2004/2005 Logikai alapok a programozáshoz

(Kidolgozott vizsgakérdések)

Előadó: Pásztorné Dr. Varga Katalin

1. Tétel

Mi a logika, ezen belül a matematikai logika tárgya és feladata? Milyen nyelvi eszközöket használnak a matematikai logika tárgyalásához és miért? Mi indokolja az 1. rendű nyelv bevezetését. Ismertesse az elemi aritmetika, mint matematikai struktúra logikai nyelvét.

Logika: Tárgya az emberi gondolkodás és bizonyos gondolkodási formák vizsgálata, valamint hogy feltárja az állítások közti kapcsolatokat és összefüggéseket. Feladata a **helyes** gondolkodási és következtetési formák vizsgálata.

Matematikai logika: A logikának az az ága, amelynek feladata a matematikán belüli helyes gondolkodásformák, helyes következtetési szabályok feltárása és kialakítása.

Nyelvi eszközök: Feladatuk az egyszerű állítások (kijelentő mondatok) leírása (formalizálása), valamint a logikai összekötők meghatározása. Ezeket az eszközöket a nyelv ábécéje, szintaxisára és szemantikájára lehet bontani. A nyelv ábécéje jelekből és szimbólumokból áll (elválasztó jelek, műveleti jelek, stb.), melyeket összefoglalva betűknek, az ezekből álló véges sorozatokat pedig szavaknak nevezzük. Ebből a formális nyelv az ábécé elemeiből alkotott szavak egy részhalmaza, az ide tartozó szavakat kifejezéseknek nevezzük. Hogy mely szavak a nyelv kifejezései, erre olyan szabályok vannak, melyeket összefoglalva a nyelv szintaxisának (nyelvtannak) nevezünk. Végül pedig hogy mik is a kifejezések jelentései, az ezeket meghatározó szabályokat nevezzük a nyelv szemantikájának (jelentéstannak).

Az elsőrendű nyelv bevezetését az indokolja, hogy létrehoztunk olyan ítéletváltozókat, melyekkel meghatározhatjuk, hogy a különböző kijelentések az univerzum mely elemeire vonatkoznak. Ezek alapján azt a nyelvet nevezzük elsőrendű nyelvnek, amelyben szerepelnek a „minden” vagy „bármely” (∀) univerzális kvantor és a „létezik” vagy „van olyan” (∃) egzisztenciális kvantor.

Az elemi aritmetika nyelve (az Ar nyelv)(bővebben TK 36-37.oldal): Mint struktúrát, az alábbi módon tekintjük: <$\mathbf{N}_0$ **;** = **;** s, +, × **;** 0>. Ebből az első elem a struktúra univerzuma ($\mathbf{N}_0$)(univerzum: ahonnan az állításokban definiált elemeket vesszük, határát az állítások hatásköre adja meg), a második az alaprelációja (=), a harmadik az alapműveleteket tartalmazza (s(x) – rákövetkezés; + - összeadás; × - szorzás), a negyedik pedig a konstansa (0). Ábécéje áll individuumváltozókból (x, y, z, …)(individuum: amikre vagy akikre vonatkozik az állítás), logikai összekötők jeleiből (¬,∧,∨, ⊃), kvantorokból (∀,∃) és elválasztó jelekből („**(**”, „**)**”, „ **,**”). A szintaxisa mutatja meg, hogy az ábécéből hogyan lehet felépíteni a kifejezéseket és a köztük lévő relációkat. Ezen belül vannak termek (a 0 konstans, az individuumváltozók, valamint olyan kifejezések, amelyeket az alapműveletekkel írtunk fel) és formulák (ezen belül atomi: két term alaprelációval való összekapcsolása; valamint tetszőleges A és B formulákból összekötők és kvantorok segítségével felírt formulák). A szemantikájában egy individuumváltozót tartalmazó term egy olyan műveletet ír le, melyet alapműveletekkel határozhatunk meg, illetve egy individuumváltozót tartalmazó formula olyan logikai függvényt ír le, melyet az alapreláció, a logikai összekötők és a kvantorok segítségével határozhatunk meg.

