phi : I \to \mathbb{R}^{m\times m}$$

függvény alapmátrixa az

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$$

homogén rendszernek.

Biz. Mivel

$$\boldsymbol{\varphi}(\tau) = \Phi(\tau)\Phi(\tau)^{-1}\boldsymbol{\xi} + 0 = E_m\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}$$

és (vö. 3.0.2. tétel) bármely $x \in I$ esetén

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi}'(x) &= \Phi'(x)\Phi(\tau)^{-1}\boldsymbol{\xi} + \Phi(x)\Phi(x)^{-1}\mathbf{b}(x) + \int_\tau^x \Phi'(x)\Phi(s)^{-1}\mathbf{b}(s)\,\mathrm{d}s = \\ &= A(x)\Phi(x)\Phi(\tau)^{-1}\boldsymbol{\xi} + \mathbf{b}(x) + \int_\tau^x A(x)\Phi(x)\Phi(s)^{-1}\mathbf{b}(s)\,\mathrm{d}s = \\ &= A(x)\left\{\Phi(x)\Phi(\tau)^{-1}\boldsymbol{\xi} + \int_\tau^x \Phi(x)\Phi(s)^{-1}\mathbf{b}(s)\,\mathrm{d}s\right\} + \mathbf{b}(x) = \\ &= A(x)\boldsymbol{\varphi}(x) + \mathbf{b}(x), \end{aligned}$$

így az egyértelműség (vö. 7.5.5. tétel) következtében az állítás bizonyítottnak tekinthető. ■

7.7.0. megjegyzés. A 7.7.3. feladat esetében

$$\Phi(x) := \begin{bmatrix} e^{-x} & e^{3x} \\ -e^{-x} & e^{3x} \end{bmatrix}, \qquad \text{ill.} \qquad \Phi(s)^{-1} = \frac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix} e^{s} & -e^{s} \\ e^{-3s} & e^{-3s} \end{bmatrix} \qquad (s,x\in\mathbb{R}),$$

így a

$$\Lambda(x,s) := \Phi(x)\cdot\Phi(s)^{-1} \qquad (x,s\in\mathbb{R})$$

ún. **Cauchy-mátrix**ra

$$\begin{aligned}\Lambda(x,s) &= \frac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix} e^{-x} & e^{3x} \\ -e^{-x} & e^{3x} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} e^{s} & -e^{s} \\ e^{-3s} & e^{-3s} \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix} e^{s-x}+e^{3x-3s} & -e^{s-x}+e^{3x-3s} \\ -e^{s-x}+e^{3x-3s} & e^{s-x}+e^{3x-3s} \end{bmatrix} \qquad (x,s\in\mathbb{R}),\end{aligned}$$

ahonnan a teljes megoldás

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varphi}(x) &= \Lambda(x,0)\boldsymbol{\xi} + \int_0^x \Lambda(x,s)\cdot\mathbf{b}(s)\,\mathrm{d}s = \\ &= \frac{1}{2}\cdot\left\{\begin{bmatrix} e^{-x}+e^{3x} & -e^{-x}+e^{3x} \\ -e^{-x}+e^{3x} & e^{-x}+e^{3x} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^x \begin{bmatrix} e^{s-x}+e^{3x-3s} & -e^{s-x}+e^{3x-3s} \\ -e^{s-x}+e^{3x-3s} & e^{s-x}+e^{3x-3s} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{2s} \\ 1 \end{bmatrix}\mathrm{d}s\right\} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3x} + \frac{1}{2}\cdot\int_0^x \begin{bmatrix} e^{3s-x}+e^{3x-s}-e^{s-x}+e^{3x-3s} \\ -e^{3s-x}+e^{3x-s}+e^{s-x}+e^{3x-3s} \end{bmatrix}\mathrm{d}s = \\ &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} e^{-x}+5e^{3x}-e^{2x}-2 \\ -e^{-x}+5e^{3x}-2e^{2x}+1 \end{bmatrix} \qquad (x\in\mathbb{R}).\end{aligned}$$

7.7.2. gyakorló feladat. Oldjuk meg az alábbi kezdetiérték-feladatokat!

(1)
$$\left.\begin{aligned} y_1'(x) &= 3y_1(x)+2y_2(x)+3e^{-x} \quad (x\in\mathbb{R}), \quad y_1(0)=4, \\ y_2'(x) &= 4y_1(x)+y_2(x) \quad (x\in\mathbb{R}), \quad y_2(0)=-2, \end{aligned}\right\}$$

(2)
$$\left.\begin{aligned} y_1'(x) &= 3y_1(x)-3y_2(x)+e^{x} \quad (x\in\mathbb{R}), \quad y_1(0)=0, \\ y_2'(x) &= y_1(x)-y_2(x)+2e^{x} \quad (x\in\mathbb{R}), \quad y_2(0)=1. \end{aligned}\right\}$$

Útm.

7.7.5. tétel. Ha $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^m$, $M \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $\omega \in \mathbb{R}\backslash\sigma(M)$, akkor a

$$\boldsymbol{\psi}(x) := -(M-\omega E_m)^{-1}e^{\omega x}\mathbf{k} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény megoldása az

$$\mathbf{y}'(x) = M\mathbf{y}(x) + e^{\omega x}\mathbf{k} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

inhomogén lineáris differenciálegyenlet-rendszernek.

Biz. Világos, hogy bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\psi}'(x) &= -\omega(M-\omega E_m)^{-1}e^{\omega x}\mathbf{k} = -\omega E_m(M-\omega E_m)^{-1}e^{\omega x}\mathbf{k} = \\
&= (-M+M-\omega E_m)(M-\omega E_m)^{-1}e^{\omega x}\mathbf{k} = \\
&= -M(M-\omega E_m)^{-1}e^{\omega x}\mathbf{k} + e^{\omega x}\mathbf{k} = \\
&= M\boldsymbol{\psi}(x) + e^{\omega x}\mathbf{k}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

7.7.4. feladat. Oldjuk meg az

$$\left.\begin{aligned}
y_1' &= y_1 + y_2 + 3y_3 + \exp^2, & y_1(0) = 1,\\
y_2' &= y_1 + 5y_2 + y_3 + \exp^2, & y_2(0) = 0,\\
y_3' &= 3y_1 + y_2 + y_3 + \exp^2, & y_3(0) = 0
\end{aligned}\right\}$$

kezdetiérték-feladatot!

Útm. Látható, hogy a fenti kezdetiérték-feladat a következő alakú:

$$\mathbf{y}' = M\mathbf{y} + \mathbf{b}, \qquad \mathbf{y}(0) = \boldsymbol{\xi},$$

ahol

$$M := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b}(x) := e^{2x}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad \boldsymbol{\xi} := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Az M mátrix sajátértékei a

$$p_M(z) := z^3 - 7z^2 - 36 \qquad (x \in \mathbb{C})$$

karakterisztikus polinom (vö. 1.2.2. tétel) gyökei. Mivel egész együtthatós normált polinomról van szó, p_M egész gyökei (ha vannak egyáltalán ilyenek) osztói a konstans tagnak, esetünkben -36-nak (vö. **??**. tétel). Ezért érdemes legalább a ±1, ±2, ±3, ill. a ±6 számokkal próbálkozni:

	1	-7	0	-36
-1	1	-8	8	$-42 = p_M(-1) \neq 0,$
1	1	-6	-6	$-42 = p_M(-1) \neq 0,$
-2	$\boxed{1}$	$\boxed{-9}$	$\boxed{18}$	$0 = p_M(3).$

Tehát a -2 gyöke p_M-nek, továbbá

$$p_M(z) = (z+2)(z^2-9z+18) = (z+2)(z-3)(z-6) \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

A

$$\lambda := -2, \qquad \mu := 3, \qquad \nu := 6$$

sajátértékeknek megfelelő sajátvektorok az

$$(M-\lambda E_3)\mathbf{u} = \mathbf{0}, \qquad \text{azaz a} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 7 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$(M-\mu E_3)\mathbf{v} = \mathbf{0}, \qquad \text{azaz a} \qquad \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

ill. az

$$(M-\nu E_3)\mathbf{w} = \mathbf{0}, \qquad \text{azaz a} \qquad \begin{bmatrix} -5 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

egyenletrendszerek nemtriviális megoldásai:

$$\mathbf{u} := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v} := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{w} := \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Így a

$$\Phi(x) := \left[e^{\lambda x}\mathbf{u}, e^{\mu x}\mathbf{v}, e^{\nu x}\mathbf{w}\right] = \begin{bmatrix} e^{-2x} & e^{6x} & e^{3x} \\ 0 & 2e^{6x} & -e^{3x} \\ -e^{-2x} & e^{6x} & e^{3x} \end{bmatrix} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény alapmátrix. Így az inhomogén egyenlet megoldáshalmaza:

$$\mathcal{M} = \left\{ \mathbb{R} \ni x \mapsto \Phi(x) \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} + \boldsymbol{\psi}(x) :\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\},$$

ahol (vö. 7.7.5. tétel)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\psi}(x) &= -(M-2E_3)^{-1} e^{2x} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= -e^{2x} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \ldots = \\ &= e^{-2x} \begin{bmatrix} -1/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Az

$$\mathbf{y}(0) = \boldsymbol{\xi}$$

kezdeti feltételt figyelembe véve a megfelelő α, β együtthatókat az

$$\left.\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma - \frac{1}{2} &= 1, \\ 2\beta - \gamma &= 0, \\ -\alpha + \beta + \gamma - \frac{1}{2} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszerből nyerjük:

$$\alpha = \frac{1}{2}, \qquad \beta = \frac{1}{3}, \qquad \gamma = \frac{2}{3}.$$

Így a fenti kezdetiérték-feladat teljes megoldása a

$$\boldsymbol{\varphi}(x) := \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -3e^{2x} + 4e^{3x} + 2e^{6x} + 3e^{-2x} \\ -4e^{3x} + 4e^{6x} \\ -3e^{2x} + 4e^{3x} + 2e^{6x} - 3e^{-2x} \end{bmatrix} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény. ■

7.7.5. feladat. Adjuk meg egy partikuláris megoldását az

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 + y_2 + 6y_3 + \exp^2, \\ y_2' &= 2y_1 + 5y_2 + 2y_3 + \exp^2, \\ y_3' &= 6y_1 + y_2 + 2y_3 + \exp^2 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszernek!

Útm. Látható, hogy a fenti egyenlet-rendszer a következő alakú:

$$\mathbf{y}' = M\mathbf{y} + \mathbf{b},$$

ahol

$$M := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 2 & 5 & 2 \\ 6 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b}(x) := e^{2x}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Az M mátrix sajátértékei a

$$p_M(z) := z^3 - 9z^2 - 16z + 144 \qquad (z \in \mathbb{C})$$

karakterisztikus polinom gyökei:

$$\lambda := -4, \qquad \mu := 4, \qquad \nu := 9.$$

Mivel a 2 nem sajátértéke az M mátrixnak, ezért egy partikuláris megoldás

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\psi}(x) &= -(M-2E_3)^{-1}e^{2x}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = -e^{2x}\cdot\begin{bmatrix}0&1&6\\2&3&2\\6&1&0\end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \\ &= -e^{2x}\cdot\frac{1}{-84}\cdot\begin{bmatrix}-2&12&-16\\6&-36&6\\-16&12&-2\end{bmatrix}^T\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \frac{e^{2x}}{42}\cdot\begin{bmatrix}-1&3&-8\\6&-18&6\\-8&3&-1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \\ &= -\frac{e^{2x}}{7}\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

7.7.6. feladat. Oldjuk meg az

$$\left.\begin{aligned}y_1'(x) &= -y_1(x)+y_2(x)+e^{3x} \quad (x\in\mathbb{R}), \quad y_1(0)=0,\\ y_2'(x) &= 2y_1(x)+2y_2(x)-2y_3(x) \quad (x\in\mathbb{R}), \quad y_2(0)=0,\\ y_3'(x) &= 2y_1(x)+3y_2(x)-3y_3(x)+e^{3x} \quad (x\in\mathbb{R}), \quad y_3(0)=0\end{aligned}\right\}$$

kezdetiérték-feladatot!

Útm. Látható, hogy a fenti kezdetiérték-feladat a következő alakú:

$$\mathbf{y}' = M\mathbf{y}+\mathbf{b}, \qquad \mathbf{y}(0)=\boldsymbol{\xi},$$

ahol

$$M := \begin{bmatrix}-1&1&0\\2&2&-2\\2&3&-3\end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b}(x) := e^{3x}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} \quad (x\in\mathbb{R}), \qquad \boldsymbol{\xi} := \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}.$$

Az M mátrix sajátértékei a

$$p_M(z) := z^3+2z^2-z-2 \qquad (z\in\mathbb{C})$$

karakterisztikus polinom gyökei, hiszen

$$\det\begin{bmatrix}-1&1&0\\2&2&-2\\2&3&-3\end{bmatrix} = 2\cdot\det\begin{bmatrix}-1&1&0\\1&1&-1\\2&3&-3\end{bmatrix} = 2\cdot\det\begin{bmatrix}-1&1&0\\0&2&-1\\0&5&-3\end{bmatrix} = -2(-6+5) = 2.$$

Mivel egész együtthatós normált polinomról van szó, p_M egész gyökei (ha vannak egyáltalán ilyenek) osztói a konstans tagnak, esetünkben -2-nek. Ezért érdemes a ±1, ±2 számokkal próbálkozni:

	1	2	-1	-2
1	1	3	2	$0 = p_M(1)$

Tehát a 1 gyöke p_M-nek, továbbá

$$p_M(z) = (z-1)(z^2+3z+2) = (z-1)(z+1)(z+2) \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

A

$$\lambda := 1, \qquad \mu := -1, \qquad \nu := -2$$

sajátértékeknek megfelelő sajátvektorok az

$$(M - \lambda E_3)\mathbf{u} = \mathbf{0}, \qquad \text{azaz a} \qquad \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$(M - \mu E_3)\mathbf{v} = \mathbf{0}, \qquad \text{azaz a} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

ill. az

$$(M - \nu E_3)\mathbf{w} = \mathbf{0}, \qquad \text{azaz az} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

egyenletrendszerek nemtriviális megoldásai:

$$\mathbf{u} := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v} := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{w} := \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Így a

$$\Phi(x) := \left[e^{\lambda x}\mathbf{u}, e^{\mu x}\mathbf{v}, e^{\nu x}\mathbf{w}\right] = \begin{bmatrix} e^x & e^{-x} & -e^{-2x} \\ 2e^x & 0 & e^{-2x} \\ 2e^x & e^{-x} & e^{-2x} \end{bmatrix} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény alapmátrix. Ezért az inhomogén egyenlet megoldáshalmaza:

$$\mathcal{M} = \left\{ \mathbb{R} \ni x \mapsto \Phi(x) \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} + \boldsymbol{\psi}(x) : \ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\},$$

ahol

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\psi}(x) &= -(M - 3E_3)^{-1} e^{3x} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -e^{3x} \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -6 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \ldots = \\ &= \frac{e^{3x}}{40} \begin{bmatrix} 12 & 6 & -2 \\ 8 & 24 & -8 \\ 8 & 14 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = e^{3x} \begin{bmatrix} 1/4 \\ 0 \\ 1/4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Az $\mathbf{y}(0) = \boldsymbol{\xi}$ kezdeti feltételt figyelembe véve a megfelelő α, β, γ együtthatókat az

$$\left.\begin{array}{rcl} \alpha+\beta-\gamma+\dfrac{1}{4} & = & 0, \\[2ex] 2\alpha+\gamma & = & 0, \\[2ex] 2\alpha+\beta+\gamma+\dfrac{1}{4} & = & 0 \end{array}\right\}$$

egyenletrendszerből nyerjük:

$$\alpha = 0, \qquad \beta = -\frac{1}{4}, \qquad \gamma = 0.$$

Így a fenti kezdetiérték-feladat teljes megoldása a

$$\boldsymbol{\varphi}(x) := \frac{e^{3x} - e^{-x}}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény. ■

7.7.7. feladat. Adott $p \in \mathbb{R}$ esetén határozza meg a

$$\left.\begin{array}{rcll} y_1'(x) & = & y_2(x) - p \quad (x \in \mathbb{R}), & y_1(0) = 0, \\[2ex] y_2'(x) & = & y_1(x) + p(x+1)(x \in \mathbb{R}), & y_2(0) = 1 \end{array}\right\}$$

kezdetiérték-feladat (φ_p, ψ_p) megoldását, majd mutassa meg, hogy a $q \in \mathbb{R}$, akkor

$$(\varphi_p, \psi_p) \longrightarrow (\varphi_q, \psi_q) \qquad (p \to q)$$

és a konvergencia minden kompakt intervallumon egyenletes!

Útm.

1. lépés.. Ha

$$z := y_1 + y_2,$$

akkor $z(0) = 0 + 1 = 1$, továbbá

$$z'(x) = y_2(x) - p + y_1(x) + px + p = z(x) + px \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

A

$$z'(x) = z(x) + px \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad z(0) = 1$$

kezdetiérték-feladat megoldása (vö. (7.6.35) formula):

$$\begin{aligned}
\phi(x) &= \left\{1+\int_0^x ps\exp\left(-\int_0^s 1\,\mathrm{d}u\right)\,\mathrm{d}s\right\}\exp\left(\int_0^x 1\,\mathrm{d}s\right) = \\
&= \left\{1+\int_0^x pse^{-s}\right\}e^x = \left\{1+\left[-pse^{-s}\right]_0^x+\int_0^x pe^{-s}\,\mathrm{d}s\right\}e^x = \\
&= \left\{1-pxe^{-x}-\left[pe^{-s}\right]_0^x\right\}e^x = \left\{1-pxe^{-x}-pe^{-x}+p\right\}e^x = \\
&= (1+p)^x-p(x+1) \quad (x\in\mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Mivel

$$y_2'(x)=y_1(x)+p(x+1)=z(x)-y_2(x)+p(x+1)=-y_2(x)+(1+p)e^x \qquad (x\in\mathbb{R}),$$

ezért az $y_2(0)=1$ kezdeti feltétel figyelembe vételével (vö. (7.6.35) formula) azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\psi_p(x) &= \left\{1+\int_0^x (1+p)e^s\exp\left(-\int_0^s(-1)\,\mathrm{d}u\right)\,\mathrm{d}s\right\}\exp\left(\int_0^x(-1)\,\mathrm{d}s\right) = \\
&= \left\{1+\int_0^x(1+p)e^{2s}\,\mathrm{d}s\right\}e^{-x} = \left\{1+\left[\frac{(1+p)e^{2s}}{2}\right]_0^x\right\}e^{-x} = \\
&= \left\{1+\frac{(1+p)e^{2x}}{2}-\frac{1+p}{2}\right\}e^{-x} = \\
&= \frac{1-p}{2}e^{-x}+\frac{1+p}{2}e^x = \mathrm{ch}\,(x)+p\mathrm{sh}\,(x) \quad (x\in\mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Így

$$\varphi_p(x)=\phi(x)-\psi_p(x)=\frac{1+p}{2}e^x-\frac{1-p}{2}e^{-x}-p(x+1)=\mathrm{sh}\,(x)+p\mathrm{ch}\,(x)-p(x+1) \qquad (x\in\mathbb{R}).$$

2. lépés.. A

$$|\psi_p(x)-\psi_q(x)|=|p-q|\cdot|\mathrm{sh}\,(x)| \qquad (x\in\mathbb{R}),$$

$$|\varphi_p(x)-\varphi_q(x)|=|p-q|\cdot|\mathrm{ch}\,(x)-(x+1)| \qquad (x\in\mathbb{R})$$

egyenlőségekből következik a kompakt konvergencia. ■

7.7.6. tétel. Ha $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ az $M \in \mathbb{R}^{m \times m}$ mátrix (nem feltétlenül különböző) sajátértékei /ez azt jelenti, hogy ha λ az M mátrix r-szeres sajátértéke, akkor λ a $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ felsorolásban r-szer fordul elő/, akkor

$$\Phi(x) := \sum_{k=0}^{m-1} r_{k+1}(x) P_k \qquad (x \in \mathbb{R}) \tag{7.7.3}$$

olyan deriválható függvény, amelyre

$$\Phi'(x) = M\Phi(x) \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad \Phi(0) = E_m \tag{7.7.4}$$

teljesül, ahol

$$P_k := \begin{cases} E_m & (k = 0), \\ \\ \prod_{l=1}^{k} (M - \lambda_l E_m) & (k \in \{1, \ldots, m-1\}), \end{cases} \tag{7.7.5}$$

továbbá

$$\mathbf{r}' = \begin{bmatrix} r_0' \\ r_1' \\ r_2' \\ \vdots \\ r_m' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda_1 r_1 + r_0 \\ \lambda_2 r_2 + r_1 \\ \vdots \\ \lambda_m r_m + r_{m-1} \end{bmatrix} \qquad \text{és} \qquad \mathbf{r}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{7.7.6}$$

Biz. Világos, hogy a (7.7.3)-beli Φ függvényre

$$\Phi(0) = \sum_{k=0}^{m-1} r_{k+1}(0) P_k = r_1(0) P_0 + r_2(0) P_1 + \ldots + r_{m-1}(0) E_m = 1 E_m = E_m.$$

Tehát már csak azt kell megmutatni, hogy Φre $\Phi' = M\Phi$ teljesül. (7.7.6) következtében

$$\Phi'(x) = \sum_{k=0}^{m-1} r_{k+1}'(x) P_k = \sum_{k=0}^{m-1} \left[\lambda_{k+1} r_{k+1}(x) + r_k(x)\right] P_k \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

tehát

$$\begin{aligned} \Phi'(x) - \lambda_m \Phi(x) &= \sum_{k=0}^{m-1} \left[\lambda_{k+1} r_{k+1}(x) + r_k(x)\right] P_k - \lambda_m \sum_{k=0}^{m-1} r_{k+1}(x) P_k = \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \left[\lambda_{k+1} - \lambda_m\right] r_{k+1}(x) P_k + \sum_{k=0}^{m-1} r_k(x) P_k = \\ &= \sum_{k=0}^{m-2} \left[\lambda_{k+1} - \lambda_m\right] r_{k+1}(x) P_k + \sum_{k=0}^{m-2} r_{k+1}(x) P_{k+1} \qquad (x \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

(7.7.5) miatt

$$P_{k+1} = (M - \lambda_{k+1} E_m) P_k \qquad (k \in \{0, \ldots, m-1\}),$$

így

$$\begin{aligned}\Phi'(x) - \lambda_m \Phi(x) &= \sum_{k=0}^{m-2} r_{k+1}(x) \left[(M - \lambda_{k+1} E_m) P_k + (\lambda_{k+1} - \lambda_m) P_k\right] = \\ &= \sum_{k=0}^{m-2} r_{k+1}(x) (M - \lambda_m E_m) P_k = (M - \lambda_m E_m) \sum_{k=0}^{m-2} r_{k+1}(x) P_k \quad (x \in \mathbb{R}).\end{aligned}$$

Ez az összeg a következő alakba írható:

$$\sum_{k=0}^{m-2} r_{k+1}(x) P_k = \sum_{k=0}^{m-1} r_{k+1}(x) P_k - r_m(x) P_{m-1} = \Phi(x) - r_m(x) P_{n-1} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Így a fenti különbség nem más, mint

$$\begin{aligned}\Phi'(x) - \lambda_m \Phi(x) &= (M - \lambda_m E_m)\Phi(x) - r_m(x)(M - \lambda_m E_m) P_{m-1} = \\ &= (M - \lambda_m E_m)\Phi(t) - r_m(x) P_m \quad (x \in \mathbb{R}).\end{aligned}$$

A Cayley-Hamilton-tételből (vö. (1.2.9). tétel) következik, hogy

$$P_m = \prod_{l=1}^{m} (M - \lambda_l E_m) = \chi_M(M) = \mathbf{O},$$

azaz

$$\Phi'(x) = M\Phi(x) \qquad (x \in \mathbb{R}). \quad \blacksquare$$

7.7.7. tétel. Ha a

$$\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n \times n}$$

függvényre (7.7.4) teljesül, akkor bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén $\Phi(x)$ invertálható, azaz a (7.7.3)-beli függvény az

$$\mathbf{y}' = M\mathbf{y} \tag{7.7.7}$$

homogén rendszer alapmátrixa.

Biz. Legyen $\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$, majd tegyük fel, hogy a $\sigma \in \mathbb{R}$ számra $\Phi(\sigma)\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Ekkor a

$$\boldsymbol{\mu}(x) := \Phi(\sigma + x)\mathbf{v} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény differenciálható, és deriváltjára

$$\boldsymbol{\mu}'(x) = M\Phi(\sigma + x)\mathbf{v} = M\boldsymbol{\mu}(x) \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad \boldsymbol{\mu}(0) = \Phi(\sigma)\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

teljesül. Mivel a

$$\boldsymbol{\nu}(x) := \mathbf{0} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvényre

$$\boldsymbol{\nu}'(x) = M\boldsymbol{\nu}(x) \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad \boldsymbol{\nu}(0) = \mathbf{0}$$

teljesül, ezért az egyértelműség következtében $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\nu}$. Így bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén $\Phi(x+\sigma)\mathbf{v} = \mathbf{0}$, ahonnan az $x := -\sigma$ választással azt kapjuk, hogy

$$\Phi(-\sigma+\sigma)\mathbf{v} = E_m\mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Innen pedig $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ következik, ami nem lehetséges. ■

7.7.0. megjegyzés. A (7.7.6) rekurzív egyenletrendszerrel kapcsolatban vegyük észre azt, hogy ha $x \in \mathbb{R}$, ill. $k \in \{2, \ldots, m\}$, akkor

$$r_0(x) = 0, \qquad r_1(x) = e^{\lambda_1 x}, \qquad r_k' = \lambda_k r_k + r_{k-1}, \quad r_k(0) = 0.$$

Így bármely $k \in \{2, \ldots, m\}$ esetén (vö. (7.6.35) formula)

$$\boxed{r_k(x) = \int_0^x e^{\lambda_k(x-s)} r_{k-1}(s)\,\mathrm{d}s \qquad (x \in \mathbb{R})}. \tag{7.7.8}$$

7.7.8. tétel. Ha Φ a (7.7.4)-beli tulajdonságokkal rendelkező függvény, akkor bármely $x, y \in \mathbb{R}$ esetén

$$\Phi^{-1}(x) = \Phi(-x) \qquad \text{és} \qquad \Phi(x+y) = \Phi(x)\Phi(y) \tag{7.7.9}$$

teljesül.

Biz. Ha tetszőleges $y \in \mathbb{R}$, ill. $\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n$ esetén

$$\boldsymbol{\mu}(x) := \Phi(x+y)\mathbf{v} \quad \text{és} \quad \boldsymbol{\nu}(x) := \Phi(x)\Phi(y)\mathbf{v} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

akkor

$$\boldsymbol{\mu}(x)' = M\Phi(x+y)\mathbf{v} = M\boldsymbol{\mu}(x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

és

$$\boldsymbol{\nu}(x)' = M\Phi(x)\Phi(y)\mathbf{v} = M\boldsymbol{\nu}(x) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ahonnan az egyértelműség felhasználásával

$$\boldsymbol{\mu}(x) = \boldsymbol{\nu}(x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

következik. Mivel $\mathbf{v}$ tetszőleges volt, ezért (7.7.9) második felét beláttuk. Legyen most $y := -x$. Ekkor a

$$\Phi(0) = E_m$$

egyenlőség is figyelembe vételével az előzőekből azt kapjuk, hogy (7.7.9) első fele is teljesül. ■

7.7.0. megjegyzés. Ha $\tau = 0$, akkor a

$$\mathbf{y}' = M\mathbf{y} + \mathbf{b} \qquad \mathbf{y}(\tau) = \boldsymbol{\xi} \tag{7.7.10}$$

kezdetiérték-feladat teljes megoldása a

$$\boxed{\boldsymbol{\varphi}(x) = \Phi(x)\boldsymbol{\xi} + \Phi(x)\int_0^x \Phi^{-1}(s)\mathbf{b}(s)\,\mathrm{d}s \qquad (x \in \mathbb{R})} \tag{7.7.11}$$

függvény, ahol Φ a (7.7.3) alatt érterlmezett mátrix értékű függvény, hiszen ekkor

$$\Phi(\tau) = \Phi(0) = E_m.$$

Ha tehát Φ a (7.7.4)-beli tulajdonságokkal rendelkező függvény, akkor a 7.7.8. tételbeli állítás következményeként azt kapjuk, hogy bármely $t, s \in \mathbb{R}$ esetén

$$\Phi(t-s)\Phi(t) = \Phi(s), \qquad \text{ill.} \qquad \Phi(t-s) = \Phi(t)\Phi^{-1}(s),$$

és így a (7.7.11) formula az alábbi alakba írható: tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\boxed{\boldsymbol{\varphi}(x) = \Phi(x)\boldsymbol{\xi} + \int_0^x \Phi(x-s)\mathbf{b}(s)\,\mathrm{d}s = \Phi(x)\boldsymbol{\xi} + \int_0^x \Phi(\sigma)\mathbf{b}(x-\sigma)\,\mathrm{d}\sigma.} \tag{7.7.12}$$

7.7.9. tétel. Ha tehát Φ a (7.7.4)-beli tulajdonságokkal rendelkező függvény, akkor a (7.7.10) kezdetiérték-feladat teljes megoldása a

$$\boxed{\boldsymbol{\varphi}(x) = \Phi(x-\tau)\boldsymbol{\xi} + \int_\tau^x \Phi(x-s)\mathbf{b}(s)\,\mathrm{d}s \qquad (x \in \mathbb{R})} \tag{7.7.13}$$

függvény.

Biz. Világos, hogy

$$\boldsymbol{\varphi}(\tau) = E_m\boldsymbol{\xi} + \mathbf{0} = \boldsymbol{\xi},$$

továbbá bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\varphi}'(x) &= \Phi'(x-\tau)\boldsymbol{\xi} + \Phi(x-x)\mathbf{b}(x)\cdot 1 + \int_\tau^x \Phi'(x-s)\mathbf{b}(s)\,\mathrm{d}s = \\
&= M\Phi(x-x)\boldsymbol{\xi} + E_m\mathbf{b}(x) + \int_\tau^x \Phi'(x-s)\mathbf{b}(s)\,\mathrm{d}s = \\
&= M\left\{\Phi(x-x)\boldsymbol{\xi} + \int_\tau^x \Phi(x-s)\mathbf{b}(x)\,\mathrm{d}x = \right\} + \mathbf{b}(x) = \\
&= M\boldsymbol{\varphi}(x) + \mathbf{b}(x).
\end{aligned}$$

Az egyértelműség következtében pedig nincsen más megoldás. ■

A fentiek alapján az (7.7.10) állandó együtthatós, lineáris kezdetiérték-feladat teljes megoldását a következőképpen állítjuk elő:

1. lépés.. Meghatározzuk M karakterisztikus polinomját és sajátértékeit.

2. lépés.. Kiszámítjuk a (7.7.5)-beli szorzatot.

3. lépés.. Megoldjuk a (7.7.6)-beli rekurzív elsőrendű lineáris differenciálegyenlet-rendszert (pl. a (7.7.8) formula felhasználásával).

4. lépés.. Képezzük a (7.7.3)-beli véges összeget.

5. lépés.. Behelyettesítünk a (7.7.13) képletbe.

7.7.8. feladat. Határozzuk meg az

$$y'' + 2y' + 2y = \cos, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \tag{7.7.14}$$

másodrendű kezdetiérték-feladat teljes megoldását!

Útm. Az

$$z_1 := y, \qquad z_2 := y'$$

változók bevezetésével (7.7.14) egyenértékű az

$$\mathbf{z}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} 0 \\ \cos \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{z}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7.7.15}$$

elsőrendű kezdetiérték-feladattal $/\mathbf{z} := [z_1, z_2]^T/$. A

$$\tau := 0, \qquad \boldsymbol{\xi} := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad M := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} := \begin{bmatrix} 0 \\ \cos \end{bmatrix}$$

szereposztással látható, hogy a (7.7.15) kezdetiérték-feladat (7.7.10) alakú. Tehát

1. lépés.. Az M mátrix sajátértékei a

$$\chi_M(z) = z^2 - \mathrm{Sp}\,(M)z + \det(M) = z^2 + 2z + 2 = (z+1) + 1 \qquad (z \in \mathbb{K})$$

karakterisztikus polinom gyökei: $\lambda := -1 + \imath$ és $\mu := -1 - \imath$.

2. lépés.. $P_0 = E_2$, valamint

$$P_1 = M - \lambda_1 E_2 = \begin{bmatrix} 1 - \imath & 1 \\ -2 & -1 - \imath \end{bmatrix}.$$

3. lépés.. Világos (vö. (7.7.8)), hogy

$$r_1(x) = e^{(-1+\imath)x} = e^{-x}(\cos(x) + \imath\sin(x)) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

így

$$r_2'(x) = (-1-\imath)r_2(x) + e^{(-1+\imath)x} \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad r_2(0) = 0,$$

ahonnan

$$r_2(x) = \frac{e^{(-1+\imath)x} - e^{(-1-\imath)x}}{2\imath} = e^{-x}\sin(x) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

4. lépés.. Így a

$$\Phi(x) := \;=\; r_1(x)E_2 + r_2(x)P_1 = e^{(-1+\imath)x}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + e^{-x}\sin(t)\begin{bmatrix} 1-\imath & 1 \\ -2 & -1-\imath \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-x}(\cos(x)+\sin(x)) & e^{-x}\sin(x) \\ -2e^{-x}\sin(x) & e^{-x}(\cos(x)-\sin(x)) \end{bmatrix} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

alapmátrixra

$$\Phi' = M\Phi \qquad \text{és} \qquad \Phi(0) = E_2$$

teljesül.

5. lépés.. A (7.7.15) kezdetiérték-feladat teljes megoldása (vö. (7.7.12)) a

$$\varphi(x) := \begin{bmatrix} e^{-x}(\cos(x)+\sin(x)) & e^{-x}\sin(x) \\ -2e^{-x}\sin(x) & e^{-x}(\cos(x)-\sin(x)) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ \int_0^x \begin{bmatrix} e^{-\sigma}(\cos(\sigma)+\sin(\sigma)) & e^{-\sigma}\sin(\sigma) \\ -2e^{-\sigma}\sin(\sigma) & e^{-\sigma}(\cos(\sigma)-\sin(\sigma)) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ \cos(x-\sigma) \end{bmatrix} \mathrm{d}\sigma =$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-x}(\cos(x)+\sin(x)) \\ -2e^{-x}\sin(t) \end{bmatrix} + \int_0^x \begin{bmatrix} e^{-\sigma}\sin(\sigma)\cos(x-\sigma) \\ e^{-\sigma}(\cos(\sigma)-\sin(\sigma))\cos(x-\sigma) \end{bmatrix} \mathrm{d}\sigma = \ldots =$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-x}(\cos(t)+\sin(x)) \\ -2e^{-x}\sin(t) \end{bmatrix} + \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -e^{-x}(3\sin(x)+\cos(x)) + \cos(x) + 2\sin(x) \\ 2e^{-x}(2\sin(x)-\cos(x)) + 2\cos(x) - \sin(x) \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2e^{-x}(\sin(t)+2\cos(x)) + \cos(x) + 2\sin(x) \\ -2e^{-x}(3\sin(x)+\cos(x)) + 2\cos(x) - \sin(x) \end{bmatrix} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény, ahonnan (7.7.14) teljes megoldása a φ első komponense:

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto \frac{2e^{-x}(\sin(x)+2\cos(x)) + \cos(x) + 2\sin(x)}{5}. \quad \blacksquare$$

7.7.0. megjegyzés. Az $m = 2$ esetben könnyen megjegyezhető formulát kaphatunk Φ-re. Ha ui.

1. M-nek két különböző valós sajátértéke van: λ, μ, akkor

$$r_1(x) = e^{\lambda x}, \qquad \text{ill.} \qquad r_2(x) = \frac{e^{\lambda x} - e^{\mu x}}{\lambda - \mu} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

így

$$\boxed{\Phi(x) = e^{\lambda x} E_2 + \frac{e^{\lambda t} - e^{\mu x}}{\lambda - \mu}(M - \lambda E_2) \qquad (x \in \mathbb{R})}; \tag{7.7.16}$$

2. M egyetlen valós sajátértéke van: λ, akkor

$$r_1(x) = e^{\lambda x}, \qquad \text{ill.} \qquad r_2(x) = x e^{\lambda x} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

így

$$\boxed{\Phi(x) = e^{\lambda x}\left\{E_2 + t\left(A - \lambda E_2\right)\right\} \qquad (x \in \mathbb{R})}; \tag{7.7.17}$$

3. M-nek komplex konjugált sajátértékpárja van: $\lambda = a + b\imath$, $\mu = a - b\imath$, akkor

$$r_1(x) = e^{\lambda x} = e^{ax}(\cos(b) + \imath \sin(bx)) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ill.

$$\begin{aligned} r_2(x) &= \frac{e^{\lambda x} - e^{\mu x}}{\lambda - \mu} = \frac{e^{ax}(\cos(b) + \imath \sin(bx)) - e^{ax}(\cos(b) - \imath \sin(bx))}{(a + b\imath) - (a - b\imath)} = \\ &= \frac{e^{ax} \sin(bx)}{b}, \end{aligned}$$

így

$$\begin{aligned} \boxed{\Phi(x)} &= e^{ax}(\cos(b) + \imath \sin(bx))E_2 + \frac{e^{ax}\sin(bx)}{b}(M - (a + b\imath)E_2) = \\ &= \boxed{e^{ax}\left\{\cos(bx)E_2 + \frac{\sin(bx)}{b}(M - aE_2)\right\} \qquad (x \in \mathbb{R})}. \end{aligned} \tag{7.7.18}$$

Ezért (7.7.17) a $\lambda \to \mu$ határeseteként (7.7.16) következménye, (7.7.18)-ot pedig $\overline{\lambda} = \mu$ figyelembe vételével kapjuk (7.7.16)-ből.

7.7.9. feladat. Oldjuk meg az

$$\left.\begin{array}{rcl} x'(t) & = & -y(t)+\sin(t), \\ y'(t) & = & x(t)-\cos(t) \end{array}\right\} \quad (t\in\mathbb{R}), \qquad \left.\begin{array}{rcl} x(0) & = & 1, \\ y(0) & = & 0 \end{array}\right\} \tag{7.7.19}$$

kezdetiérték-feladatot!

Útm. A

$$\tau := 0, \qquad \boldsymbol{\xi} := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad M := \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} := \begin{bmatrix} \sin \\ -\cos \end{bmatrix}$$

szereposztással látható, hogy a (7.7.15) kezdetiérték-feladat (7.7.10) alakú $/\mathbf{x} := [x,y]^T/$. Az M mátrix sajátértékei a

$$\chi_M(z) = z^2+1 \qquad (z\in\mathbb{K})$$

karakterisztikus polinom: $\lambda := \imath$ és $\mu := -\imath$. Így (vö. (7.7.18)) a

$$\Phi(t) := \cos(t)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \sin(t)\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix}$$

alapmátrixra

$$\Phi' = M\Phi \qquad \text{és} \qquad \Phi(0) = E_2$$

teljesül. A szóban forgó kezdetiérték-feladat teljes megoldása tehát a

$$\begin{aligned} \varphi(t) \quad &:= \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} \cos(\sigma) & -\sin(\sigma) \\ \sin(\sigma) & \cos(\sigma) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sin(t-\sigma) \\ -\cos(t-\sigma) \end{bmatrix} \mathrm{d}\sigma = \\ &= \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} \cos(\sigma)\sin(t-\sigma)+\sin(\sigma)\cos(t-\sigma) \\ \sin(\sigma)\sin(t-\sigma)-\cos(\sigma)\cos(t-\sigma) \end{bmatrix} \mathrm{d}\sigma = \ldots = \\ &= \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix} \mathrm{d}\sigma = \begin{bmatrix} \cos(t)+t\sin(t) \\ \sin(t)-t\cos(t) \end{bmatrix} \qquad (t\in\mathbb{R}) \end{aligned}$$

függvény (vö. (7.7.12)). ■

7.7.10. feladat. Határozzuk meg az

$$y_1'(x) = -y_1'(x), \quad y_2'(x) = y_1(x)-y_2(x), \quad y_3'(x) = y_2(x)+e^{-x} \qquad (x\in\mathbb{R})$$

rendszer $(y_1(0), y_2(0), y_3(0)) = (-1{,}0{,}0)$ kezdeti feltételt kielégítő μ megoldását!

Útm. Látható, hogy a rendszer

$$\mathbf{y}' = M\mathbf{y} + \mathbf{b}$$

alakú, ahol

$$M := \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b}(t) := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{-x} \end{bmatrix} \qquad (x\in\mathbb{R}).$$

Az M mátrix karakterisztikus polinomja

$$\chi_M(z) := z^3 + 2z^2 + z = z(z^2 + 2z + 1) = z(z+1)^2 \qquad (z \in \mathbb{K}),$$

így $\sigma(M) = \{0; -1\}$. Mivel

$$P_0 = E_3, \qquad P_1 = (M - 0 \cdot E_3) = M, \qquad P_2 = M(M + 1 \cdot E_3),$$

továbbá

$$r_1(x) = 1, \quad r_2(x) = 1 - e^{-x}, \quad r_3(x) = 1 - e^{-x} - xe^{-x} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Ezért a rendszer $\Phi(0) = E_3$ feltételnek eleget tévő alapmátrixa:

$$\begin{aligned}
\Phi(t) &= r_1 P_0 + r_2 P_1 + r_3 P_2 = \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + (1 - e^{-x}) \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + (1 - e^{-x} - xe^{-x}) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} e^{-x} & 0 & 0 \\ xe^{-x} & e^{-x} & 0 \\ 1 - e^{-x} - xe^{-x} & 1 - e^{-t} & 1 \end{bmatrix} \qquad (x \in \mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Ennélfogva a μ megoldás az alábbi alakú:

$$\begin{aligned}
\mu(x) &= \Phi(t) \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{bmatrix} + \int_0^x \Phi(x - s)\mathbf{b}(s)\,\mathrm{d}s = \begin{bmatrix} e^{-x} & 0 & 0 \\ xe^{-x} & e^{-x} & 0 \\ 1 - e^{-x} - xe^{-x} & 1 - e^{-x} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&\quad + \int_0^x \begin{bmatrix} e^{s-x} & 0 & 0 \\ (x-s)e^{s-x} & e^{s-x} & 0 \\ 1 - e^{s-x} - (x-s)e^{s-x} & 1 - e^{s-x} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{-s} \end{bmatrix} \mathrm{d}s = \\
&= \begin{bmatrix} -e^{-x} \\ -xe^{-x} \\ -1 + e^{-x} + xe^{-x} \end{bmatrix} + \int_0^x \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{-s} \end{bmatrix} \mathrm{d}s = \begin{bmatrix} -e^{-x} \\ -xe^{-x} \\ xe^{-x} \end{bmatrix} \qquad (x \in \mathbb{R}). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

7.7.11. feladat. Modellezzük Rómeó és Júlia szerelmének változását az idő függvényében, feltételezve persze, hogy – Shakespeare drámájával ellentétben – tragikus haláluk nem következik be!

Útm. Jelölje $R(t)$ Rómeó Júlia iránti érzelmeit a t időpontban, illetve $J(t)$ Júlia érzelmeit Rómeó iránt ($t \in [0, +\infty)$). Természetesen ezek pozitív értéke szerelmet, zérus értéke semlegességet, negatív értéke „nem szeretést” jelent. Az alábbi három esetben arra keressük a választ, hogy miként lehet leírni Rómeó és Júlia kapcsolatának változását.

Elsőként tekintsük a következő (nem túl ideális) esetet. Rómeó nehéz természetű: amikor Júlia szereti őt, akkor Rómeó kezdi kevésbé szeretni Júliát, ha viszont Júlia kevésbé érdeklődik iránta, akkor Rómeó egyre jobban kezdi szeretni Júliát. Júlia viselkedése ennél érthetőbb: ha Rómeó szereti Júliát, akkor Júlia egyre szerelmesebb lesz Rómeóba, de kezd barátságtalanabb lenni, ha Rómeó nem szereti őt. A szituációt leíró differenciálegyenlet-rendszer a következő:

$$\dot{R} = -aJ, \qquad \dot{J} = bR, \tag{7.7.20}$$

ahol $a, b > 0$ az adott körülmények alapján meghatározható paraméterek.

Az előző esetből tanulva, Júlia változtat a hozzáállásán, és csökkenti az érzelmi reakcióit. A modellben ez azt jelenti, hogy a második egyenlet jobb oldala még egy cJ-s taggal is kibővül, ahol $c < 0$ az adott körülmények alapján meghatározható paraméter. Például

$$\dot{R} = -0.2J, \qquad \dot{J} = 0.8R - 0.1J. \tag{7.7.21}$$

A harmadik esetben Rómeó jobban el tudja fogadni Júlia szerelmét, azaz csak akkor csökken Júlia iránti szerelme, ha Júliáé nagyon erős (például $J > 2$), Júlia pedig kontrollálja érzelmeit úgy, hogy csak akkor nőjön a Rómeó iránti szerelme, ha Rómeóé nagyon erős (például $R > 2$). Ekkor a következő rendszert kapjuk:

$$\dot{R} = -0.2(J-2), \qquad \dot{J} = 0.8(R-2). \tag{7.7.22}$$

Az első esetben az

$$(R, J) : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^2$$

függvény az

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -a \\ b & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{7.7.23}$$

elsőrendű lineáris differenciálegyenlet-rendszer megoldása (vö. (7.7.20)). Ekkor

$$\begin{bmatrix} R(t) \\ J(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\sqrt{ab}t) & \dfrac{-a\sin(\sqrt{ab}t)}{\sqrt{ab}} \\ \dfrac{b\sin(\sqrt{ab}t)}{\sqrt{ab}} & \cos(\sqrt{ab}t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} \qquad (t \in [0, +\infty)).$$

Az

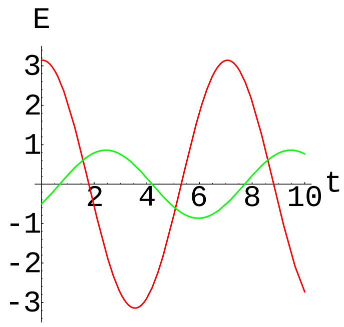
$$x(0) = 0, \qquad y(0) = 0$$

kezdeti feltételek teljesülése esetén

$$R(t) = J(t) = 0 \qquad (t \in [0, +\infty)),$$

azaz Rómeó és Júlia végig közömbösek egymás iránt. Ha viszont

$$a := 0.2, \quad b := 0.4, \qquad x(0) := 3.14, \quad y(0) := -0.5,$$

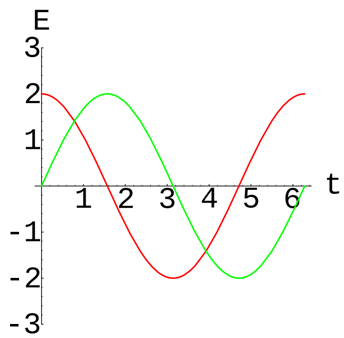


7.7.1. ábra. Rómeó és Júlia érzelmei a $b := 2a := 0.4$, $x(0) := 3.14$, $y(0) := -0.5$ esetben.

akkor Rómeó és Júlia érzelmeinek alakulása a 7.7.1. ábrán látható ($E \in \{R, J\}$).
Az $a = b = 1$ esetben, ill. az $x(0) = 2$, $y(0) = 0$ kezdeti feltételek (Rómeó első látásra vonzódott Júliához, Júlia pedig semleges volt) teljesülése esetén pedig

$$\begin{bmatrix} R(t) \\ J(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cos(t) \\ 2\sin(t) \end{bmatrix} \qquad (t \in [0, +\infty))$$

(vö. 7.7.2. ábra). Ha pedig kezdetben mindkettőjük egyformán szimpatikus volt egymásnak,



7.7.2. ábra. Rómeó és Júlia érzelmei az $a = b = 1$, $x(0) = 2$, $y(0) = 0$ esetben.

azaz pl.

$$x(0) = \frac{\sqrt{2}}{2} = y(0),$$

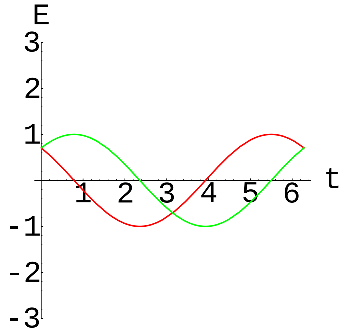
akkor ($a =: b := 1$ esetén)

$$R(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos(t) - \sin(t)) = \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \qquad (t \in [0, +\infty)),$$

ill.

$$J(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin(t) + \cos(t)) = \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \qquad (t \in [0, +\infty)).$$

A 7.7.3. ábrán az ismerettségüket a $[0{,}2\pi]$ intervallumra korlátoztuk. Jól látszik, hogy a $[0, \pi/4)$ és a $(7\pi/4{,}2\pi]$ intervallumon Rómeó és Júlia szereti egymást, egyébként pedig valamelyikük nem szereti a másikat.

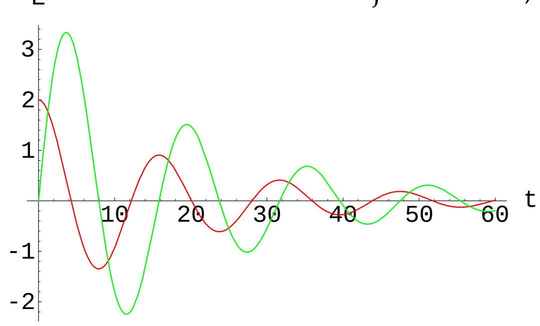


7.7.3. ábra. Rómeó és Júlia érzelmei az $a = b = 1$, $x(0) = 1 = y(0)$ esetben.

A második esetben a (7.7.21) rendszer

$$x(0) = 2, \qquad y(0) = 0$$

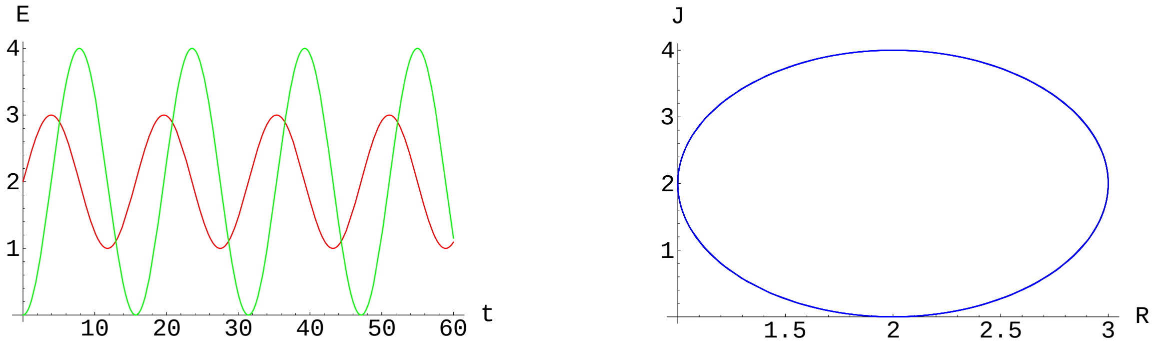
kezdeti feltételeket kielégítő megoldását az 7.7.4. ábrán szemléltetjük. Látható, hogy ez az egész



7.7.4. ábra. Rómeó és Júlia érzelmei az $a = b = 1$, $x(0) = 2$, $y(0) = 0$ esetben.

szerelmi életükre negatív hatással lesz.

A harmadik esetben (7.7.22) ideális állapotot kaptunk, mint ahogy azt a 7.7.5. ábra is mutatja. ■



7.7.5. ábra. Rómeó és Júlia érzelmei az ideális esetben.

7.8. Másodrendű lineáris differenciálegyenletek

Adott $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, $p, q, f : I \to \mathbb{R}$ folytonos függvények esetén tekintsük a következő feladatot.
Határozzunk meg olyan $\varphi : I \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvényt, amelyre

$$\varphi'' + p\varphi' + q\varphi = f$$

teljesül!

7.8.1. definíció. Az imént megfogalmazott feladatot **másodrendű lineáris differenciálegyenlet**nek nevezzük, és az

$$y'' + py' + qy = f \tag{7.8.1}$$

szimbólummal jelöljük.

Ha

$$f(x) = 0 \qquad (x \in I),$$

akkor **homogén egyenlet**ről beszélünk:

$$y'' + py' + qy = 0. \tag{7.8.2}$$

Mivel a (7.8.1) differenciálegyenlettel egyenértékű elsőrendű rendszer

$$\mathbf{z}' = A\mathbf{z} + \mathbf{b} \tag{7.8.3}$$

alakú, ahol

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -q & -p \end{bmatrix}, \qquad \text{ill.} \qquad \mathbf{b} := \begin{bmatrix} 0 \\ f \end{bmatrix},$$

ezért a (7.8.1) egyenletre vonatkozó kezdetiérték-feladat egyértelműen megoldható. A fenti átírás úgy történik, hogy

$$z_1 := y, \qquad \text{ill.} \qquad z_2 := y',$$

ezért a (7.8.1)-re vonatkozó kezdeti feltétel alkalmas $\tau \in I$, ill. $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$ esetén

$$y(\tau) = \xi_1, \qquad y'(\tau) = \xi_2$$

alakú.

7.8.2. definíció. Azt mondjuk, hogy $\{\mu, \nu\}$ a (7.8.2) homogén egyenlet egy **alaprendszere**, ha

$$W := \begin{bmatrix} \mu & \nu \\ \mu' & \nu' \end{bmatrix} : I \to \mathbb{R}^{2\times 2}$$

(**Wronszki-mátrix**) alapmátrixa (7.8.3) homogén részének.

Ez azt jelenti, hogy μ, ill. ν megoldása (7.8.2)-nek és alkalmas $\tau \in I$ esetén

$$\det W(\tau) = \mu(\tau)\nu'(\tau) - \nu(\tau)\mu'(\tau) \neq 0 \tag{7.8.4}$$

teljesül.

7.8.1. feladat. Igazoljuk, hogy a

$$\mu(x) := \sqrt{x}, \qquad \nu(x) := \frac{1}{x} \qquad (x \in (0, +\infty))$$

függvények az

$$y''(x) + \frac{3}{2x} y'(x) - \frac{1}{2x^2} y(x) = 0 \qquad (x \in (0, +\infty))$$

homogén másodrendű lineáris d.e. alaprendszerét alkotják!

Útm. μ és ν lineárisan független megoldásai a d.e.-nek, hiszen

$$\det \begin{bmatrix} \sqrt{x} & 1/2\sqrt{x} \\ 1/x & -1/x^2 \end{bmatrix}^T = -\frac{\sqrt{x}}{x^2} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} = -\frac{2x + x}{2x^2\sqrt{t}} = -\frac{3}{2x\sqrt{x}} \neq 0 \qquad (x \in (0, +\infty))$$

és tetszőleges $x \in (0, +\infty)$ esetén

$$\left(-\frac{1}{4x\sqrt{x}}\right) + \frac{3}{2x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x^2}\sqrt{x} = 0,$$

ill.

$$\frac{2}{x^3} + \frac{3}{2x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{2x^3} = 0. \quad \blacksquare$$

7.8.2. feladat. Igazoljuk, hogy a

$$\mu(x) := x, \quad \nu(x) := x^2 - 1 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvények az

$$y''(x) - \frac{2x}{x^2+1} y'(x) + \frac{2}{x^2+1} y(x) = 0 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

homogén másodrendű lineáris d.e. alaprendszerét alkotják!

Útm. μ és ν lineárisan független megoldásai a d.e.-nek, hiszen

$$\det \begin{bmatrix} x & 1 \\ x^2 - 1 & 2x \end{bmatrix}^T = 2x^2 - x^2 + 1 = x^2 + 1 \neq 0 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

és tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$0 - \frac{2x}{x^2+1} + \frac{2}{x^2+1} \cdot x = 0,$$

ill.

$$2 - \frac{2x}{x^2+1} \cdot 2x + \frac{2}{x^2+1} \cdot (x^2 - 1) = \frac{2x^2 + 2 - 4x^2 + 2x^2 - 2}{x^2+1} = 0. \quad \blacksquare$$

7.8.1. tétel. Ha μ és ν megoldása a (7.8.2) homogén egyenletnek, továbbá

$$\omega := \det W = \mu\nu' - \nu\mu',$$

akkor

$$\boxed{\omega' + p\omega = 0}\,.$$

Biz.

$$\begin{aligned}\omega' &= (\mu\nu' - \nu\mu')' = \mu'\nu' + \mu\nu'' - \nu'\mu' - \nu\mu'' = \mu\nu'' - \nu\mu'' = \\ &= \mu\left(-p\nu' - q\nu\right) - \nu\left(-p\mu' - q\mu\right) = -p\left(\mu\nu' - \mu'\nu\right) - q\left(\mu\nu - \mu\nu\right) = \\ &= -p\omega. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

A

$$\omega = \mu\nu' - \nu\mu'$$

összefüggésből $\mu \neq 0$ esetén

$$\nu' = \frac{\mu'}{\mu} \cdot \nu + \frac{\omega}{\mu}$$

következik. Tehát a (7.8.2) homogén lineáris másodrendű egyenlet $\{\mu, \nu\}$ alaprendszerének meghatározása a következő módon történik:

1. lépés.. Valahonnan szert teszünk a μ megoldás ismeretére (sok esetben igen könnyű kitalálni).

2. lépés.. Valamely

$$\tau \in I \subset \mathcal{D}_y : \qquad \mu(\tau) \neq 0, \qquad \xi \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

esetén kiszámítjuk w-t a

$$\omega' + p\omega = 0, \quad \omega(\tau) = \xi$$

összefüggésből:

$$\omega(x) = \xi \exp\left(\int_\tau^x -p(s)\,ds\right) \qquad (x \in I).$$

3. lépés.. Kiszámítjuk ν-t a

$$\nu'(x) \equiv \frac{\mu'(x)}{\mu(x)} \cdot \nu(x) + \frac{\omega(x)}{\varphi(x)}$$

összefüggésből.

7.8.3. feladat. Határozzuk meg az

$$(x^2+1)y''(x) - 2y(x) = 0 \qquad (x \in \mathcal{D}_y)$$

egyenlet egy alaprendszerét!

Útm. Vegyük észre, hogy

$$\mu(x) = x^2 + 1 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

megoldás, és

$$p(x) = 0, \quad q(x) = -\frac{2}{x^2+1} \quad (x \in \mathbb{R}) \quad \text{továbbá legyen} \quad \tau := 0, \quad \xi := 1.$$

Ekkor

$$\omega(x) = 1 \cdot \exp\left(\int_0^x -0\, ds\right) = 1 \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

így

$$\nu'(x) = \frac{2x}{x^2+1} \cdot \nu(x) + \frac{1}{x^2+1} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Ha pl. $\nu(0) = 0$, akkor

$$\begin{aligned}
\nu(x) &= \left(0 + \int_0^x \frac{1}{s^2+1} \exp\left(-\int_0^s \frac{2u}{u^2+1}\, du\right) ds\right) \exp\left(\int_0^x \frac{2s}{s^2+1}\, ds\right) = \\
&= (x^2+1) \cdot \int_0^x \frac{1}{(s^2+1)^2}\, ds = (x^2+1) \cdot \int_0^x \frac{1+s^2-s^2}{(s^2+1)^2}\, ds = \\
&= (x^2+1) \cdot \int_0^x \left(\frac{1}{s^2+1} - \frac{s}{2} \cdot \frac{2s}{(s^2+1)^2}\right) ds = \\
&= (x^2+1) \cdot \left\{\operatorname{arctg}(x) + \left[\frac{s}{2} \cdot \frac{1}{s^2+1}\right]_0^x - \frac{1}{2} \cdot \int_0^x \frac{1}{s^2+1}\, ds\right\} = \\
&= \frac{1}{2}\left(x + (x^2+1) \cdot \operatorname{arctg}(x)\right) \qquad (x \in \mathbb{R}). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

7.8.4. feladat. Mutassuk meg, hogy ha a 7.8.1. definíció előtti feltételek mellett még $p \in \mathfrak{C}^1$ is teljesül és $\tau \in I$, továbbá valamely

$$\varphi : I \to \mathbb{R}, \qquad \varphi \in \mathfrak{C}^2$$

függvény esetén

$$\psi(x) := \varphi(x) \cdot \exp\left(\frac{1}{2}\int_\tau^x p(s)\,\mathrm{d}s\right) \qquad (x \in I)$$

úgy φ pontosan akkor megoldása a (7.8.2) homogén egyenletnek, ha az

$$A := q - \frac{p^2}{4} - \frac{p'}{2}$$

függvénnyel

$$\psi'' + A\psi = 0$$

teljesül!

Útm. Mivel az

$$I \ni x \mapsto \exp\left(\frac{1}{2}\int_\tau^x p(s)\,\mathrm{d}s\right)$$

függvény kétszer folytonosan differenciálható, ezért

$$\psi \in \mathfrak{C}^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \varphi \in \mathfrak{C}^2.$$

Ha

$$P(x) := \exp\left(-\frac{1}{2}\int_\tau^x p(s)\,\mathrm{d}s\right) \qquad (x \in I),$$

akkor

$$P'(x) = -\frac{1}{2}p(x)P(x) \qquad (x \in I),$$

így tetszőleges $x \in I$ esetén

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= P(x)\psi(x), \\
\varphi'(x) &= P(x)\left\{-\frac{1}{2}p(x)\psi(x) + \psi'(x)\right\}, \\
\varphi''(x) &= P(x)\left\{\psi''(x) - p(x)\psi'(x) + \left(\frac{p^2(x)}{4} - \frac{p'(x)}{2}\right)\psi(x)\right\}.
\end{aligned}$$

Innen pedig az következik, hogy bármely $x \in I$ esetén

$$\begin{aligned}
\varphi''(x) + p(x)\varphi'(x) + q(x)\varphi(x) &= P(x)\left\{\psi''(x) - p(x)\psi'(x) + \left(\frac{p^2(x)}{4} - \frac{p'(x)}{2}\right)\psi(x) - \right. \\
&\quad \left. -\frac{1}{2}p^2(x)\psi(x) + p(x)\psi'(x) + q(x)\psi(x)\right\} \\
&= P(x)\left\{\psi''(x) + \left(q(x) - \frac{p^2(x)}{4} - \frac{p'(x)}{2}\right)\psi(x)\right\}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Ha p, q állandófüggvény, azaz alkalmas $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén

$$p(x) = \alpha, \quad q(x) = \beta \qquad (x \in I),$$

akkor a korábbiakban (a lineáris differenciálegyenlet-rendszereknél) bemutatott eljárás alapján a (7.8.2) megoldáshalmazának meghatározása a következő módon történik:

1. lépés.. Meghatározzuk (7.8.2) egy alaprendszerét, azaz a (7.8.3)-hoz tartozó homogén rendszer egy alapmátrixát. A

$$p(z) = z^2 + \alpha z + \beta \qquad (z \in \mathbb{C})$$

karakterisztikus polinom gyökeit illetően három eset lehetséges:

1. $\alpha^2 > 4\beta$, azaz két különböző valós gyök van:

$$\lambda_- = \frac{-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2}, \qquad \lambda_+ = \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2},$$

és

$$\mu(x) := e^{\lambda_- x}, \quad \nu(x) := e^{\lambda_+ x} \qquad (x \in I)$$

alaprendszer, hiszen mindkettő megoldás, és teljesül rájuk (7.9.4).

2. $\alpha^2 = 4\beta$, azaz egyetlen valós gyök van:

$$\lambda = -\frac{\alpha}{2}, \qquad \text{és} \qquad \operatorname{rang}\begin{bmatrix} \alpha/2 & 1 \\ -\alpha^2/4 & -\alpha/2 \end{bmatrix} = 1,$$

így

$$\mu(x) := e^{\lambda x}, \quad \nu(x) := xe^{\lambda x} \qquad (x \in I)$$

alaprendszer, hiszen mindkettő megoldás, és teljesül rájuk (7.9.4).

3. $\alpha^2 < 4\beta$, azaz egy konjugált komplex gyökpár van:

$$\lambda_- = \frac{-\alpha - \sqrt{4\beta - \alpha^2}\imath}{2}, \qquad \lambda_+ = \frac{-\alpha + \sqrt{4\beta - \alpha^2}\imath}{2},$$

és

$$\mu(x) := e^{-\alpha x/2}\cos\left(\sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}}x\right), \quad \nu(x) := e^{-\alpha x/2}\sin\left(\sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}}x\right) \quad (x \in I)$$

alaprendszer, hiszen mindkettő megoldás, és teljesül rájuk (7.9.4).

2. lépés.. Olyan differenciálható $\mathbf{g} : I \to \mathbb{R}^2$ függvényt keresünk, amelyre

$$\begin{bmatrix} \mu & \nu \\ \mu' & \nu' \end{bmatrix} \mathbf{g}' = \begin{bmatrix} 0 \\ f \end{bmatrix},$$

azaz

$$\mathbf{g}' = \begin{bmatrix} \mu & \nu \\ \mu' & \nu' \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ f \end{bmatrix} = \frac{1}{\mu\nu' - \mu'\nu} \cdot \begin{bmatrix} \nu' & -\nu \\ -\mu' & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ f \end{bmatrix} = \frac{1}{\mu\nu' - \mu'\nu} \cdot \begin{bmatrix} -\nu f \\ \mu f \end{bmatrix}.$$

3. lépés.. Mivel tetszőleges $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$ esetén

$$W\mathbf{c} + W\mathbf{g} = \begin{bmatrix} \mu c_1 + \nu c_2 + \mu g_1 + \nu g_2 \\ \ldots \end{bmatrix},$$

ezért a (7.8.1) inhomogén egyenlet megoldáshalmaza

$$\mathcal{M}_{(7.8.1)} = \{c_1\mu + c_2\nu + \mu g_1 + \nu g_2 : \; c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}. \quad \blacksquare$$

7.8.5. feladat. Írjuk fel az

$$y'' + 4y' + 3y = \sin \circ \exp$$

differenciálegyenlet megoldáshalmazát!

Útm.

1. lépés.. A homogén egyenlethez tartozó

$$p(z) := z^2 + 4z + 3 = (z+1)(z+3) \qquad (z \in \mathbb{C})$$

karakterisztikus polinom gyökei: $-1, -3$, így homogén egyenlet egy alaprendszere:

$$\left\{\mathbb{R} \ni x \mapsto e^{-x}, \mathbb{R} \ni x \mapsto e^{-3x}\right\}.$$

2. lépés.. Olyan differenciálható

$$\mathbf{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$

függvényt keresünk, amelyre tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\mathbf{g}'(x) = \begin{bmatrix} g_1'(x) \\ g_2'(x) \end{bmatrix} = \frac{1}{-3e^{-x}e^{-3x} + e^{-x}e^{-3x}} \cdot \begin{bmatrix} -e^{-3x}\sin(e^x) \\ e^{-x}\sin(e^x) \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^x \sin(e^x) \\ -e^{3x}\sin(e^x) \end{bmatrix},$$

azaz

$$g_1 \in \int \frac{e^x \sin(e^x)}{2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2}\cos(e^x)\right]_{x\in\mathbb{R}}$$

és

$$\begin{aligned} g_2 \in \int \left(-\frac{1}{2}e^{3x}\sin(e^x)\right)\mathrm{d}x &= -\frac{1}{2}\int u^2 \sin(u)\,\mathrm{d}u\Big|_{u=e^x} = \\ &= -\frac{1}{2}\left\{-u^2\cos(u) + \int 2u\cos(u)\,\mathrm{d}u\right\}_{u=e^x} = \\ &= \frac{1}{2}\left\{u^2\cos(u) - 2u\sin(u) + \int 2\sin(u)\,\mathrm{d}u\right\}_{u=e^x} = \\ &= \left[\frac{e^{2x}\cos(e^x)}{2} - e^x\sin(e^x) - \cos(e^x)\right]_{x\in\mathbb{R}}. \end{aligned}$$

3. lépés.. Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása tehát

$$\chi(x) := -e^{-2x}\sin(e^x) - e^{-3x}\cos(e^x) \quad (x \in \mathbb{R}),$$

ill. az inhomogén egyenlet megoldáshalmaza

$$\mathcal{M} = \left\{\mathbb{R} \ni x \mapsto c_1 e^{-x} + (c_2 - \cos(e^x))e^{-3x} - e^{-2x}\sin(e^x) :\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}\right\}. \quad \blacksquare$$

7.8.1. gyakorló feladat. Írjuk fel az

$$y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = \frac{e^{2x}}{1+e^x} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

differenciálegyenlet megoldáshalmazát!

Útm.

7.8.2. gyakorló feladat. Oldjuk meg az alábbi kezdetiérték-feladatot! Oldjuk meg az

$$y'' + y = \frac{1}{\cos}, \qquad y(0) = 0 = y'(0)$$

kezdetiérték-feladatot!

Útm.

Sok esetben χ alakja megsejthető, ha a b jobb oldal speciális alakú. Erre vonatkozik a

7.8.2. tétel. Ha

1. a jobb oldal
$$f(x) = P(x)e^{\lambda x} \qquad (x \in I)$$
alakú, ahol P polinom, akkor a (7.8.1) inhomogén egyenletnek van
$$\chi(x) := x^m Q(x) e^{\lambda x} \quad (x \in I)$$
alakú megoldása, ahol λ m-szeres gyöke a p karakterisztikus polinomnak ($m \in \{0,1,2\}$), Q pedig olyan polinom, melynek fokszáma megegyezik P fokszámával, így a (7.8.1) inhomogén egyenlet megoldáshalmaza
$$\mathcal{M}_{(7.8.1)} = \{c_1\mu + c_2\nu + \chi : \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}\,.$$

2. a jobb oldal
$$f(x) = e^{\omega_1 x}(P_1(x)\cos(\omega_2 x) + P_2(x)\sin(\omega_2 x)) \qquad (x \in I)$$
alakú, ahol P_1, P_2 legfeljebb másodfokú polinomok, $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}$, akkor a (7.8.1) inhomogén egyenletnek van
$$\chi(x) := x^m e^{\omega_1 x}\left\{Q_1(x)\cos(\omega_2 x) + Q_2(x)\sin(\omega_2 x)\right\} \quad (x \in I)$$
alakú megoldása, ahol $\omega_1 + \omega_2\imath$ m-szeres gyöke a p karakterisztikus polinomnak ($m \in \{0,1\}$), Q_1, Q_2 pedig legfeljebb másodfokú polinomok, így a (7.8.1) inhomogén egyenlet megoldáshalmaza
$$\mathcal{M}_{(7.8.1)} = \{c_1\mu + c_2\nu + \chi : \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}\,.$$

Biz. ■

7.8.0. megjegyzés.

1. A 7.8.2. tételt úgy alkalmazzuk, hogy a Q, ill. a Q_1 és a Q_2 polinomokat határozatlan együtthatókkal vesszük fel és az együtthatókat a differenciálegyenletbe való behelyettesítés útján határozzuk meg.
2. Ha az f inhomogenitás két vagy több függvény összege, akkor a χ partikuláris megoldás az összeg minden tagjának külön-külön képzett inhomogén egyenletek partikuláris megoldásának összege.

7.8.6. feladat. Oldjuk meg az alábbi kezdetiérték-feladatokat!

1. $y''(x) + 6y'(x) + 9y(x) = 2e^{-3x}$ $(x \in \mathbb{R})$, $y(0) = 0 = y'(0)$;
2. $y''(x) + 4y(x) = \cos(2x)$ $(x \in \mathbb{R})$, $y(0) = 0 = y'(0)$;
3. $y''(x) - 2y'(x) = 3x + e^{4x}$ $(x \in \mathbb{R})$, $y(0) = 0 = y'(0)$.

Útm.

1. **1. lépés.**. A homogén egyenlethez tartozó

$$p(z) := z^2 + 6z + 9 \qquad (z \in \mathbb{C})$$

karakterisztikus polinom egyetlen gyöke: -3, így homogén egyenlet egy alaprendszere:

$$\left\{\mathbb{R} \ni x \mapsto e^{-3x}, \mathbb{R} \ni x \mapsto xe^{-3x}\right\},$$

megoldáshalmaza pedig

$$\mathcal{M}_H = \left\{\mathbb{R} \ni x \mapsto \alpha e^{-3x} + \beta xe^{-3x} : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\}.$$

2. lépés.. Az inhomogén egyenlet egy megoldását a

$$\chi(x) := Ax^2e^{-3x} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

alakban érdemes keresni. Ezt az inhomogén egyenletbe helyettesítve azt kapjuk, hogy $A = 1$.

3. lépés. Az inhomogén egyenlet megoldáshalmaza tehát

$$\mathcal{M}_{IH} = \left\{\mathbb{R} \ni x \mapsto \alpha e^{-3x} + \beta xe^{-3x} + x^2e^{-3x} : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\}.$$

Ha a φ függvény a kezdetiérték-feladat megoldása, akkor

$$0 = \varphi(0) = \alpha \qquad \text{és} \qquad 0 = \varphi'(0) = -3\alpha + \beta$$

így

$$\alpha = \beta = 0,$$

azaz a teljes megoldás

$$\varphi(x) = x^2e^{-3x} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

2. **1. lépés.**. A homogén egyenlethez tartozó

$$p(z) := z^2 + 4 \qquad (z \in \mathbb{C})$$

karakterisztikus polinom gyökei: $2\imath$, $-2\imath$, így homogén egyenlet egy alaprendszere:

$$\{\mathbb{R} \ni x \mapsto \cos(2x), \mathbb{R} \ni x \mapsto \sin(2x)\},$$

megoldáshalmaza pedig

$$\mathcal{M}_H = \{\mathbb{R} \ni x \mapsto \alpha\cos(2x) + \beta\sin(2x) : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

2. lépés.. Az inhomogén egyenlet egy megoldását a

$$\chi(x) := Ax\cos(2x) + Bx\sin(2x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

alakban érdemes keresni. Ezt az inhomogén egyenletbe helyettesítve azt kapjuk, hogy

$$A = 0 \qquad \text{és} \qquad B = \frac{1}{4}.$$

3. lépés. Az inhomogén egyenlet megoldáshalmaza tehát

$$\mathcal{M}_{IH} = \left\{ \mathbb{R} \ni x \mapsto \alpha\cos(2x) + \beta\sin(2x) + \frac{x}{4}\sin(2x) : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

Ha a φ függvény a kezdetiérték-feladat megoldása, akkor

$$0 = \varphi(0) = \alpha \qquad \text{és} \qquad 0 = \varphi'(0) = 2\beta,$$

így

$$\alpha = \beta = 0,$$

azaz a teljes megoldás

$$\varphi(x) = \frac{x}{4}\sin(2x) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

3. **1. lépés.**. A homogén egyenlethez tartozó

$$p(z) := z^2 - 2z \qquad (z \in \mathbb{C})$$

karakterisztikus polinom gyökei: 0, 2, így homogén egyenlet egy alaprendszere:

$$\left\{ \mathbb{R} \ni x \mapsto \alpha, \mathbb{R} \ni x \mapsto e^{2x} \right\},$$

megoldáshalmaza pedig

$$\mathcal{M}_H = \left\{ \mathbb{R} \ni x \mapsto \alpha + \beta e^{2x} : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

2. lépés.. Az inhomogén egyenlet egy megoldását a

$$\chi(x) := x(Ax + B) + Ce^{4x} = Ax^2 + Bx + Ce^{4x} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

alakban érdemes keresni, hiszen

$$2x = 2x \cdot e^{0 \cdot x} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Ezt az inhomogén egyenletbe helyettesítve azt kapjuk, hogy

$$A = -\frac{3}{4}, \qquad B = -\frac{3}{4} \qquad \text{és} \qquad C = \frac{1}{8}.$$

3. lépés. Az inhomogén egyenlet megoldáshalmaza tehát

$$\mathcal{M}_{IH} = \left\{ \mathbb{R} \ni x \mapsto \alpha + \beta e^{2x} - \frac{3x^2}{4} - \frac{3x}{4} - \frac{e^{4x}}{8} : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ha a φ függvény a kezdetiérték-feladat megoldása, akkor

$$0 = \varphi(0) = \alpha + \beta - \frac{1}{8} \qquad \text{és} \qquad 0 = \varphi'(0) = 2\beta - \frac{3}{4} - \frac{1}{2},$$

így

$$\alpha = -\frac{1}{2}, \qquad \beta = \frac{5}{8},$$

azaz a teljes megoldás

$$\varphi(x) = \frac{-4 + 5e^{2x} - 6x^2 - 6x - e^{4x}}{8} \qquad (x \in \mathbb{R}). \quad \blacksquare$$

7.8.3. gyakorló feladat. Oldjuk meg az alábbi kezdetiérték-feladatokat!

1. $y'' + 5y' + 4y = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -9$;
2. $y'' + 4y' + 4y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$;
3. $y'' - 2y' + 4y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$;
4. $y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = x^2 e^x$ $(x \in \mathbb{R})$, $y(0) = 0 = y'(0)$;
5. $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 2$ $(x \in \mathbb{R})$, $y(0) = 0 = y'(0)$;
6. $y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = x^2 + 2$ $(x \in \mathbb{R})$, $y(0) = 0 = y'(0)$;
7. $y''(x) - y(x) = e^{-x}$ $(x \in \mathbb{R})$, $y(0) = 0 = y'(0)$;
8. $y'' - 2y' - 5y = 3x^2 e^x$ $(x \in \mathbb{R})$, $y(0) = \frac{5}{8}$, $y'(0) = -\frac{11}{8}$;
9. $y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = 4e^{2x} + 2$ $(x \in \mathbb{R})$, $y(0) = 5$, $y'(0) = 15$;
10. $y''(x) + 16y'(x) + 1600 = 70\cos(x)$ $(x \in \mathbb{R})$, $y(0) = 0.05$, $y'(0) = 0.01$;
11. $may''(x) + 4kay'(x) + \left(s_1 a + 4s_2 a - \frac{mg}{6}\right) y(x) = \frac{2mg}{3} + s_1 r_0 \cos(\omega x)$ $(x \in \mathbb{R})$,

$$y(0) = 0 = y'(0),$$

ahol

$$m = 4[kg],\ s_1 = 2060[N/m],\ s_2 = 1525[N/m],\ k = 54[Ns/m],\ a = 0.109[m],$$

ill.

$$r_0 = 0{,}0087[m],\ \omega = 90,\ g = 9.81[m/s^2].$$

Útm.

7.8.7. feladat. Egy $m(>0)$ tömegű anyagi pont egyenes vonalú egyenes mozgást végez, miközben az alábbi erők hatnak rá:

- valamilyen (időtől is függhető) külső F $(\in \mathbb{R} \to \mathbb{R})$ erő,
- rugalmas visszatérítő erő, amelynek nagysága egy ún. nyugalmi ponttól mért kitéréssel egyenesen arányos (az ezzel kapcsolatos arányossági tényező legyen D (>0)), iránya pedig ellentétes az elmozdulással; valamint
- a mindenkori sebességgel egyenesen arányos fékező erő (az ezzel kapcsolatos arányossági tényező legyen k (≥ 0)).

Írjuk le a tömegpont mozgását, ha ismerjük a megfigyelés kezdetekor elfoglalt helyzetét és az akkori sebességét!

Útm. Jelöljük y-nal az elmozdulás-idő-függvényt, és tegyük fel, hogy $\mathcal{D}_F$ és $I := \mathcal{D}_y \subset \mathcal{D}_F$ nyílt intervallumok, $0 \in I$, $y \in \mathfrak{D}^2$, továbbá legyen $s_0 := y(0)$, ill. $v_0 := y'(0)$ a megfigyelés kezdetekor észlelt helyzet, ill. sebesség. A Newton-féle mozgástörvényeket alkalmazva az

$$\boxed{\begin{array}{l} my'' = F - Dy - ky', \\ y(0) = s_0, \;\; y'(0) = v_0. \end{array}} \tag{7.8.5}$$

matematikai modell adódik. Az alábbi speciális eseteket különböztetjük meg:

I. eset (harmonikus rezgés):. a súrlódás elhanyagolható és külső erő nem hat a pontra, azaz $k = 0$, $F(t) \equiv 0$. Olyan $y : I \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvényt keresünk, amelyre

$$\boxed{\begin{array}{l} my'' + Dy = 0, \\ y(0) = s_0, \;\; y'(0) = v_0. \end{array}} \tag{7.8.6}$$

Mivel a

$$p(z) := z^2 + \frac{D}{m} \qquad (z \in \mathbb{C})$$

karekterisztikus polinomnak csak komplex gyökei vannak: $\pm\imath\sqrt{D/m}$, ezért az

$$\omega := \sqrt{\frac{D}{m}}$$

jelöléssel az egyenlet megoldáshalmaza:

$$\mathcal{M} := \{I \ni t \mapsto \alpha \sin(\omega t) + \beta \cos(\omega t) : \;\; \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}\,.$$

Így, ha $y \in \mathcal{M}$, továbbá $y(0) = s_0$, ill. $y'(0) = v_0$, akkor

$$y(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t) + s_0 \cos(\omega t) \qquad (t \in I).$$

Megjegyzések.

1. Elemi trigonometrikus összefüggések felhasználásával a fenti függvény az

$$y(t) = A \sin(\omega t + \delta) \quad (t \in I)$$

alakra is hozható, ahol

$$A := \sqrt{\frac{v_0^2}{\omega^2} + s_0^2} \qquad \text{ill.} \qquad \delta := \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\dfrac{s_0\omega}{v_0}\right) & (v_0 > 0), \\ \dfrac{\pi}{2} & (v_0 = 0). \end{cases}$$

Ha például úgy indítjuk a mozgást, ahogy a 0-nak választott időpontban a tömegpontot a nyugalmi helyzetben ($s_0 = 0$) adott sebességgel meglökjük ($v_0 > 0$), akkor $A = v_0/\omega$, $\delta = 0$. Ha viszont a mozgást úgy indítjuk, hogy kitérítjük a testet ($s_0 > 0$), azután elengedjük ($v_0 = 0$), akkor $A = s_0$, ill. $\delta = \pi/2$.

2. A tömegpont helyzete periodikusan változik az időben a nyugalmi pont körül, a $-A$ és A határok között. Az ilyen mozgást **(lineáris) harmonikus rezgés**nek, a mozgó tömegpontot pedig **harmonikus oszcillátor**nak nevezzük. Az A neve: a rezgés **amplitúdó**ja, δ pedig a **fázisszög** (**kezdőfázis**, ill. **fázisállandó**). A **rezgésidő** az az időtartam, amely alatt az $\omega t + \delta$ **fázis** 2π-vel változik meg: $\omega(t+T)+\delta = \omega t + \delta + 2\pi$, így
$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$
Az időegységre eső rezgések száma:
$$\nu = \frac{1}{T},$$
amelyet **frekvenciának** (**rezgésszám**nak) is szokás nevezni. Az utóbbi két összefüggés egybevetéséből látszik, hogy
$$\omega = 2\pi\nu.$$
Az ω-t a rezgés **körfrekvenciájának** hívják.