Ugyanez a tétel kicsit másképpen:

A logika tárgya a gondolkodás. Feladata a gondolkodásformák analizálása, a helyes gondolkodásformák meghatározása és helyes következtetési szabályok kidolgozása. A logika egyik fontos alapfogalma az állítás, amelyet valamely kijelentő mondat információtartalmaként definiálhatunk. Az állításhoz tartozó két segédfogalom az igazság és a hamisság fogalma. Az állítások közös tulajdonsága vagy közös jellemzője az, hogy információtartalmuk vagy igaz, vagy hamis. Egy megállapítást a logika szempontjából akkor tekintünk állításnak, ha tetszőleges kontextusban vagy igaz, vagy hamis. Azt mondjuk, hogy egy állítás igaz, ha információtartalma megfelel a valóságnak, és hamis az ellenkező esetben. Az igaz és a hamis értékeket igazságértékeknek nevezzük.

A logika feltárja az állítások közötti kapcsolatokat és összefüggéseket. Ennek ismerete igen fontos a gondolkodás legkülönbözőbb területein. A gondolkodás ismerete igen fontos a gondolkodás legkülönbözőbb területein. A gondolkodás egyik közismert formája a következtetés. Bizonyos adott információkból – előzményekből, premisszákból – kiindulva következtetéssel olyan új információhoz – zárótételhez, konklúzióhoz, következményhez – juthatunk, amely az előzményekben rejtetten szerepelt.

A logika legfontosabb feladatainak egyike annak tisztázása, hogy melyek a helyes következtetés ismérvei. A következtetés premisszái állítások, a konklúzió szintén állítás lesz.

A matematikai logika a logikának az az ága, amelynek feladata a matematikán belüli helyes gondolkodásformák, helyes következtetési szabályok feltárása és kialakítása. A matematikai logika leíró nyelvként a matematikában általában alkalmazott jelölésrendszerrel rokon nyelvet használ.

A matematika logika feladata a matematika egyes ágaival – mint axiomatizált elméletekkel – kapcsolatos globális kérdések vizsgálata. Ehhez a matematikai elméletet egy precíz matematikai – logikai nyelv segítségével formalizálják, majd a logika eszközeivel vizsgálják.

A logika tárgyalásához szükség van egy leíró nyelvre. Ennek a nyelvnek alkalmasnak kell lennie az állítások pontos leírására és az állítások közötti logikai kapcsolatok megfogalmazására. Az e feltételeknek eleget tevő nyelvet logikai nyelvnek nevezzük.

A logikai nyelv első feladata az egyszerű állítások leírása. Az egyszerű állításokat kijelentő mondatokkal fogalmazhatjuk meg, amelyekben individuumokról állítunk valamit.

A logikai nyelv második feladata a logikai összekötők meghatározása. A logikában egy- és kétváltozós logikai összekötőket használnak.

Egy konkrét helyzetet leíró logikai nyelvről elmondhatjuk, hogy a nyelv ábécéjének elemei a leírásban előforduló individiuumok neveinek összessége, az individuumváltozók, az állítások leírásához szükséges predikátumok, a logikai összekötők jelei és a kvantorok. A szintaxis a predikátumok és a műveletek formai jegyeinek, a szemantika pedig ezek tartalmának meghatározását írja le.

Nyelv = ábécé + szintaxis + szemantika

Az AR nyelv:

A struktúra az <N_0;=;s,+,x;0> négyes

- Univerzuma: N_0
- Alaprelációja : kétváltozós: =
- Alapműveletei: egyváltozós:s(x) (rákövetkezés)
  kétváltozós: + (összeadás), x (szorzás)
- Konstansa:0

A struktúrát leíró logikai nyelvet nevezzük Ar nyelvnek. Az Ar nyelv ábécéjének

- „logikán kívüli" (speciális) része:

Ábécé	<=;s,+,x;0>
Szignatúra	(2;1,2,2;1)