II. eset (csillapítás nélküli kényszerrezgés, periodikus külső kényszer esetén):. $k = 0$,

$$F(t) = f\sin(\Omega t + \delta) \qquad (t \in \mathbb{R},\ f > 0,\ \Omega > 0,\ \delta \in [0,2\pi)).$$

Olyan $y : I \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvényt keresünk, amelyre

$$\boxed{\begin{array}{l} my''(t) + Dy(t) = f\sin(\Omega t + \delta) \quad (t \in I), \\ y(0) = s_0,\ y'(0) = v_0. \end{array}} \tag{7.8.7}$$

Ω-t gerjesztési vagy **kényszerfrekvenciának** hívják, szemben a már korábban bevezetett ω **sajátfrekvenciával**. A homogén egyenlet megoldáshalmaza most is

$$\mathcal{M} := \{I \ni t \mapsto \alpha\sin(\omega t) + \beta\cos(\omega t) :\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\},$$

ahol $\omega := \sqrt{D/m}$. Az inhomogén egyenlet megoldáshalmazának vizsgálatához $|\Omega - \omega|$ előjele alapján a következő két fontos (al-)esetet különböztetjük meg:

1. eset $(\Omega \neq \omega)$.. Ekkor $\imath\Omega$ nem gyöke a homogén egyenlethez tartozó karakterisztikus polinomnak, ezért alkalmas $a, b \in \mathbb{R}$ esetén a (7.8.7)-beli inhomogén egyenlet egy (partikuláris) megoldása a

$$\chi(t) := a\cos(\Omega t + \delta) + b\sin(\Omega t + \delta) \qquad (t \in I)$$

függvény. Ez mechanikailag azt jelenti, hogy ha a mozgó pontra egy Ω frekvenciával periodikus külső kényszererő hat, akkor a rendszer egy periodikus választ ad, ugyanazzal az Ω frekvenciával. A (7.8.7)-beli inhomogén egyenletbe helyettesítve azt kapjuk, hogy

$$a = \frac{f}{m(\omega^2 - \Omega^2)}, \qquad b = 0,$$

azaz

$$\chi(t) = \frac{f}{m(\omega^2 - \Omega^2)}\sin(\Omega t + \delta) \qquad (t \in I),$$

ezért a (7.8.7)-beli inhomogén egyenlet megoldáshalmaza:

$$\mathcal{M} = \left\{ I \ni t \mapsto \alpha\sin(\omega t) + \beta\cos(\omega t) + \frac{f}{m(\omega^2 - \Omega^2)}\sin(\Omega t + \delta) : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Így, ha $y \in \mathcal{M}$, akkor a (7.8.7)-beli kezdeti feltételek felhasználásával

$$\begin{aligned} y(t) \quad = \quad & \left\{ s_0 - \frac{f}{m(\omega^2 - \Omega^2)}\sin(\delta) \right\}\cos(\omega t) + \\ & + \frac{1}{\omega}\left\{ v_0 - \frac{f\Omega}{m(\omega^2 - \Omega^2)\cos(\delta)} \right\}\sin(\omega t) + \\ & + \frac{f}{m(\omega^2 - \Omega^2)}\sin(\Omega t + \delta) \qquad (t \in I). \end{aligned}$$

A harmonikus rezgéshez hasonlóan

$$y(t) = r\sin(\omega t + \vartheta) + \frac{f}{m(\omega^2 - \Omega^2)}\sin(\Omega t + \delta) \qquad (t \in I),$$

ahol

$$r := \sqrt{\left\{ s_0 - \frac{f}{m(\omega^2 - \Omega^2)} \right\}^2 + \left\{ v_0 - \frac{f\Omega}{m(\omega^2 - \Omega^2)\cos(\delta)} \right\}^2}, \qquad \text{ill.} \qquad \vartheta := \ldots$$

Ez mechanikailag azt jelenti, hogy a tömegpont mozgása két harmonikus rezgés összege: a harmonikus rezgőmozgásra „rárakódik" még egy periodikus mozgás. Ha az Ω kényszerfrekvencia nagyon eltér a rendszer ω sajátfrekvenciájától, akkor ez a hatás nem jelentős. Ha azonban a kényszerfrekvencia elég közel van a sajátfrekvenciához, akkor ez a hatás tetszőlegesen nagy lehet, ami adott mechanikai rendszerek esetében igen könnyen katasztrófához vezethet.

2. eset $(\Omega = \omega)$.. Ekkor $\imath\Omega$ (egyszeres) gyöke a homogén egyenlethez tartozó karakterisztikus polinomnak, ezért alkalmas $a, b \in \mathbb{R}$ esetén a (7.8.7) egyenlet egy (partikuláris) megoldása a

$$\chi(t) := t\,\{a\cos(\Omega t + \delta) + b\sin(\Omega t + \delta)\} \qquad (t \in I)$$

függvény. A (7.8.7)-beli inhomogén egyenletbe helyettesítve azt kapjuk, hogy

$$a = -\frac{f}{2m\Omega}, \qquad b = 0,$$

azaz

$$\chi(t) = -\frac{f}{2m\omega} t\cos(\Omega t + \delta) \qquad (t \in I),$$

ezért a (7.8.7)-beli inhomogén egyenlet megoldáshalmaza:

$$\mathcal{M} = \left\{ I \ni t \mapsto \alpha\sin(\Omega t) + \beta\cos(\Omega t) - \frac{f}{2m\Omega} t\cos(\omega t + \delta) :\ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Így, ha $y \in \mathcal{M}$, akkor a (7.8.7)-beli kezdeti feltételek felhasználásával

$$y(t) = \frac{1}{\Omega}\left\{ v_0 + \frac{f}{2m\Omega}\cos(\delta) \right\}\sin(\Omega t) + s_0\cos(\Omega t) - \frac{f}{2m\Omega} t\cos(\Omega t + \delta) \qquad (t \in I).$$

Ismét elemi trigonometrikus összefüggéseket felhasználva

$$y(t) = r\sin(\Omega t + \vartheta) - \frac{f}{2m\Omega} t\cos(\Omega t + \delta) \qquad (t \in I)$$

adódik, ahol

$$r := \sqrt{\frac{1}{\Omega^2}\left\{ v_0 + \frac{f}{2m\Omega}\cos(\delta) \right\}^2 + s_0^2}, \qquad \text{ill.} \qquad \vartheta := \ldots,$$

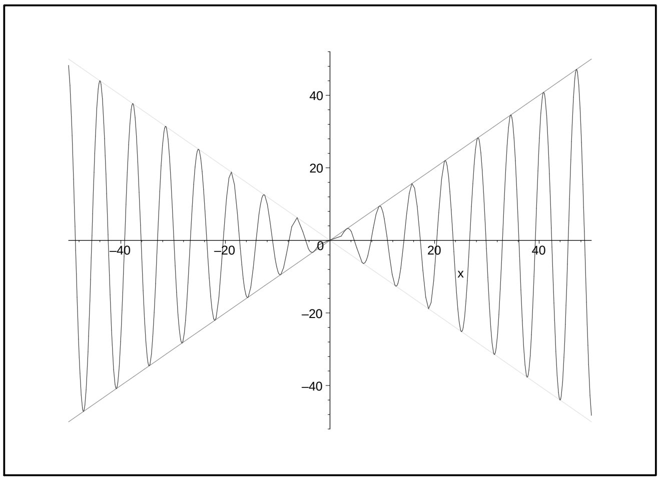
azaz egy harmonikus rezgésre egy nem harmonikus, hanem egy aperiodikus mozgás „rakódik rá”. Mechanikailag ez azt jelenti, hogy ha I nem-korlátos intervallum, akkor az anyagi pont kitérése minden határon túl nő (vö. 7.8.1. ábra), ún. „**rezonancia** jön létre”. Ez nyilván lehetetlen: a mechanikai rendszer előbb-utóbb összeomlik: katasztrófa következik be.

III. eset (csillapított (kényszer)rezgés). . A súrlódás teljes egészében sohasem kiküszöbölhető. Bizonyos helyzetekben (pl. lökésgátlók) éppen a súrlódás fékező hatásának kihasználása a cél. Vizsgáljuk tehát most a rendszert abban az esetben, amikor az F külső erő mellett súrlódás is van! Olyan $y : I \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvényt keresünk, amelyre

$$\boxed{\begin{array}{l} y'' + \dfrac{k}{m}y' + \dfrac{D}{m}y = F, \\[2ex] y(0) = s_0,\ y'(0) = v_0. \end{array}} \tag{7.8.8}$$

A

$$p(z) := z^2 + \frac{k}{m}z + \frac{D}{m} \qquad (z \in \mathbb{C})$$



7.8.1. ábra. Az $\mathbb{R} \ni t \mapsto -t\cos(t)$ függvény grafikonjának egy részlete

karekterisztikus polinom gyökei a következők:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - 4mD}}{2m}.$$

Az alábbi (al-)eseteket érdemes megkülönböztetni:

1. eset ($k^2 > 4mD$).. Ekkor a karakterisztikus polinomnak két (egyszeres) valós gyöke van:

$$\lambda_+ := \frac{-k + \sqrt{k^2 - 4mD}}{2m}, \qquad \lambda_- := \frac{-k - \sqrt{k^2 - 4mD}}{2m}$$

ezért a (7.8.8)-beli homogén egyenlet megoldáshalmaza

$$\mathcal{M} = \{I \ni t \mapsto \alpha \exp(\lambda_+ t) + \beta \exp(\lambda_- t) : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Ha a $\mathbf{g} = (g_1, g_2)$ függvényre tetszőleges $t \in I$ esetén

$$g_1(t) = \frac{1}{m(\lambda_1 - \lambda_2)} \int_0^t F(s) \exp(-\lambda_1 s) \, \mathrm{d}s,$$

$$g_2(t) = \frac{1}{m(\lambda_2 - \lambda_1)} \int_0^t F(s) \exp(-\lambda_2 s) \, \mathrm{d}s,$$

akkor a (7.8.8) inhomogén egyenlet megoldáshalmaza:

$$\mathcal{M} = \{I \ni t \mapsto (\alpha + g_1(t)) \exp(\lambda_1 t) + (\beta + g_2(t)) \exp(\lambda_2 t) : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

2. eset ($k^2 = 4mD$).. Ekkor a karakterisztikus polinomnak egyetlen (kétszeres) valós gyöke van:

$$\lambda := -\frac{k}{2m},$$

ezért a (7.8.8)-beli homogén egyenlet megoldáshalmaza

$$\mathcal{M} := \{I \ni t \mapsto \alpha \exp(\lambda t) + \beta t \exp(\lambda t) : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} .$$

Ha a $\mathbf{g} = (g_1, g_2)$ függvényre tetszőleges $t \in I$ esetén

$$g_1(t) = \frac{1}{m} \int_0^t F(s) \exp(-\lambda s) \, \mathrm{d}s, \qquad g_2(t) = -\frac{1}{m} \int_0^t F(s) s \exp(-\lambda_2 s) \, \mathrm{d}s,$$

akkor a (7.8.8) inhomogén egyenlet megoldáshalmaza:

$$\mathcal{M} = \{I \ni t \mapsto (\alpha + g_1(t)) \exp(\lambda t) + (\beta t + g_2(t)) \exp(\lambda t) : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} .$$

3. eset ($k^2 < 4mD$).. Ekkor a karakterisztikus polinomnak egyetlen konjugált komplex gyökpárja van:

$$\lambda_1 := \frac{-k + \imath\sqrt{4mD - k^2}}{2m} =: \Re + \Im\imath, \qquad \lambda_2 := \frac{-k - \imath\sqrt{4mD - k^2}}{2m} =: \Re - \Im\imath,$$

ezért a (7.8.8)-beli homogén egyenlet megoldáshalmaza:

$$\mathcal{M} = \{I \ni t \mapsto \alpha \exp(\Re t) \cos(\Im t) + \beta t \exp(\Re t) \sin(\Im t) : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} .$$

Ha a $\mathbf{g} = (g_1, g_2)$ függvényre tetszőleges $t \in I$ esetén

$$g_1(t) = \frac{1}{m\Im} \int_0^t F(s) \exp(-\Re s) \sin(\Im s) \, \mathrm{d}s,$$

$$g_2(t) = -\frac{1}{m\Im} \int_0^t F(s) s \exp(-\Re s) \cos(\Im s) \, \mathrm{d}s$$

a (7.8.8) inhomogén egyenlet megoldáshalmaza a fentiekben tárgyaltak alapján könnyen meghatározható.

Megjegyzés. Ha nincs „kényszer”, azaz $F(t) \equiv 0$, akkor **csillapított rezgőmozgás**ról beszélünk. Ekkor az első két esetben olyan erős a (többnyire súrlódásból származó) fékező hatás, hogy nincsen rezgés, a harmadik esetben pedig ugyan van rezgés, de az amplitúdó „exponenciálisan lecseng”. ■

7.9. Magasabbrendű lineáris differenciálegyenletek

Adott $n \in \mathbb{N}$, $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, $a_k, f : I \to \mathbb{R}$ folytonos függvények $(k \in \{1, \ldots, n\})$ esetén tekintsük a következő feladatot.

Határozzunk meg olyan $\varphi : I \to \mathbb{R}$ n-szer differenciálható függvényt, amelyre

$$\varphi^{(n)}(x) + a_1\varphi^{(n-1)}(x) + \ldots + a_{n-1}\varphi'(x) + a_n\varphi(x) = f(x) \qquad (x \in I).$$

teljesül!

7.9.1. definíció. Az imént megfogalmazott feladatot n**-edrendű lineáris differenciálegyenlet**nek nevezzük és az

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = f \tag{7.9.1}$$

szimbólummal jelöljük.

Ha

$$f(x) = 0 \qquad (x \in I),$$

akkor **homogén egyenlet**ről beszélünk:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = 0. \tag{7.9.2}$$

Mivel a (7.9.1) differenciálegyenlettel egyenértékű elsőrendű rendszer

$$\mathbf{z}' = A\mathbf{z} + \mathbf{b} \tag{7.9.3}$$

alakú, ahol

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \mathbf{0} \\ \vdots & 0 & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \ldots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ f \end{bmatrix}$$

ezért a (7.9.1) egyenletre vonatkozó kezdetiérték-feladat egyértelműen megoldható. A fenti átírás úgy történik, hogy

$$z_1 := y, \qquad z_2 := y', \qquad \ldots, \qquad z_{n-1} := y^{(n-2)}, \qquad z_n := y^{(n-1)},$$

ezért a (7.9.1)-re vonatkozó kezdeti feltétel alkalmas $\tau \in I$, ill. $\xi_1, \ldots \xi_n \in \mathbb{R}$ esetén

$$y(\tau) = \xi_1, \qquad y'(\tau) = \xi_2, \qquad \ldots, \qquad y^{(n-2)}(\tau) = \xi_{n-1}, \qquad y^{(n-1)}(\tau) = \xi_n$$

alakú.

7.9.2. definíció. Azt mondjuk, hogy $\{\mu_1, \ldots, \mu_n\}$ a (7.9.2) homogén egyenlet egy **alaprendszere**, ha

$$W := \begin{bmatrix} \mu_1 & \ldots & \mu_n \\ \mu_1' & \ldots & \mu_n' \\ \vdots & & \vdots \\ \mu_1^{(n-1)} & \ldots & \mu_n^{(n-1)} \end{bmatrix} : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$$

alapmátrixa (7.9.3) homogén részének.

7.9.1. tétel. Ha $\{\mu_1, \ldots, \mu_n\}$ alaprendszer a (7.9.2) homogén egyenletnek, akkor (7.9.2) M_H megoldáshalmazára

$$\mathcal{M}_H = \{\alpha_1\mu_1 + \ldots + \alpha_n\mu_n \in \mathfrak{C}^n(I, \mathbb{R}) : \ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}$$

teljesül.

Biz.

Valamely négyzetes mátrix oszlopai pontosan akkor lineárisan függetlenek, ha a mátrix determinánsa nem tűnik el. Ezt felhasználva könnyen belátható a

7.9.1. tétel. Ha a $\mu_1, \ldots, \mu_n$ függvények a (7.9.2) homogén egyenlet megoldásai, akkor egyenértékűek az alábbi állítások.

(1). $\{\mu_1, \ldots, \mu_n\}$ alaprendszere (7.9.2)-nek.

(2). Bármely $x \in I$ esetén

$$\omega(x) := \det(W(x)) \neq 0.$$

(3). Van olyan $\tau \in I$ hogy

$$\omega(\tau) \neq 0.$$

A (7.7.2) formula alapján

$$\boldsymbol{\lambda}(x) := W(x)\left\{[W(\tau)]^{-1}\boldsymbol{\xi} + \int_\tau^x [W(s)]^{-1}\mathbf{b}(s)\,\mathrm{d}s\right\} \qquad (x \in I)$$

a (7.9.3) rendszer $\mathbf{z}(\tau) = \boldsymbol{\xi}$ kezdeti feltételt kielégítő teljes megoldása.
Ez azt jelenti, hogy a $\mu_1, \ldots, \mu_n$ függvények megoldásai (7.9.2)-nek és alkalmas $\tau \in I$ esetén

$$\det W(\tau) \neq 0 \tag{7.9.4}$$

teljesül.
Ha $a_1, \ldots, a_n$ állandófüggvények, azaz alkalmas $m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{R}$, ill. $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ esetén

$$a_k(x) = m_k \quad \text{ill.} \quad A(x) = M \qquad (x \in I,\ k \in \{1, \ldots, n\}),$$

akkor az

$$y^{(n)} + m_1 y^{(n-1)} + \ldots + m_{n-1} y' + m_n y = 0 \tag{7.9.5}$$

állandó együtthatós, n-edrendű, homogén lineáris differenciálegyenlet megoldáshalmazának meghatározása az M mátrix p_M karakterisztikus polinomjának segítségével történik.

7.9.2. tétel. Az M mátrix karakterisztikus polinomja

$$p_M(z) := z^n + m_1 z^{n-1} + \ldots + m_{n-1} z + m_n \qquad (z \in \mathbb{C}) \tag{7.9.6}$$

alakú.

Biz. $\det(zE_n - M) =$

$$= \det \begin{bmatrix} z & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & z & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & z & -1 \\ m_n & m_{n-1} & \ldots & m_2 & z+m_1 \end{bmatrix} = z \det \begin{bmatrix} z & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & z & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & z & -1 \\ m_{n-1} & m_{n-2} & \ldots & m_2 & z+m_1 \end{bmatrix} +$$

$$+(-1)^{(n-1)} m_n \det \begin{bmatrix} -1 & 0 & \ldots & 0 \\ z & -1 & \ddots & \vdots \\ \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \ldots & 0 & z & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= z \det \begin{bmatrix} z & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & z & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & z & -1 \\ m_{n-1} & m_{n-2} & \ldots & m_2 & z+m_1 \end{bmatrix} +$$

$$+m_n.$$

Innen n-re vonatkozó teljes indukcióval az állítás könnyen belátható. ■

7.9.3. tétel. Ha

1. $\rho \in \mathbb{R}$ k-szoros gyöke a p_M karakterisztikus polinomnak, akkor az

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto e^{\rho t},\, te^{\rho t}, \ldots,\, t^{k-1}e^{\rho t}$$

függvények a (7.9.5) egyenlet alaprendszerét alkotják.

2. valamely $\rho, \sigma \in \mathbb{R}$, $\sigma \neq 0$ esetén a $\rho + \imath\sigma$ komplex szám l-szeres gyöke a p_M karekterisztikus polinomnak, akkor az

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto e^{\rho t}\cos(\sigma t), \quad te^{\rho t}\cos(\sigma t), \quad \ldots \quad t^{l-1}e^{\rho t}\cos(\sigma t),$$

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto e^{\rho t}\sin(\sigma t), \quad te^{\rho t}\sin(\sigma t), \quad \ldots \quad t^{l-1}e^{\rho t}\sin(\sigma t)$$

függvények a (7.9.5) egyenlet alaprendszerét alkotják.

Biz. ■

7.9.1. példa. Az

$$y^{(2016)} = 0$$

egyenlet karakterisztikus polinomja:

$$z^{2016} = 0 \qquad (z \in \mathbb{C}),$$

aminek a nulla 2016-szoros valós gyöke, így egy alaprendszer a következő:

$$\left\{\mathbb{R} \ni t \mapsto e^{0t},\, te^{0t}, \ldots,\, t^{2015}e^{0t}\right\} = \left\{\mathbb{R} \ni t \mapsto 1,\, t, \ldots,\, t^{2015}\right\}.$$

7.9.1. feladat. Adjuk meg az

1. $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$;
2. $2y''' - 5y'' + 6y' - 2y = 0$;
3. $y^{(4)} - 4y^{(3)} + 5y'' - 4y' + 4y = 0$;
4. $y''' - y'' - y' + y = 0$;
5. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$;
6. $y^{(5)} + 8y^{(3)} + 16y' = 0$
   egyenletek megoldáshalmazát, ill. az
7. $y''' - y' = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$, $y''(0) = 1$
   kezdetiérték-feladat teljes megoldását!

Útm.

1. – A karakterisztikus polinom:

$$p(z) := z^3 - 6z^2 + 11z - 6 \qquad (z \in \mathbb{C}),$$

melynek gyökei:

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = 2, \qquad \lambda_3 = 3.$$

– Ezért a megoldáshalmaz:

$$\mathcal{M} := \left\{\mathbb{R} \ni x \mapsto \alpha e^{x} + \beta e^{2x} + \gamma e^{3x} : \ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\right\}.$$

2. – A karakterisztikus polinom:

$$p(z) := 2z^3 - 5z^2 + 6z - 2 \qquad (z \in \mathbb{C}),$$

melynek gyökei:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}, \qquad \lambda_2 = 1 + \imath, \qquad \lambda_3 = 1 - \imath.$$

– Ezért a megoldáshalmaz:

$$\mathcal{M} := \left\{\mathbb{R} \ni x \mapsto \alpha e^{\frac{x}{2}} + \beta e^{x}\cos(x) + \gamma e^{x}\sin(x) : \ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\right\}.$$

3. – A karakterisztikus polinom:

$$p(z) := z^4 - 4z^3 + 5z^2 - 4z + 4 \qquad (z \in \mathbb{C}),$$

melynek gyökei:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \qquad \lambda_3 = \imath, \qquad \lambda_4 = -\imath.$$

– Ezért a megoldáshalmaz:

$$\mathcal{M} := \left\{\mathbb{R} \ni x \mapsto \alpha e^{2x} + \beta x e^{2x} + \gamma\cos(x) + \delta\sin(x) : \ \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}\right\}.$$

4. – A karakterisztikus polinom:

$$p(z) := z^3 - z^2 - z + 1 \qquad (z \in \mathbb{C}),$$

melynek gyökei:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \qquad \lambda_3 = -1.$$

– Ezért a megoldáshalmaz:

$$\mathcal{M} := \left\{\mathbb{R} \ni x \mapsto \alpha e^{x} + \beta x e^{x} + \gamma e^{-x} : \ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\right\}.$$

5. – A karakterisztikus polinom:

$$p(z) := z^3 - 3z^2 + 4z - 1 \qquad (z \in \mathbb{C}),$$

melynek gyökei:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1.$$

– Ezért a megoldáshalmaz:

$$\mathcal{M} := \left\{\mathbb{R} \ni x \mapsto \alpha e^x + \beta x e^x + \gamma x^2 e^x : \ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\right\}.$$

6. – A karakterisztikus polinom:

$$p(z) := z^5 + 8z^3 + 16z = z(z^4 + 8z^2 + 16) \qquad (z \in \mathbb{C}),$$

melynek gyökei:

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_2 = \lambda_3 = 2\imath, \qquad \lambda_4 = \lambda_5 = -2\imath.$$

– Ezért a megoldáshalmaz:

$$\mathcal{M} := \{\mathbb{R} \ni x \mapsto \alpha + \beta\cos(2x) + \gamma\sin(2x) + \delta x\cos(2x) + \eta x\sin(2x) : \ \alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta \in \mathbb{R}\}.$$

7. – A karakterisztikus polinom:

$$p(z) := z^3 - z \qquad (z \in \mathbb{C}),$$

melynek gyökei:

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_2 = 1, \qquad \lambda_3 = -1.$$

– Ezért a megoldáshalmaz:

$$\mathcal{M} := \left\{\mathbb{R} \ni x \mapsto \alpha + \beta e^x + \gamma e^{-x} : \ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\right\}.$$

– A kezdetiérték-feladat teljes megoldása a

$$\varphi(x) = -1 + e^{-x} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény. ■

7.9.1. gyakorló feladat. Adjuk meg az

1. $y^{(4)} - 5y'' + 4y' = 0$;
2. $y''' - y'' + y' + 3y = 0$;
3. $y''' - 27y = 0$;
4. $y^{(4)} + y = 0$
   egyenletek megoldáshalmazát!

Útm.

7.9.4. tétel. Legyen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, p_c, p_s legfeljebb k-adfokú polinom, és tegyük fel, hogy

$$f(x) = e^{\alpha x}\left(p_c(x)\cos(\beta x) + p_s(x)\sin(\beta x)\right) \qquad (x \in I).$$

Ekkor a (7.9.5) inhomogén egyenletnek van

$$\varphi_p(x) := x^r e^{\alpha x}\left(q_c(x)\cos(\beta x) + q_s(x)\sin(\beta x)\right) \qquad (x \in I)$$

(ún. **partikuláris**) **megoldás**a, ahol az $\alpha + \beta\imath$ a (7.9.6) karakterisztikus polinom r-szeres gyöke, q_c, q_s legfeljebb k-adfokú polinom.

Biz. ■

Ezt a tételt úgy alkalmazzuk, hogy a q_c és q_s polinomokat határozatlan együtthatókkal vesszük fel és az együtthatókat a differenciálegyenletbe való helyettesítés útján határozzuk meg.

7.9.5. tétel. A (7.9.1) inhomogén egyenlet $\mathcal{M}_{IH}$ megoldáshalmazára:

$$\mathcal{M}_{IH} = \mathcal{M}_H + \varphi_p$$

teljesül, ahol $\mathcal{M}_H$ a (7.9.2) homogén egyenlet megoldáshalmaza és φ_p a (7.9.1) inhomogén egyenlet egy (partikuláris) megoldása.

Biz. ■

7.9.2. feladat. Határozzuk meg az

1. $y'''(x) - 4y''(x) + 3y(x) = xe^{2x}$ $(x \in \mathbb{R})$;
2. $y^{(4)} + 5y'' + 4y = \sin$
3. $y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = e^x(\cos(x) + x\sin(x))$ $(x \in \mathbb{R})$
   egyenletek megoldáshalmazát, ill. az
4. $y''' - 3y' - 2y = 9\exp^2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -3$, $y''(0) = 3$;
5. $y^{(4)} + y'' = 2\cos$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 0$, $y'''(0) = 0$;
   kezdetiérték-feladatok teljes megoldását!

Útm.

1. – A karakterisztikus polinom:

$$p(z) := z^3 - 4z^2 + 3 \qquad (z \in \mathbb{C}),$$

melynek gyökei:

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = \frac{3 + \sqrt{21}}{2}, \qquad \lambda_3 = \frac{3 - \sqrt{21}}{2}.$$

– Ezért a homogén egyenlet megoldáshalmaza:

$$\mathcal{M} := \left\{\mathbb{R} \ni x \mapsto \alpha e^x + \beta e^{\frac{3+\sqrt{21}}{2}x} + \gamma e^{\frac{3-\sqrt{21}}{2}x} :\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\right\}.$$

– Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását

$$\varphi_p(x) := e^{2x}(a + bx) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

alakban keressük.

– Így az inhomogén egyenlet megoldáshalmaza:

$$\mathcal{M} := \left\{\mathbb{R} \ni x \mapsto \alpha e^x + \beta e^{\frac{3+\sqrt{21}}{2}x} + \gamma e^{\frac{3-\sqrt{21}}{2}x} + e^{2x}\left(\frac{4}{25} - \frac{x}{5}\right) :\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\right\}.$$

2. – A karakterisztikus polinom:

$$p(z) := z^4 + 5z^2 + 4 \qquad (z \in \mathbb{C}),$$

melynek gyökei:

$$\lambda_1 = \imath, \qquad \lambda_2 = -\imath, \qquad \lambda_3 = 2\imath, \qquad \lambda_4 = -2\imath.$$

– Ezért a homogén egyenlet megoldáshalmaza:

$$\mathcal{M} := \{\mathbb{R} \ni x \mapsto \alpha\cos(x) + \beta\sin(x) + \gamma\cos(2x) + \delta\sin(2x) :\ \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}\}.$$

– Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását

$$\varphi_p(x) := x(a\sin(x) + b\cos(x)) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

alakban keressük.

– Így az inhomogén egyenlet megoldáshalmaza: $\mathcal{M} :=$

$$\left\{\mathbb{R} \ni x \mapsto \alpha\cos(x) + \beta\sin(x) + \gamma\cos(2x) + \delta\sin(2x) - \frac{1}{6}x\cos(x) :\ \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}\right\}.$$

3. – A karakterisztikus polinom:

$$p(z) := z^2 - 2z + 2 \qquad (z \in \mathbb{C}),$$

melynek gyökei:

$$\lambda_1 = 1 + \imath, \qquad \lambda_2 = 1 - \imath.$$

– Ezért a homogén egyenlet megoldáshalmaza:

$$\mathcal{M} := \{\mathbb{R} \ni x \mapsto \alpha e^x\cos(x) + \beta e^x\sin(x) :\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

– Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását

$$\varphi_p(x) := xe^x((a + bx)(\cos(x) + (c + dx)\sin(x)) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

alakban keressük.

– Így az inhomogén egyenlet megoldáshalmaza:

$$\mathcal{M} := \left\{ \mathbb{R} \ni x \mapsto e^x(\alpha\cos(x) + \beta\sin(x)) + xe^x \left(-\frac{1}{4}x\cos(x) + \frac{3}{4}\sin(x) \right) : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

4. – A karakterisztikus polinom:

$$p(z) := z^3 - 3z - 2 \qquad (z \in \mathbb{C}),$$

melynek gyökei:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -1, \qquad \lambda_3 = 2.$$

– Ezért a homogén egyenlet megoldáshalmaza:

$$\mathcal{M} := \left\{ \mathbb{R} \ni x \mapsto \alpha e^{-x} + \beta x e^{-x} + \gamma e^{2x} : \ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}.$$

– Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását

$$\varphi_p(x) := axe^{2x} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

alakban keressük.

– Így az inhomogén egyenlet megoldáshalmaza:

$$\mathcal{M} := \left\{ \mathbb{R} \ni x \mapsto \alpha e^{-x} + \beta x e^{-x} + \gamma e^{2x} + xe^{2x} : \ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} : \ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}.$$

– A kezdetiérték-feladat teljes megoldására:

$$\varphi(x) = (x-1)(e^{2x} - e^{-x}) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

5. – A karakterisztikus polinom:

$$p(z) := z^4 + z^2 \qquad (z \in \mathbb{C}),$$

melynek gyökei:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \qquad \lambda_3 = \imath, \qquad \lambda_4 = -\imath.$$

– Ezért a homogén egyenlet megoldáshalmaza:

$$\mathcal{M} := \{ \mathbb{R} \ni x \mapsto \alpha + \beta x + \gamma\cos(x) + \delta\sin(x) : \ \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R} \}.$$

– Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását

$$\varphi_p(x) := x(a\cos(x) + b\sin(x)) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

alakban keressük.

– Így az inhomogén egyenlet megoldáshalmaza: $\mathcal{M} :=$

$$\{ \mathbb{R} \ni x \mapsto \alpha + \beta x + \gamma\cos(x) + \delta\sin(x) - x\sin(x) : \ \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R} \}.$$

– A kezdetiérték-feladat teljes megoldására:

$$\varphi(x) = -3 + x(1 + \sin(x) + 3\cos(x)) \qquad (x \in \mathbb{R}). \quad \blacksquare$$

Adott $(0,+\infty) \supset I$, ill. $(-\infty,0) \supset I$ intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ folytonos függvény és $a_k \in \mathbb{R}$ $(k \in \{1,...,n\})$ számok esetén tekintsük a következő feladatot.

Határozzunk meg olyan $\varphi : I \to \mathbb{R}$ n-szer differenciálható függvényt, amelyre

$$x^n\varphi^{(n)}(x) + a_1x^{n-1}\varphi^{(n-1)}(x) + ... + a_{n-1}x\varphi'(x) + a_n\varphi(x) = f(x) \qquad (x \in I)$$

teljesül!

7.9.3. definíció. Az imént megfogalmazott feladatot **Euler-féle differenciálegyenlet**nek nevezzük, és az

$$x^ny^{(n)}(x) + a_1x^{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}xy'(x) + a_ny(x) = f(x) \qquad (x \in I) \tag{7.9.7}$$

szimbólummal jelöljük.

7.9.6. tétel. Ha $I \subset (0,+\infty)$ intervallum, úgy az n-szer differenciálható $\varphi : I \to \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor megoldása a (7.9.7) Euler-féle differenciálegyenletnek, ha alkalmas $b_k \in \mathbb{R}$ $(k \in \{1,...,n\})$ számok esetén a

$$\psi := \varphi \circ \exp$$

függvény megoldása a

$$z^{(n)} + b_1z^{(n-1)} + ... + b_{n-1}z' + b_nz = f \circ \exp$$

állandó együtthatós, n-edrendű lineáris differenciálegyenletnek.

Biz. Mivel

$$\varphi = \psi \circ \ln$$

teljes indukcióval könnyen belátható, hogy minden $k \in \mathbb{N}$ esetén van olyan $c_k \in \mathbb{R}$ $(k \in \{1,...,n\})$ valós szám, hogy

$$x^k\varphi^{(k)}(x) = \sum_{k=1}^{n} c_i\psi^{(k)}(\ln(x)) \qquad (x \in I). \quad \blacksquare$$

7.9.0. megjegyzés.

1. Ha $I \subset (-\infty, 0)$, akkor
$$\psi := \varphi \circ (-\exp)$$
függvényről ez előbbihez hasonlót állíthatunk.
2. $n = 2$ esetén: $b_1 = a_1 - 1$, $b_2 = a_2$;
$n = 3$ esetén: $b_1 = a_1 - 3$, $b_2 = a_2 - a_1 + 2$, $b_3 = a_3$.
3. Némely esetben más helyettesítéssel is célt érünk, pl.
$$I \subset (0, +\infty)$$
és alkalmas $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén legyen
$$\psi(x) := \varphi(x^\lambda) \qquad (x \in I).$$

7.9.3. feladat. Határozzuk meg az

1. $x^2 y''(x) - 2xy'(x) + 2y(x) = 0 \ (x \in I := (0, +\infty))$;
2. $x^3 y'''(x) - 2xy'(x) + 4y(x) = 0 \ (x \in I := (0, +\infty))$;
3. $x^2 y''(x) + 7xy'(x) + 13y(x) = x\ln(x) \ (x \in I := (0, +\infty))$
egyenletek megoldáshalmazát!

Útm.

1. Tegyük fel, hogy a φ függvény megoldása az egyenletnek, és legyen
$$\psi := \varphi \circ \exp .$$
Ekkor
$$\varphi = \psi \circ \ln, \quad \varphi'(x) = \psi'(\ln(x))\frac{1}{x}, \quad \varphi''(x) = \psi''(\ln(x))\frac{1}{x^2} - \psi'(\ln(x))\frac{1}{x^2} \qquad (x \in I).$$
Így
$$x\varphi'(x) = \psi'(\ln(x)), \quad x^2\varphi''(x) = \psi''(\ln(x)) - \psi'(\ln(x)) \qquad (x \in I).$$
Tehát
$$x^2\varphi''(x) - 2x\varphi'(x) + 2\varphi(x) = \psi''(\ln(x)) - 3\psi'(\ln(x)) + \psi(\ln(x)) \qquad (x \in I).$$
Ezért a ψ függvény a
$$z'' - 3z' + 2z = 0$$
másodrendű lineáris differenciálegyenlet megoldása. Az egyenlethez tartozó karakterisztikus polinom:
$$p(z) := z^2 - 3z + 2 \qquad (z \in \mathbb{C}),$$

melynek gyökei: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. A lineáris egyenlet megoldáshalmaza:

$$\mathcal{M} := \left\{\mathbb{R} \ni t \mapsto \alpha e^t + \beta e^{2t} : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\}.$$

Az eredeti egyenlet megoldáshalmaza tehát az

$$\left\{I \ni x \mapsto \alpha x + \beta x^2 : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\}$$

függvényhalmaz.

2. Tegyük fel, hogy a φ függvény megoldása az egyenletnek, és legyen

$$\psi := \varphi \circ \exp.$$

Ekkor

$$\varphi = \psi \circ \ln, \qquad \varphi'(x) = \psi'(\ln(x))\frac{1}{x}, \quad \varphi''(x) = \psi''(\ln(x))\frac{1}{x^2} - \psi'(\ln(x))\frac{1}{x^2} \quad (x \in I),$$

$$\varphi'''(x) = \psi'''(\ln(x))\frac{1}{x^3} - \psi''(\ln(x))\frac{2}{x^3} - \psi''(\ln(x))\frac{1}{x^3} + \psi'(\ln(x))\frac{2}{x^3} \qquad (x \in I).$$

Így bármely $x \in I$ esetén

$$x\varphi'(x) = \psi'(\ln(x)), \qquad x^2\varphi''(x) = \psi''(\ln(x)) - \psi'(\ln(x)),$$

ill.

$$x^3\varphi'''(x) = \psi'''(\ln(x)) - 3\psi''(\ln(x)) + 2\psi'(\ln(x))$$

Tehát

$$x^3\varphi'''(x) - 2x\varphi'(x) + 4\varphi(x) = \psi'''(\ln(x)) - 3\psi''(\ln(x)) + 4\psi(\ln(x)) \qquad (x \in I).$$

Ezért a ψ függvény a

$$z''' - 3z'' + 4z = 0$$

lineáris differenciálegyenlet megoldása. Az egyenlethez tartozó karakterisztikus polinom:

$$p(z) := z^3 - 3z^2 + 4 \qquad (z \in \mathbb{C}),$$

melynek gyökei: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$. A lineáris egyenlet megoldáshalmaza:

$$\mathcal{M} := \left\{\mathbb{R} \ni t \mapsto \alpha e^{-t} + \beta e^{2t} + \gamma t e^{2t} : \ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\right\}.$$

Az eredeti egyenlet megoldáshalmaza tehát az

$$\left\{I \ni x \mapsto \alpha\frac{2}{x} + \beta x^2 + \gamma x^2 : \ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\right\}$$

függvényhalmaz.

3. Tegyük fel, hogy a φ függvény megoldása az egyenletnek, és legyen

$$\psi := \varphi \circ \exp\,.$$

Ekkor

$$\varphi = \psi \circ \ln, \qquad \varphi'(x) = \psi'(\ln(x))\frac{1}{x}, \quad \varphi''(x) = \psi''(\ln(x))\frac{1}{x^2} - \psi'(\ln(x))\frac{1}{x^2} \quad (x \in I).$$

Így

$$x\varphi'(x) = \psi'(\ln(x)), \quad x^2\varphi''(x) = \psi''(\ln(x)) - \psi'(\ln(x)) \qquad (x \in I).$$

Tehát

$$x^2\varphi''(x) + 7x\varphi'(x) + 13\varphi(x) = \psi''(\ln(x)) - 3\psi'(\ln(x)) + \psi(\ln(x)) \qquad (x \in I).$$

Ezért a ψ függvény a

$$z''(t) + 6z'(t) + 13z(t) = te^t \qquad (t \in \mathbb{R})$$

lineáris differenciálegyenlet megoldása. Az egyenlet homogén részéhez tartozó karakterisztikus polinom:

$$p(z) := z^2 + 6z + 13 \qquad (z \in \mathbb{C}),$$

melynek gyökei: $\lambda_1 = -3 + 2\imath$, $\lambda_2 = -3 - 2\imath$. A lineáris egyenlet homogén részének megoldáshalmaza:

$$\mathcal{M}_H := \left\{\mathbb{R} \ni t \mapsto \alpha e^{-3t}\cos(2t) + \beta e^{-3t}\sin(2t) + \gamma t e^{2t} :\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\right\}.$$

Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását a

$$\psi_p(t) := (at + b)e^t \qquad (t \in \mathbb{R})$$

alakban keressük. Az (inhomogén) lineáris egyenlet megoldáshalmaza:

$$\mathcal{M}_{IH} := \left\{\mathbb{R} \ni t \mapsto e^{-3t}(\alpha\cos(2t) + \beta\sin(2t))\frac{1}{40}(2t - 8)e^t :\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\}.$$

Az eredeti egyenlet megoldáshalmaza tehát az

$$\left\{I \ni x \mapsto \frac{\alpha\cos(\ln(x^2))}{x^3} + \beta\sin(\ln(x^2))\left(\frac{1}{20}\ln(x) - \frac{1}{50}\right) :\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\right\}$$

függvényhalmaz. ■

7.9.1. házi feladat. Határozzuk meg az

1. $x^2y''(x) + 2xy'(x) - 2y(x) = 1 + x^2$ $(x \in I := (0, +\infty))$;
2. $x^2y''(x) - 3xy'(x) + 3y(x) = x^2$ $(x \in I := (0, +\infty)0)$;
3. $x^2y''(x) + 3xy'(x) + 5y(x) = 2\cos\ln(x)$ $(x \in I := (0, +\infty))$;
4. $x^2y'' - xy'(x) + 2y(x) = 0$ $(x \in I := (0, +\infty))$;
5. $x^2y''(x) - xy'(x) + y(x) = x\ln^2(x)$ $(x \in I := (0, +\infty))$;
6. $4x^2y''(x) - 2xy'(x) + 2y(x) = \sqrt{x}$ $(x \in I := (0, +\infty))$;
7. $x^2y''(x) + 4xy'(x) + 2y(x) = \dfrac{1}{x^2}$ $(x \in I := (0, +\infty))$;
8. $x^3y'''(x) + 4x^2y''(x) + xy'(x) - y(x) = x^2$ $(x \in I := (0, +\infty))$;
9. $x^3y'''(x) - 2x^2y''(x) + 5xy'(x) - 5y(x) = 0$ $(x \in I := (0, +\infty))$;
10. $x^3y'''(x) - x^2y''(x) + 5xy'(x) = 1$ $(x \in I := (0, +\infty))$

egyenletek megoldáshalmazát!

2017.12.29.

8. fejezet

Függvénysorozatok, függvénysorok

8.0.1. definíció. Legyen $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, ill. $f_n : H \to \mathbb{R}$.

- Azt mondjuk, hogy az (f_n) **függvénysorozat konvergens az** $a \in H$ **pontban**, ha az $(f_n(a))$ számsorozat konvergens.
- A
$$KH(f_n) := \{x \in H : \ (f_n(x)) \text{ konvergens}\}$$
halmazt az (f_n) függvénysorozat **konvergenciahalmaz**ának nevezzük.
- $KH(f_n) \neq \emptyset$ esetén azt mondjuk, hogy az (f_n) függvénysorozat az $\emptyset \neq A \subset KH(f_n)$ **halmazon pontonként konvergens** és **határfüggvénye** az $f : A \to \mathbb{R}$ függvény (jelben: $f_n \to_A f \ (n \to \infty)$), ha minden $x \in A$ esetén
$$\lim(f_n(x)) = f(x).$$

Az az állítás, hogy az (f_n) függvénysorozat pontonként konvergens az A halmazon azzal egyenértékű, hogy van olyan $f : A \to \mathbb{R}$ fügvény, hogy

$$\forall x \in A\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall N \leq n \in \mathbb{N} : \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$[1]

8.0.1. példa. Az
$$f_n(x) := x^n \qquad (x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N})$$
függvénysorozat esetében $KH(f_n) = (-1{,}1]$,
$$f : (-1{,}1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \begin{cases} 0 & (x \in (-1{,}1)), \\ 1 & (x = 1). \end{cases}$$

[1] Ezt úgy is írjuk, hogy $\forall x \in A \forall \varepsilon > 0\ \exists N := N(x, \varepsilon) \in \mathbb{N}$: $(N \leq n \in \mathbb{N} \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$.

8.0.1. feladat. Az alábbi függvénysorozatok esetében határozzuk meg a konvergenciahalmazt és a határfüggvényt!

1. $f_n := \sin^n \ (n \in \mathbb{N})$;
2. $f_n(x) := \dfrac{1}{1+x^n} \ (-1 \neq x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N})$;
3. $f_n(x) := n\left(\sqrt{x+\dfrac{1}{n}} - \sqrt{x}\right) \ (0 \leq x \in \mathbb{R},\ 0 < n \in \mathbb{N})$;
4. $f_n(x) := \sqrt[n]{1+x^n} \ (0 \leq x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N})$;
5. $f_n(x) := \cos(nx) \ (x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N})$.

Útm.

1. Mivel minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $|\sin(x)| \leq 1$, ezért a $(\sin^n(x))$ számsorozat pontosan akkor divergens, ha $\sin(x) = -1$, azaz ha
$$x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$
Így
$$KH(f_n) = \mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi : \ k \in \mathbb{Z}\right\}$$
és
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \left(x \in \mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi : \ k \in \mathbb{Z}\right\}\right), \\ 1 & \left(x \in \left\{\dfrac{\pi}{2} + 2l\pi : \ l \in \mathbb{Z}\right\}\right). \end{cases}$$
2. Ha
   - $|x| < 1$, akkor $\lim(x^n) = 0$, így
   $$f_n(x) = \frac{1}{1+x^n} \longrightarrow 1 \qquad (n \to \infty);$$
   - $x = 1$, akkor
   $$f_n(x) = \frac{1}{2} \longrightarrow \frac{1}{2} \qquad (n \to \infty);$$
   - $|x| > 1$, akkor $\left|\dfrac{1}{x}\right| < 1$, így
   $$f_n(x) = \frac{1}{x^n} \cdot \frac{1}{\dfrac{1}{x^n} + 1} = \left(\frac{1}{x}\right)^n \cdot \frac{1}{\left(\dfrac{1}{x}\right)^n + 1} \longrightarrow 0 \cdot 1 = 0 \qquad (n \to \infty).$$

   Így $KH(f_n) = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$ és
   $$f : \mathbb{R}\backslash\{-1\} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \begin{cases} 1 & (x \in (-1,1)), \\ \dfrac{1}{2} & (x = 1), \\ 0 & (|x| > 1). \end{cases}$$

3. Mivel

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x+\frac{1}{n}}+\sqrt{x}} \qquad (0 \leq x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}),$$

ezért $KH(f_n) = (0, +\infty)$ (ui. $x = 0$ esetén $f_n(0) = \sqrt{n}$) és

$$f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

4. Ha

   – $0 \leq x \leq 1$, akkor

   $$1 \leq f_n(x) \leq \sqrt[n]{2} \qquad (n \in \mathbb{N});$$

   – $1 < x \in \mathbb{R}$, akkor

   $$x < f_n(x) < \sqrt[n]{2}x \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

   Így

   $$KH(f_n) = [0, +\infty), \qquad f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} 1 & (x \in [0,1]), \\ x & (x \in (1, +\infty)). \end{cases}$$

5. Tetszőleges $a \in \mathbb{R}$ esetén legyen

   $$a_n := \cos(na) \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

   Ekkor

   $$a_{n\pm1} = \cos((n \pm 1)a) = \cos(na)\cos(a) \mp \sin(na)\sin(a) \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

   Így, ha (a_n) konvergens és $\alpha := \lim(a_n)$, akkor $\lim(a_{n\pm1}) = \alpha$, sőt $\lim(a_{2n}) = \alpha$, azaz

   $$2\alpha = \lim(a_{n+1}) + \lim(a_{n-1}) = 2\cos(a)\lim(\cos(na)) = 2\cos(a)\alpha \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha(\cos(a) - 1) = 0.$$

   Tehát két esetet kell megkülönböztetnünk:

   $\boxed{\alpha = 0}$. ebben az esetben

   $$0 = \lim(a_{2n}) = \lim(\cos(2na)) = \lim(2\cos^2(na) - 1) = 2\alpha^2 - 1,$$

   ami nem lehetséges.

   $\boxed{\cos(a) = 1}$. $a = 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

   Ezért

   $$KH(f_n) = \{2k\pi :\ k \in \mathbb{Z}\}, \qquad f : \{2k\pi :\ k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := 1. \quad \blacksquare$$

Előfordulhat az, hogy

$$f_n \to_A f \qquad (n \to \infty),$$

de a konvergencia az A halmazon különböző pontjaiban nem „egyformán gyors”, nem „egyenletes”. Ennek szemléltetésére alkalmas a

8.0.2. példa. Az

$$f_n(x) := \frac{nx}{nx+1} \qquad (0 \leq x \in \mathbb{R};\ n \in \mathbb{N})$$

függvénysorozat esetében $KH(f_n) = [0, +\infty)$ és

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x = 0), \\ \\ 1 & (x > 0), \end{cases}$$

azaz minden $x > 0$ és minden $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy ha $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$, akkor

$$\left| \frac{nx}{nx+1} - 1 \right| = 1 - \frac{nx}{nx+1} < \varepsilon.$$

Számítsuk ki ezt a N küszöbindexet! Ha

$$1 - \frac{nx}{nx+1} < \varepsilon,$$

akkor

$$nx + 1 - nx < \varepsilon nx + \varepsilon,$$

ahonnan

$$\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon x} < n.$$

Ekkor

$$N = \left[\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon x} \right] + 1.$$

N tehát nemcsak ε-tól, hanem x-től is függ. Adott $\varepsilon > 0$-hoz tehát a $[0, +\infty)$ intervallumon nem található minden x-re egyszerre érvényes küszöbindex, vagyis itt a konvergencia nem egyenletes.

8.0.2. definíció. Azt mondjuk, hogy az (f_n) függvénysorozat **egyenletesen konvergens az $A \subset H$ halmazon**, ha létezik olyan $f : A \to \mathbb{R}$ függvény, hogy

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall x \in A\ \forall N \leq n \in \mathbb{N} : \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

8.0.1. megjegyzések.

1. Ilyen azt is mondjuk, hogy az (f_n) függvénysorozat **egyenletesen tart** az f függvényhez az A halmazon: $f_n \rightrightarrows_A f$ $(n \to \infty)$.

2. Világos, hogy minden egyenletesen konvergens függvénysorozat pontonként is konvergens, mégpedig ugyanazon határfüggvénnyel. Figyeljük meg, hogy az egyenletes konvergencia abban különbözik a konvergenciától, hogy itt N nem függ x-től, azaz minden ponthoz ugyanolyan küszöbindex található.

3. A **konvergencia nem egyenletes**, ha
   $\exists \varepsilon > 0\, \forall N \in \mathbb{N}\, \exists x \in A\, \exists N \leq n \in \mathbb{N}\colon |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon$.

4. $f_n \rightrightarrows_A f$ $(n \to \infty) \iff$

   $$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall x \in A\ \forall N \leq m, n \in \mathbb{N}: \quad |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

   („**egyenletes Cauchy-feltétel**").

5. $f_n \rightrightarrows_A f$ $(n \to \infty) \iff$
   a (ξ_n) sorozat nullsorozat, ahol

   $$\xi_n := \sup\{|f_n(x) - f(x)| : \ x \in A\} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

8.0.2. feladat. Vizsgáljuk meg az alábbi függvénysorozatokat konvergencia, ill. egyenletes konvergencia szempontjából!

1. $f_n(x) := \dfrac{1}{n+x}$ $(-1 < x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N})$;
2. $f_n(x) := \dfrac{2nx}{1+n^2x^2}$ $(1 \leq x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N})$;
3. $f_n(x) := \dfrac{x}{1+n^2x^2}$ $(x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N})$;
4. $f_n(x) := x^n - x^{n+1}$ $(x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N})$;
5. $f_n(x) := \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n^2}}$ $(x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N})$;
6. $f_n(x) := \left(x + \dfrac{1}{n}\right)^2$ $(x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N})$.

Útm.

1. Mivel minden $-1 < x \in \mathbb{R}$ esetén

   $$f_n(x) = \frac{1}{n+x} \to 0 \qquad (n \to \infty),$$

   ezért

   $$KH(f_n) = (-1, +\infty) \qquad \text{és} \qquad f : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) := 0.$$

A konvergencia egyenletes, ui.

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{n+x} < \frac{1}{n-1} \qquad (2 \leq n \in \mathbb{N};\ x \in (-1, +\infty))$$

és $\lim \left(\frac{1}{n-1}\right) = 0$, így minden $\varepsilon > 0$ van olyan $2 \leq N \in \mathbb{N}$, hogy $\frac{1}{n-1} < \varepsilon$, azaz

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad (x \in (-1, +\infty)).$$

2. Mivel minden $1 \leq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2} \to 0 \qquad (n \to \infty),$$

ezért $KH(f_n) = [1, +\infty)$ és

$$f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := 0.$$

A konvergencia egyenletes, ui.

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{2nx}{1+n^2x^2} < \frac{2nx}{n^2x^2} = \frac{2}{nx} \leq \frac{2}{n} \qquad (n \in \mathbb{N};\ 1 \leq x \in \mathbb{R})$$

és $\lim \left(\frac{2}{n}\right) = 0$, így minden $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $1 \leq N \in \mathbb{N}$, hogy minden $\mathbb{N} \ni n \geq N$-re $\frac{2}{n} < \varepsilon$, azaz

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad (x \in [-1, +\infty)).$$

3. Mivel minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2} \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty),$$

ezért $KH(f_n) = \mathbb{R}$ és

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := 0.$$

A konvergencia egyenletes, ui.

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{|x|}{1+n^2x^2} \leq \frac{1}{2n} \qquad (n \in \mathbb{N};\ x \in \mathbb{R}),$$

(hiszen $(1 - n|x|)^2 \geq 0$) és $\lim \left(\frac{1}{2n}\right) = 0$, így minden $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $1 \leq N \in \mathbb{N}$, hogy minden $\mathbb{N} \ni n \geq N$-re $\frac{1}{2n} < \varepsilon$, azaz

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

4. Mivel

$$f_n(x) = x^n(1-x) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ezért $KH(f_n) = (-1,1]$ és

$$f : (-1,1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := 0.$$

A konvergencia nem egyenletes, ui.

$$\sup \{|f_n(x) - f(x)| :\ x \in (-1,1]\} = \sup \{|x|^n \cdot |1-x| :\ x \in (-1,1]\} = 2 \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

5. Mivel minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f_n(x) \longrightarrow |x| \qquad (n \to \infty),$$

ezért $KH(f_n) = \mathbb{R}$ és

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := |x|.$$

A konvergencia egyenletes, ui.

$$\begin{aligned}
\sup\{|f_n(x) - f(x)| : \ x \in \mathbb{R}\} &= \sup\left\{\left|\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - |x|\right| : \ x \in \mathbb{R}\right\} = \\
&= \frac{1}{n}\sup\left\{\frac{1}{\sqrt{n^2x^2+1} + n|x|} : \ x \in \mathbb{R}\right\} = \\
&= \frac{1}{n} \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty).
\end{aligned}$$

Megjegyzés. Felhasználtuk, hogy ha $\alpha > 0$, $A \subset \mathbb{R}$ felülről korlátos, akkor

$$\sup(\alpha A) = \alpha \sup(A).$$

6. Mivel minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f_n(x) \to x^2 \qquad (n \to \infty),$$

ezért $KH(f_n) = \mathbb{R}$ és

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := x^2.$$

A konvergencia nem egyenletes, ui.

$$\begin{aligned}
\sup\{|f_n(x) - f(x)| : \ x \in \mathbb{R}\} &= \sup\left\{\left|\left(x + \frac{1}{n} - x\right)\left(x + \frac{1}{n} + x\right)\right| : \ x \in \mathbb{R}\right\} = \\
&= \frac{1}{n} \cdot \sup\left\{\left|\frac{1}{n} + 2x\right| : \ x \in \mathbb{R}\right\} = +\infty \quad (n \in \mathbb{N}).
\end{aligned}$$

8.0.3. feladat. Állapítsuk meg az

$$f_n(x) := \frac{\sqrt{nx}}{1 + nx} \qquad (x \in [0,1], \ n \in \mathbb{N}_0)$$

függvénysorozat konvergenciatartományát és határfüggvényét! Egyenletesen konvergens-e az (f_n) ill. az (f_n') sorozat?

Útm. Mivel

$$f_n(x) = \left\{\begin{array}{ll} 0 & (x = 0) \\ \dfrac{1}{\frac{1}{\sqrt{nx}} + \sqrt{n}} & (x \in (0,1]) \end{array}\right\} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \quad (n \in \mathbb{N}, \ x \in [0,1]),$$

azaz

$$\lim(f_n(x)) = 0 \qquad (x \in [0,1]),$$

ezért a függvénysorozat konvergenciahalmaza a $[0,1]$ intervallum, határfüggvénye pedig az

$$f(x) := 0 \qquad (x \in [0,1])$$

függvény. A konvergencia egyenletes, ui.

$$\sup\{|f_n(x) - f(x)| \in \mathbb{R} : \ x \in [0,1]\} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{n}} + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$f_n'(x) = \frac{\sqrt{n}(1+nx) - \sqrt{n}xn}{(1+nx)^2} = \frac{\sqrt{n}}{(1+nx)^2} \qquad (x \in [0,1])$$

és

$$f_n'(0) = \sqrt{n} \to +\infty \qquad (n \to \infty),$$

így (f_n') nemcsak, hogy egyenletesen nem, de még pontonként sem konvergens. ■

8.0.1. tétel. Ha

$$f_n \in \mathfrak{C}(A) \quad (n \in \mathbb{N}) \qquad \text{és} \qquad f_n \rightrightarrows_A f \quad (n \to \infty), \qquad \text{akkor} \qquad f \in \mathfrak{C}(A).$$

Biz.

8.0.2. megjegyzések.

1. A 8.0.1. tételben a konvergencia egyenletessége nem hagyható el, ui. pl. az

$$f_n(x) := \frac{1}{1+nx} \qquad (0 \leq x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N})$$

függvénysorozat esetében $f_n \in \mathfrak{C}$, $KH(f_n) = [0, +\infty)$,

$$f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} 1 & (x = 0), \\ 0 & (x > 0) \end{cases} \qquad \text{így} \quad f \notin \mathfrak{C}.$$

A konvergencia tehát nem egyenletes, ami közvetlenül is belátható:

$$\sup_{0 \leq x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = 1 \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Egyébként megmutatható, hogy tetszőleges $\delta > 0$ esetén (f_n) egyenletesen konvergens az $A := (\delta, +\infty)$ halmazon, ui. minden $x \in A$ ill. $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{1+nx} < \frac{1}{nx} < \frac{1}{n\delta},$$

és

$$\lim \left(\frac{1}{n\delta}\right) = 0,$$

ezért minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$ esetén

$$\frac{1}{n\delta} < \varepsilon, \qquad \text{azaz} \qquad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad (x \in A).$$

2. Van azonban olyan folytonos függvényekből álló nem egyenletesen konvergens függvénysorozat, amelynek határfüggvénye folytonos. Az

$$f_n(x) := n^2 x(1 - x^2)^n \qquad (x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N})$$

függvénysorozat konvergenciahalmaza: $KH(f_n) = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ és határfüggvénye:

$$f : (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := 0,$$

ui. tetszőleges $k \in \mathbb{N}$ esetén az $(n^k q^n)$ sorozat pontosan akkor konvergens, ha $|q| < 1$ és ekkor $\lim(n^k q^n) = 0$. Így bármely $nqin\mathbb{N}$ esetén $f_n, f \in \mathfrak{C}$, de a konvergencia nem egyenletes, ui. ha $n \in \mathbb{N}$, akkor

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n^2}{n}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n = n\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \longrightarrow +\infty \qquad (n \to \infty),$$

hiszen

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \to 1 \quad (n \to \infty), \quad \text{mivel} \quad 1 - \frac{1}{n} \leq \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \leq 1 \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

8.0.2. tétel. Ha

$$f_n \in \mathfrak{R}[a,b] \quad (n \in \mathbb{N}) \qquad \text{és} \qquad f_n \rightrightarrows_{[a,b]} f \quad (n \to \infty),$$

akkor $f \in \mathfrak{R}[a,b]$ és

$$\int_a^b f = \lim \left(\int_a^b f_n \right).$$

Biz.

8.0.2. megjegyzés. A 8.0.2. tételben a konvergencia egyenletessége nem hagyható el, ui. pl. az

$$f_n(x) := nx(1-x^2)^n \quad (x \in [0,1],\ n \in \mathbb{N})$$

függvénysorozat esetében a konvergenciahalmaz: $KH(f_n) = [0,1]$ ill. a határfüggvény:

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := 0,$$

továbbá

$$f_n \in \mathfrak{R}[0,1] \qquad (n \in \mathbb{N})$$

és $f \in \mathfrak{R}[0,1]$, de

$$\int_0^1 f = 0 \neq \frac{1}{2} = \lim \left(\frac{n}{2n+2} \right) = \lim \left(\int_0^1 f_n \right).$$

A konvergencia tehát nem egyenletes, ui. ha $n \in \mathbb{N}$, akkor

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n}{n}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \longrightarrow 1 > 0 \qquad (n \to \infty).$$

8.0.3. definíció. Adott

$$f_n : H \to \mathbb{R} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

függvénysorozat esetén a $\sum(f_n)$ függvénysor

- **konvergens, ill. abszolút konvergens az** $a \in H$ **pontban**, ha a $\sum(f_n(a))$ numerikus sor konvergens ill. abszolút konvergens /$\sum(f_n)$ abszolút konvergens a-ban, ha $\sum(|f_n(a)|)$ konvergens/ ;
- **pontonként ill. abszolút konvergens az** $A \subset H$ **halmazon**, ha minden $a \in A$ esetén konvergens ill. abszolút konvergens a-ban ;
- **konvergenciahalmaza**

$$KH\left(\sum(f_n)\right) := \left\{x \in H : \sum(f_n(x)) \text{ konvergens}\right\}$$

  halmaz, ill. $KH(\sum(f_n)) \neq \emptyset$ esetén **összegfüggvénye** a

$$f : KH\left(\sum(f_n)\right) \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

  függvény ;
- **egyenletesen konvergens az** $A \subset H$ **halmazon**, ha az (s_n) függvénysorozat egyenletesen konvergens A-n, ahol

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} f_k \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

8.0.3. megjegyzések.

1. Ha $f_n \in \mathfrak{C}(A)$, $\sum(f_n)$ egyenletesen konvergens A-n, akkor $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n \in \mathfrak{C}(A)$.
2. Ha $(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ olyan sorozat, amelyre
$$|f_n(x)| \leq a_n \qquad (x \in A, n \in \mathbb{N})$$
és $\sum(a_n)$ konvergens, akkor $\sum(f_n)$ egyenletesen konvergens A-n (Weierstraß-tétel).
3. A $\sum(f_n)$ függvénysoe pontosan akkor egyenletesen konvergens A-n, ha
$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall x \in A \; \forall N \leq m, n \in \mathbb{N} : \quad |s_m(x) - s_n(x)| < \varepsilon$$
("egyenletes Cauchy-kritérium"). Az $m := n - 1$ választással azt kapjuk, hogy
$$|s_m(x) - s_n(x)| = |f_n(x)| = |f_n(x) - 0| < \varepsilon \quad (x \in A, N \leq n \in \mathbb{N}),$$
így az alábbi fontos **Következményre** jutunk:
$$\sum(f_n) \quad \text{egyenletesen konvergens } A\text{-n} \quad \Longrightarrow \quad f_n \overset{A}{\rightrightarrows} 0 \qquad (n \to \infty).$$

8.0.4. feladat. Az alábbi függvénysorok esetében adjuk meg a konvergencia-halmazt és az összegfüggvényt! Egyenletes-e a konvergencia?

1) $\sum (x^n) \quad (x \in \mathbb{R});$ 2) $\sum \left(\dfrac{1}{2^n(1+x^2)^n}\right) \quad (x \in \mathbb{R});$

3) $\sum \left(\dfrac{x}{(1+x)^n}\right) \quad (-1 \neq x \in \mathbb{R}).$

Útm.

1. Tudjuk, hogy
$$KH\left(\sum (x^n)\right) = (-1,1)$$
(mértani sor) és az összegfüggvény
$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \qquad (x \in (-1,1)).$$
A konvergencia nem egyenletes, ui. bármely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén
$$\sup\{|f_n(x) - 0| : \; x \in (-1,1)\} = \sup\{|x^n| : \; x \in (-1,1)\} = (\sup\{|x| : \; x \in (-1,1)\})^n = 1.$$
Megjegyzés. Ha $f \geq 0$, akkor
$$\sup(f^n) = (\sup(f))^n.$$

2. Mivel
$$\left|\frac{1}{2(1+x^2)}\right| < 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{1}{1+x^2} < 2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2 > -1/2,$$
ezért
$$KH\left(\sum\left(\frac{1}{2^n(1+x^2)^n}\right)\right) = \mathbb{R}$$
(mértani sor) és az összegfüggvény
$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n(1+x^2)^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2(1+x^2)}} = 1 + \frac{1}{1+2x^2} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$
A Weierstraß-kritérium következményeként a konvergencia egyenletes, ui. minden $x \in \mathbb{R}$ esetén
$$0 < \frac{1}{2^n(1+x^2)^n} \leq \frac{1}{2^n(1+0)^n} = \frac{1}{2^n}$$
és $\sum\left(\frac{1}{2^n}\right)$ konvergens.

3. Mivel
$$\left|\frac{1}{1+x}\right| < 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in (-\infty,-2) \cup (0,+\infty),$$
ezért
$$KH\left(\sum\left(\frac{x}{(1+x)^n}\right)\right) = (-\infty,-2) \cup [0,+\infty)$$
(mértani sor) és az összegfüggvény
$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{(1+x)^n} = \begin{cases} -1 & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases} \qquad (x \in (-\infty,-2) \cup [0,+\infty)),$$
ui $x = 0$ esetén
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{0}{(1+0)^n} = 0,$$
és ha $x \neq 0$, akkor
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{(1+x)^n} = \frac{x}{1-(1+x)}.$$
A konvergencia nem egyenletes, ui. az összegfüggvény nem folytonos. ■

8.0.4. definíció. Ha
$$f_n(x) := a_n(x-c)^n \quad (x \in \mathbb{R}),$$
akkor a $\sum(f_n)$ függvénysort hatványsornak nevezzük.

8.0.4. megjegyzések.

1. Hatványsor konvergenciahalmaza mindig intervallum.
2. Ha valamely $I \subset \mathbb{R}$ intervallum esetén

$$KH(\sum(a_n(x-c)^n)) = I \qquad \text{és} \qquad f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n \quad (x \in I),$$

   akkor a

$$\sum_{n=0} \left(na_n(x-c)^{n-1}\right), \quad \text{ill. a} \quad \sum_{n=0} \left(\frac{a_n}{n+1}(x-c)^{n+1}\right)$$

   hatványsornak is az I intervallum a konvergenciahalmaza és

$$\sum_{n=0}^{\infty} na_n(x-c)^{n-1} = f'(x), \qquad \text{ill.} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-c)^{n+1} = F(x) - F(c),$$

   ahol $F' = f$.

8.0.5. feladat. Határozzuk meg az alábbi hatványsorok konvergenciahalmazát és összegfüggvényét!

1) $\sum_{n=1} \left(\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right) \quad (x \in \mathbb{R})$,

2) $\sum_{n=0} ((n+1)(n+2)x^n) \quad (x \in \mathbb{R})$,

3) $\sum_{n=1} \left((-1)^n \frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right) \quad (x \in \mathbb{R})$.

Útm.

1. A

$$\sum_{n=1} \left(x^{2n-2}\right) \quad (x \in \mathbb{R})$$

   sor konvergenciahalmaza: $(-1,1)$ és

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-2} = \sum_{n=1}^{\infty} (x^2)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2} \qquad (x \in (-1,1)).$$

   Ha $|x| > 1$, akkor az eredeti sor divergens, ui. ha konvergens volna valamely $(-a, a)$ $(a > 1)$ intervallumon, akkor a derivált sor is konvergens volna ugyanezen az intervallumon. Az $x = -1$ és az $x = 1$ helyeken a sor triviálisan divergens, így konvergenciahalmaza $(-1,1)$, és

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad (x \in (-1,1)).$$

2. A

$$\sum_{n=0} \left(x^{n+2}\right) \quad (x \in \mathbb{R})$$

sor konvergenciahalmaza: $(-1{,}1)$ és

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+2} = x^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{x^2}{1-x} =: f(x) \qquad (x \in (-1{,}1)).$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n = f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} \qquad (x \in (-1{,}1)).$$

3. Mivel

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{2n-2} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n (x^2)^{n-1} = -\frac{1}{1+x^2} \qquad (x \in (-1{,}1)),$$

ezért bármely $x \in (-1{,}1)$ esetén

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n-1}}{2n-1} = \int_0^x -\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = -\mathrm{arctg}\,(x)$$

Az $x = -1$ ill. az $x = 1$ pontokban divergens harmonikus sort kapunk. ■

2017.12.29.

9. fejezet

Fourier-sorok

9.0.1. definíció. Ha $p > 0$ és

$$f \in \mathfrak{R}_{2p}/\mathfrak{C}_{2p} := \{g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \; g \in \mathfrak{R}[0,2p]/\mathfrak{C}[0,2p]; \; g \text{ } 2p\text{-periodikus}\},$$

akkor az

$$a_n(f) := \frac{1}{p}\int_0^{2p} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right)\,\mathrm{d}x, \quad b_n(f) := \frac{1}{p}\int_0^{2p} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{p}\right)\,\mathrm{d}x \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

számok az f függvény (trigonometrikus) **Fourier-együtthatói**, és

$$S_n^f(x) := \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k(f)\cos\left(\frac{k\pi x}{p}\right) + b_k(f)\sin\left(\frac{k\pi x}{p}\right)\right) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

az f (trigonometrikus) **Fourier-sor**ának n-edik részletösszege ($n \in \mathbb{N}_0$).

9.0.0. megjegyzés. Ha $f \in \mathcal{R}_{2p}$, akkor tetszőleges $c \in \mathbb{R}$ esetén

$$\int_c^{c+2p} f = \int_0^{2p} f.$$

9.0.0. megjegyzés. Legyen $p > 0$, ill. $f \in \mathfrak{R}[-p,p]$. Ekkor, ha

- f páratlan, úgy $\int_{-p}^{p} f = 0$;
- f páros, úgy $\int_{-p}^{p} f = 2\int_0^{p} f$.

Ezért

$$\boxed{\text{páros} \quad f \quad \text{esetében} \quad b_n(f) = 0, \quad \text{ill. páratlan} \quad f\text{-re} \quad a_n(f) = 0 \quad (n \in \mathbb{N}_0)}\,.$$

9.0.1. tétel. Ha $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ és a $\sum_{n=1} (\alpha_n \cos(nx) + \beta_n \sin(nx))$ $(x \in \mathbb{R})$ függvénysor egyenletesen konvergens, továbbá

$$f(x) := \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos(nx) + \beta_n \sin(nx)) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

akkor $f \in \mathfrak{C}_{2\pi}$,

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f$$

ill. tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx)\,\mathrm{d}x \qquad \text{és} \qquad \beta_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx)\,\mathrm{d}x.$$

Biz.

9.0.1. példa. Ha $f \in \{\cos^2, \sin^2\}$, akkor f párossága folytán tetszőleges $n \in \mathbb{N}_0$ esetén $b_n(f) = 0$, továbbá

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x) \quad \text{és} \quad \sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

következtében

$$S_n^f(x) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cos(kx) \qquad (n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}),$$

ahol

$$\alpha_0 := \frac{1}{2}, \qquad \alpha_1 := 0, \qquad \alpha_2 := \pm\frac{1}{2}, \qquad \alpha_n := 0 \quad (3 \leq n \in \mathbb{N}).$$

9.0.0. megjegyzés. Ha $f \in \mathfrak{R}_{2p} \cap \mathfrak{C}[a]$ és $S_n^f(x)$ $(x \in \mathbb{R})$ konverens, akkor

$$\lim(S_n^f(a)) = f(a).$$

9.0.0. megjegyzés. Ha $f \in \mathfrak{R}_{2p} \cap \mathfrak{D}_{\pm}[a]$, akkor

$$\lim(S_n^f(a)) = f(a).$$

9.0.1. feladat. Írjuk fel annak az $f \in \mathfrak{C}_{2\pi}$ függvénynek a Fourier-sorát, amelyre

$$f(x) := |x| \qquad (|x| \leq \pi)$$

teljesül!

Útm.

- $b_n(f) = 0$ $(n \in \mathbb{N}_0)$, ui. f páros;
- $a_0(f) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |x|\,\mathrm{d}x = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,\mathrm{d}x = \dfrac{2}{\pi}\cdot\dfrac{\pi^2}{2} = \pi$
  és tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned}
a_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{2}{\pi}\left\{\left[\frac{x\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\sin(nx)}{n}\,\mathrm{d}x\right\} = \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos(nx)}{n^2}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{(-1)^n - 1}{n^2} = \\
&= \begin{cases} 0 & (n = 2k,\ k \in \mathbb{N}), \\[2ex] \dfrac{2}{\pi}\cdot\dfrac{(-1)^{(2k-1)} - 1}{(2k-1)^2} = \dfrac{-4}{\pi(2k-1)^2} & (n = 2k-1,\ k \in \mathbb{N}). \end{cases}
\end{aligned}$$

Így

$$S_n^f(x) := \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2} \qquad (x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}_0).$$

Megjegyzés. A nyilvánvaló

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} < +\infty \qquad (x \in \mathbb{R})$$

egyenlőség (és az egyenletes konvergenciára vonatkozó Weierstraß-kritérium alapján) a fenti Fourier sor egyenletesen konvergens, $f \in \mathfrak{C}_{2\pi}$, következésképpen

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2} \qquad (|x| \leq \pi).$$

Így, ha $x = 0$, akkor

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2},$$

ahonnan

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}. \quad \blacksquare$$

9.0.2. feladat. Írjuk fel annak a 2π-szerint periodikus f függvénynek a Fourier-sorát, amelyre

$$f(x) := x \qquad (|x| < \pi) \quad \text{és} \quad f(\pi) = 0$$

teljesül!

Útm.

– $a_n(f) = 0$ $(n \in \mathbb{N}_0)$, ui. f páratlan;

– minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned} b_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{2}{\pi}\left\{\left[-\frac{x\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{\cos(nx)}{n}\,\mathrm{d}x\right\} = \\ &= \frac{2(-1)^{n+1}}{n} + \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(nx)}{n^2}\right]_0^{\pi} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}. \end{aligned}$$

Így

$$S_n^f(x) := \sum_{k=1}^{n}\frac{2(-1)^{k+1}}{k}\sin(kx) \qquad (n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}).$$

Megjegyzés. Világos, hogy f deriválható az

$$A := \mathbb{R}\setminus\{(2k+1)\pi \in \mathbb{R} :\ k \in \mathbb{Z}\}$$

halmaz minden pontjában, így minden $a \in A$ esetén $\lim(S_n^f(a)) = f(a)$. A Fourier-sor azonban az

$$x_k := (2k+1)\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

pontban is konvergens: $\lim(S_n^f(x_k)) = f(x_k)$, ui.

$$f(x_k) = 0 \qquad \text{és} \qquad \sin(nx_k) = 0 \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Következésképpen

$$x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Így, ha $x = \frac{\pi}{2}$, akkor

$$\frac{\pi}{2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right).$$

Mivel

$$\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & (n = 2k,\ 0 < k \in \mathbb{N}), \\ \underbrace{\sin\left((2k-1)\frac{\pi}{2}\right)}_{\sin(k\pi)\cos(\pi/2)-\cos(k\pi)\sin(\pi/2)=-(-1)^k=(-1)^k} & (n = 2k-1,\ 0 < k \in \mathbb{N}), \end{cases}$$

ahonnan

$$(-1)^{2k-1+1}(-1)^{k+1} = (-1)^{3k+1} = (-1)^{k+1}$$

miatt

$$\frac{\pi}{2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{k+1}}{2k-1}, \qquad \text{azaz} \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}. \quad \blacksquare$$

9.0.3. feladat. Írjuk fel annak a 2π-szerint periodikus f függvénynek a Fourier-sorát, amelyre

$$f(x) := \sin\left(\frac{x}{2}\right) \qquad (-\pi \le x < \pi)$$

teljesül!

Útm. Mivel f páratlan, ezért $a_n = 0 \quad (n \in \mathbb{N}_0)$, és ha $n \in \mathbb{N}$, akkor

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \boxed{\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin\left(\frac{x}{2}\right)\sin(nx)\,dx =} \\ &= \frac{2}{\pi}\left[-\sin\left(\frac{x}{2}\right)\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\left(\frac{x}{2}\right)\frac{\cos(nx)}{n}\,dx = \\ &= -\frac{2(-1)^n}{n\pi} + \boxed{\frac{1}{\pi}}\left\{\cos\left(\frac{x}{2}\right)\left[\frac{\sin(nx)}{n^2}\right]_0^{\pi} + \boxed{\frac{1}{2n^2}\int_0^{\pi}\sin\left(\frac{x}{2}\right)\sin(nx)\,dx}\right\}, \end{aligned}$$

ahonnan

$$\frac{2}{\pi}\left(1 - \frac{1}{4n^2}\right)\int_0^{\pi}\sin\left(\frac{x}{2}\right)\sin(nx)\,dx = -\frac{2(-1)^n}{n\pi},$$

azaz

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\left(\frac{x}{2}\right)\sin(nx)\,dx = \frac{8n(-1)^n}{\pi(1-4n^2)}.$$

Így az f függvény Fourier-sora:

$$\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}\left(\frac{n(-1)^n}{1-4n^2}\sin(nx)\right) \qquad (x \in \mathbb{R}). \quad \blacksquare$$

9.0.4. feladat. Írjuk fel annak a 2π-periodikus f függvénynek a Fourier-sorát, amelyre

$$f(x) := \cos\left(\frac{x}{2}\right) \qquad (-\pi \le x < \pi)$$

teljesül! Előállítja-e a Fourier-sor a függvényt?

Útm. Mivel f páros, ezért

$$b_n = 0 \qquad (n \in \mathbb{N})$$

és

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\left(\frac{x}{2}\right)\,dx = \frac{4}{\pi},$$

ill. $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \boxed{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos(nx)\,dx =} \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\cos\left(\frac{x}{2}\right)\frac{\sin(nx)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin\left(\frac{x}{2}\right)\frac{\sin(nx)}{n}\,dx = \end{aligned}$$

$$= \quad 0+\boxed{\frac{1}{2\pi}}\left\{\left[\sin\left(\frac{x}{2}\right)\left(-\frac{\cos(nx)}{n^2}\right)\right]_{-\pi}^{\pi}+\boxed{\frac{1}{2n^2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos(nx)\,\mathrm{d}x}\right\},$$

ahonnan

$$\frac{1}{\pi}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)\int_{-\pi}^{\pi}\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos(nx)\,\mathrm{d}x=-\frac{(-1)^n}{n^2\pi},$$

azaz

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos(nx)\,\mathrm{d}x=-\frac{4(-1)^n}{\pi(4n^2-1)}.$$

Így az f függvény Fourier-sorának n-edik részletösszege:

$$S_n^f(x)=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{4k^2-1}\cos(kx)\qquad(n\in\mathbb{N},\ x\in\mathbb{R}).$$

A Weierstraß-tétel következményeként a Fourier-sor előállítja a függvényt. ■

9.0.5. feladat. Fejtsük Fourier-sorba az alábbi $f\in\mathfrak{C}_{2\pi}$ függvényt!

1) $f(x):=\begin{cases} x/2 & (x\in[0,\pi]),\\ (2\pi-x)/2 & (x\in[\pi,2\pi]);\end{cases}$ 2) $f(x):=\begin{cases} x^2/2 & (x\in[0,\pi]),\\ \left((x-2\pi)^2\right)/2 & (x\in[\pi,2\pi]).\end{cases}$

Útm.

1. Mivel
$$f(x)=\frac{1}{2}|x|\quad(x\in[-\pi,\pi]),\qquad f(x+2\pi)=f(x)\quad(x\in\mathbb{R}),$$
ezért f Fourier együtthatói az alábbi módon számolhatók:
   - $b_n(f)=0$ $(n\in\mathbb{N})$, hiszen f páros függvény,
   - ha $n=0$, akkor
$$a_0(f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{4}\right]_0^{\pi}=\frac{\pi}{2},$$
ill. $n\in\mathbb{N}$ esetén
$$\begin{aligned}a_n(f) \quad &= \quad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left\{\left[\frac{x\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi}-\right.\\ &\left.-\int_0^{\pi}\cdot\frac{\sin(nx)}{n}\,\mathrm{d}x\right\}=\frac{2}{\pi}\left\{0+\left[\frac{\cos(nx)}{n^2\pi}\right]_0^{\pi}\right\}=\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi}.\end{aligned}$$

   Ezért
$$S_n^f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2}\qquad(x\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}).$$
f Fourier-sora egyenletesen konvergens, így a sor előállítja f-et.

2. Mivel
$$f(x)=\frac{x^2}{2}\quad(x\in[-\pi,\pi]),\qquad f(x+2\pi)=f(x)\quad(x\in\mathbb{R}),$$
ezért f Fourier együtthatói az alábbi módon számolhatók:

- $b_n(f)=0$ $(n\in\mathbb{N})$, hiszen f páros függvény,
- ha $n=0$, akkor
$$a_0(f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x^3}{6}\right]_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{3},$$
ill. $n\in\mathbb{N}$ esetén
$$\begin{aligned}
a_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\left\{\left[\frac{x^2}{2}\cdot\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi}-\right.\\
&\left.-\int_0^{\pi}\frac{x\sin(nx)}{n}\,\mathrm{d}x\right\}=\frac{2}{\pi}\left\{0+\left[\frac{x\cos(nx)}{n^2}\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\frac{\cos(nx)}{n^2}\,\mathrm{d}x\right\}=\\
&= \frac{2}{\pi}\left\{\frac{\pi(-1)^n}{n^2}-\left[\frac{\sin(nx)}{n^3}\right]_0^{\pi}\right\}=\frac{2(-1)^n}{n^2}.
\end{aligned}$$

Ezért
$$S_n^f(x)=\frac{\pi^2}{6}+2\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k^2}\cos(kx)\qquad (x\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}).$$
f Fourier-sora egyenletesen konvergens, így a sor előállítja f-et. ■

9.0.6. feladat. Adott $t\in\mathbb{R}$, $f\in\mathfrak{C}_{2\pi}$ esetén számítsuk ki a
$$g(x):=f(x+t)\qquad (x\in\mathbb{R})$$
függvény Fourier-együtthatóit!

Útm.
$$a_0(g)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x+t)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_t^{2\pi+t} f(y)\,\mathrm{d}y=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f=a_0(f).$$
Ha $n\in\mathbb{N}$, akkor
$$\begin{aligned}
a_n(g) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x+t)\cos(nx)\,\mathrm{d}x=\\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi+t} f(y)\cos(n(y-t))\,\mathrm{d}y=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(y)\cos(n(y-t))\,\mathrm{d}y=\\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(y)\left\{\cos(ny)\cos(nt)+\sin(ny)\sin(nt)\right\}\,\mathrm{d}y=\\
&= \frac{\cos(nt)}{\pi}\int_0^{2\pi} f(y)\cos(ny)\,\mathrm{d}y+\frac{\sin(nt)}{\pi}\int_0^{2\pi} f(y)\sin(nt)\,\mathrm{d}y=\\
&= a_n(f)\cos(nt)+b_n(f)\sin(nt).
\end{aligned}$$
Hasonlóan látható be, hogy
$$b_n(g)=b_n(f)\cos(nt)-a_n(f)\sin(nt)\quad (n\in\mathbb{N}).$$

Megjegyzések.

1. A folytonosságot az integrálban való helyettesítésnél használtuk ki.
2. $\begin{bmatrix} a_n(g) \\ b_n(g) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(nt) & \sin(nt) \\ -\sin(nt) & \cos(nt) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_n(f) \\ b_n(f) \end{bmatrix}$ (nt "szöggel" való forgatás). ■

9.0.1. házi feladat. Legyen $f \in \mathfrak{R}_{2\pi}$. Mit állíthatunk f, ill. g Fourier-együtthatóiról, ha

1. $f(x+\pi) = f(x)$ $(x \in \mathbb{R})$, ill. $f(x+\pi) = -f(x)$ $(x \in \mathbb{R})$;
2. $f(-x) = g(x)$ $(x \in \mathbb{R})$, ill. $f(-x) = -g(x)$ $(x \in \mathbb{R})$?

9.0.1. emlékeztető. Legyen

$$\varphi_n(x) := \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k} \qquad (x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor

1. (φ_n) egyenletesen korlátos, pontosabban
$$|\varphi_n(x)| \leq 1 + \pi \qquad (x \in \mathbb{R},\ 0 < n \in \mathbb{N});$$
2. bármely $[\alpha, \beta] \subset (0{,}2\pi)$ kompakt intervallum esetén
$$\varphi_n \overset{[\alpha,\beta]}{\rightrightarrows} \varphi \qquad (n \to \infty),$$
ahol
$$\varphi(x) := \begin{cases} \dfrac{\pi - x}{2} & (x \in (0{,}2\pi)), \\ 0 & (x \in \{0{,}2\pi\}). \end{cases}$$

9.0.7. feladat. Legyen $f \in \mathfrak{R}_{2\pi}$, és igazoljuk a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n(f)}{n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\pi - x) f(x)\, \mathrm{d}x$$

egyenlőséget!

Útm.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_k(f)}{k} = \lim \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx)\, \mathrm{d}x \right) = \lim \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f\varphi_n \right) = \frac{1}{\pi} \lim \left(\int_0^{2\pi} f\varphi_n \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f\varphi = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \frac{\pi - x}{2}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\pi - x) f(x)\, \mathrm{d}x.$$

Megjegyzés. Az

$$f(x) := \frac{\pi - x}{2} \quad (x \in (0,2\pi]), \qquad f(x+2\pi) = f(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvényre alkalmazva az előbbi feladatot azt kapjuk, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\pi - x) \cdot \frac{\pi - x}{2} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{(x-\pi)^3}{3} \right]_0^{2\pi} = \frac{\pi^2}{6}. \quad \blacksquare$$

9.0.8. feladat. Legyen $f \in \mathfrak{C}_{2\pi}$, és igazoljuk hogy a

$$\sum \left(\frac{b_n(f)\cos(nt) - a_n(f)\sin(nt)}{n} \right) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

függvénysor egyenletesen konvergens és összegfüggvényére

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n(f)\cos(nt) - a_n(f)\sin(nt)}{n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x+t)(\pi - x) \, \mathrm{d}x \qquad (t \in \mathbb{R})$$

teljesül!

Útm. Legyen

$$g(x) := f(x+t) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Ekkor bármely $t \in \mathbb{R}$, ill. $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned} \left| \frac{b_n(f)\cos(nt) - a_n(f)\sin(nt)}{n} \right| \quad &\leq \quad \frac{|b_n(f)| \cdot |\cos(nt)| + |a_n(f)| \cdot |\sin(nt)|}{n} \leq \\ &\leq \quad \frac{|b_n(f)| + |a_n(f)|}{n}, \end{aligned}$$

így

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|b_n(f)| + |a_n(f)|}{n} < +\infty$$

és a Weierstraß-kritérium felhasználásával az egyenletes konvergencia bizonyított. Továbbá bármely $t \in \mathbb{R}$ esetén

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n(f)\cos(nt) - a_n(f)\sin(nt)}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n(g)}{n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\pi - x) f(x+t) \, \mathrm{d}x. \quad \blacksquare$$

9.0.9. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $f \in \mathfrak{R}_{2\pi}$, akkor a

$$\left(\int_0^x S_n^f(t) \, \mathrm{d}t \right) \qquad (x \in \mathbb{R}, \ n \in \mathbb{N})$$

sor egyenletesen konvergens!

Útm.

$$\int_0^x S_n^f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{a_0(f)x}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k(f)\frac{\sin(kx)}{k} - b_k(f)\frac{\cos(kx)}{k}\right) =$$

$$= \frac{a_0(f)x}{2} + \sum_{k=1}^{n}\frac{a_k(f)\sin(kx) - b_k(f)\cos(kx)}{k} \qquad (x\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}). \quad \blacksquare$$

9.0.2. emlékeztető.

1. Ha $f\in\mathfrak{C}_{2\pi}$ és $\left(S_n^f(x)\right)$ $(x\in\mathbb{R})$ egyenletesen konvergens, akkor $\lim\left(S_n^f\right) = f$, azaz ha $f\in\mathfrak{C}_{2\pi}$ olyan függvény, amelynek trigonometrikus Fourier-sora egyenletesen konvergens, akkor a Fourier-sor összege maga az f függvény.
2. Ha $f\in\mathfrak{C}_{2\pi}\cap\mathfrak{C}^2$, akkor
$$S_n^f \rightrightarrows f \qquad (n\to\infty),$$
azaz f-et Fourier-sora „előállítja” (f „Fourier-sorba fejthető”).

9.0.10. feladat. Számítsuk ki az

$$f := |\sin|$$

függvény Fourier-sorát, majd mutassuk meg, hogy

$$|S_n^f(x) - f(x)| \le \frac{2}{\pi n} \qquad (x\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N})$$

teljesül!

Útm. Mivel f páros, ezért bármely $n\in\mathbb{N}$ esetén $b_n(f)=0$. Világos, hogy

$$a_0(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|\sin| = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin - \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}\sin = \frac{2}{\pi}[-\cos]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}(-\cos(\pi)+\cos(0)) = \frac{4}{\pi},$$

$$a_1(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|\sin|\cos = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\cos - \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}\sin\cos =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(2x)}{2}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}\frac{\sin(2x)}{2}\,\mathrm{d}x = 0 - 0 = 0.$$

A további együtthatók kiszámításához felhasználjuk a tetszőleges $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ esetén fennálló

$$\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}$$

egyenlőséget. Ha $2\le n\in\mathbb{N}$, akkor

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|\sin(x)|\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}\sin(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin((n+1)x)-\sin((n-1)x)}{2}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}\frac{\sin((n+1)x)-\sin((n-1)x)}{2}\,\mathrm{d}x =$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{\cos((n+1)x)}{n+1}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{\cos((n-1)x)}{n-1}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{\cos((n+1)x)}{n+1}\right]_{\pi}^{2\pi} + \\
&\quad + \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{\cos((n-1)x)}{n-1}\right]_{\pi}^{2\pi} = \\
&= -\frac{1}{2\pi(n+1)}\{\cos((n+1)\pi) - \cos(0) - \cos((n+1)2\pi) + \cos((n+1)\pi)\} + \\
&\quad + \frac{1}{2\pi(n-1)}\{\cos((n-1)\pi) - \cos(0) - \cos((n-1)2\pi) + \cos((n-1)\pi)\} = \\
&= -\frac{1}{2\pi(n+1)}\left\{2-(-1)^{n+1}-2\right\} + \frac{1}{2\pi(n-1)}\left\{2(-1)^{n-1}-2\right\} = \\
&= \frac{(-1)^{n+1}-1}{\pi}\left(\frac{-1}{n+1}+\frac{1}{n-1}\right) = \\
&= \frac{(-1)^{n+1}-1}{\pi}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right) = \frac{(-1)^{n+1}-1}{\pi}\cdot\frac{2}{n^2-1}.
\end{aligned}
$$

Megjegyzés. Az a_n együttható számolása lényegesen egyszerűbb az

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x$$

észrevétellel, ui.

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\sin(x)|\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\boxed{\int_0^{\pi}\sin(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x}.$$

Mivel

$$
\begin{aligned}
\boxed{\int_0^{\pi}\sin(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x} &= \left[\frac{\sin(x)\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x = 0+ \\
&\quad + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos(x)(-\sin(nx))\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\cos(x)\cos(nx)}{n^2}\right]_0^{\pi} + \\
&\quad + \frac{1}{n^2}\boxed{\int_0^{\pi}\sin(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x},
\end{aligned}
$$

ezért

$$\int_0^{\pi}\sin(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^{n+1}-1}{n^2}.$$

Így

$$S_n^f(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^{k+1}-1}{k^2-1}\cos(kx) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{4l^2-1}\cos(2lx) \quad (x\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}).$$

Mivel

$$\left|S_n^f(x)\right| \leq \frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{4l^2-1}|\cos(2lx)| \leq \frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{4l^2-1} \qquad (x\in\mathbb{R},\ 2\leq n\in\mathbb{N}),$$

ezért a Weierstraß-kritérium következnényeként a f Fourier-sora egyenletesen konvergens, ui.

$$\begin{aligned}
\left|\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{4l^2-1}\cos(2lx)\right| &\leq \frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{l=1}^{n}\frac{|\cos(2lx)|}{4l^2-1} \leq \frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{4l^2-1} = \\
&= \frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{(2l+1)(2l-1)} = \frac{2}{\pi}+\frac{2}{\pi}\sum_{l=1}^{n}\left(\frac{1}{2l+1}-\frac{1}{2l-1}\right) = \\
&= \frac{2}{\pi}-\frac{2}{\pi}\left(-1+\frac{1}{2n+1}\right) \longrightarrow \frac{4}{\pi} \quad (n\to\infty) \quad (x\in\mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Az előző tétel miatt így

$$\lim\left(S_n(f,x)\right)=f(x) \quad (x\in\mathbb{R}), \qquad \text{azaz} \quad |\sin(x)|=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\cos(2lx)}{4l^2-1} \quad (x\in\mathbb{R}).$$

Tehát, ha $n\in\mathbb{N}$, akkor

$$\begin{aligned}
|S_n^f(x)-f(x)| &= \left|\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{4l^2-1}\cos(2lx)-\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\cos(2lx)}{4l^2-1}\right| \leq \frac{4}{\pi}\sum_{l=n+1}^{\infty}\frac{|\cos(2lx)|}{4l^2-1} \leq \\
&= \frac{4}{\pi}\sum_{l=n+1}^{\infty}\frac{1}{4l^2-1} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{2n+1} \leq \frac{2}{n\pi}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

9.0.11. feladat. Írjuk fel az alábbi (2π-periodikus) f függvény Fourier-sorát!

1) $f(x) := \begin{cases} 0 & (x\in(-\pi,0]), \\ \pi & (x\in(0,\pi]), \end{cases}$ 2) $f(x) := x \quad (-\pi < x \leq \pi)$.

Konvergens-e a szóban forgó Fourier-sor?

Útm.

1. Világos, hogy

$$a_0(f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f = \frac{1}{\pi}\cdot\left\{\int_{-\pi}^{0} 0\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{\pi}\pi\,\mathrm{d}x\right\}=\pi.$$

Ha $n\in\mathbb{N}$, akkor

$$a_n(f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\cdot\left\{\int_{-\pi}^{0} 0\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{\pi}\pi\cos(nx)\,\mathrm{d}x\right\}=\frac{1}{\pi}\cdot\left[\pi\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi}=0,$$

ill.

$$\begin{aligned}
b_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\cdot\left\{\int_{-\pi}^{0} 0\mathrm{d}x+\int_{0}^{\pi}\pi\sin(nx)\,\mathrm{d}x\right\} = \\
&= \frac{1}{\pi}\cdot\left[\frac{-\pi\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi}=\frac{1-\cos(n\pi)}{n}=\frac{1-(-1)^n}{n}.
\end{aligned}$$

Így

$$S_n^f(x) = \frac{\pi}{2} + 2\sum_{l=0}^{n} \frac{\sin((2l+1)x)}{2l+1} \qquad (x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}).$$

Konvergenciavizsgálat a $[0,2\pi]$ intervallumon:

– ha $x \in \{0, \pi, 2\pi\}$, akkor

$$S_{2n+2}^f(x) = S_{2n+1}^f(x) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2} \qquad (n \in \mathbb{N});$$

– ha $x \in (0, \pi)$, akkor $2x \in (0,2\pi)$, így

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2} + 2\sum_{l=0}^{\infty} \frac{\sin((2l+1)x)}{2l+1} &= \frac{\pi}{2} + 2\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(kx)}{k} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin((2k)x)}{2k}\right\} = \\ &= \frac{\pi}{2} + 2\left\{\frac{\pi - x}{2} - \frac{\pi - 2x}{4}\right\} = \ldots = \pi;\end{aligned}$$

– ha $x \in (\pi, 2\pi)$, akkor $2x \in (2\pi, 4\pi)$, így

$$\frac{\pi}{2} - 2\sum_{l=0}^{\infty} \frac{\sin((2l+1)x)}{2l+1} = \frac{\pi}{2} - 2\left\{\frac{\pi - x}{2} - \frac{3\pi - 2x}{4}\right\} = \ldots = 0.$$

Megjegyzés. Látható, hogy ha $f \notin \mathfrak{C}[x]$, akkor $\lim\left(S_n^f(x)\right) = \dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$.

2. Mivel f páratlan, ezért tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n(f) = 0$, továbbá

$$\begin{aligned}b_n(f) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{2}{\pi}\left\{\left[\frac{-x\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\cos(nx)\,\mathrm{d}x\right\} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}.\end{aligned}$$

Így

$$S_n^f(x) = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin(kx) \qquad (x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}).$$

Konvergenciavizsgálat a $[-\pi, \pi]$ intervallumon:

– ha $x \in \{-\pi, 0, \pi\}$, akkor $S_n^f(x) = 0$ $(n \in \mathbb{N})$, ahonnan $\lim\left(S_n^f(x)\right) = 0$ következik;

– ha $x \in (0, \pi)$, akkor

$$\begin{aligned}2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin(kx) = &= 2\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2l+1}}{2l}\sin(2lx) + 2\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2l}}{2l-1}\sin((2l-1)x) = \\ &= -2\cdot\frac{\pi - 2x}{4} + 2\cdot\left\{\frac{\pi - x}{2} - \frac{\pi - 2x}{4}\right\} = x;\end{aligned}$$

– ha $x \in (-\pi, 0)$, akkor $x + 2\pi \in (\pi, 2\pi)$, így

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(kx)}{k}\sin(kx) &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(k(x+2\pi)}{k}\sin(kx) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(k(x+2\pi)}{k}\sin(kx) = \\ &= \frac{\pi - (x+2\pi)}{2} = \frac{-x-\pi}{2}.\end{aligned}$$

Ezért

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sin(2lx)}{2l} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-2x-\pi}{2} = \frac{-2x-\pi}{4},$$

ill.

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sin((2l-1)x)}{2l-1} = \frac{-x-\pi}{2} - \frac{-2x-\pi}{4} = \frac{-\pi}{4},$$

azaz

$$2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin(kx) = 2 \cdot \left\{ -\frac{-2x-\pi}{4} + \frac{-\pi}{4} \right\} = x.$$

Megjegyzés. Látható, hogy ha $f \notin \mathfrak{C}[x]$, akkor

$$\lim \left(S_n^f(x) \right) = \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}. \quad \blacksquare$$

9.0.12. feladat. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan 2π-periodikus, páratlan függvény, amelyre

$$f(x) = x^3 - 3\pi x^2 + 2\pi^2 x \quad (0 \leq x < \pi).$$

Írjuk fel f Fourier-sorát, majd indokoljuk meg, hogy ez a Fourier-sor konvergál f-hez, továbbá számítsuk ki a

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}$$

összeget!

Útm.

Mivel f páratlan, ezért minden $n \in \mathbb{N}_0$ esetén $a_n(f) = 0$. Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor

$$\begin{aligned}
b_n(f) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x^3 - 3\pi x^2 + 2\pi^2 x) \sin(nx)\, \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (x^3 - 3\pi x^2 + 2\pi^2 x) \sin(nx)\, \mathrm{d}x = \\
&= -\frac{2}{\pi n} \left[(x^3 - 3\pi x^2 + 2\pi^2 x) \cos(nx) \right]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi n} \int_0^{\pi} (3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2) \cos(nx)\, \mathrm{d}x = \\
&= \frac{2}{\pi n^2} \left[(3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2) \sin(nx) \right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi n^2} \int_0^{\pi} (6x - 6\pi) \sin(nx)\, \mathrm{d}x = \\
&= \frac{2}{\pi n^3} \left[(6x - 6\pi) \cos(nx) \right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi n^3} \int_0^{\pi} 6 \cos(nx)\, \mathrm{d}x = \frac{12}{n^3}.
\end{aligned}$$

Így f Fourier-sorának n-edik részletösszege:

$$S_n^f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{12}{k^3} \sin(kx) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Mivel $f \in \mathfrak{C}_{2\pi} \cap \mathfrak{C}^2$, ezért

$$S_n^f \rightrightarrows f \qquad (n \to \infty),$$

ami a nyilvánvaló

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{12}{k^3}\sin(kx)\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{12}{k^3}\sin(kx)\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty}\frac{12}{k^3} < +\infty \qquad (x\in\mathbb{R})$$

egyenlőtlenség (ill. az egyenletes konvergenciára vonatkozó Weierstraß-kritérium) felhasználásával is jól látható. Következésképpen

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{12}{k^3}\sin(kx) = x^3 - 3\pi x^2 + 2\pi^2 x \quad (x\in\mathbb{R}).$$

Ha $x = \dfrac{\pi}{2}$, akkor

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{12}{k^3}\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) = \pi^3\left(\frac{1}{8} - \frac{3}{4} + 1\right),$$

azaz

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{12(-1)^k}{(2k+1)^3} = \frac{3\pi^3}{8},$$

amiből

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$$

következik. ■

9.0.3. emlékeztető.

1. Ha $f\in\mathfrak{R}[-p,p]$, akkor fennál az

$$\frac{a_0^2(f)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2(f) + b_n^2(f)) = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f^2(x)\,\mathrm{d}x$$

   Parseval-egyenlőség.

2. Ha $f\in\mathfrak{C}[-p,p]$ és a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2(f) + b_n^2(f)) < +\infty$, akkor

$$S_n^f \rightrightarrows f \qquad (n\to\infty)$$

   teljesül.

9.0.13. feladat. Legyen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ olyan 2π-periodikus függvény, amelyre

$$f(x) = x^2 \quad (-\pi \leq x \leq \pi).$$

Írjuk fel f Fourier-sorát, majd indokoljuk meg, hogy ez a Fourier-sor konvergál f-hez, továbbá számítsuk ki a

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}$$

összeget!

Útm. Mivel f páros függvény, ezért $b_n(f) = 0$ $(n \in \mathbb{N})$. Világos, hogy

$$a_0(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{2\pi^2}{3},$$

továbbá bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned}
a_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2x\frac{\sin(nx)}{n}\,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{\pi}(0-0) - \frac{2}{\pi n}\left\{\left[x\cdot\frac{-\cos(nx)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{-\cos(nx)}{n}\,\mathrm{d}x\right\} = \\
&= \frac{2}{\pi n^2}\left\{[x\cos(nx)]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi}\right\} = \frac{2}{\pi n^2}[x\cos(nx)]_{-\pi}^{\pi} - 0 = \\
&= \frac{2}{\pi n^2}(\pi\cos(n\pi) + \pi\cos(-n\pi)) = \frac{4\cos(n\pi)}{n^2} = \frac{4(-1)^n}{n^2}.
\end{aligned}$$

Így f Fourier-sorának n-edik részletösszege:

$$S_n^f(x) = \frac{2\pi^2}{3}\sum_{k=1}^{n}\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos(kx) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Mivel

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos(kx)\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos(kx)\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{n^2} < +\infty \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ezért a Weierstraß-kritérium látható, hogy

$$S_n^f \rightrightarrows f \qquad (n \to \infty).$$

Felhasználva a Parseval-egyenlőséget azt kapjuk, hogy

$$\frac{4\pi^4}{18} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n^4} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^4\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^5}{5}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^4}{5},$$

ahonnan

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{1}{16}\cdot\left\{\frac{2\pi^4}{5} - \frac{4\pi^4}{18}\right\} = \frac{1}{16}\cdot\frac{36\pi^4 - 20\pi^4}{90} = \frac{\pi^4}{90}$$

következik. ■

2017.12.29.

10. fejezet

Az utolsó előadás anyaga

10.0.1. emlékeztető. Ha $f \in \mathfrak{C}_{2\pi}$ és (S_n^f) egyenletesen konvergens, akkor

$$S_n^f \rightrightarrows f \qquad (n \to \infty),$$

következésképpen

$$\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(f)\cos(kx) + b_k(f)\sin(kx)) = f(x) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

10.0.1. tétel. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kétszer folytonosan deriválható, 2π-periodikus függvény. Ekkor

$$(S_n^f(x)) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

egyenletesen konvergens.

Biz. Mivel bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned}
\pi a_n(f) &= \int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{f(x)\sin(nx)}{n}\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} f'(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \\
&= -\frac{1}{n}\left\{\left[-\frac{f'(x)\cos(nx)}{n}\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} f''(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x\right\} = \\
&= \frac{f'(2\pi) - f'(0)}{n^2} - \frac{1}{n^2}\int_0^{2\pi} f''(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{n^2}\int_0^{2\pi} f''(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

ill.

$$\begin{aligned}
\pi b_n(f) &= \int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{f(x)\cos(nx)}{n}\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} f'(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{n}\left\{\left[\frac{f'(x)\sin(nx)}{n}\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} f''(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x\right\} = \\
&= -\frac{1}{n^2}\int_0^{2\pi} f''(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

ezért a

$$\kappa := \int_0^{2\pi} |f''(x)|\,\mathrm{d}x \in \mathbb{R}$$

számmal bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$|\pi a_n(f)| \leq \frac{1}{n^2}\int_0^{2\pi} |f''(x)|\,\mathrm{d}x = \frac{\kappa}{n^2}, \qquad \text{ill.} \qquad |\pi b_n(f)| \leq \frac{1}{n^2}\int_0^{2\pi} |f''(x)|\,\mathrm{d}x = \frac{\kappa}{n^2},$$

így

$$|a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx)| \leq |a_n(f)| + |b_n(f)| \leq \frac{2\kappa}{\pi n^2} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Mivel a

$$\sum\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

sor konvergens, ezért a Weierstraß-tétel következményeként (S_n^f) egyenletesen konvergens. ■

10.0.2. tétel. Ha

1. $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ olyan függvénysorozat, hogy $\sum(f_n)$ egyenletesen korlátos, azaz alkalmas $K \geq 0$ esetén

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right| \leq K \qquad (x \in [a,b],\ n \in \mathbb{N});$$

2. $\lambda_n \in [0,+\infty)$ $(n \in \mathbb{N})$ olyan számsorozat, amelyre

$$\lambda_n \searrow 0 \qquad (n \to \infty)$$

teljesül,

akkor a

$$\sum(\lambda_n f_n)$$

függvénysor egyenletesen konvergens.

Biz. Ha

$$F_k := \sum_{j=1}^{k} f_j \qquad (k \in \mathbb{N}),$$

akkor bármely $m, n \in \mathbb{N}\colon m < n$, ill. $x \in [a,b]$ esetén

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^{m} \lambda_k f_k(x) &= \sum_{k=n+1}^{m} \lambda_k \left(F_k(x) - F_{k-1}(x)\right) = \sum_{k=n+1}^{m} \lambda_k F_k(x) - \sum_{k=n+1}^{m} \lambda_k F_{k-1}(x) = \\
&= \lambda_m F_m(x) + \sum_{k=n+1}^{m-1} \lambda_k F_k(x) - \sum_{k=n}^{m-1} \lambda_{k+1} F_k(x) = \\
&= \lambda_m F_m(x) + \sum_{k=n+1}^{m-1} \lambda_k F_k(x) - \sum_{k=n+1}^{m-1} \lambda_{k+1} F_k(x) - \lambda_{n+1} F_n(x) = \\
&= \lambda_m F_m(x) + \sum_{k=n+1}^{m-1} (\lambda_k - \lambda_{k+1}) F_k(x) - \lambda_{n+1} F_n(x).
\end{aligned}$$

Így

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=n+1}^{m} \lambda_k f_k(x)\right| &= \left|\sum_{k=n+1}^{m} \lambda_k f_k(x)\right| \leq \lambda_m |F_m(x)| + \sum_{k=n+1}^{m-1} (\lambda_k - \lambda_{k+1}) |F_k(x)| + \lambda_{n+1} |F_n(x)| \leq \\
&\leq K \cdot \left(\lambda_m + \sum_{k=n+1}^{m-1} (\lambda_k - \lambda_{k+1}) + \lambda_{n+1}\right) = \\
&= K \cdot (\lambda_m + \lambda_{n+1} - \lambda_m + \lambda_{n+1}) = 2K\lambda_{n+1}.
\end{aligned}$$

Mivel $\lim(\lambda_n) = 0$, ezért tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy

$$0 \leq \lambda_n < \varepsilon \qquad (N \leq n \in \mathbb{N}).$$

Következésképpen

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} \lambda_k f_k(x)\right| \leq 2K \cdot \varepsilon \qquad (x \in [a,b],\ N \leq n \in \mathbb{N}),$$

azaz a

$$\sum (\lambda_n f_n)$$

rendelkezik az egyenletes Cauchy-tulajdonsággal, így egyenletesen konvergens. ■

10.0.1. következmény. A

$$\sum \left(\frac{\sin(nx)}{n}\right)$$

függvénysor egyenletesen konvergens minden olyan $[a,b] \subset \mathbb{R}$ intervallumon, amelyre $2k\pi \notin [a,b]$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Biz.

1. lépés.. Világos, hogy

$$\frac{1}{n} \searrow 0 \qquad (n \to \infty).$$

2. lépés.. Mivel a $\sin$ függvény 2π-periodikus, elegendő csak azt az esetet vizsgálni, amikor $[a, b] \subset (0{,}2\pi)$. Lévén, hogy ekkor bármely $x \in [a, b]$ esetén $\sin(x/2) > 0$, ezért, ha $x \in [a, b]$, ill. $n \in \mathbb{N}$, akkor

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=1}^{n} (\sin(kx))\right| &= \frac{1}{\sin(x/2)} \left|\sum_{k=1}^{n} \sin(kx)\sin(x/2)\right| = \\
&= \frac{1}{2\sin(x/2)} \left|\sum_{k=1}^{n} (\cos((k-1/2)x) - \cos((k+1/2)x))\right| = \\
&= \frac{|\cos((n-1/2)x) - \cos((n+1/2)x)|}{2\sin(x/2)} \leq K,
\end{aligned}$$

ahol

$$K := \frac{1}{\min\{\sin(x/2) \in \mathbb{R} : \ x \in [a, b]\}}. \qquad \blacksquare$$

Megjegyzések.

1. Mivel bármely $k, n \in \mathbb{N}_0$ esetén $\sin(n2k\pi) = 0$, ezért a

$$\sum_{n=1} \left(\frac{\sin(nx)}{n}\right)$$

függvénysor bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén konvergens.

2. A

$$\sum_{n=1} \left(\frac{\cos(nx)}{n^2}\right) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvénysor egyenletesen konvergens (vö. Weiesrtraß-kritérium), továbbá a tagonkénti deriválással kapott sor:

$$\sum_{n=1} \left(\frac{-\sin(nx)}{n}\right) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

így az (vö. gyakorlat) az

$$f_{ab}(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} = \frac{(x-\pi)^2}{4} - \frac{\pi^2}{12} \qquad (x \in [a, b])$$

jelöléssel

$$f'_{ab}(x) = \frac{(x-\pi)}{2} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} \qquad (x \in [a, b]).$$

Mivel $[a,b] \subset (0,2\pi)$ tetszőleges volt, ezért

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = \frac{\pi - x}{2} \qquad (x \in (0,2\pi)).$$

Ha tehát $f \in \mathfrak{R}_{2\pi}$ és

$$f(x) := \begin{cases} 0 & (x = 0), \\ \\ \dfrac{\pi - x}{2} & (0 < x < 2\pi), \end{cases}$$

akkor (vö. gyakorlat)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = \lim(S_n^f(x)) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

10.0.3. tétel. (Bessel-egyenlőtlenség). Ha $f \in \mathfrak{R}_{2\pi}$, akkor bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\boxed{\frac{a_0^2(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k^2(f) + b_k^2(f)\right) \leq \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^2}.$$

Biz. Világos, hogy a

$$C_n(x) := \cos(nx), \quad S_n(x) := \sin(nx) \qquad (n \in \mathbb{N}_0,\ x \in \mathbb{R})$$

jelölésekkel tetszőleges $n \in \mathbb{N}_0$ esetén[1]

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} fC_n = \langle f, C_n\rangle, \qquad b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} fS_n = \langle f, S_n\rangle.$$

Így

1. lépés.. Teljes indukcióval megmutatható (vö. 10.0.1. **házi feladat**), hogy ha

$$A_k := \begin{cases} \dfrac{a_0(f)C_0}{2}, & (k = 0), \\ \\ a_k(f)C_k + b_k(f)S_k & (k \geq 1), \end{cases}$$

akkor

$$\left\langle f - \sum_{k=0}^{n} A_k, f - \sum_{k=0}^{n} A_k \right\rangle = \langle f, f\rangle - \frac{a_0^2(f)}{2} - \sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2(f) + b_k^2(f)\right) \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

[1] Emlékeztetőül: $f, g \in \mathfrak{R}_{2\pi}$, akkor

$$\langle f, g\rangle := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} fg.$$

2. lépés.. Mivel

$$\left\langle f - \sum_{k=0}^{n} A_k, f - \sum_{k=0}^{n} A_k \right\rangle \geq 0,$$

ezért

$$\langle f, f \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^2$$

következtében a bizonyítandó állítás kapjuk. ■

10.0.1. következmény. Ha tehát $f \in \mathfrak{R}_{2\pi}$, akkor a

$$\sum_{n=1} \left(a_n^2(f) + b_n^2(f)\right)$$

sor konvergens, ahonnan

$$\lim(a_n(f)) = 0 = \lim(b_n(f))$$

következik (**Riemann-Lebesgue-lemma**).

10.0.1. feladat. (Rezgő húr). Legyen $q, l > 0$. Határozzunk meg olyan kétszer folytonosan differenciálható

$$u : [0, +\infty) \times [0, l] \to \mathbb{R}$$

függvényt, amelyre

$$\boxed{\partial_{11} u = q \partial_{22} u}, \tag{10.0.1}$$

továbbá adott $\varphi, \psi \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényekkel

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad \partial_1 u(0, x) = \psi(x) \qquad (x \in [0, l]) \tag{10.0.2}$$

(**kezdeti feltétel**ek) és

$$u(t,0) = 0 = u(t, l) \qquad (t \in [0, +\infty)) \tag{10.0.3}$$

(**peremfeltétel**ek) teljesülnek!

Útm. Kíséreljük meg a (10.0.1) egyenletet az

$$u(t, x) = T(t)X(x) \qquad ((t, x) \in [0, +\infty) \times [0, l]) \tag{10.0.4}$$

szorzatfeltevéssel (**ansatz**) közönséges differenciálegyenletekre visszavezetni, ahol

$$T : [0, +\infty) \to \mathbb{R}, \qquad \text{ill.} \qquad X : [0, l] \to \mathbb{R}$$

kétszer folytonosan differenciálható függvények. Behelyettesítve (10.0.1)-be azt kapjuk, hogy bármely $(t, x) \in (0, +\infty) \times (0, l)$ esetén

$$T''(t)X(x) = qT(t)X''(x), \tag{10.0.5}$$

2017.12.29

ill.

$$\frac{1}{q}\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \qquad ((t,x) \in (0,+\infty) \times (0,l)) \tag{10.0.6}$$

teljesül, amennyiben $T(t) \cdot X(x) \neq 0$. Mivel (10.0.6) bal oldala az x változótól nem függ, vagyis x-ben állandó, ezért a jobb oldala is állandó kell, hogy legyen. Hasonlóan, miután a jobb oldal t-től független, ezért a bal oldal is állandó. Így alkalmas $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

$$\frac{1}{q}\frac{T''(t)}{T(t)} = \lambda = \frac{X''(x)}{X(x)} \qquad ((t,x) \in (0,+\infty) \times (0,l)). \tag{10.0.7}$$

Azt kaptuk tehát, hogy a T, ill. az X függvényre rendre

$$T''(t) - \lambda q T(t) = 0 \qquad (t \in (0,+\infty)), \tag{10.0.8}$$

ill.

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0 \qquad (x \in (0,l)) \tag{10.0.9}$$

teljesül. Könnyen belátható, hogy a (10.0.8)-beli, ill. az (10.0.9)-beli függvények szorzata megoldása a (10.0.1) egyenletnek.
Így, ha

- $\lambda > 0$, akkor alkalmas $a_+, b_+ \in \mathbb{R}$, ill. $\alpha_+, \beta_+ \in \mathbb{R}$ esetén

  $$T(t) \equiv a_+ e^{\sqrt{\lambda q}t} + b_+ e^{-\sqrt{\lambda q}t},$$

  ill.

  $$X(x) \equiv \alpha_+ e^{\sqrt{\lambda}x} + \beta_+ e^{-\sqrt{\lambda}x};$$

- $\lambda = 0$, akkor alkalmas $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$, ill. $\alpha_0, \beta_0 \in \mathbb{R}$ esetén

  $$T(t) \equiv a_0 + b_0 t;$$

  ill.

  $$X(x) \equiv \alpha_0 + \beta_0 x;$$

- $\lambda < 0$, akkor alkalmas $a_-, b_- \in \mathbb{R}$, ill. $\alpha_-, \beta_- \in \mathbb{R}$ esetén

  $$T(t) \equiv a_- \sin(\sqrt{-\lambda q}t) + b_- \cos(\sqrt{-\lambda q}t),$$

  ill.

  $$X(x) \equiv \alpha_- \sin(\sqrt{-\lambda}x) + \beta_- \cos(\sqrt{-\lambda}x).$$

Ahhoz, hogy a (10.0.4)-beli u függvény eleget tegyen a (10.0.3) peremfeltételnek, teljesülnie kell az

$$X(0) = 0 = X(l) \tag{10.0.10}$$

feltételnek. Figyelembe véve (10.0.10)-et,

– $\lambda > 0$ esetén

$$0 = X(0) = \alpha_+ + \beta_+$$

és

$$0 = X(l) = \alpha_+ e^{\sqrt{\lambda} l} + \beta_+ e^{-\sqrt{\lambda} l},$$

ahonnan $\alpha_+ = \beta_+ = 0$, azaz $X(x) \equiv 0$ és ezzel együtt $u(t,x) \equiv 0$ következik.

– $\lambda = 0$ esetén

$$0 = X(0) = \alpha_0$$

és

$$0 = X(l) = \alpha_0 + \beta_0 l,$$

adódik, tehát $\alpha_0 = \beta_0 = 0$, így $X(x) \equiv 0$ ahonnan $u(t,x) \equiv 0$.

– $\lambda < 0$ esetén

$$0 = X(0) = \beta_-$$

és

$$0 = X(l) = \alpha_- \sin(\sqrt{-\lambda} l),$$

A triviálistól különböző megoldást így csak akkor kapunk, ha $\alpha_- \neq 0$. Ekkor azonban $\sin(\sqrt{-\lambda_-} l) = 0$, ahonnan $\sqrt{-\lambda_-} l = n\pi$ $(n \in \mathbb{N})$. Minden n-hez tartozik egy

$$X_n(x) :\equiv \alpha_n \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$$

ahol $0 \neq \alpha_n \in \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$.

A (10.0.10) feltételeket kielégítő, triviálistól különböző megoldást csak a

$$\lambda_n := \lambda = -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \qquad (n \in \mathbb{N})$$

esetben kapunk. Ezt (10.0.8)-ba írva a

$$T'' = -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 qT \qquad (n \in \mathbb{N})$$

egyenlőséget nyerjük, amelyeket rendre kielégítenek a

$$T_n(t) := a_n \sin\left(\frac{n\pi\sqrt{q}}{l} t\right) + b_n \cos\left(\frac{n\pi\sqrt{q}}{l} t\right) \qquad (t \in [0, +\infty),\ a_n, b_n \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N})$$

függvények. Meghatároztuk tehát a (10.0.1) differenciálegyenlet végtelen sok olyan megoldását, amely a (10.0.3) peremfeltételeket is kielégíti:

$$u_n(x,t) = T_n(t) X_n(x) = \left\{a_n \sin\left(\frac{n\pi\sqrt{q}}{l} t\right) + b_n \cos\left(\frac{n\pi\sqrt{q}}{l} t\right)\right\} \cdot \alpha_n \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$$

$$(t \in [0, +\infty),\ x \in [0, l],\ n \in \mathbb{N}_0).$$

Alkalmas konvergenciafeltételek teljesülése esetén (megengedett a tagonkénti t-, ill. x-szerinti kétszeri parciális differenciálhatóság) az u_n tagokkal képzett $\sum(u_n)$ sor

$$u(t,x) := \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t,x) \qquad (t \in [0, +\infty),\ x \in [0, l])$$

összegfüggvénye is eleget tesz (10.0.1)-nek és (10.0.3)-nak. A (10.0.2) kezdeti feltételt figyelembe véve azt kapjuk, hogy

$$\varphi(x) = u(0,x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \alpha_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \qquad (x \in [0,l]),$$

ill.

$$\psi(x) = \partial_1 u(0,x) = \frac{\pi\sqrt{q}}{l} \sum_{n=0}^{\infty} n a_n \alpha_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \qquad (x \in [0,l]).$$

Ebből következik, hogy ha a $b_n\alpha_n$, ill. a $a_n\alpha_n$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ számokat a φ, ill. a ψ függvény Fourier-együtthatóinak választjuk, a $[0,l]$ intervallumon ortogonális

$$\left\{x \mapsto \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \,:\, n \in \mathbb{N}_0\right\}$$

függvényrendszer szerint, akkor a (10.0.2) kezdeti feltételek is kielégíthetők. Ha $\varphi, \psi \in \mathfrak{C}^2[0,l]$, akkor – mint tudjuk – az előrebocsátott konvergencia-feltételek teljesülnek. ■

10.0.0. megjegyzés. A kaputt u megoldásnak igen szemléletes fizikai jelentés tulajdonítható: a húr pontjainak mozgása

$$\nu_n := \frac{\lambda_n}{2\pi} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

alaprezgések (állóhullámok, módusok) „szuperpozíciója”.

10.0.1. házi feladat. Mutassuk meg, hogy ha $f \in \mathfrak{R}_{2\pi}$, továbbá

$$A_k := \begin{cases} \dfrac{a_0(f)C_0}{2}, & (k=0), \\[2ex] a_k(f)C_k + b_k(f)S_k & (k \geq 1), \end{cases}$$

akkor

$$\left\langle f - \sum_{k=0}^{n} A_k, f - \sum_{k=0}^{n} A_k \right\rangle = \langle f, f\rangle - \frac{a_0^2(f)}{2} - \sum_{k=1}^{n} \left(a_k^2(f) + b_k^2(f)\right) \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

teljesül!

Útm.

10.0.2. házi feladat. Motiváljuk a (10.0.1), (10.0.2), (10.0.3) feladatot!

Útm.

2017.12.29.

A függelék

Útmutató a gyakorló feladatok megoldásához

A.1. Előismeretek

A 1.2.1. gyakorló feladat.

1. Az

$$M := \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrix esetén a p_M függény a következő:

$$\begin{aligned} p_M(z) &:= (z-2)\cdot\{(-2-z)\cdot(2-z)+3\} - 1\cdot\{3\cdot(2-z)-3\} + 1\cdot\{3-(2+z)\} = \\ &= (z-2)(z^2-1)+2z-2 = (z-2)(z-1)(z+1)+2(z-1) = \\ &= (z-1)(z^2-z) = z(z-1)^2 \qquad (z\in\mathbb{C}). \end{aligned}$$

Így a 0, ill. az 1 számra

$$p_M(0) = 0, \qquad \text{ill.} \qquad p_M(1) = 0.$$

2. Az

$$M := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrix esetén a p_M függény a következő:

$$\begin{aligned} p_M(z) &:= (z-1)\cdot\{(1-z)\cdot(2-z)-1\}+1\cdot\{(-1)\cdot(2-z)+1\}= \\ &= (z-1)(z^2-3z+1)+z-1=(z-1)(z^2-3z+2)= \\ &= (z-1)(z-1)(z-2)=(z-1)^2(z-2) \qquad (z\in\mathbb{C}). \end{aligned}$$

Így az 1, ill. a 2 számra

$$p_M(1)=0, \qquad \text{ill.} \qquad p_M(2)=0.$$

3. Az

$$M := \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix esetén a p_M függény (a harmadik oszlop szerinti kifejtéssel) a következő:

$$\begin{aligned} p_M(z) &:= 1\cdot\{0-3(1-z)\}+0+(z-1)\cdot\{(1-z)^2+1\}= \\ &= (z-1)(z^2-2z+5)= \\ &= (z-1)(z-1-2\imath)(z-1+2\imath) \qquad (z\in\mathbb{C}). \end{aligned}$$

Így az 1, $1+2\imath$, ill. a $1-2\imath$ számra

$$p_M(1)=0, \qquad p_M(1+2\imath)=0, \qquad \text{ill.} \qquad p_M(1-2\imath)=0. \quad \blacksquare$$

vissza a feladathoz

A 1.4.1. gyakorló feladat.

1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.

10.

11.

12.

vissza a feladathoz

Az 1.5.1. gyakorló feladat.

1. Mivel

$$\operatorname{grad} f(x,y) = (-(1+e^y)\sin(x), e^y\cos(x) - e^y - ye^y) \qquad ((x,y)\in\mathbb{R}^2),$$

és

$$\operatorname{grad} f(x,y) = (0{,}0) \qquad \Longleftrightarrow \qquad (x,y) \in \{(2k\pi{,}0), ((2k+1)\pi, -2):\ k\in\mathbb{Z}\},$$

továbbá

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} -(1+e^y)\cos(x) & -e^y\sin(x) \\ -e^y\sin(x) & e^y\cos(x) - 2e^y - ye^y \end{bmatrix} \qquad ((x,y)\in\mathbb{R}^2),$$

és

$$H_f(2k\pi{,}0) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \text{ill.} \qquad H_f((2k+1)\pi,-2) = \begin{bmatrix} 1+e^{-2} & 0 \\ 0 & -e^{-2} \end{bmatrix},$$

ezért f-nek a $(2k\pi{,}0)$ pontokban lokális maximuma van, a $((2k+1)\pi,-2)$ pontokban pedig nincsen lokális szélsőértéke ($k\in\mathbb{Z}$).

2. Némi számolással látható, hogy bármely $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ esetén

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} f(x,y) &= \left(2x - 2x(x^2+y^2), 2y - 2y(x^2+y^2)\right) e^{-(x^2+y^2)} = \\ &= 2\left(x(1-(x^2+y^2)), y(1-(x^2+y^2))\right) e^{-(x^2+y^2)} \end{aligned}$$

és

$$\operatorname{grad} f(x,y) = (0{,}0) \qquad \Longleftrightarrow \qquad (x,y)\in\left\{(0{,}0), \left\{\mathbf{r}\in\mathbb{R}^2:\ \|\mathbf{r}\|=1\right\}\right\},$$

továbbá tetszőleges $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ esetén

$$\begin{aligned} \frac{H_f(x,y)}{e^{-(x^2+y^2)}} &= \begin{bmatrix} 2-10x^2+4x^4+4x^2y^2-2y^2 & 4xy^3-8xy+4x^3y \\ 4xy^3-8xy+4x^3y & 2-10y^2+4y^4+4x^2y^2-2y^2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 4x^2(x^2+y^2)-12x^2+2 & 4xy(x^2+y^2)-8xy \\ 4xy(x^2+y^2)-8xy & 4y^2(x^2+y^2)-12y^2+2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Mivel

$$H_f(0{,}0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

ezért f-nek a $(0{,}0)$ pontokban lokális maximuma van. Ez egyébként abból is következik, hogy $f(0{,}0) = 0$, míg $\mathbb{R}^2 \ni (x,y) \neq (0{,}0)$ esetén $f(x,y) > 0$. Mivel a

$$g(t) := te^{-t} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

függvényre

$$g'(t) \equiv (1-t)e^{-t} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad t = 1$$

és

$$g''(t) = (-1+t-1)e^{-t} = (t-2)e^{-t} \qquad (t \in \mathbb{R}),$$

ezért $g''(1) = -\frac{1}{e} < 0$ következtében g-nek 1-ben lokális maximuma van. Ez azt jelenti, hogy f-nek az

$$\left\{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2 : \ \|\mathbf{r}\| = 1\right\}$$

halmaz pontjaiban lokális maximuma van.

3.

4.

vissza a feladathoz

A.2. Paraméteres integrálok

A 3.0.1. gyakorló feladat.

Tetszőleges $\alpha \in (0, +\infty)$ esetén az

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto \ln\left(\sqrt{x^2+\alpha}\right)$$

folytonos, ezért integrálható. Továbbá a

$$(0, +\infty) \ni \alpha \mapsto \ln\left(\sqrt{x^2+\alpha}\right)$$

függvény $\mathfrak{C}^1$-beli, így $\varphi \in \mathfrak{D}$, és

$$\begin{aligned}
\varphi'(\alpha) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \alpha} \ln\left(\sqrt{x^2+\alpha}\right)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+\alpha}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+\alpha}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{2(x^2+\alpha)}\,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{2\alpha}\int_0^1 \frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{\alpha}}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{\alpha}}\right)\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right).
\end{aligned}$$

Megjegyzés. $\varphi(\alpha)$ explicite is kiszámítható:

$$\begin{aligned}
\varphi(\alpha) &= \left[x \cdot \ln\left(\sqrt{x^2+\alpha}\right)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{x^2+\alpha}\,\mathrm{d}x = \ln\left(\sqrt{1+\alpha}\right) - 1 + \int_0^1 \frac{\alpha}{x^2+\alpha}\,\mathrm{d}x = \\
&= \ldots = \ln\left(\sqrt{1+\alpha}\right) - 1 + \sqrt{\alpha} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

vissza a feladathoz

A 3.0.2. gyakorló feladat.

1. lépés.. Legyen $n \in \mathbb{Z}$ tetszőleges. Ekkor

$$J_n'(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\partial}{\partial x}\cos\left(ny - x\sin(y)\right)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin\left(ny - x\sin(y)\right)\sin(y)\,\mathrm{d}y \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned}
J_n''(x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\partial}{\partial x}\sin\left(ny - x\sin(y)\right)\sin(y)\,\mathrm{d}y = \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos\left(ny - x\sin(y)\right)\left(-\sin^2(y)\right)\,\mathrm{d}y = \\
&= -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos\left(ny - x\sin(y)\right)\sin^2(y)\,\mathrm{d}y \quad (x \in \mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Így

$$\begin{aligned}
J_n'(x) &= \frac{1}{\pi}\left[\sin\left(ny - x\sin(y)\right)\left(-\cos(y)\right]_{y=0}^{y=\pi} + \right. \\
&\quad +\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos\left(ny - x\sin(y)\right)\left(n - x\cos(y)\right)\cos(y)\,\mathrm{d}y = \\
&= \frac{n}{\pi}\int_0^\pi \cos\left(ny - x\sin(y)\right)\cos(y)\,\mathrm{d}y - \frac{x}{\pi}\int_0^\pi \cos\left(ny - x\sin(y)\right)\cos^2(y)\,\mathrm{d}y = \\
&= \frac{n}{\pi}\int_0^\pi \cos\left(ny - x\sin(y)\right)\cos(y)\,\mathrm{d}y - \\
&\quad -\frac{x}{\pi}\int_0^\pi \cos\left(ny - x\sin(y)\right)\left(1 - \sin^2(y)\right)\mathrm{d}y = \\
&= \frac{n}{\pi}\int_0^\pi \cos\left(ny - x\sin(y)\right)\cos(y)\,\mathrm{d}y - xJ_n(x) - xJ_n''(x) \quad (x \in \mathbb{R})\ .
\end{aligned}$$

Innen x-szel szorozva, majd átrendezve azt kapjuk, hogy

$$x^2 J_n''(x) + xJ_n'(x) + x^2 J_n(x) = \frac{nx}{\pi}\int_0^\pi \cos\left(ny - x\sin(y)\right)\cos(y)\,\mathrm{d}y \quad (x \in \mathbb{R})\ .$$

Mivel

$$\begin{aligned}
\frac{x}{\pi}\int_0^\pi \cos\left(ny - x\sin(y)\right)\cos(y)\,\mathrm{d}y &= \frac{x}{\pi}\int_0^\pi \cos\left(ny - x\sin(y)\right)\cos(y)\,\mathrm{d}y - \\
&\quad -nJ_n(x) + nJ_n(x) = \\
&= \frac{x}{\pi}\int_0^\pi \cos\left(ny - x\sin(y)\right)\cos(y)\,\mathrm{d}y - \\
&\quad -\frac{n}{\pi}\int_0^\pi \cos\left(ny - x\sin(y)\right)\,\mathrm{d}y + nJ_n = \\
&= -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos\left(ny - x\sin(y)\right)\left(n - x\cos(y)\right)\,\mathrm{d}y + \\
&\quad +nJ_n = 0 + nJ_n = nJ_n \quad (x \in \mathbb{R}),
\end{aligned}$$

ui.

$$\int_0^\pi \cos\left(ny - x\sin(y)\right)\left(n - x\cos(y)\right)\,\mathrm{d}y = \left[\sin\left(ny - x\sin(y)\right)\right]_{y=0}^{y=\pi} = 0 \quad (x \in \mathbb{R}),$$

ezért

$$\frac{x}{\pi}\int_0^\pi \cos\left(ny - x\sin(y)\right)\cos(y)\,\mathrm{d}y = nJ_n(x) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Azt kaptuk tehát, hogy

$$x^2 J_n''(x) + xJ_n'(x) + x^2 J_n(x) = n^2 J_n(x) \quad (x \in \mathbb{R}),$$

ami nem más, mint a bizonyítandó egyenlőség.

2. lépés.. Világos, hogy ha $x = 0$, akkor az állítás triviálisan teljesül. Legyen most $0 \neq x \in \mathbb{R}$. Ha az imént bizonyított egyenletbe $n = 0$-t helyettesítünk, akkor azt kapjuk, hogy

$$\frac{d}{dx}\left(xJ_0'(x)\right) + xJ_0(x) = 0\ .$$

Mivel

$$\int_0^{\pi} \cos\left(-x\sin(y)\right)\cos(y)\,dy = \left[\frac{\sin\left(-x\sin(y)\right)}{-x}\right]_{y=0}^{y=\pi} = 0\ ,$$

ezért

$$\begin{aligned}
J_0'(x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\partial}{\partial x}\cos\left(-x\sin(y)\right)\,dy = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin\left(-x\sin(y)\right)\sin(y)\,dy = \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin\left(-x\sin(y)\right)\sin(y)\,dy - 0 = \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin\left(-x\sin(y)\right)\sin(y)\,dy - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos\left(-x\sin(y)\right)\cos(y)\,dy = \\
&= -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos\left(y - x\sin(y)\right)\,dy = \\
&= -J_1(x) \quad (x \in \mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Így

$$\frac{d}{dx}\left(x(-J_1(x))\right) + xJ_0(x) = 0, \qquad (x \in \mathbb{R})$$

amiből integrálással a kívánt azonosságot kapjuk. ■

vissza a feladathoz

A 3.0.3. gyakorló feladat.

1. Tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \int_0^{\pi/2} \frac{\partial}{\partial x}\sin(x)\cos(y)\,dy = \int_0^{\pi/2} \cos(x)\cos(y)\,dy = \\
&= \left[\cos(x)\sin(y)\right]_{y=0}^{y=\pi/2} = \cos(x).
\end{aligned}$$

Megjegyzés. f' közvetlenül is megkapható, ui.

$$f(x) = \sin(x) \int_0^{\pi/2} \cos(y)\,\mathrm{d}y = \sin(x)\,[\sin(y)]_{y=0}^{y=\pi/2} = \sin(x) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

így $f' = \cos$.

2. Tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f'(x) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{arctg}(xy)\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{y}{1+(xy)^2}\,\mathrm{d}y,$$

így

$$f'(x) = \begin{cases} 1/2 & (x=0), \\ \dfrac{1}{2x^2}\left[\ln(1+x^2y^2)\right]_{y=0}^{y=1} = \dfrac{\ln(1+x^2)}{2x^2} & (x \neq 0). \end{cases}$$

3. Tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned} f'(x) &= (1-x^3)(1-2x^3+x^4)2x + \int_0^{x^2} \frac{\partial}{\partial x}(1-x^3)(1-2xy+y^2)\,\mathrm{d}y = \ldots = \\ &= 2x - 10x^4 + 2x^5 + 8x^7 - 3x^8. \end{aligned}$$

Megjegyzés. f' közvetlenül is megkapható, ui. bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned} f(x) &= (1-x^3)\int_0^{x^2} (1-2xy+y^2)\,\mathrm{d}y = (1-x^3)\left[y - xy^2 + \frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{y=x^2} = \ldots = \\ &= x^2 - 2x^5 + \frac{x^6}{3} + x^8 - \frac{x^9}{3}, \end{aligned}$$

így

$$f'(x) = 2x - 10x^4 + 2x^5 + 8x^7 - 3x^8 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

4. Tetszőleges $0 < x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned} f'(x) &= \ln(x^3)\cdot 2x - \frac{\ln(x\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} + \int_{\sqrt{x}}^{x^2} \frac{y}{xy}\,\mathrm{d}y = \\ &= 6x\ln(x) - \frac{3}{4\sqrt{x}}\ln(x) + \left[\frac{y}{x}\right]_{y=\sqrt{x}}^{y=x^2} = \\ &= \left(6x - \frac{3}{4\sqrt{x}}\right)\ln(x) + x - \frac{1}{\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Megjegyzés. f' közvetlenül is megkapható, ui. bármely $0 < x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned}\int_{\sqrt{x}}^{x^2} \ln(xy)\,\mathrm{d}y &= \int_{\sqrt{x}}^{x^2} 1 \cdot \ln(xy)\,\mathrm{d}y = [y\ln(xy)]_{y=\sqrt{x}}^{y=x^2} - \int_{\sqrt{x}}^{x^2} y\frac{x}{xy}\,\mathrm{d}y = \\ &= x^2\ln(x^3) - \sqrt{x}\ln(x\sqrt{x}) - x^2 + \sqrt{x} = \\ &= 3x^2\ln(x) - 3\frac{\sqrt{x}}{2}\ln(x) - x^2 + \sqrt{x},\end{aligned}$$

így

$$f'(x) = 6x\ln(x) + 3x - \frac{3}{4\sqrt{x}}\ln(x) - \frac{3}{2\sqrt{x}} - 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad (0 < x \in \mathbb{R}). \quad \blacksquare$$

vissza a feladathoz

A 3.0.4. gyakorló feladat.

A Bernoulli-l'Hospital-szabály segítségével könnyen belátható, hogy az

$$f(y) := \frac{\sin(xy) - xy\cos(xy)}{y^2} \qquad (0 < y \in \mathbb{R})$$

függvényre $\lim_0 f = 0$. Ezért az

$$\widetilde{f}(x,y) := \begin{cases} \dfrac{\sin(xy) - xy\cos(xy)}{y^2}, & (y > 0) \\ 0 & (y = 0) \end{cases}, \qquad \partial_1\widetilde{f}(x,y) := x\sin(xy)$$

$$\big((x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in \mathbb{R}, y \in [0,1]\big)$$

függvények folytonosak. Így, ha

$$F(x) := \int_0^1 \frac{\sin(xy) - xy\cos(xy)}{y^2}\,\mathrm{d}y \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

akkor

$$F'(x) = \int_0^1 x\sin(xy)\,\mathrm{d}y = [-\cos(xy)]_{y=0}^{y=1} = -\cos(x) + 1.$$

Ezért minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$F(x) = \int_0^x F'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x (1 - \cos(t))\,\mathrm{d}t = [t - \sin(t)]_0^x = x - \sin(x). \quad \blacksquare$$

vissza a feladathoz

A 3.0.5. gyakorló feladat.

Ha $\varepsilon \in (0{,}1)$, akkor az

$$f(\alpha,x) := \ln(1-2\alpha\cos(x)+\alpha^2), \qquad \partial_1 f(\alpha,x) := \frac{2(a-\cos(x))}{1-2\alpha\cos(x)+\alpha^2}$$
$$((\alpha,x)\in\mathbb{R}^2: \ ||\alpha|-1|\geq\varepsilon, x\in[0,\pi])$$

függvények folytonosak. Így azt kapjuk, hogy

$$F'(\alpha) = 2\int_0^\pi \frac{\alpha-\cos(x)}{1-2\alpha\cos(x)+\alpha^2}\,\mathrm{d}x,$$

ahonnan a $t = \operatorname{tg}(x/2)$ helyettesítéssel

$$F'(\alpha) = 4\int_0^{+\infty} \frac{\alpha-1+(\alpha+1)t^2}{(1+t^2)((1-\alpha)^2+(1+\alpha)^2t^2)}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 2\pi/\alpha & (|\alpha|\geq 1+\varepsilon), \\ 0 & (|\alpha|\leq 1-\varepsilon). \end{cases}$$

Alkalmazva a parciális törtekre való bontás módszerét kapjuk, hogy

$$F(\alpha) = \begin{cases} 2\pi\ln(|\alpha|)+c & (|\alpha|\geq 1+\varepsilon) \\ d & (|\alpha|\leq 1-\varepsilon) \end{cases} \qquad (c,d\in\mathbb{R})\ ,$$

sőt, ha figyelembe vesszük, hogy $\varepsilon \in (0{,}1)$ tetszőleges, akkor azt is írhatjuk, hogy

$$F(\alpha) = \begin{cases} 2\pi\ln(|\alpha|)+c & (|\alpha|> 1) \\ d & (|\alpha|< 1) \end{cases} \qquad (c,d\in\mathbb{R})\ . \quad (*)$$

$|\alpha| = 1$ esetén azt kapjuk, hogy

$$F(\pm 1) = \int_0^\pi \ln(2(1\pm\cos(x))\,\mathrm{d}x = 2\pi\ln(2) + 4\int_0^{\pi/2}\ln(\sin(t))\,\mathrm{d}t = 0$$

(vö. **??**. feladat). Mostmár csak az integrálási állandók meghatározása van hátra. Mivel $F(0)=0$, ezért $d=0$. Most megmutatjuk, hogy F $|\alpha|=1$-ben folytonos. $(*)$-ból világos, hogy $\lim\limits_{|\alpha|\to 1-0} F(\alpha) = 0$. Mivel

$$F\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \int_0 \pi\ln\left(\frac{1}{\alpha^2}(\alpha^2-2\alpha\cos(x)+1))\right)\,\mathrm{d}x = -2\pi\ln(|\alpha|)+F(\alpha) \quad (\alpha\neq 0)\ ,$$

ezért

$$\lim_{|\alpha|\to 1+0} F(\alpha) = 2\pi\lim_{|\alpha|\to 1+0}\ln(|\alpha|) + \lim_{|\alpha|\to 1+0} F\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \lim_{|\alpha|\to 1-0} F(\alpha) = 0\ .$$

F tehát folytonos, így $c=0$. ■

vissza a feladathoz

A 3.0.6. gyakorló feladat.

Bármely $\alpha \in (-1{,}1)$ esetén legyen

$$\varphi(x) := \frac{1}{\sin(x)} \ln\left(\frac{1+\alpha\sin(x)}{1-\alpha\sin(x)}\right) \qquad (x \in (0,\pi)).$$

Ekkor a Bernoulli-l'Hospital-szabály segítségével könnyen belátható, hogy $\lim\limits_{0} \varphi = \lim\limits_{\pi} \varphi = 2\alpha$, ui.

$$\frac{1}{\sin(x)} \ln\left(\frac{1+\alpha\sin(x)}{1-\alpha\sin(x)}\right) \bowtie \frac{1}{\cos(x)} \cdot \frac{1-\alpha\sin(x)}{1+\alpha\sin(x)} \cdot \frac{\alpha\cos(x)(1-\alpha\sin(x)) + (1+\alpha\sin(x))\alpha\cos(x)}{(1-\alpha\sin(x))^2} =$$

$$= \frac{2\alpha}{1-\alpha^2\sin^2(x)} \longrightarrow 2\alpha \qquad (x \to 0;\pi).$$

Így a

$$\psi(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{\sin(x)} \ln\left(\dfrac{1+\alpha\sin(x)}{1-\alpha\sin(x)}\right) & (0 < x < 1), \\[2ex] 2\alpha & (x \in \{0;1\}) \end{cases}$$

függvény folytonos, így integrálható is, és integráljára

$$F(\alpha) := \int_0^\pi \psi = \int_0^\pi \frac{1}{\sin(x)} \ln\left(\frac{1+\alpha\sin(x)}{1-\alpha\sin(x)}\right) \mathrm{d}x \qquad (\alpha \in (-1{,}1)).$$

Világos, hogy a

$$(-1{,}1) \ni \alpha \mapsto \frac{1}{\sin(x)} \ln\left(\frac{1+\alpha\sin(x)}{1-\alpha\sin(x)}\right)$$

függvény $\mathfrak{C}^1$-beli, így $F \in \mathfrak{D}$, és

$$\begin{aligned} F'(\alpha) &= \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial\alpha} \frac{1}{\sin(x)} \ln\left(\frac{1+\alpha\sin(x)}{1-\alpha\sin(x)}\right) \mathrm{d}x = \\ &= \int_0^\pi \frac{1}{\sin(x)} \cdot \frac{1-\alpha\sin(x)}{1+\alpha\sin(x)} \cdot \frac{\sin(x)(1-\alpha\sin(x)) + \sin(x)(1+\alpha\sin(x))}{(1-\alpha\sin(x))^2} \mathrm{d}x = \\ &= \int_0^\pi \frac{2}{1-\alpha^2\sin^2(x)} \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Mivel

$$\int_0^\pi \frac{2}{1-\alpha^2\sin^2(x)} \mathrm{d}x = 2 \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{2}{1-\alpha^2\sin^2(x)} \mathrm{d}x,$$

ezért a $t := \mathrm{tg}\,(x)$ helyettesítéssel

$$x = \mathrm{arctg}\,(t), \quad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \mathrm{d}x = \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \qquad (t \geq 0),$$

$$\int_0^{\pi} \frac{2}{1-\alpha^2\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x \;=\; 2\cdot\int_0^{+\infty} \frac{2}{1-\alpha^2\cdot\frac{t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\frac{4}{1+(1-\alpha^2)t^2}\,\mathrm{d}t =$$

$$= 4\cdot\lim_{\omega\to+\infty}\left[\frac{\operatorname{arctg}\left(\sqrt{1-\alpha^2}t\right)}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right]_{t=0}^{t=\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}}.$$

Így

$$F(\alpha) = \int \frac{2\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}}\,\mathrm{d}t = 2\pi\arcsin(\alpha) + c.$$

Mivel $F(0) = 0$, ezért $c = 0$, így

$$\int_0^{\pi}\frac{1}{\sin(x)}\ln\left(\frac{\alpha + t\sin(x)}{1-\alpha\sin(x)}\right)\mathrm{d}x = 2\pi\arcsin(\alpha). \quad \blacksquare$$

vissza a feladathoz

A 3.0.7. gyakorló feladat.

Mivel

$$\begin{aligned}
\partial_1 F(\alpha,\beta) &= \int_0^{\pi/2} \frac{\partial}{\partial\alpha} \ln\left(\alpha^2\sin^2(x)+\beta^2\cos^2(x)\right)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \frac{2\alpha\sin^2(x)}{\alpha^2\sin^2(x)+\beta^2\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x = \\
&= \lim_{\xi\to 0}\int_\xi^{\pi/2} \frac{2\alpha\sin^2(x)}{\alpha^2\sin^2(x)+\beta^2\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x = \lim_{\xi\to 0}\int_\xi^{\pi/2} \frac{2\alpha}{\alpha^2+\beta^2\mathrm{ctg}^2(x)}\,\mathrm{d}x = \\
&= \lim_{\xi\to 0}\int_{\mathrm{ctg}(\xi)}^{0} \frac{2\alpha}{\alpha^2+\beta^2t^2}\cdot\frac{-1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \lim_{\xi\to 0}\int_0^{\mathrm{ctg}(\xi)} \frac{2\alpha}{(\alpha^2+\beta^2t^2)(1+t^2)}\,\mathrm{d}t = \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{2\alpha}{(\alpha^2+\beta^2t^2)(1+t^2)}\,\mathrm{d}t = 2\alpha\cdot\lim_{\omega\to+\infty}\int_0^{\omega} \frac{1}{(\alpha^2+\beta^2t^2)(1+t^2)}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}
\int_0^{\omega} \frac{1}{(\alpha^2+\beta^2t^2)(1+t^2)}\,\mathrm{d}t &= \int_0^{\omega} \frac{1+t^2-t^2}{(\alpha^2+\beta^2t^2)(1+t^2)}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\omega} \frac{1}{\alpha^2+\beta^2t^2}\,\mathrm{d}t - \\
&- \int_0^{\omega} \frac{t^2}{(\alpha^2+\beta^2t^2)(1+t^2)}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\omega} \frac{1}{\alpha^2+\beta^2t^2}\,\mathrm{d}t - \\
&- \frac{1}{\beta^2}\int_0^{\omega} \frac{\beta^2t^2+\alpha^2-\alpha^2}{(\alpha^2+\beta^2t^2)(1+t^2)}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\omega} \frac{1}{\alpha^2+\beta^2t^2}\,\mathrm{d}t - \\
&- \frac{1}{\beta^2}\int_0^{\omega} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + \frac{\alpha^2}{\beta^2}\int_0^{\omega} \frac{1}{(\alpha^2+\beta^2t^2)(1+t^2)}\,\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

ezért (vö. **??**/9. feladat útmutatója: 1. lépés vége)

$\boxed{\alpha=\beta=:\gamma}$ **esetén.**

$$\begin{aligned}
\int_0^{\omega} \frac{1}{(\alpha^2+\beta^2t^2)(1+t^2)}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{\gamma^2}\left[\frac{t}{2(1+t^2)}+\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,(t)\right]_{t=0}^{t=\omega} = \\
&= \frac{1}{\gamma^2}\left\{\frac{\omega}{2(1+\omega^2)}+\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,(\omega)\right\} \longrightarrow \frac{1}{\gamma^2}\left\{0+\frac{\pi}{4}\right\} = \\
&= \frac{\pi}{4\gamma^2} \qquad (\omega\to+\infty)
\end{aligned}$$

ahonnan

$$\int_0^{+\infty} \frac{2\alpha}{(\alpha^2+\beta^2t^2)(1+t^2)}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2\gamma}.$$

következik.

$\boxed{\alpha \neq \beta}$ **esetén.**

$$\begin{aligned}
\int_0^{\omega} \frac{1}{(\alpha^2+\beta^2 t^2)(1+t^2)}\,\mathrm{d}t &= \frac{\beta^2}{\beta^2-\alpha^2}\int_0^{\omega}\left[\frac{1}{\alpha^2+\beta^2 t^2}-\frac{1}{\beta^2}\frac{1}{1+t^2}\right]\mathrm{d}t = \\
&= \frac{\beta^2}{\beta^2-\alpha^2}\left\{\frac{1}{\alpha^2}\int_0^{\omega}\frac{1}{1+\left(\frac{\beta}{\alpha}t\right)^2}\,\mathrm{d}t-\frac{1}{\beta^2}\int_0^{\omega}\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right\} = \\
&= \frac{\beta^2}{\beta^2-\alpha^2}\left\{\frac{1}{\alpha\beta}\mathrm{arctg}\left(\frac{\beta\omega}{\alpha}\right)-\frac{1}{\beta^2}\mathrm{arctg}\,(\omega)\right\} \longrightarrow \\
&\longrightarrow \frac{1}{2\alpha}\cdot\frac{\pi}{\alpha+\beta} \qquad (\omega\to+\infty).
\end{aligned}$$

Így

$$\partial_1 F(\alpha,\beta) = \int_0^{+\infty}\frac{2\alpha}{(\alpha^2+\beta^2 t^2)(1+t^2)}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{\alpha+\beta},$$

ezért

$$F(\alpha,\beta) = \pi\ln(\alpha+\beta)+c \qquad (c\in\mathbb{R}).$$

Mivel

$$F(\beta,\beta) = \int_0^{\pi/2}\ln\left(\beta^2\sin^2(x)+\beta^2\cos^2(x)\right)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}2\ln(\beta) = \pi\ln(\beta),$$

ezért $c=-\pi\ln(2)$, azaz

$$F(\alpha,\beta) = \pi\ln\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right).$$

Megjegyzés. Kicsivel több számolással belátható, hogy ha $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $|\alpha|+|\beta|>0$, akkor

$$F(\alpha,\beta) = \int_0^{\pi/2}\ln\left(\alpha^2\sin^2(x)+\beta^2\cos^2(x)\right)\,\mathrm{d}x = \pi\ln\left(\frac{|\alpha|+|\beta|}{2}\right). \quad \blacksquare$$

vissza a feladathoz

A.3. Feltételes szélsőérték

A.4. Differenciálegyenletek

A 7.3.1. gyakorló feladat.

Ha $\boldsymbol{\varphi}: I\to\mathbb{R}^m$ megoldása (7.3.2)-nek, akkor n-szer differenciálható, továbbá

$$\boldsymbol{\varphi}^{(n)}(x) = \mathbf{f}(x,\boldsymbol{\varphi}(x),\ldots,\boldsymbol{\varphi}^{(n-1)}(x)) \qquad (x\in I),$$

így minden $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ esetén $\boldsymbol{\varphi}^{(i)} \in \mathfrak{C}$. Ezért folytonos $\mathbf{f}$ esetén $\boldsymbol{\varphi}^{(n)} \in \mathfrak{C}$ is teljesül. (Ha $\mathbf{f}$ differenciálható, akkor az előbbi gondolatmenettel látható, hogy a φ megoldás $(n+1)$-szer differenciálható. Sőt, indukcióval belátható, hogy ha $\mathbf{f}$ k-szor differenciálható, akkor a φ megoldás $(n+k)$-szor differenciálható.) ■

vissza a feladathoz

A 7.3.2. gyakorló feladat.

Mivel φ megoldás, ezért

$$\boldsymbol{\varphi}^{(n)}(x) = \mathbf{f}(x, \boldsymbol{\varphi}(x), \boldsymbol{\varphi}'(x), \ldots, \boldsymbol{\varphi}^{(n-1)}(x)) \qquad (x \in I).$$

Így tetszőleges $k \in \mathbb{Z}$ esetén

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\psi}_k^{(n)}(x) &= \boldsymbol{\varphi}^{(n)}(x+kp) = \\
&= \mathbf{f}(x+kp, \boldsymbol{\varphi}(x+kp), \boldsymbol{\varphi}'(x+kp), \ldots, \boldsymbol{\varphi}^{(n-1)}(x+kp)) = \\
&= \mathbf{f}(x+kp, \boldsymbol{\psi}_k(x), \boldsymbol{\psi}_k'(x), \ldots, \boldsymbol{\psi}_k^{(n-1)}(x)) = \\
&= \mathbf{f}(x, \boldsymbol{\psi}_k(x), \boldsymbol{\psi}_k'(x), \ldots, \boldsymbol{\psi}_k^{(n-1)}(x)) \quad (x \in \mathbb{R} : \ x+kp \in I). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

vissza a feladathoz

A 7.3.3. gyakorló feladat.

A

$$\varphi(x) := 0 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény pl. megoldás. ■

vissza a feladathoz

A 7.3.5. gyakorló feladat.

A

$$z_1 := y, \qquad z_2 := y'$$

változók bevezetésével az adott másodrendű differenciálegyenlet egyenértékű a

$$\left.\begin{aligned}
z_1' &= z_2, \\
z_2' &= \frac{2z_1}{\sqrt{1+z_1^2}} - z_1
\end{aligned}\right\}$$

elsőrendű differenciálegyenlet-rendszerrel. ■

vissza a feladathoz

A 7.3.6. gyakorló feladat.

A

$$\mathbf{z}_1 := (y_1, y_2), \qquad \mathbf{z}_2 := (\dot{y}_1, \dot{y}_2)$$

változók bevezetésével, ha $\mathbf{z}_1$, ill. $\mathbf{z}_2$ koordinátái (a,b), ill. (c,d):

$$(a,b) := \mathbf{z}_1 = (y_1, y_2), \qquad (c,d) := \mathbf{z}_2 = (\dot{y}_1, \dot{y}_2)$$

a szóban forgó másodrendű differenciálegyenlet-rendszer egyenértékű az

$$\left.\begin{array}{rcl} a'(x) & = & y_1'(x) = c(x), \\ b'(x) & = & y_2'(x) = d(x), \\ c'(x) & = & y_1''(x) = b(x)\sin(x) + c(x)d(x), \\ d'(x) & = & y_2''(x) = a(x)b(x) + (c(x))^2x^2 \end{array}\right\} \qquad (x \in \mathcal{D}_{\mathbf{y}})$$

elsőrendű differenciálegyenlet-rendszerrel. ■

vissza a feladathoz

A 7.3.7. gyakorló feladat.

1. A

$$z_1 := y, \qquad z_2 := y', \qquad z_3 := y'', \qquad z_4 := y''', \qquad z_5 := y^{(4)}$$

változók bevezetésével az adott ötödrendű differenciálegyenlet egyenértékű a

$$\mathbf{z}' = A\mathbf{z}$$

differenciálegyenlet-rendszerrel, ahol

$$A(x) := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1-x & 0 & 0 & -x & 0 \end{bmatrix} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

2. A

$$z_1 := y, \qquad z_2 := y'$$

változók bevezetésével az adott másodrendű kezdetiérték-feladat egyenértékű a

$$\mathbf{z}' = A\mathbf{z} + \mathbf{b}, \qquad \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0$$

elsőrendű kezdetiérték-feladattal, ahol

$$A(x) := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -0.25 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}(x) := \begin{bmatrix} 0 \\ 2\cos(3x) \end{bmatrix} \qquad (x \in \mathbb{R}), \qquad \mathbf{z}_0 := \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

vissza a feladathoz

A 7.3.4. gyakorló feladat.

1.

2.

vissza a feladathoz

A 7.5.1. gyakorló feladat.

vissza a feladathoz

A 7.5.2. gyakorló feladat.

1. Ha

$$f(x,y) := 2x(y+1) \qquad (x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}),$$

akkor f folytonos és

$$|f(x,y) - f(x,z)| = |2x(y-z)| = 2 \cdot |x| \cdot |y-z| \qquad (x \in \mathbb{R},\ y, z \in \mathbb{R}),$$

ezért az

$$L(x) := 2|x| \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény megfelel a 7.5.4. tétel feltételeinek. Ha tehát

$$\varphi_0(x) := 0 \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

akkor $\varphi_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, és

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x) &= 0 + \int_0^x 2t\left(\varphi_0(t) + 1\right)\, dt = \int_0^x 2t\, dt = x^2 \quad (x \in \mathbb{R}),\\
\varphi_2(x) &= 0 + \int_0^x 2t(\varphi_1(t) + 1)\, dt = \int_0^x (2t^3 + 2t)\, dt = \frac{x^4}{2} + x^2 \quad (x \in \mathbb{R}),\\
\varphi_3(x) &= 0 + \int_0^x 2t(\varphi_2(t) + 1)\, dt = \int_0^x \left(t^5 + 2t^3 + 2t\right)\, dt = \frac{x^6}{6} + \frac{x^4}{2} + x^2 \quad (x \in \mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Teljes indukcióval könnyen belátható, hogy

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{2k}}{k!} \qquad (n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}),$$

így bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\varphi_n(x) \longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x^2)^k}{k!} = e^{x^2} - 1 \qquad (n \to \infty).$$

Ez azt jelenti, hogy a

$$\varphi(x) := e^{x^2} - 1 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény megoldása a kezdetiérték-feladatnak.

2. Ha

$$f(x,y) := xy \qquad (x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}),$$

akkor f folytonos és

$$|f(x,y) - f(x,z)| = |xy - xz| = |x| \cdot |y - z| \qquad (x \in \mathbb{R},\ y, z \in \mathbb{R}),$$

ezért az

$$L(x) := |x| \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény megfelel a 7.5.4. tétel feltételeinek. Ha tehát

$$\varphi_0(x) := 1 \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

akkor a $\varphi_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény folytonos, és bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x) &= 1 + \int_0^x (t\varphi_0(t))\,dt = 1 + \int_0^x t\,dt = 1 + \frac{x^2}{2}, \\
\varphi_2(x) &= 1 + \int_0^x (t\psi_1(t))\,dt = 1 + \int_0^x t\left(1 + \frac{t^2}{2}\right)\,dt = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8}, \\
\varphi_3(x) &= 1 + \int_0^x (t\psi_2(t))\,dt = 1 + \int_0^x t\left(1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{8}\right)\,dt = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + \frac{x^6}{48}.
\end{aligned}$$

Teljes indukcióval könnyen belátható, hogy

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(\frac{x^2}{2}\right)^k \qquad (n \in \mathbb{N}_0,\ x \in \mathbb{R}),$$

így bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\varphi_n(x) \longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{x^2}{2}\right)^k = e^{x^2/2} \qquad (n \to \infty).$$

Ezért a

$$\varphi(x) := e^{x^2/2} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény a k.é.f. teljes megoldása.

3. Ha

$$f(x,y) := y\cos(x) \qquad (x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}),$$

akkor f folytonos és bármely $x \in \mathbb{R}$, ill. $y, z \in \mathbb{R}$ esetén

$$|f(x,y) - f(x,z)| = |xy - xz| = |y\cos(x) - z\cos(x)| = |\cos(x)| \cdot |y - z| \le |y - z|,$$

ezért az

$$L(x) := 1 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény megfelel a 7.5.4. tétel feltételeinek. Ha tehát

$$\varphi_0(x) := 1 \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

akkor a $\varphi_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény folytonos, és bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x) &= 1 + \int_0^x \varphi_0(t)\cos(t)\,dt = 1 + \int_0^x \cos(t)\,dt = 1 + \sin(x), \\
\varphi_2(x) &= 1 + \int_0^x \varphi_1(t)\cos(t)\,dt = 1 + \int_0^x [1 + \sin(t)]\cos(t)\,dt = \\
&= 1 + \sin(x) + \frac{\sin^2(x)}{2}, \\
\varphi_3(x) &= 1 + \int_0^x \varphi_2(t)\cos(t)\,dt = 1 + \int_0^x \left[1 + \sin(t) + \frac{\sin^2(t)}{2}\right]\cos(t)\,dt = \\
&= 1 + \sin(x) + \frac{\sin^2(x)}{2} + \frac{\sin^3(x)}{6}.
\end{aligned}$$

Teljes indukcióval könnyen belátható, hogy

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin^k(x)}{k!} \qquad (n \in \mathbb{N}_0,\ x \in \mathbb{R}),$$

így bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\varphi_n(x) \longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin^k(x)}{k!} = e^{\sin(x)} \qquad (n \to \infty).$$

Ennélfogva a

$$\varphi(x) := e^{\sin(x)} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény a k.é.f. teljes megoldása.

4. Látható, hogy a kezdetiérték-feladat

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{b}, \qquad \mathbf{y}(\tau) = \boldsymbol{\xi}$$

alakú, ahol

$$A(x) = M := \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}(x) := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad \tau := 0, \qquad \boldsymbol{\xi} := \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Ha

$$\boldsymbol{\varphi}_0(x) := \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

akkor a $\boldsymbol{\varphi}_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ függvény folytonos, és

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\varphi}_1(x) &= \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} + \int_0^x \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_0(t)\,\mathrm{d}t = \\
&= \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} + \int_0^x \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \mathrm{d}t = \\
&= \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + x \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad (x \in \mathbb{R}), \\
\boldsymbol{\varphi}_2(x) &= \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} + \int_0^x \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_1(t)\,\mathrm{d}t = \\
&= \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + x \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} + \frac{x^2}{2} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^2 \right) \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad (x \in \mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Teljes indukcióval könnyen belátható, hogy

$$\boldsymbol{\varphi}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} M^k \boldsymbol{\xi} \qquad (n \in \mathbb{N}_0,\ x \in \mathbb{R}).$$

Mivel az M mátrix egyetlen sajátértéke: $\lambda = -1$ és

$$\operatorname{rang}\,[M - \lambda E_2] = \operatorname{rang} \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \operatorname{rang} \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 1,$$

ezért λ-hoz $2 - 1 = 1$ sajátvektor tartozik: $\mathbf{u} = (1{,}1)$, továbbá $\boldsymbol{\xi} = (-1, -1) = -\mathbf{u}$, így

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^k (-\mathbf{u}) = - \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^k - \mathbf{u} = -(-1)^k \mathbf{u} = (-1)^k \boldsymbol{\xi},$$

azaz

$$\boldsymbol{\varphi}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}(-1)^k \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-x)^k}{k!} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Az $n \to \infty$ határátmenettel azt kapjuk, hogy bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\boldsymbol{\varphi}_n(x) \to \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k!} \right) \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = e^{-x} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

ezért a

$$\boldsymbol{\varphi}(x) := e^{-x} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^{-x} \\ -e^{-x} \end{bmatrix} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény a kezdetiérték-feladat teljes megoldása.

5. Látható, hogy a kezdetiérték-feladat

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{b}, \qquad \mathbf{y}(\tau) = \boldsymbol{\xi}$$

alakú, ahol

$$A(x) = M := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}(x) := \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad \tau := 0, \qquad \boldsymbol{\xi} := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ha

$$\boldsymbol{\varphi}_0(x) := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

akkor a $\boldsymbol{\varphi}_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ függvény folytonos, és bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\varphi}_1(x) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \int_0^x \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_0(t) + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \mathrm{d}t = (-x) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \\
\boldsymbol{\varphi}_2(x) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \int_0^x \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_1(t) + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \mathrm{d}t = \left(-x + \frac{1}{2}x^2 \right) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \\
\boldsymbol{\varphi}_3(x) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \int_0^x \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_2(t) + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \mathrm{d}t = \\
&= \left(-x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 \right) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Teljes indukcióval könnyen belátható, hogy

$$\boldsymbol{\varphi}_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-x)^k}{k!} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad (n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}).$$

Az $n \to \infty$ határátmenettel azt kapjuk, hogy bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\boldsymbol{\varphi}_n(x) \longrightarrow \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k!}\right) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-x} - 1 \\ -e^{-x} + 1 \end{bmatrix},$$

ezért a

$$\boldsymbol{\varphi}(x) := \begin{bmatrix} e^{-x} - 1 \\ -e^{-x} + 1 \end{bmatrix} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény a kezdetiérték-feladat teljes megoldása.

6. Ha

$$\mathbf{f}(x, \mathbf{y}) := (y_2 y_3, -y_1 y_3, 2) \qquad (x \in \mathbb{R},\ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3),$$

akkor $\mathbf{f}$, $\partial_2 \mathbf{f}$ folytonos, így alkalmas $L \geq 0$ számmal tetszőleges $x \in \mathbb{R}$, ill. $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^2$ esetén

$$\|\mathbf{f}(x, \mathbf{y}) - \mathbf{f}(x, \mathbf{z})\| \leq L\|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|.$$

Ha tehát

$$\boldsymbol{\varphi}_0(x) := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

akkor a $\boldsymbol{\varphi}_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ függvény folytonos, és bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\boldsymbol{\varphi}_n(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \int_0^x \mathbf{f}(t, \boldsymbol{\varphi}_{n-1}(t))\, \mathrm{d}t \qquad (x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}).$$

Bevezetve a

$$\boldsymbol{\varphi}_n =: \begin{bmatrix} \varphi_{n1} \\ \varphi_{n2} \\ \varphi_{n3} \end{bmatrix} \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

jelölést, nem nehéz igazolni, hogy bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\varphi_{03}(x) = 0, \quad \varphi_{n3}(x) = \int_0^x 2\, dt = 2x \quad (n \in \mathbb{N}),$$

$$\varphi_{11}(x) = 0, \quad \varphi_{12}(x) = 1.$$

Ha most

$$\boldsymbol{\chi}_n := \begin{bmatrix} \varphi_{n1} \\ \varphi_{n2} \end{bmatrix} \qquad (n \in \mathbb{N}_0),$$

akkor

$$\boldsymbol{\chi}_1(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\chi}_n(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \int_0^x \begin{bmatrix} 2t\varphi_{n-1,2} \\ -2t\varphi_{n-1,1} \end{bmatrix} \mathrm{d}t \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ill.

$$\boldsymbol{\chi}_n(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 2M \int_0^x t\boldsymbol{\chi}_{n-1}(t)\,dt \quad (x \in \mathbb{R}), \quad \text{ahol} \quad M := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Teljes indukcióval könnyen belátható, hogy

$$\boldsymbol{\chi}_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{2k}}{k!} M^k \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (n \in \mathbb{N}_0,\, x \in \mathbb{R}).$$

Mivel az M mátrix sajétértékei:

$$\lambda = \imath, \qquad \mu = -\imath,$$

és a megfelelő sajátvektorok:

$$\mathbf{u} = (\imath, -1), \qquad \mathbf{v} = (\imath, 1),$$

továbbá

$$(0,1) = -\frac{1}{2}\mathbf{u} + \frac{1}{2}\mathbf{v},$$

ezért

$$M^k \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}(\imath)^k \mathbf{u} + \frac{1}{2}(-\imath)^k \mathbf{v},$$

azaz

$$\boldsymbol{\chi}_n(x) = -\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\imath x^2)^k}{k!}\right) 2\mathbf{u} + \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-\imath x^2)^k}{k!}\right)\mathbf{v} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Mivel $n \to \infty$ esetén

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\chi}_n(x) \longrightarrow \boldsymbol{\chi}_\infty(x) &= -\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(\imath x^2)^k}{k!}\right)\begin{bmatrix} \imath \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-\imath x^2)^k}{k!}\right)\begin{bmatrix} \imath \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -\imath e^{\imath x^2} + \imath e^{-\imath x^2} \\ \imath e^{\imath x^2} + \imath e^{-\imath x^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(x^2) \\ \cos(x^2) \end{bmatrix},\end{aligned}$$

ezért a

$$\boldsymbol{\varphi}(x) := \begin{bmatrix} \sin(x^2) \\ \cos(x^2) \\ 2x \end{bmatrix} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

a kezdetiérték-feladat teljes megoldása.

7. A

$$z_1 := y, \qquad z_2 := y', \qquad z_3 := y'', \qquad z_4 := y'''$$

változók bevezetésével a kezdetiérték-feladat a

$$\mathbf{z}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{z}, \qquad \mathbf{z}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

elsőrendű (lineáris) kezdetiérték-feladattal egyenértékű, amelynek $\boldsymbol{\varphi}$ teljes megoldását egyenletesen közelítő függvénysorozat pl. a következő:

$$\boldsymbol{\psi}_0(x) := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

$$\boldsymbol{\psi}_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (n \in \mathbb{N}_0,\ x \in \mathbb{R}).$$

Világos, hogy az

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

vektor a_k-val jelölt első komponensére

$$a_k = \begin{cases} 1 & (k = 4l + 1,\ l \in \mathbb{N}_0), \\ 0 & (\text{egyébként}) \end{cases}$$

teljesül. Ezért az eredeti, negyedrendű kezdetiérték-feladat teljes megoldásának közelítése a

$$\varphi_0(x) := 0, \qquad \varphi_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{4k+1}}{(4k+1)!} \qquad (n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R})$$

függvénysorozat. Mivel bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad (n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}),$$

ezért az $n \longrightarrow \infty$ határátmenettel azt kapjuk, hogy a negyedrendű kezdetiérték-feladat teljes megoldása a

$$\varphi(x) := \frac{\sin(x) + \operatorname{sh}(x)}{2} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény.

8. Ha

$$\begin{bmatrix} \varphi_0(x) \\ \psi_0(x) \\ \omega_0(x) \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

és

$$\begin{bmatrix} \varphi_{n+1}(x) \\ \psi_{n+1}(x) \\ \omega_{n+1}(x) \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\int_0^x \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t \\ \int_0^x \{\varphi_n(t) - \psi_n(t)\}\,\mathrm{d}t \\ \int_0^x \psi_n(t)\,\mathrm{d}t + 1 - e^{-x} \end{bmatrix} \qquad (n \in \mathbb{N}_0,\ x \in \mathbb{R}),$$

akkor bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{bmatrix} \varphi_1(x) \\ \psi_1(x) \\ \omega_1(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 + \int_0^x \mathrm{d}t \\ -\int_0^x \mathrm{d}t \\ 1 - e^{-x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 + x \\ -x \\ 1 - e^{-x} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \varphi_2(x) \\ \psi_2(x) \\ \omega_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 - \int_0^x (-1+t)\,\mathrm{d}t \\ \int_0^x (-1+2t)\,\mathrm{d}t \\ -\int_0^x t\,\mathrm{d}t + 1 - e^{-x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 + x - \frac{x^2}{2} \\ -x + x^2 \\ -\frac{x^2}{2} + 1 - e^{-x} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \varphi_3(x) \\ \psi_3(x) \\ \omega_3(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 - \int_0^x \left(-1 + t - \frac{t^2}{2}\right) \mathrm{d}t \\ \int_0^x \left(-1 + 2t - \frac{3t^2}{2}\right) \mathrm{d}t \\ -\int_0^x (t - t^2)\,\mathrm{d}t + 1 - e^{-x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \\ -x + x^2 - \frac{x^3}{2} \\ -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + 1 - e^{-x} \end{bmatrix}.$$

Teljes indukcióval könnyen belátható, hogy bármely $n \in \mathbb{N}_0$, ill. $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{bmatrix} \varphi_n(x) \\ \psi_n(x) \\ \omega_n(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sum_{k=0}^{n} \frac{(-x)^k}{k!} \\ \sum_{k=1}^{n} k \frac{(-x)^k}{k!} \\ -\sum_{k=2}^{n} (k-1) \frac{(-x)^k}{k!} + 1 - e^{-x} \end{bmatrix},$$

ahonnan

$$\psi_n(x) = -x \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-x)^k}{k!}, \qquad \omega_n(x) = -\psi_n(x) - \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k!} \qquad (n \in \mathbb{N}_0,\ x \in \mathbb{R})$$

következik. Így az $n \longrightarrow \infty$ határátmenettel azt kapjuk, hogy a

$$\begin{bmatrix} \varphi_\infty(x) \\ \psi_\infty(x) \\ \omega_\infty(x) \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} -e^{-x} \\ -xe^{-x} \\ xe^{-x} \end{bmatrix} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény a kezdetiérték-feladat teljes megoldása. ■

vissza a feladathoz

A 7.6.1. gyakorló feladat.

1. Az egyenlet nem egzakt, hiszen

$$\partial_y \left(2xy^2 + e^{-x^2}\right) \equiv 4xy \not\equiv 2xe^{-x^2}\sin(y) \equiv \partial_x \left(2y - e^{-x^2}\sin(y)\right).$$

Mivel

$$\frac{\partial_2 g(x,y) - \partial_1 h(x,y)}{h(x,y)} = \frac{4xy - 2xe^{-x^2}\sin(y)}{2y - e^{-x^2}\sin(y)} = 2x =: m(x),$$

ezért pl.

$$M(s) := s^2 \qquad (s \in \mathbb{R})$$

esetén a

$$\mu(x,y) := e^{M(x)} = e^{x^2} \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$$

függvény multiplikátor: az

$$(2xy^2e^{x^2} + 1)\,\mathrm{d}x + (2ye^{x^2} - \sin(y))\,\mathrm{d}y = 0$$

egyenlet egzakt. Ha a $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvényre

$$\operatorname{grad} P(x,y) = \left(2xy^2e^{x^2} + 1, 2ye^{x^2} - \sin(y)\right) \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2),$$

akkor $\partial_1 P(x,y) \equiv 2xy^2e^{x^2} + 1$, azaz

$$P(x,y) = y^2e^{x^2} + x + k(y) \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2),$$

ahol $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deriválható függvény. Mivel tetszőleges $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ esetén

$$2ye^{x^2} - \sin(y) = \partial_2 P(x,y) = 2ye^{x^2} + k'(y),$$

ezért pl. a

$$k(y) = \cos(y) \qquad (y \in \mathbb{R})$$

választás megfelelő. Ha tehát a φ függvény megoldása az egzakt egyenletnek, akkor van olyan $c \in \mathbb{R}$, hogy minden $x \in \mathcal{D}_\varphi$ esetén

$$\varphi^2(x)e^{x^2} + x + \cos(\varphi(x)) = c.$$

2.

3.

4.

5.

6.

7.

8.

9. Az egyenlet nem egzakt, hiszen

$$\partial_y(2x^3y^2 - y) \equiv 4x^3y - 1 \not\equiv 4xy^3 - 1 \equiv \partial_x(2x^2y^3 - x).$$

Mivel

$$\frac{\partial_y(2x^3y^2 - y) - \partial_x(2x^2y^3 - x)}{y(2x^2y^3 - x) - x(2x^3y^2 - y)} = \frac{4x^3y - 1 - 4xy^3 + 1}{2x^2y^4 - xy - 2x^4y^2 + xy} = \frac{-2}{xy} =: m(xy),$$

ezért pl.

$$M(s) := \ln(1/s^2) \qquad (s > 0)$$

esetén a

$$\mu(x, y) := e^{M(xy)} = \frac{1}{x^2y^2} \qquad ((x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0)$$

függvény multiplikátor. Könnyen ellenőrizhető, hogy – a tengelyeket kivéve – μ egész $\mathbb{R}^2$-en is multiplikátor. ■

vissza a feladathoz

A 7.6.2. gyakorló feladat.

1. A

$$\tau := 0, \quad \xi := 0, \qquad g(x) := 2x \quad (x \in I := \mathbb{R}), \qquad h(y) := y{+}1 \quad (y \in J := (-1, +\infty))$$

választással olyan szeparábilis kezdetiérték-feladatot kell megoldani, ahol

$$(\tau, \xi) \in I \times J, \quad g \in \mathfrak{C}(I, \mathbb{R}), \quad h \in \mathfrak{C}(J, \mathbb{R}) \quad \text{és} \quad h(y) \neq 0 \quad (y \in J).$$

Mivel

$$\int_\tau^x g = \int_0^x 2t \,\mathrm{d}t = x^2 \quad (x \in I)\,, \qquad \int_\xi^u \frac{1}{h} = \int_0^u \frac{1}{s+1} \,\mathrm{d}s = \ln(u+1) \quad (u \in J)$$

és

$$\inf_{u\in J} \int_\xi^u \frac{1}{h} = -\infty, \quad \text{ill.} \quad \sup_{u\in J} \int_\xi^u \frac{1}{h} = +\infty,$$

ezért a fenti kezdetiérték-feladat φ megoldására

$$x^2 = \ln(\varphi(x)+1) \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi(x) = e^{x^2} - 1 \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi),$$

ahol

$$\mathcal{D}_\varphi = \left\{x \in \mathbb{R} : -\infty < x^2 < +\infty\right\} = \mathbb{R}.$$

2. A

$$\tau := 0, \quad \xi := 1, \qquad g(x) := x \quad (x \in I := \mathbb{R}), \qquad h(y) := 1-2y \quad (y \in J := (1/2, +\infty))$$

választással olyan szeparábilis kezdetiérték-feladatra jutunk, ahol

$$(\tau, \xi) \in I \times J \qquad \text{és} \qquad h(y) \neq 0 \quad (y \in J).$$

Mivel

$$\int_\tau^x g = \int_0^x t \,\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2} \qquad (x \in I)$$

és

$$\int_\xi^u \frac{1}{h} = \int_1^u \frac{1}{1-2s}\,\mathrm{d}s = -\frac{\ln(2u-1)}{2} \qquad (u \in J)\,,$$

és

$$\inf_{u \in J} \int_\xi^u \frac{1}{h} = -\infty, \qquad \text{ill.} \qquad \sup_{u \in J} \int_\xi^u \frac{1}{h} = +\infty,$$

ezért a fenti kezdetiérték-feladat teljes megoldására

$$\frac{x^2}{2} = -\frac{\ln(2\varphi(x)-1)}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi(x) = \frac{1+e^{-x^2}}{2} \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi),$$

ahol

$$\mathcal{D}_\varphi = \left\{x \in \mathbb{R} : -\infty < \frac{x^2}{2} < +\infty\right\} = \mathbb{R}.$$

3. A

$$\tau := 2, \quad \xi := 2\sqrt{3},$$

ill.

$$g(x) := -\frac{1}{2x\sqrt{2x-x^2}} \quad (x \in I := (0,2)), \qquad h(y) := 4 + y^2 \quad (y \in J := \mathbb{R})$$

választással olyan szeparábilis kezdetiérték-feladatra jutunk, ahol

$$(\tau, \xi) \in I \times J \qquad \text{és} \qquad h(y) \neq 0 \quad (y \in J).$$

A $\sqrt{2t-t^2} =: ut$ helyettesítéssel (vö. 3. Euler-féle helyettesítés) azt kapjuk, hogy

$$\int_\tau^x g = \int_2^x \frac{-1}{2t\sqrt{2t-t^2}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\sqrt{2x-x^2}}{x}} \frac{-1}{\frac{4}{u^2+1}\cdot\frac{2u}{u^2+1}} \cdot \frac{-4u}{(u^2+1)^2}\,\mathrm{d}u =$$

$$= \int_0^{\frac{\sqrt{2x-x^2}}{x}} \frac{1}{2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2x-x^2}}{x} \qquad (x \in I)\,.$$

Mivel
$$\int_\xi^u \frac{1}{h} = \int_{2\sqrt{3}}^u \frac{1}{4+s^2}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\left(\frac{u}{2}\right) - \frac{\pi}{6} \qquad (u \in J),$$
és
$$\inf_{u\in J}\int_\xi^u \frac{1}{h} = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = -\frac{5\pi}{12}, \qquad \text{ill.} \qquad \sup_{u\in J}\int_\xi^u \frac{1}{h} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12},$$
ezért a fenti kezdetiérték-feladat teljes megoldására
$$\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2x-x^2}}{x} = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\left(\frac{\varphi(x)}{2}\right) - \frac{\pi}{6} \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi),$$
azaz
$$\varphi(x) = 2\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{2x-x^2}}{x}\right) \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi),$$
ahol
$$\mathcal{D}_\varphi = \left\{x \in (0,2) :\ -\frac{5\pi}{12} < \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2x-x^2}}{x} < \frac{\pi}{12}\right\} = \left(\frac{72}{\pi^2+36},2\right).$$

4. A $\tau := 0$, $\xi := -1$, ill.
$$g(x) := \frac{x}{\sqrt{1+x}} \quad (x \in I := \mathbb{R}), \qquad h(y) := y^3 \quad (y \in J := (-\infty,0))$$
választással olyan szeparábilis kezdetiérték-feladatot kell megoldani, ahol
$$(\tau,\xi) \in I \times J, \quad g \in \mathfrak{C}(I,\mathbb{R}), \quad h \in \mathfrak{C}(J,\mathbb{R}) \quad \text{és} \quad h(y) \neq 0 \quad (y \in J).$$
Mivel
$$\int_\tau^x g = \int_0^x \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1}{2}\cdot\frac{2t}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t = \left[\sqrt{1+t^2}\right]_0^x = \sqrt{1+x^2} - 1 \qquad (x \in I)$$
és
$$\int_\xi^u \frac{1}{h} = \int_{-1}^u \frac{1}{s^3}\,\mathrm{d}s = \left[-\frac{1}{2s^2}\right]_{-1}^u = -\frac{1}{2u^2} + \frac{1}{2} \qquad (u \in J)$$
továbbá
$$\inf_{u\in J}\int_\xi^u \frac{1}{h} = -\infty, \qquad \text{ill.} \qquad \sup_{u\in J}\int_\xi^u \frac{1}{h} = \frac{1}{2},$$
ezért a fenti kezdetiérték-feladat φ megoldására
$$\sqrt{1+x^2} - 1 = -\frac{1}{2\varphi(x)^2} + \frac{1}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi(x) = -\frac{1}{\sqrt{3-2\sqrt{1+x^2}}} \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi),$$
ahol
$$\mathcal{D}_\varphi = \left\{x \in \mathbb{R} : -\infty < \sqrt{1+x^2} - 1 < \frac{1}{2}\right\} = \left(-\frac{\sqrt{5}}{2},\frac{\sqrt{5}}{2}\right). \quad \blacksquare$$

vissza a feladathoz

A 7.6.3. gyakorló feladat.

1. Ha a φ függvény megoldása a kezdetiérték-feladatnak, azaz

$$\varphi'(x) = (2x + 2\varphi(x) - 1)^2 \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi), \qquad \text{és} \qquad \varphi(0) = 1,$$

továbbá

$$\psi(x) := 2x + 2\varphi(x) - 1 \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi),$$

akkor ψ megoldása a

$$z'(x) = 2 + 2z^2(x) \quad (x \in \mathcal{D}_y), \qquad z(0) = 0 + 2 - 1 = 1$$

(autonóm, ill. szeparábilis) kezdetiérték-feladatnak. A $\tau := 0$, $\xi := 1$, ill.

$$g(x) := 1 \quad (x \in I := \mathbb{R}), \qquad h(z) := 2 + 2z^2 \quad (z \in J := \mathbb{R})$$

választással

$$(\tau, \xi) \in I \times J, \qquad g, h \in \mathfrak{C}: \qquad h(z) \neq 0 \quad (z \in J).$$

Mivel

$$\int_\tau^x g = \int_0^x 1\,\mathrm{d}t = x \qquad (x \in I),$$

$$\int_\xi^u \frac{1}{h} = \int_1^u \frac{1}{2 + 2w^2}\,\mathrm{d}w = \frac{1}{2}\left(\mathrm{arctg}\,(u) - \mathrm{arctg}\,(1)\right) \qquad (u \in J)$$

és

$$\inf_{u \in J} \int_\xi^u \frac{1}{h} = \frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{3\pi}{8}, \qquad \text{ill.} \qquad \sup_{u \in J} \int_\xi^u \frac{1}{h} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{8},$$

továbbá

$$\left\{x \in \mathbb{R}:\ -\infty < \int_\tau^x g < +\infty\right\} = \left(-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right),$$

ezért

$$\psi(x) = \mathrm{tg}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \qquad \left(x \in \left(-\frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right)\right),$$

ahonnan

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{tg}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + 1 - 2x\right) \qquad \left(x \in \left(-\frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right)\right)$$

következik.

2.

3.

4.

5.

vissza a feladathoz

A 7.6.4. gyakorló feladat.

1. Ha a φ függvény megoldása a kezdetiérték-feladatnak, azaz

$$\varphi'(x) = \sin^2(x - \varphi(x)) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi), \qquad \text{és} \qquad \varphi(0) = 0,$$

továbbá

$$\psi(x) := x - \varphi(x) \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi),$$

akkor ψ megoldása a

$$z'(x) = 1 - \sin^2(z(x)) = \cos^2(z(x)) \quad (x \in \mathcal{D}_y), \qquad z(0) = 0 - 0 = 0$$

(autonóm, ill. szeparábilis) kezdetiérték-feladatnak. A $\tau := 0$, $\xi := 0$, ill.

$$g(x) := 1 \quad (x \in I := \mathbb{R}), \qquad h(z) := \cos^2(z) \quad \left(z \in J := \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

választással

$$(\tau, \xi) \in I \times J, \qquad g, h \in \mathfrak{C}: \qquad h(z) \neq 0 \quad (z \in J).$$

Mivel

$$\int_\tau^x g = \int_0^x 1\,\mathrm{d}t = x \quad (x \in I), \qquad \int_\xi^u \frac{1}{h} = \int_0^u \frac{1}{\cos^2(w)}\,\mathrm{d}w = \mathrm{tg}\,(u) \quad (u \in J)$$

és

$$\inf_{u \in J} \int_\xi^u \frac{1}{h} = -\infty, \qquad \text{ill.} \qquad \sup_{u \in J} \int_\xi^u \frac{1}{h} = +\infty,$$

továbbá

$$\left\{x \in \mathbb{R}:\ -\infty < \int_\tau^x g < +\infty\right\} = \mathbb{R},$$

ezért

$$\psi(x) = \mathrm{arctg}\,(x) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ahonnan

$$\varphi(x) = x - \mathrm{arctg}\,(x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

következik.

2. Ha a φ függvény megoldása a kezdetiérték-feladatnak, azaz

$$\varphi'(x) = \frac{\varphi^3(x) - x^3}{x\varphi^2(x)} = \frac{\varphi(x)}{x} + \frac{x^2}{\varphi(x)} \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi), \qquad \text{és} \qquad \varphi(1) = 1,$$

továbbá

$$\psi(x) := \frac{\varphi(x)}{x} \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi),$$

akkor ψ megoldása a

$$z'(x) = -\frac{1}{xz^2(x)} \quad (x \in \mathcal{D}_y), \qquad z(1) = 1$$

szeparábilis kezdetiérték-feladatnak. Mivel

$$\int_1^x \left(-\frac{1}{t}\right) \mathrm{d}t = -\ln(x) \quad (x > 0), \qquad \int_1^u w^2 \, \mathrm{d}w = \frac{u^3 - 1}{3} \quad (u > 0)$$

és

$$\inf_{u>0} \int_1^u w^2 \, \mathrm{d}w = -\frac{1}{3}, \qquad \sup_{u>0} \int_1^u w^2 \, \mathrm{d}w = +\infty$$

továbbá

$$\left\{x > 0: \; -\frac{1}{3} < \int_1^x \left(-\frac{1}{t}\right) \mathrm{d}t < +\infty\right\} = \left(0, \sqrt[3]{e}\right),$$

ezért

$$\psi(x) = \sqrt[3]{1 - 3\ln(x)} \qquad \left(x \in \left(0, \sqrt[3]{e}\right)\right),$$

ahonnan

$$\varphi(x) = x\sqrt[3]{1 - 3\ln(x)} \qquad \left(x \in \left(0, \sqrt[3]{e}\right)\right)$$

következik.

3. Ha a φ függvény megoldása a kezdetiérték-feladatnak, azaz

$$\varphi'(x) = 1 + \frac{\varphi^2(x)}{x^2 + x\varphi(x)} = 1 + \frac{\left(\frac{\varphi(x)}{x}\right)^2}{1 + \frac{\varphi(x)}{x}} \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi), \qquad \text{és} \qquad \varphi(1) = 0,$$

továbbá

$$\psi(x) := \frac{\varphi(x)}{x} \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi),$$

akkor ψ megoldása a

$$z'(x) = \frac{1}{x}\left(1 + \frac{z^2(x)}{1 + z(x)} - z(x)\right) = \ldots = \frac{1}{x(1 + z(x))} \quad (x \in \mathcal{D}_y), \qquad z(1) = 0$$

szeparábilis kezdetiérték-feladatnak. Mivel

$$\int_1^x \frac{1}{t} \, \mathrm{d}t = \ln(x) \quad (x > 0), \qquad \int_0^u (1 + w) \, \mathrm{d}w = u + \frac{u^2}{2} \quad (u > -1)$$

és

$$\inf_{u>-1} \int_0^u (1 + w) \, \mathrm{d}w = -\frac{1}{2}, \qquad \sup_{u>-1} \int_0^u (1 + w) \, \mathrm{d}w = +\infty$$

továbbá

$$\left\{x > 0: \; -\frac{1}{2} < \int_1^x \frac{1}{t} \, \mathrm{d}t < +\infty\right\} = \left(1/\sqrt{e}, +\infty\right),$$

ezért

$$\psi(x) = \sqrt{1 + 2\ln(x)} - 1 \qquad \left(x \in \left(1/\sqrt{e}, +\infty\right)\right),$$

ahonnan

$$\varphi(x) = x\sqrt{1+2\ln(x)} - x \qquad \big(x \in \big(1/\sqrt{e}, +\infty\big)\big)$$

következik. ■

vissza a feladathoz

A 7.6.5. gyakorló feladat.

Ha

$$a_1b_2 - b_1a_2 = \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} = 0,$$

akkor alkalmas $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ számokkal

$$a_1 = \lambda a_2 \quad \text{és} \quad b_1 = \lambda b_2 \qquad \text{vagy} \qquad a_2 = \mu a_1 \quad \text{és} \quad b_2 = \mu b_1.$$

Ez azt jelenti, hogy

$$f\left(\frac{a_1x + b_1y(x) + c_1}{a_2x + b_2y(x) + c_2}\right) =$$

$$=$$

$$=$$

Ha

$$a_1b_2 - b_1a_2 = \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \neq 0,$$

akkor

vissza a feladathoz

A 7.6.6. gyakorló feladat.

1.
2.
3.
4.

vissza a feladathoz

A 7.6.7. gyakorló feladat.

1.

2.

3.

4.

5. φ pontosan akkor a kezdetiérték-feladat teljes megoldása, ha bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$
\begin{aligned}
\varphi(x) &= \left(1 + \int_0^x \sin(t)\cos(t)\exp\left(-\int_0^t -\cos(s)\,\mathrm{d}s\right)\,\mathrm{d}t\right)\cdot \\
&\quad \cdot \exp\left(\int_0^x -\cos(t)\,\mathrm{d}t\right) = e^{-\sin(x)}\left\{1 + \int_0^x \sin(t)\cos(t)e^{\sin(t)}\,\mathrm{d}t\right\} = \\
&= e^{-\sin(x)}\left\{1 + \left[\sin(t)e^{\sin(t)}\right]_0^x - \int_0^x \cos(t)e^{\sin(t)}\,\mathrm{d}t\right\} = \\
&= e^{-\sin(x)}\left\{1 + \sin(x)e^{\sin(x)} - \left[e^{\sin(t)}\right]_0^x\right\} = 2e^{-\sin(x)} + \sin(x) - 1.
\end{aligned}
$$

6. Ha $x > 0$, akkor olyan

$$\psi : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$$

differenciálható függvényt kell meghatároznunk, amelyre

$$\psi'(x) = \frac{1}{x}\psi(x) + x \qquad (x > 0).$$

Így bármely $x > 0$ esetén (vö. (7.6.35) formula)

$$\psi(x) = \left\{2 + \int_1^x s\exp\left(-\int_1^s \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u\right)\,\mathrm{d}s\right\}\exp\left(\int_1^x \frac{1}{s}\,\mathrm{d}s\right) = \{2 + x - 1\}\cdot x = x + x^2.$$

Behelyettesítéssel látható, hogy a

$$\varphi(x) := x + x^2 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

a kezdetiérték-feladat megoldása.

7. φ pontosan akkor a kezdetiérték-feladat teljes megoldása, ha bármely $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

esetén

$$
\begin{aligned}
\varphi(x) &= \left\{1+\int_0^x \exp\left(-\int_0^s 3\mathrm{tg}\,(u)\,\mathrm{d}u\right)\,\mathrm{d}s\right\}\cdot\exp\left(\int_0^x 3\mathrm{tg}\,(s)\,\mathrm{d}s\right) = \\
&= \left\{1+\int_0^x \exp\left([\ln(\cos(u)]_0^s\right)\,\mathrm{d}s\right\}\cdot\exp\left([-3\ln(\cos(s)]_0^x\right) = \\
&= \left\{1+\int_0^x \cos^3(s)\,\mathrm{d}s\right\}\cdot\frac{1}{\cos^3(x)} = \\
&= \left\{1+\int_0^x \cos(s)[1-\sin^2(s)]\,\mathrm{d}s\right\}\cdot\frac{1}{\cos^3(x)} = \\
&= \left\{1+\sin(x)-\frac{\sin^3(x)}{3}\right\}\cdot\frac{1}{\cos^3(x)}. \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

vissza a feladathoz

A 7.6.8. gyakorló feladat.

1. Az egyenletet átrendezve, ill. az

$$
I := \mathbb{R}, \qquad A(x) := \frac{2x}{1+x^2}, \quad b(x) := (1+x^2)^2 \quad (x\in I)
$$

választással lineáris differenciálegyenletet kapunk.

1. **módszer.**

1. lépés.. A homogén egyenlet egy megoldása a $\varphi_H := \exp\circ\alpha$ függvény, ahol

$$
\alpha'(x) = \frac{2x}{1+x^2} \qquad (x\in\mathbb{R}),
$$

így

$$
\varphi_H(x) = \exp\left(\ln(1+x^2)\right) = 1+x^2 \qquad (x\in\mathbb{R}).
$$

2. lépés.. A $\dfrac{b}{\varphi_H}$ tetszőleges m primitív függvényére

$$
m \in \int (1+x^2)\,\mathrm{d}x = \left[x+\frac{x^3}{3}\right]_{x\in\mathbb{R}}.
$$

3. lépés.. Így a differenciálegyenlet megoldáshalmaza:

$$
\mathcal{M} := \left\{\mathbb{R}\ni x\mapsto c\left(1+x^2\right)+\left(x+\frac{x^3}{3}\right)\cdot\left(1+x^2\right):\ c\in\mathbb{R}\right\}.
$$

2. **módszer.**

1. lépés.. Tegyük fel, hogy az egyenlet φ megoldása

$$\varphi = \mu \cdot \nu$$

alakú, ahol $\mu, \nu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenciálható függvények. Ez azt jelenti, hogy bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\mu'(x) \cdot \nu(x) + \mu(x) \cdot \nu'(x) - \frac{2x}{1+x^2}\mu(x) \cdot \nu(x) = (1+x^2)^2 \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ill.

$$\mu(x)\left(\nu'(x) - \frac{2x}{1+x^2}\nu(x)\right) + \left(\mu'(x)\nu(x) - (1+x^2)^2\right) = 0 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Így

$$\nu'(x) - \frac{2x}{1+x^2}\nu(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad \text{ill.} \qquad \mu'(x)\nu(x) - (1+x^2)^2 = 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

2. lépés.. Ezért, ha

$$\nu(x) := \exp\left(\ln(1+x^2)\right) = 1 + x^2 \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

azaz

$$\mu'(x) = 1 + x^2 \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

akkor bármely $c \in \mathbb{R}$ esetén a

$$\mu(x) := x + \frac{x^3}{3} + c \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény megfelelő, azaz a differenciálegyenlet megoldáshalmaza:

$$\mathcal{M} := \left\{\mathbb{R} \ni x \mapsto \mu(x)\nu(x) = (1+x^2)^2\left(x + \frac{x^3}{3} + c\right) : \ c \in \mathbb{R}\right\}.$$

2. A $0 \neq 1 + x^2$ számmal osztva, mjad az egyenletet átrendezve, ill. az

$$I := \mathbb{R}, \qquad A(x) := \frac{4x}{1+x^2}, \quad b(x) := \frac{x}{1+x^2} \quad (x \in I)$$

választással lineáris differenciálegyenletet kapunk.
1. **módszer.**

1. lépés.. A homogén egyenlet egy megoldása a $\varphi_H := \exp \circ \alpha$ függvény, ahol

$$\alpha'(x) = \frac{4x}{1+x^2} \quad (x \in \mathbb{R}),$$

így

$$\varphi_H(x) = \exp\left(2 \cdot \ln(1+x^2)\right) = \left(1+x^2\right)^2 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

2. lépés.. A $\dfrac{b}{\varphi_H}$ tetszőleges m primitív függvényére

$$m \in \int \frac{x}{(1+x^2)^3}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{(1+x^2)^3}\,dx = \left[-\frac{1}{4\,(1+x^2)^2}\right]_{x\in\mathbb{R}}.$$

3. lépés.. Így tetszőleges $c \in \mathbb{R}$ esetén az inhomogén differenciálegyenlet megoldása tehát a

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= (c+m(x))\varphi_H(x) = \left(c - \frac{1}{4(1+x^2)^2}\right)\cdot(1+x^2)^2 = \\ &= c\cdot(1+x^2)^2 - \frac{1}{4} \quad (x \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

függvény.

4. lépés.. Az $y(0) = 0$ kezdeti feltételt figyelembe véve azt kapjuk, hogy $c = \dfrac{1}{4}$, azaz a kezdetiérték-feladat megoldása a

$$\boxed{\varphi(x)} = \frac{1}{4}\left((1+x^2)^2 - 1\right) = \boxed{\frac{1}{4}\left(2x^2 + x^4\right)} \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvény.

2. **módszer**:

Az integrálos képletből kifejezzük a megoldást:

$$\begin{aligned} \boxed{\varphi(x)} &= \left(0 + \int_0^x h(t)\exp\left(-\int_0^t g(s)\,ds\right)\,dt\right)\cdot\exp\left(\int_0^x g(t)\,dt\right) = \\ &= \left(\int_0^x \frac{t}{1+t^2}\exp\left(-2\ln(1+t^2)\right)\,dt\right)\cdot\exp\left(2\ln(1+x^2)\right) = \\ &= \left(\int_0^x \frac{t}{(1+t^2)^3}\,dt\right)\cdot(1+x^2)^2 = \\ &= \left[\frac{-1}{4(1+t^2)^2}\right]_0^x\cdot(1+x^2)^2 = \boxed{\frac{(1+x^2)^2-1}{4}} \quad (x \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

3. **módszer**:

1. lépés.. Tegyük fel, hogy az egyenlet φ megoldása

$$\varphi = \mu \cdot \nu$$

alakú, ahol $\mu, \nu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenciálható függvények. Ez azt jelenti, hogy bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\mu'(x)\nu(x) + \mu(x)\nu'(x) = \frac{4x}{1+x^2}\cdot\mu(x)\nu(x) + \frac{x}{1+x^2},$$

ill.

$$\mu(x)\left(\nu'(x)-\frac{4x}{1+x^2}\cdot\nu(x)\right)+\mu'(x)\nu(x)-\frac{x}{1+x^2}=0 \qquad (x\in\mathbb{R}).$$

Így

$$\nu'(x)-\frac{4x}{1+x^2}\cdot\nu(x)=0 \quad (x\in\mathbb{R}), \qquad \text{ill.} \qquad \mu'(x)\nu(x)-\frac{x}{1+x^2}=0 \quad (x\in\mathbb{R}).$$

2. lépés.. Ezért, ha

$$\nu(x):=\exp\left(2\ln(1+x^2)\right)=(1+x^2)^2 \qquad (x\in\mathbb{R}),$$

azaz

$$\mu'(x)=\frac{x}{(1+x^2)(1+x^2)^2} \qquad (x\in\mathbb{R}),$$

akkor bármely $c\in\mathbb{R}$ esetén a

$$\mu(x):=-\frac{1}{4(1+x^2)^2}+c \qquad (x\in\mathbb{R})$$

függvény megfelelő, azaz

$$\varphi(x):=\mu(x)\nu(x)=-(1+x^2)^2\frac{1}{4(1+x^2)^2}+c(1+x^2)^2 \qquad (x\in\mathbb{R})$$

a differenciálegyenlet megoldása.

3. lépés.. Az $y(0)=0$ kezdeti feltételt figyelembe véve azt kapjuk, hogy $c=\frac{1}{4}$, azaz a kezdetiérték-feladat megoldása a

$$\boxed{\varphi(x) \;=-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}(1+x^2)^2} \quad (x\in\mathbb{R})$$

függvény. ■

vissza a feladathoz

A 7.6.9. gyakorló feladat.

1. Az egyenletet átrendezve, ill. az

$$I:=(0,+\infty), \qquad a(x):=-\frac{1}{x}, \qquad b(x):=-1 \quad (x\in I), \qquad \text{ill. az} \qquad \alpha:=2$$

választással Bernoulli-féle egyenletet kapunk. Tegyük fel, hogy valamely $J\subset I$ intervallum esetén $\varphi: I\to(0,+\infty)$ a differenciálegyenlet megoldása és legyen $\psi:=\varphi^{-1}$. Ekkor ψ a

$$z'(x)=\frac{z(x)}{x}+1 \qquad (x\in J)$$

lineáris differenciálegyenlet megoldása.

$$\psi_H(x) = \exp(\ln(x)) = x \qquad (x \in J),$$

$$m'(x) = \frac{1}{x}, \qquad \text{így} \qquad m(x) = \ln(x) \quad (x \in J).$$

Ekkor tehát

$$\psi(x) = (c + \ln(x))x \qquad (x \in J),$$

ezért az eredeti egyenlenek megoldása a

$$\varphi(x) := \frac{1}{(c + \ln(x))x} \qquad (x \in (0{,}1/e^c))$$

függvény.

2. Az egyenletet átrendezve, ill. az

$$I := \mathbb{R}, \qquad a(x) := 1, \qquad b(x) := x \quad (x \in I), \qquad \text{ill. az} \qquad \alpha := -1$$

választással Bernoulli-féle egyenletet kapunk. Tegyük fel, hogy valamely $J \subset I$ intervallum esetén $\varphi : I \to (0, +\infty)$ a differenciálegyenlet megoldása és legyen $\psi := \varphi^2$. Ekkor ψ a

$$z'(x) = 2z(x) + 2x \quad (x \in J)$$

lineáris differenciálegyenlet megoldása.

$$\psi_H(x) = e^{2x} \quad (x \in J), \qquad m'(x) = 2xe^{-2x},$$

így

$$m(x) = -xe^{-2x} - \frac{e^{-2x}}{2} \qquad (x \in J).$$

Ekkor tehát

$$\psi(x) = \left(c - xe^{-2x} - \frac{e^{-2x}}{2}\right) e^{2x} \qquad (x \in J),$$

ezért az eredeti egyenlenek megoldása a

$$\varphi(x) := \sqrt{\frac{2ce^{2x} - 2x - 1}{2}} \qquad (x \in J)$$

függvény.

3. Az egyenletet átrendezve, ill. az

$$I := (0, +\infty), \qquad a(x) := -\frac{1}{x}, \qquad b(x) := \frac{\ln(x)}{x} \quad (x \in I), \qquad \text{ill. az} \qquad \alpha := -3$$

választással Bernoulli-féle egyenletet kapunk. Tegyük fel, hogy valamely $J \subset I$ intervallum esetén $\varphi : I \to (0, +\infty)$ a differenciálegyenlet megoldása és legyen $\psi := \varphi^4$. Ekkor ψ a

$$z'(x) = \frac{-4z(x)}{x} + \frac{4\ln(x)}{x} \qquad (x \in J)$$

lineáris differenciálegyenlet megoldása.

$$\psi_H(x) = \exp(-4\ln(x)) = \frac{1}{x^4} \quad (x \in J), \qquad m'(x) = 4x^3\ln(x),$$

így

$$m(x) = x^4\ln(x) - \frac{x^4}{4} \qquad (x \in J).$$

Ekkor tehát

$$\psi(x) = \left(\frac{c}{x^4} + \ln(x) - \frac{1}{4}\right) \qquad (x \in J),$$

ezért az eredeti egyenlenek megoldása a

$$\varphi(x) := \sqrt[4]{\frac{c}{x^4} + \ln(x) - \frac{1}{4}} \qquad (x \in J)$$

függvény.

4. Az egyenletet átrendezve, ill. az

$$I := \mathbb{R}, \qquad a(x) := x, \qquad b(x) := x^3 \quad (x \in I), \qquad \text{ill. az} \qquad \alpha := 3$$

választással Bernoulli-féle egyenletet kapunk. Tegyük fel, hogy valamely $J \subset I$ intervallum esetén $\varphi : I \to (0, +\infty)$ a differenciálegyenlet megoldása és legyen $\psi := \varphi^{-2}$. Ekkor ψ a

$$z'(x) = -2xz(x) - 2x^3 \qquad (x \in J)$$

lineáris differenciálegyenlet megoldása.

$$\psi_H(x) = \exp(-x^2) \quad (x \in J), \qquad m'(x) = -2x^3e^{x^2} = -x^2(2x)e^{x^2},$$

így

$$m(x) = e^{x^2}(1 - x^2) \qquad (x \in J).$$

Ekkor tehát

$$\psi(x) = ce^{-x^2} + 1 - x^2 \qquad (x \in J),$$

ezért az eredeti egyenlenek megoldása a

$$\varphi(x) := \sqrt{\frac{1}{ce^{-x^2} + 1 - x^2}} \qquad (x \in J)$$

függvény.

5. Az

$$I := \mathbb{R}, \quad a(x) := -1, \quad b(x) := -1 \quad (x \in I) \quad \text{ill.} \quad \alpha := -1$$

választással Bernoulli-féle egyenletet kapunk. Tegyük fel, hogy valamely $J \subset I$ intervallum esetén $\varphi : I \to (0, +\infty)$ a differenciálegyenlet megoldása és legyen $\psi := \varphi^2$. Ekkor ψ a

$$z'(x) = -2z(x) - 2 \quad (x \in J)$$

lineáris differenciálegyenlet megoldása.

$$\psi_H(x) = \exp(-2x) \qquad \text{és} \qquad m'(x) = -2e^{-2x} \qquad (x \in J).$$

Ekkor tehát

$$\psi(x) = ce^{2x} - 1 \qquad (c \in \mathbb{R},\ x \in J),$$

ezért az eredeti egyenlenek megoldása a

$$\varphi(x) := \sqrt{ce^{2x} - 1} \qquad \left(0 < c \in \mathbb{R},\ x \in \left(0, \ln\left(\sqrt{c}\right)\right)\right)$$

függvény.

6. Az egyenletet átrendezve, ill. az

$$I := (0, +\infty), \qquad a(x) := -\frac{2}{x}, \qquad b(x) := -\frac{1}{x^2} \qquad (x \in I),$$

ill. az $\alpha := 3$ választással Bernoulli-féle egyenletet kapunk. Tegyük fel, hogy φ a kezdetiérték-feladat megoldása, és legyen $\psi := \varphi^{-2}$. Ekkor ψ a

$$z'(x) = -\frac{4}{x}z(x) + \frac{2}{x^2} \quad (x \in J \subset I), \qquad z(1) = 1$$

lineáris kezdetiérték-feladat megoldása. Így tehát

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \left(1 + \int_1^x \left[\left(\frac{2}{t^2}\right)\exp\left(-\int_1^t -\frac{4}{s}\,ds\right)\right]dt\right)\exp\left(\int_1^x -\frac{4}{t}\,dt\right) = \\ &= \left(1 + \int_1^x \frac{2}{t^6}\,\mathrm{d}t\right)x^4 = \left(1 - \frac{2}{5x^5} + \frac{2}{5}\right)x^4 \frac{7x^5 - 2}{5x} \quad (x \in J),\end{aligned}$$

ezért

$$\varphi(x) = \sqrt{\frac{5x}{7x^5 - 2}} \qquad \left(x \in \left(\sqrt[5]{\frac{2}{7}}, +\infty\right)\right).$$

vissza a feladathoz

A 7.6.10. gyakorló feladat.

Az a tény, hogy a $\varphi : I \to (0, +\infty)$ függvény a Bernoulli-féle differenciálegyenlet megoldása, azt jelenti, hogy

$$\varphi'(x) = a(x) \cdot \varphi(x) + b(x) \cdot \varphi^\alpha(x) \qquad (x \in I).$$

Mindkét oldalt $[\varphi(x)]^{-\alpha}$-val beszorozva azt kapjuk, hogy

$$\varphi'(x)[\varphi(x)]^{-\alpha} = a(x)\cdot\varphi(x)[\varphi(x)]^{-\alpha} + b(x)\cdot\varphi^{\alpha}(x)[\varphi(x)]^{-\alpha} \qquad (x\in I).$$

Így az

$$u(x) := [\varphi(x)]^{1-\alpha} \qquad (x\in I)$$

jelöléssel a beszorzott egyenlet az

$$\frac{1}{1-\alpha}u'(x) = a(x)u(x) + b(x) \qquad (x\in I)$$

pontosabban az

$$u'(x) + (\alpha-1)a(x)u(x) = (1-\alpha)b(x) \qquad (x\in I)$$

egyenlettel egyenértékű. ■

vissza a feladathoz

A 7.7.1. gyakorló feladat.

Világos, hogy

- mindketten megoldásai a homogén egyenletnek, ui. bármely $x>0$ esetén

$$\boldsymbol{\mu}_1'(x) = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1/x & 2x\\0 & 1/x\end{bmatrix}\boldsymbol{\mu}_1(x), \quad \boldsymbol{\mu}_2'(x) = \begin{bmatrix}3x^2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1/x & 2x\\0 & 1/x\end{bmatrix}\boldsymbol{\mu}_2(x).$$

- lineárisan függetlenek:

$$\det\begin{bmatrix}x & x^3\\0 & x\end{bmatrix}_{x=1} = 1. \quad ■$$

vissza a feladathoz

A 7.7.2. gyakorló feladat.

(1). Látható, hogy a fenti kezdetiérték-feladat a következő alakú:

$$\mathbf{y}' = M\mathbf{y} + \mathbf{b}, \qquad \mathbf{y}(0) = \boldsymbol{\xi},$$

ahol

$$M := \begin{bmatrix}3 & 2\\4 & 1\end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b}(x) := \begin{bmatrix}3e^{-x}\\0\end{bmatrix} \quad (x\in\mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad \boldsymbol{\xi} := \begin{bmatrix}4\\-2\end{bmatrix}.$$

Az M mátrix sajátértékei a

$$p_M(z) := z^2 - 4z - 5 \qquad (z\in\mathbb{C})$$

karakterisztikus polinom gyökei:

$$\lambda := -1, \qquad \mu := 5.$$

A megfelelő sajátvektorok (pl.)

$$\mathbf{u} := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v} := \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix},$$

ezek nyilván lineárisan függetlenek, így egy alapmátrix, ill. inverze:

$$\Phi(x) := \begin{bmatrix} e^{5x} & e^{-x} \\ e^{5x} & -2e^{-x} \end{bmatrix} \quad \text{ill.} \quad \Phi(x)^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 2e^{-5x} & e^{-5x} \\ e^{x} & -e^{x} \end{bmatrix} \quad (x \in \mathbb{R}) \ .$$

Az állandók variálásaként olyan differenciálható $\mathbf{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ függvényt keresünk, amelyre

$$\Phi \mathbf{g}' = \mathbf{b}.$$

Innen

$$\mathbf{g}'(x) = \Phi(x)^{-1} \cdot \mathbf{b}(x) = \begin{bmatrix} 2e^{-6x} \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

azaz (pl.)

$$\mathbf{g}(x) = \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \begin{bmatrix} e^{-6x} \\ -3x \end{bmatrix} \qquad (x \in \mathbb{R}) \ .$$

Egy Φg partikuláris megoldás tehát a következő:

$$\Phi(x)\mathbf{g}(x) = \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \begin{bmatrix} 1 - 3x \\ 1 + 6x \end{bmatrix} e^{-x} \quad (x \in \mathbb{R}) \ .$$

Így az inhomogén egyenlet megoldáshalmaza:

$$\mathcal{M} = \left\{ \mathbb{R} \ni x \to \Phi(x) \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} + \Phi(x)\mathbf{g}(x) : \ c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Az

$$\mathbf{y}(0) = \boldsymbol{\xi}$$

kezdeti feltételt figyelembe véve a megfelelő α, β együtthatókat az

$$\left.\begin{array}{rcl} \alpha + \beta - \dfrac{1}{3} & = & 4 \\[2ex] \alpha - 2\beta - \dfrac{1}{3} & = & -2 \end{array}\right\}$$

egyenletrendszerből nyerjük:

$$\alpha = \frac{7}{3}, \qquad \beta = 2.$$

Így a fenti kezdetiérték-feladat teljes megoldása a

$$\boldsymbol{\varphi}(x) := \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \begin{bmatrix} 7e^{5x} + (5+3x)e^{-x} \\ 7e^{5x} - (13+6x)e^{-x} \end{bmatrix} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény.

(2). Látható, hogy a fenti kezdetiérték-feladat a következő alakú:

$$\mathbf{y}' = M\mathbf{y} + \mathbf{b}, \qquad \mathbf{y}(0) = \boldsymbol{\xi},$$

ahol

$$M := \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b}(x) := \begin{bmatrix} e^x \\ 2e^x \end{bmatrix} \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad \boldsymbol{\xi} := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Az M mátrix sajátértékei a

$$p_M(z) := z^2 - 2z \qquad (z \in \mathbb{C})$$

karakterisztikus polinom gyökei:

$$\lambda := 0, \qquad \mu := 2.$$

A megfelelő sajátvektorok (pl.)

$$\mathbf{u} := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v} := \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix},$$

ezek nyilván lineárisan függetlenek, így egy alapmátrix, ill. inverze:

$$\Phi(x) := \begin{bmatrix} 1 & 3e^{2x} \\ 1 & e^{2x} \end{bmatrix} \quad \text{ill.} \quad \Phi(x)^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ e^{-2x} & -e^{-2x} \end{bmatrix} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Így a

$$\Lambda(x,s) := \Phi(x) \cdot \Phi(s)^{-1} \qquad (x, s \in \mathbb{R})$$

ún. **Cauchy-mátrix**ra

$$\begin{aligned} \Lambda(x,s) &= \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3e^{2x} \\ 1 & e^{2x} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ e^{-2s} & -e^{-2s} \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} -1 + 3e^{2x-2s} & 3 - 3e^{2x-2s} \\ -1 + e^{2x-2s} & 3 - e^{2x-2s} \end{bmatrix} \qquad (x, s \in \mathbb{R}), \end{aligned}$$

ahonnan a teljes megoldás

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\varphi}(x) &= \Lambda(x,0)\boldsymbol{\xi} + \int_0^x \Lambda(x,s)\cdot \mathbf{b}(s)\,\mathrm{d}s = \\
&= \frac{1}{2}\cdot\left\{\begin{bmatrix} -1+3e^{2x} & 3-3e^{2x} \\ -1+e^{2x} & 3-e^{2x}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+\right. \\
&\quad \left. +\int_0^x \begin{bmatrix} -1+3e^{2x-2s} & 3-3e^{2x-2s} \\ -1+e^{2x-2s} & 3-e^{2x-2s}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^s\\2e^s\end{bmatrix}\mathrm{d}s\right\} = \\
&= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}3-3e^{2x}\\3-e^{2x}\end{bmatrix}+\frac{1}{2}\cdot\int_0^x\begin{bmatrix}-e^s+3e^{2x-s}+6e^s-6e^{2x-s}\\-e^s+e^{2x-s}+6e^s-2e^{2x-s}\end{bmatrix}\mathrm{d}s = \\
&= \begin{bmatrix}4e^x-1-3e^{2x}\\3e^x-1-e^{2x}\end{bmatrix}\qquad (x\in\mathbb{R}).\quad \blacksquare
\end{aligned}$$

vissza a feladathoz

A 7.8.1. gyakorló feladat.

1. lépés.. A homogén egyenlethez tartozó

$$p(z) := z^2-3z+2=(z-1)(z-2)\qquad (z\in\mathbb{C})$$

karakterisztikus polinom gyökei: $1{,}2$, így homogén egyenlet egy alaprendszere:

$$\left\{\mathbb{R}\ni x\mapsto e^x,\quad \mathbb{R}\ni x\mapsto e^{2x}\right\}.$$

2. lépés.. Olyan differenciálható

$$\mathbf{g}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$$

függvényt keresünk, amelyre tetszőleges $x\in\mathbb{R}$ esetén

$$\mathbf{g}'(x)=\begin{bmatrix}g_1'(x)\\g_2'(x)\end{bmatrix}=\frac{1}{e^x\cdot 2e^{2x}-e^x\cdot e^{2x}}\cdot\begin{bmatrix}-\dfrac{e^{4x}}{1+e^x}\\ \dfrac{e^{3x}}{1+e^x}\end{bmatrix}=\frac{1}{1+e^x}\begin{bmatrix}-e^x\\1\end{bmatrix},$$

azaz

$$g_1\in\int -\frac{e^x}{1+e^x}\,\mathrm{d}x=\left[-\ln(1+e^x)\right]_{x\in\mathbb{R}}$$

és

$$\begin{aligned}
g_2\in\int\frac{1}{1+e^x}\,\mathrm{d}x &= \int\frac{1}{1+u}\cdot\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u\,\Big|_{u=e^x}=\int\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{1+u}\right)\mathrm{d}u\,\Big|_{u=e^x}= \\
&= \left[\ln(e^x)-\ln(1+e^x)\right]_{x\in\mathbb{R}}=\left[\ln\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)\right]_{x\in\mathbb{R}}.
\end{aligned}$$

3. lépés.. Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása tehát

$$\chi(x) := -e^x \ln(1+e^x) + e^{2x} \ln\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ill. az inhomogén egyenlet megoldáshalmaza

$$\mathcal{M} = \left\{\mathbb{R} \ni x \mapsto \alpha e^x + \beta e^{2x} - e^x \ln(1+e^x) + e^{2x} \ln\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right) : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\}. \quad \blacksquare$$

vissza a feladathoz

A 7.8.2. gyakorló feladat.

1. lépés.. A homogén egyenlethez tartozó

$$p(z) := z^2 + 1 \qquad (z \in \mathbb{C})$$

karakterisztikus polinom gyökei: $\imath, -\imath$, így homogén egyenlet egy alaprendszere:

$$\{\cos,\ \sin\}.$$

2. lépés.. Ha $I := (-\pi/2, \pi/2)$, akkor olyan differenciálható

$$\mathbf{g} : I \to \mathbb{R}^2$$

függvényt keresünk, amelyre

$$\mathbf{g}' = \begin{bmatrix} g_1' \\ g_2' \end{bmatrix} = \frac{1}{\cos\sin' - \cos'\sin} \cdot \begin{bmatrix} -\mathrm{tg} \\ 1 \end{bmatrix},$$

azaz

$$g_1 \in \int (-\mathrm{tg}\,) = \int \left(\frac{-\sin}{\cos}\right) = [\ln(\cos)], \qquad g_2 \in \int 1 \,\mathrm{d}x = [x]_{x \in I}.$$

3. lépés.. Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása tehát

$$\chi(x) := \cos(x)\ln(\cos(x)) + x\sin(x) \quad (x\text{ß}I),$$

ill. az inhomogén egyenlet megoldáshalmaza

$$\mathcal{M} = \{I \ni x \mapsto c_1\cos(x) + c_2\sin(x) + \ln(\cos(x))\cos(x) + x\sin(x) : \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}.$$

4. lépés.. Ha a φ függvény megoldása a kezdetiérték-feladatnak, akkor egyrészt $\varphi \in$ $\in \mathcal{M}$, másrészt

$$\varphi(0) = 0 = \varphi'(0),$$

azaz

$$\varphi(x) = \ln(\cos(x))\cos(x) + x\sin(x) \qquad (x \in I). \quad \blacksquare$$

vissza a feladathoz

A 7.8.3. gyakorló feladat.

1. – a karakterisztikus egyenlet gyökei: $\lambda_{\pm} = \dfrac{-5 \pm 3}{2} \begin{array}{l} \nearrow -1, \\ \searrow -4; \end{array}$

   – az egyenlet megoldáshalmaza:

$$\mathcal{M}_H = \left\{\mathbb{R} \ni x \mapsto \alpha e^{-x} + \beta e^{-4x} :\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\};$$

   – ha $\varphi \in \mathcal{M}_H$, akkor a

$$3 = \varphi(0) = \alpha + \beta, \qquad \text{ill. a} \qquad -9 = \varphi'(0) = -\alpha - 4\beta$$

   kezdeti feltételből

$$\alpha = 1, \qquad \beta = 2,$$

   így a kezdetiérték-feladat teljes megoldása:

$$\varphi(x) = e^{-x} + 2e^{-4x} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

2. – a karakterisztikus egyenlet (egyetlen valós) gyöke: $\lambda = -2$;

   – az egyenlet megoldáshalmaza:

$$\mathcal{M}_H = \left\{\mathbb{R} \ni x \mapsto \alpha e^{-2x} + \beta x e^{-2x} :\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\};$$

   – ha $\varphi \in \mathcal{M}_H$, akkor az

$$1 = \varphi(0) = \alpha, \qquad \text{ill. a} \qquad 3 = \varphi'(0) = -2\alpha + \beta$$

   kezdeti feltételből

$$\alpha = 1, \qquad \beta = 5,$$

   így a kezdetiérték-feladat teljes megoldása:

$$\varphi(x) = e^{-2x} + 5xe^{-2x} = (1 + 5x)e^{-2x} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

3. – a karakterisztikus egyenletnek csak komplex gyökei vannak:

$$\lambda_- := -1 - \sqrt{3}\imath, \qquad \lambda_+ := -1 + \sqrt{3}\imath;$$

   – az egyenlet megoldáshalmaza:

$$\mathcal{M}_H = \left\{\mathbb{R} \ni x \mapsto \alpha e^{x} \cos(\sqrt{3}x) + \beta e^{x} \sin(\sqrt{3}x) :\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\};$$

– ha $\varphi \in \mathcal{M}_H$, akkor az

$$1 = \varphi(0) = \alpha, \qquad \text{ill. a} \qquad 2 = \varphi'(0) = \alpha + \sqrt{3}\beta$$

kezdeti feltételből

$$\alpha = 1, \qquad \beta = 1/\sqrt{3},$$

így a kezdetiérték-feladat teljes megoldása:

$$\varphi(x) = e^x \cos(\sqrt{3}x) + \frac{\sqrt{3}}{3} e^x \sin(\sqrt{3}x) = \frac{e^x}{3}\left[3\cos(\sqrt{3}x) + \sqrt{3}\sin(\sqrt{3}x)\right] \quad (x \in \mathbb{R}).$$

4. – a homogén egyenlet karakterisztikus egyenletének gyökei: $\lambda_- = 1$, $\lambda_+ = 2$;

– a homogén egyenlet megoldáshalmaza:

$$\mathcal{M}_H = \left\{\mathbb{R} \ni xt \mapsto \alpha e^x + \beta e^{2x} : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\};$$

– az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását a

$$\chi(x) = x(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)e^x \in \mathbb{R} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

alakban keressük:

$$\chi'(x) = xe^x \left\{\beta\gamma(2+x) + \alpha x(3+x)\right\} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

$$\chi''(x) = e^x \left\{\beta\gamma(2 + x(4+x)) + \alpha x(6 + x(6+x))\right\} \qquad (x \in \mathbb{R});$$

az inhomogén egyenletbe helyettesítve azt kapjuk, hogy

$$\chi(x) = -\frac{x}{3}\left(x^2 + 3x + 6\right)e^x \qquad (x \in \mathbb{R}).(???)$$

– az inhomogén egyenlet megoldáshalmaza:

$$\mathcal{M}_{IH} = \left\{\mathbb{R} \ni x \mapsto \alpha e^x + \beta e^{2x} - \frac{x}{3}\left(x^2 + 3x + 6\right)e^x : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\}.$$

– ha $\varphi \in \mathcal{M}_H$, akkor az

$$0 = \varphi(0) = \alpha + \beta, \qquad \text{ill. a} \qquad 0 = \varphi'(0) =$$

kezdeti feltételből

$$\alpha =, \qquad \beta =,$$

így a kezdetiérték-feladat teljes megoldása:

$$\varphi(x) = \quad (x \in \mathbb{R}).$$

5. – a homogén egyenlet karakterisztikus egyenletének egyetlen valós gyöke van: $\lambda = -1$;

– a homogén egyenlet megoldáshalmaza:

$$\mathcal{M}_H = \left\{\mathbb{R} \ni x \mapsto \alpha e^{-x} + \beta x e^{-x} : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\};$$

– az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását a

$$\chi(t) = A \in \mathbb{R} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

alakban keressük:

$$\chi'(x) = 0 \qquad \text{és} \qquad \chi''(x) = 0 \qquad (t \in \mathbb{R});$$

az inhomogén egyenletbe helyettesítve azt kapjuk, hogy

$$\chi(x) = 2 \qquad (x \in \mathbb{R});$$

– az inhomogén egyenlet megoldáshalmaza:

$$\mathcal{M}_{IH} = \left\{\mathbb{R} \ni x \mapsto \alpha e^{-x} + \beta x e^{-x} + 2 : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\};$$

– ha $\varphi \in \mathcal{M}_H$, akkor az

$$0 = \varphi(0) =, \qquad \text{ill. a} \qquad 0 = \varphi'(0) =$$

kezdeti feltételből

$$\alpha =, \qquad \beta =,$$

így a kezdetiérték-feladat teljes megoldása:

$$\varphi(x) = \quad (x \in \mathbb{R}).$$

6. – a homogén egyenlet karakterisztikus egyenletének egyetlen valós gyöke van: $\lambda = 2$;

– a homogén egyenlet megoldáshalmaza:

$$\mathcal{M}_H = \left\{\mathbb{R} \ni x \mapsto \alpha e^{2x} + \beta x e^{2x} : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\};$$

– az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását a

$$\chi(x) = Ax^2 + Bx + C \in \mathbb{R} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

alakban keressük:

$$\chi'(x) = 2Ax + B \qquad \text{és} \qquad \chi''(x) = 2A \qquad (x \in \mathbb{R});$$

az inhomogén egyenletbe helyettesítve azt kapjuk, hogy

$$\chi(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + \frac{7}{8} \qquad (x \in \mathbb{R});$$

– az inhomogén egyenlet megoldáshalmaza:

$$\mathcal{M}_{IH} = \left\{\mathbb{R} \ni x \mapsto \alpha e^{2x} + \beta x e^{2x} + \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + \frac{7}{8} : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\};$$

– ha $\varphi \in \mathcal{M}_H$, akkor az

$$0 = \varphi(0) = \alpha + \frac{7}{8}, \qquad \text{ill. a} \qquad 0 = \varphi'(0) = 2\alpha + \beta + \frac{1}{2}$$

kezdeti feltételből

$$\alpha = -\frac{7}{8}, \qquad \beta = \frac{5}{4},$$

így a kezdetiérték-feladat teljes megoldása:

$$\varphi(x) = \frac{-7e^{2x} + 10xe^{2x} + 2x^2 + 4x + 7}{8} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

7. – a homogén egyenlet karakterisztikus egyenletének gyökei: $\lambda_- = -1$, $\lambda_+ = 1$;

– a homogén egyenlet megoldáshalmaza:

$$\mathcal{M}_H = \left\{\mathbb{R} \ni x \mapsto \alpha e^{-x} + \beta e^{x} : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\};$$

– az inhomogén egyenlet partikuláris megoldásáta

$$\chi(x) = Axe^{-x} \in \mathbb{R} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

alakban keressük:

$$\chi'(x) = Ae^{-x} - Axe^{-x} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

$$\chi''(x) = -Ae^{-x} - Ae^{-x} + Axe^{-x} = -2Ae^{-x} + Axe^{-x} \qquad (x \in \mathbb{R});$$

az inhomogén egyenletbe helyettesítve azt kapjuk, hogy

$$\chi(x) = -\frac{x}{2}e^{-x} \qquad (x \in \mathbb{R});$$

– az inhomogén egyenlet megoldáshalmaza:

$$\mathcal{M}_{IH} = \left\{\mathbb{R} \ni x \mapsto \alpha e^{-x} + \beta e^{x} - \frac{x}{2}e^{-x} : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\};$$

– ha $\varphi \in \mathcal{M}_H$, akkor az

$$0 = \varphi(0) = \alpha + \beta, \qquad \text{ill. a} \qquad 0 = \varphi'(0) = -\alpha + \beta - \frac{1}{2}$$

kezdeti feltételből

$$\alpha =, \qquad \beta =,$$

így a kezdetiérték-feladat teljes megoldása:

$$\varphi(x) = \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

8. – a homogén egyenlet karakterisztikus egyenletének gyökei:

$$\lambda_- = 1 - 2\imath, \qquad \lambda_+ = 1 + 2\imath;$$

– a homogén egyenlet megoldáshalmaza:

$$\mathcal{M}_H = \{\mathbb{R} \ni x \mapsto \alpha e^x \cos(2x) + \beta e^x \sin(2x) : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} ;$$

– az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását a

$$\chi(x) := e^x(Ax^2 + Bx + C) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

alakban keressük. A χ függvényt az inhomogén egyenletbe helyettesítve azt kapjuk, hogy

$$\chi(x) = e^x \left(\frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{8}\right) \qquad (x \in \mathbb{R}) ;$$

– az inhomogén egyenlet megoldáshalmaza:

$$\mathcal{M}_{IH} = \left\{\mathbb{R} \ni x \mapsto \alpha e^{-x} + \beta e^x + e^x \left(\frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{8}\right) : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\} ;$$

– ha $\varphi \in \mathcal{M}_H$, akkor az

$$\frac{5}{8} = \varphi(0) =, \qquad \text{ill. a} \qquad -\frac{11}{8} = \varphi'(0) =$$

kezdeti feltételből

$$\alpha =, \qquad \beta =,$$

így a kezdetiérték-feladat teljes megoldása:

$$\varphi(x) = \alpha e^x \cos(2x) + \beta e^x \sin(2x) + e^x \left(\frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{8}\right) \quad (x \in \mathbb{R}) .$$

9. – a homogén egyenlet karakterisztikus egyenletének gyökei:

$$\lambda_- = 1 - \imath, \qquad \lambda_+ = 1 + \imath;$$

– a homogén egyenlet megoldáshalmaza:

$$\mathcal{M}_H = \{\mathbb{R} \ni x \mapsto \alpha e^x \cos(x) + \beta e^x \sin(x) : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} ;$$

– az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását a

$$\chi(x) := Ae^{2x} + B \in \mathbb{R} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

alakban keressük. A χ függvényt az inhomogén egyenletbe helyettesítve azt kapjuk, hogy $A = 2$, $B = 1$, azaz

$$\chi(x) = 2e^{2x} + 1 \qquad (x \in \mathbb{R}) ;$$

– az inhomogén egyenlet megoldáshalmaza:

$$\mathcal{M}_{IH} = \left\{\mathbb{R} \ni x \mapsto \alpha e^x \sin(x) + \beta e^x \cos(x) + 2e^{2x} + 1 : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\};$$

– ha $\varphi \in \mathcal{M}_H$, akkor az

$$5 = \varphi(0) = \beta + 2 + 1, \qquad \text{ill. a} \qquad 15 = \varphi'(0) = \alpha + 4$$

kezdeti feltételből

$$\alpha = 11, \qquad \beta = 2,$$

így a kezdetiérték-feladat teljes megoldása:

$$\varphi(x) = 3e^x \cos(x) + 1e^x \sin(x) + 2e^{2x} + 1 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

10.

11.

vissza a feladathoz

A 7.9.1. gyakorló feladat.

1. – A karakterisztikus polinom:

$$p(z) := z^4 - 5z^2 + 4z = (z^2 - 1)(z^2 - 4) \qquad (z \in \mathbb{C}),$$

melynek gyökei:

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = -1, \qquad \lambda_3 = 2, \qquad \lambda_4 = -2.$$

– Ezért a megoldáshalmaz:

$$\mathcal{M} := \left\{\mathbb{R} \ni x \mapsto \alpha e^x + \beta e^{-x} + \gamma e^{2x} + \delta e^{-2x} : \ \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}\right\}.$$

2. – A karakterisztikus polinom:

$$p(z) := z^3 - z^2 + z + 3 = (z + 1)[(z - 1)^2 + 2] \qquad (z \in \mathbb{C}),$$

melynek gyökei:

$$\lambda_1 = -1, \qquad \lambda_2 = 1 + \sqrt{2}\imath, \qquad \lambda_3 = 1 - \sqrt{2}\imath.$$

– Ezért a megoldáshalmaz:

$$\mathcal{M} := \left\{\mathbb{R} \ni x \mapsto \alpha e^{-x} + \beta e^x \cos(\sqrt{2}x) + \gamma e^x \sin(\sqrt{2}x) : \ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\right\}.$$

3. – A karakterisztikus polinom:

$$p(z) := z^3 - 27 = (z-3)(z^2+3z+9) \qquad (z \in \mathbb{C}),$$

melynek gyökei:

$$\lambda_1 = 3, \qquad \lambda_2 = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\imath, \qquad \lambda_3 = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}\imath.$$

– Ezért a megoldáshalmaz:

$$\mathcal{M} := \left\{\mathbb{R} \ni x \mapsto \alpha\mu_1(x) + \beta\mu_2(x) + \gamma\mu_3(x) : \ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\right\}.$$

ahol

$$\begin{aligned}
\mu_1(x) &:= e^{3x} \quad (x \in \mathbb{R}),\\
\mu_2(x) &:= e^{-3x/2}\cos\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}x\right) \quad (x \in \mathbb{R}),\\
\mu_3(x) &:= e^{-3x/2}\sin\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}x\right) \quad (x \in \mathbb{R}).
\end{aligned}$$

4. – A karakterisztikus polinom:

$$p(z) := z^4 + 1 \qquad (z \in \mathbb{C}),$$

melynek gyökei:

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-\imath), \qquad \lambda_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+\imath), \qquad \lambda_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1-\imath), \qquad \lambda_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+\imath).$$

– Ezért a megoldáshalmaz:

$$\mathcal{M} := \left\{\mathbb{R} \ni x \mapsto \alpha\mu_1(x) + \beta\mu_2(x) + \gamma\mu_3(x) + \delta\mu_4(x) : \ \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}\right\},$$

ahol

$$\begin{aligned}
\mu_1(x) &:= e^{\sqrt{2}x/2}\cos\left(\sqrt{2}x/2\right) \quad (x \in \mathbb{R}),\\
\mu_2(x) &:= e^{\sqrt{2}x/2}\sin\left(\sqrt{2}x/2\right) \quad (x \in \mathbb{R}),\\
\mu_3(x) &:= e^{-\sqrt{2}x/2}\cos\left(\sqrt{2}x/2\right) \quad (x \in \mathbb{R}),\\
\mu_4(x) &:= e^{-\sqrt{2}t/2}\sin\left(\sqrt{2}t/2\right) \quad (x \in \mathbb{R}). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

vissza a feladathoz

A.5. Fourier-sorok

A 10.0.1. házi feladat.

Emlékeztetőül felidézünk a skaláris szorzattal kapcsolatosan néhány dolgot.

1. Ha $f, g \in \mathfrak{R}_{2\pi}$, akkor
$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} fg.$$
2. Tetszőleges $f, f_1, f_2, g, g_1, g_2 \in \mathfrak{R}_{2\pi}$, ill. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén
   a) $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$;
   b) $\langle \alpha f_1 + \beta f_2, g \rangle = \alpha \langle f_1, g \rangle + \beta \langle f_2, g \rangle$;
   c) $\langle f, \alpha g_1 + \beta g_2 \rangle = \alpha \langle f, g_1 \rangle + \beta \langle f, g_2 \rangle$
   d) $|\langle f, g \rangle| \leq \sqrt{\langle f, f \rangle} \sqrt{\langle g, g \rangle}$.
3. Ha
$$C_n(x) := \cos(nx) \qquad \text{és} \qquad S_n(x) := \sin(nx) \qquad (n \in \mathbb{N}_0,\ x \in \mathbb{R})$$
akkor bármely $m, n \in \mathbb{N}_0$ indexre
$$\langle C_m, C_n \rangle = \begin{cases} 2 & (m = n = 0), \\ 1 & (m = n \geq 1), \\ 0 & (m \neq n); \end{cases}$$
$$\langle S_m, S_n \rangle = \begin{cases} 1 & (m = n \geq 1), \\ 0 & (m \neq n \quad \text{vagy} \quad m = n = 0) \end{cases}$$
$$\langle C_m, S_n \rangle = 0.$$

Így, ha

– $n = 0$, akkor
$$\begin{aligned} \langle f - A_0, f - A_0 \rangle &= \langle f, f \rangle - 2\langle f, A_0 \rangle + \langle A_0, A_0 \rangle = \\ &= \langle f, f \rangle - a_0(f)\langle f, C_0 \rangle + \left(\frac{a_0)(f)}{2} \right)^2 \langle C_0, C_0 \rangle = \\ &= \langle f, f \rangle - (a_0(f))^2 + \left(\frac{a_0(f)}{2} \right)^2 \cdot 2 = \\ &= \langle f, f \rangle - \frac{1}{2} (a_0(f))^2 . \end{aligned}$$

– valamely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén

$$\left\langle f - \sum_{k=0}^{n} A_k, f - \sum_{k=0}^{n} A_k \right\rangle = \langle f, f\rangle - \frac{a_0^2(f)}{2} - \sum_{k=1}^{n} \left(a_k^2(f) + b_k^2(f)\right),$$

akkor

$$\left\langle f - \sum_{k=0}^{n+1} A_k, f - \sum_{k=0}^{n+1} A_k \right\rangle = \left\langle f - \sum_{k=0}^{n} A_k - A_{n+1}, f - \sum_{k=0}^{n} A_k - A_{n+1} \right\rangle =$$

$$= \left\langle f - \sum_{k=0}^{n} A_k, f - \sum_{k=0}^{n} A_k \right\rangle - 2\left\langle f - \sum_{k=0}^{n} A_k, A_{n+1} \right\rangle + \langle A_{n+1}, A_{n+1}\rangle =:$$

$$=: \boxed{I} + \boxed{II} + \boxed{III}.$$

Az $\boxed{I}$ tagra az indukciós feltevés alapján azt kapjuk, hogy

$$\left\langle f - \sum_{k=0}^{n} A_k, f - \sum_{k=0}^{n} A_k \right\rangle = \langle f, f\rangle - \frac{1}{2}(a_0(f))^2 - \sum_{k=1}^{n} \left((a_k(f))^2 + (b_k(f))^2\right).$$

A $\boxed{II}$, ill. $\boxed{III}$ tagok megatározásához a következő számításokat kell elvégezni:

$$\begin{aligned}
\langle A_0, A_{n+1}\rangle &= \left\langle \frac{1}{2}a_0(f)C_0, a_{n+1}(f)C_{n+1} + b_{n+1}(f)S_{n+1} \right\rangle = \\
&= \frac{1}{2}a_0(f)a_{n+1}(f)\langle C_0, C_{n+1}\rangle + \frac{1}{2}a_0(f)b_{n+1}(f)\langle C_0, S_{n+1}\rangle = \\
&= 0,
\end{aligned}$$

valamint $k \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned}
\langle A_k, A_{n+1}\rangle &= \langle a_k(f)C_k + b_k(f)S_k, a_{n+1}C_{n+1} + b_{n+1}(f)S_{n+1}\rangle = \\
&= a_k(f)a_{n+1}(f)\langle C_k C_{n+1}\rangle + a_k(f)b_{n+1}(f)\langle C_k, S_{n+1}\rangle + \\
&\quad + b_k(f)a_{n+1}(f)\langle S_k, C_{n+1}\rangle + b_k(f)b_{n+1}(f)\langle S_k, S_{n+1}\rangle = \\
&= a_k(f)a_{n+1}(f)\langle C_k C_{n+1}\rangle + b_k(f)b_{n+1}(f)\langle S_k, S_{n+1}\rangle = \\
&= \begin{cases} (a_{n+1}(f))^2 + (b_{n+1}(f))^2 & (k = n+1), \\ 0 & (k \neq n+1). \end{cases}
\end{aligned}$$

Ennélfogva

$$\begin{aligned}
\boxed{II} + \boxed{III} &= -2\langle f, A_{n+1}\rangle + 2\left\langle \sum_{k=0}^{n} A_k, A_{n+1} \right\rangle + \langle A_{n+1}, A_{n+1}\rangle = \\
&= -2\langle f, a_{n+1}(f)C_{n+1} + b_{n+1}(f)S_{n+1}\rangle + 2\sum_{k=0}^{n}\langle A_k, A\sum_{k=0}^{n}\rangle \, \langle A_{n+1}, A_{n+1}\rangle = \\
&= -2a_{n+1}(f)\langle f, C_{n+1}\rangle - 2b_{n+1}(f)\langle f, S_{n+1}\rangle + 0 + (a_k(f))^2 + (b_k(f))^2 = \\
&= -2(a_{n+1}(f))^2 - 2(b_{n+1}(f))^2 + (a_{n+1}(f))^2 + (b_{n+1}(f))^2 = \\
&= -(a_{n+1}(f))^2 - (b_{n+1}(f))^2. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

vissza a feladathoz

A 10.0.2. házi feladat.

Legyen adott egy igen vékony, $l(>0)$ hosszúságú rugalmas szál (ún. **húr**)[1], és térítsük ki nyugalmi helyzetéből, majd engedjük el. Célunk az, hogy meghatározzuk a húr pontjainak előjeles, a nyugalmi helyzetére merőleges irányú (ún. **transzverzális**) kitérését leíró

$$u : [0, +\infty) \times [0, l] \to \mathbb{R}$$

függvényt, ha rendelkezésünkre állnak a kitérés módját leíró ún. **kezdeti**- és **peremfeltételek** (a húrt az x-tengely $[0, l]$ szakaszára helyezzük, és arra – az (xu)-síkban – kitérítjük).

Jellemezzük a húr pontjait az $x \in [0, l]$ koordinátával, és legyen $u(t, x)$ a húr x koordinátájú pontjának kitérése valamely $t \in [0, +\infty)$ időpillanatban, és tegyük fel, hogy a húrra az x-tengelyre merőleges – (xu)-síkbeli –,

$$\mathbf{F}(t, x) \qquad ((t, x) \in [0, +\infty) \times [0, l])$$

folytonos függvénnyel leírható, hosszegységre vonatkozó sűrűségű külső erő hat. Legyen továbbá $\rho(t, x)$ a húr lineáris[2] sűrűsége az x pontban és a t időppillanatban (ρ folytonos függvény). A húrt abszolút hajlékonynak és rugalmasnak tekintjük, vagyis bármely pillanatban a húr pontjaira ható $\mathbf{P}(t, x)$ feszítő erő iránya megegyezik a húrhoz húzott érintő irányával és nagysága arányos a megnyúlással (**Hooke törvénye**

[1] Húrnak nevezzük azt az igen vékony rugalmas szálat, amely a hajlítással szemben nem fejt ki ellenállást.

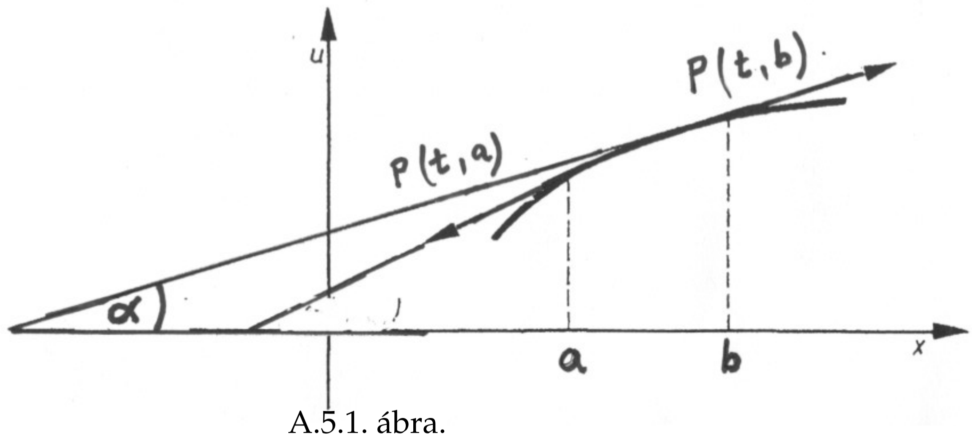
[2] A húr keresztmetszete kicsiny, így a mozgás leírásánál elegendő a húr középvonalának mozgását vizsgálnunk, azaz egydimenziós feladatot kell megoldanunk.

érvényesül). **longitudinális** (hosszirányú) rezgéseket nem veszünk figyelembe, vagyis azt az esetet vizsgáljuk, amikor a húr egy pontja elmozdulásának x-tengely irányú komponense zérus (az elmozdulás az x-tengelyre merőleges). Feltesszük, hogy $u \in \mathfrak{C}^2$, amiből

$$\partial_{tt} u \in \mathfrak{C} \qquad \text{és} \qquad \partial_{xx} u \in \mathfrak{C}, \tag{A.5.1}$$

következik. Csak „kis rezgéseket" veszünk figyelembe (ezen azt értjük, hogy $(\partial_x u)^2$ a számítás során elhanyagolható).

A húr mozgásának leírásához tekintsük annak egy tetszőleges $[a, b] \subset [0, l]$ darabját.



A.5.1. ábra.

Mivel csak kis rezgéseket tekintünk, ezért ennek a darabnak a hossza

$$\int_a^b \sqrt{1 + [\partial_x u(t,x)]^2}\, dx \approx \int_a^b \left\{1 + \frac{1}{2}[\partial_x u(t,x)]^2\right\} dx \approx b - a \quad (t \in [0, +\infty)),$$

ami azt jelenti, hogy gyakorlatilag nincsen megnyúlás: eltekinthetünk a húr sűrűségének időbeli változásától:

$$\rho(t,x) \equiv \rho(x),$$

továbbá $P := \|\mathbf{P}\|$ független az időtől:

$$P(t,x) \equiv P(x).$$

Megmutatjuk, hogy ez a helytől sem függ, tehát

$$P(x) \equiv P_0 = \text{áll.}$$

Jelöljük – rögzített t mellet – a húr b abszcisszájú pontjának és e pontbeli érintőjének hajlásszögét α-val. Ekkor az $[a,b]$ szakaszra a b pontban ható erő x-tengely irányú komponense

$$\langle \mathbf{P}(t,b), \mathbf{i} \rangle = P(b)\cos(\alpha) = \frac{P(b)}{\sqrt{1+[\partial_x u(t,b)]^2}} \approx P(b) \qquad (t \in [0,+\infty)),$$

és hasonlóan az a pontban

$$\langle \mathbf{P}(t,a), \mathbf{i} \rangle \approx -P(a) \qquad (t \in [0,+\infty)).$$

A vizsgált húrdarabra ható $\mathbf{P}(t,b) + \mathbf{P}(t,a)$ erő x-tengely irányú komponense

$$P(b) - P(a) = 0,$$

mert longitudinális rezgéseket nem vettünk figyelembe. Innen pedig – minthogy az $[a,b]$ intervallumot tetszőlegesen választottuk – következik, hogy

$$P(t,a) = P_0 \qquad ((t,a) \in [0,+\infty) \times [0,l]).$$

A transzverzális elmozdulás a feszítőerő u-tengely irányú komponensének hatására jön létre. Az $[a,b]$ szakaszra a b pontban ható feszítő erő u-tengely irányú komponense

$$\langle \mathbf{P}(t,b), \mathbf{j} \rangle = P_0 \sin(\alpha) \approx P_0 \mathrm{tg}\,(\alpha) = P_0 \partial_x u(t,b) \qquad (t \in [0,+\infty)),$$

mert a kis kitérés miatt $|\alpha|$ igen kicsi, így $\sin(\alpha) \approx \mathrm{tg}\,(\alpha)$. Hasonlóan az a pontban

$$\langle \mathbf{P}(t,a), \mathbf{j} \rangle \approx -P_0 \partial_x u(t,a) \qquad (t \in [0,+\infty)).$$

Az impulzus megmaradásának törvénye szerint az $[a,b]$ intervallumnak megfelelő húrszakasz mozgásmennyisége (impulzusa) u-tengely menti

$$\int_a^b \rho(x) \partial_t u(t,x)\, dx$$

komponensének a t_1 és t_2 időpontok közötti

$$\int_a^b \rho(x) \left\{ \partial_t u(t_2,x) - \partial_t u(t_1,x) \right\}\, dx$$

változása egyenlő a ható erők

$$\int_{t_1}^{t_2} P_0 \left\{\partial_x u(t,b) - \partial_x u(t,a)\right\}\, dt + \int_a^b \int_{t_1}^{t_2} F(t,x)\, dt\, dx$$

impulzusával (a ható erők az a és b pontbeli $P_0\partial_x u$ feszítőerőkből és a hosszúságegységenként $F(t,x)$ sűrűséggel (terheléssel) folytonosan eloszló külső erőkből tevődnek össze), ahol $F := \|\mathbf{F}\|$. Így az $[a,b]$ intervallumnak megfelelő húrszakasz transzverzális rezgéseire a következő összefüggés áll fenn:

$$\begin{aligned} \int_a^b \rho(x)\left\{\partial_t u(t_2,x) - \partial_t u(t_1,x)\right\}\, dx &= \int_{t_1}^{t_2} P_0\left\{\partial_x u(t,b) - \partial_x u(t,a)\right\}\, dt + \\ &+ \int_a^b \int_{t_1}^{t_2} F(t,x)\, dt\, dx. \end{aligned} \tag{A.5.2}$$

Az (A.5.1) feltételekből az következik, hogy (A.5.2) nem más, mint

$$\rho\partial_{tt}u = P_0\partial_{xx}u + F, \tag{A.5.3}$$

ugyanis, ha (A.5.2) mindkét oldalát elosztjuk a

$$(t_2 - t_1)(b - a)$$

szorzattal, akkor az integrálszámítás első középértéktétele és a lagrange-féle középértéktétel alapján van olyan

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (a,b), \qquad \text{ill.} \qquad \tau_1, \tau_2, \tau_3 \in (t_1, t_2),$$

hogy

$$\rho(\xi_1)\partial_{tt}u(\tau_1,\xi_1) = P_0\partial_{xx}u(\tau_2,\xi_2) + F(\tau_3,\xi_3), \tag{A.5.4}$$

így $\partial_{tt}u$ és $\partial_{xx}u$ folytonossága következtében, az

$$a, b \to x, \qquad \text{ill.} \qquad t_1, t_2 \to t$$

határátmenettel nyerjük (A.5.3)-at. Ha $F = 0$, akkor a húr **szabad rezgés**eiről, egyébként a húr **kényszerrezgés**eiről beszélünk. Speciálisan, homogén húr, azaz

$$\rho(x) \equiv \rho_0$$

esetében

$$\boxed{\partial_{tt}u = q\partial_{xx}u + f}\,, \tag{A.5.5}$$

ahol

$$q := P_0/\rho_0 \qquad \text{és} \qquad f := F/\rho_0.$$

Ha tehát figyelmen kívül hagyjuk azokat a rezgéseket, amelyek u kitérés-függvénye nem elégíti ki a (A.5.1) simasági feltételt, akkor a húr kis transzverzális rezgéseinek matematikai leírására a (A.5.5) összefüggést – ún. **egydimenziós hullámegyenlet**et – használjuk.

Nyilvánvaló, hogy (A.5.2), ill. (A.5.5) önmagában nem írja le egyértelműen a húr mozgását. Az ugyanis függ a húr kezdeti állapotától, sőt a két végpontjának a helyzetétől is. A kezdeti állapot egyértelmű meghatározásához ismernünk kell a húr alakját és pontjainak sebességét a $t = 0$ időpillanatban. Ezt, kiindulva az adott $\varphi, \psi : [0, l] \to \mathbb{R}$ függvényekből az

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad \partial_t u(0, x) = \psi(x) \qquad (x \in [0, l]) \tag{A.5.6}$$

kezdeti értékekkel szokás megadni (φ-vel adjuk meg a húr **kezdeti alak**ját, ψ-vel pedig a **kezdeti sebességeloszlás**át). A húr két végpontját rögzíthetjük, vagy valamilyen szabály szerint magunk is mozgathatjuk. Ennek a lehetőségnek a leírására szolgálnak az

$$u(t,0) = \chi_1(t), \quad u(t, l) = \chi_2(t) \qquad (t \in [0, +\infty)) \tag{A.5.7}$$

feltételekek, ahol $\chi_1, \chi_2 : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ adott függvények (rögzített végpontok esetén $\chi_1 = \chi_2 = 0$). Megadhatjuk a húr végpontjaiban ható erőket is:

$$\partial_x u(t,0) = \chi_1(t), \quad \partial_x u(t, l) = \chi_2(t) \qquad (t \in [0, +\infty)), \tag{A.5.8}$$

ahol $\chi_1, \chi_2 : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ adott függvények. Az is előfordulhat, hogy a végpontok rugalmasan vannak rögzítve, ekkor

$$\alpha u(t,0) + \beta \partial_x u(t,0) = 0, \quad \gamma u(t, l) + \delta \partial_x u(t, l) = 0 \qquad (t \in [0, +\infty)) \tag{A.5.9}$$

alakú feltételek adódnak, ahol $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ adott számok. A (A.5.7), (A.5.8), ill. (A.5.9) feltételt rendre első (**Dirichlet-féle**), második (**Neumann-féle**), illetve harmadik **Robin-féle peremfeltétel**nek nevezzük. A gyakorlatban előfordulhatnak egészen más típusú peremfeltételek is.

vissza a feladathoz

2017.12.29.

Irodalomjegyzék

[1] VEZETÉKNÉV, M. N.: *Maci Laci kalandjai*, A magyar irodalom remekei c. újság **76**(3) (1969), 289–292.

[2] VEZETÉKNÉV, M. N2.: *Jó könyv*, 2009 (https://www.xxx.pdf).

[3] IBAFAI, P.: *Fapipa*, Kiadó, 2005.

[4] KOVÁCS, S.: *Funkcionálanalízis feladatokban, egyetemi jegyzet*, (2013) ISBN: 978-963-284-445-9

Tárgymutató

2017.12.29.

Dr. Kovács Sándor, adjunktus,
Eötvös Loránd Tudományegyetem,
Numerikus Analízis Tanszék,
1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/C,
alex@numanal.inf.elte.hu,
alex@ludens.elte.hu
http://numanal.inf.elte.hu/~alex