- „logikai" része:
  Individuumváltozók:x,y,z,…
  Logikai összekötők jelei:¬,és,vagy,impli
  Kvantorok:valamennyi,létezik
- Elválasztójelek: ( )

2. Tétel

Mit értünk matematikai struktúrán? Hogyan lehet egy matematikai struktúrát nyelvként felfogni? Mi a struktúra típusa? Mi a nyelv típusa? Miért fontos a típus fogalma? Mi a szignatúra. Miért az univerzum számosságának és nem az elemeinek konkrét ismerete fontos. Adott nyelv és adott univerzum esetén, a bázis alapján hogyan lehet megadni egy interpretációt?

Mit értünk matematikai struktúrán?

Def.: Legyen ***U*** tetszőleges nemüres halmaz, ***R*** az ***U***-n értelmezett relációk, ***M*** az ***U***-n értelmezett műveletek halmaza, ***C*** pedig ***U***-beli elemek egy halmaza. Ekkor az <***U***; ***R***; ***M***; ***C***> négyest (matematikai) struktúrának vagy modellnek nevezzük.

Hogyan lehet egy matematikai struktúrát nyelvként felfogni?

Olyan leíró nyelvet kell definiálni, amelyekben minden struktúrabeli állítás leírható, és a nyelv szintaxisa és szemantikája egymástól független.

Mi a struktúra típusa?

A struktúrában szereplő alaprelációk és alapműveletek aritásának(változóinak száma) és a konstansok db-számának sorrendhelyes felsorplása.

Mi a nyelv típusa?

A nyelv típusa a struktúra típusával van összhangban; a predikátum és a fügvényszimbólumok aritásának sorrendhelyes felsorolása.

Miért fontos a típus fogalma?

A struktúrákat és a formalizált nyelveket típusuk szerint egymáshoz lehet rendelni ,ezért fontos a típus foglama.

Mi a szignatúra?

Def.: Legyen <***U***; ***R***; ***M***; ***C***> egy struktúra. Ha $R \in \boldsymbol{R}$ és R: $\boldsymbol{U}^n \to \{i,h\}$, akkor legyen $\nu_1(R)=n$. Továbbá ha $m \in \boldsymbol{M}$ és m: $\boldsymbol{U}^n \to U$, akkor legyen $\nu_2(m)=n$. ν_3 pedig adja meg ***C*** elemeinek a számát. A (ν_1, ν_2, ν_3) hármast a struktúra szignatúrájának nevezzük.

pl.: Ar nyelv: $<N_0;=;s,+,*;0>$, (2;1,2,2;1)

Miért az univerzum számosságának és nem az elemeinek konkrét ismerete fontos?

(-Az univerzum az elemek fajtájának a megjelölésével nem a nyelv része, hanem a struktúra értelmezési tartománya.)

???????

Adott nyelv és adott univerzum esetén, a bázis alapján hogyan lehet megadni egy interpretációt?

<u>*Bázis:*</u> (bázisnak nevezzük a formula ítéletváltozóinak egy rögzített sorrendjét)
egy n-változós formula igazságttáblájában a változók sorrendje.

pl.: $(Y \vee Z) \wedge (Z \Rightarrow \rightarrow \neg X)$ formula; X,Y,Z bázis.

Vegyük észre, hogy egy n változós formula ig. táblája egy b:$\{i;h\}^n \to \{i;h\}$ n-változós logikai művelet igazságtáblája. A b műveletet szokás a formulával leírt műveletnek is nevezni. A b művelet az $\{i;h\}^n$ halmazt két diszjunkt részre osztja. A b igazsághalmazán $\{i;h\}^n$ azon részhalmazát értjük, mely elemihez b az i igazságértéket rendeli, hamishalmazán pedig azt, mely elemeihez b h igazságértéket rendel.

Rögzített bázis esetén a formulához ilyen módon megadható művelet egyértelmű, a művelet igaz-, illetve hamishalmazát ezért nevezhetjük egyúttal a formula igaz-, illetve hamishalamzának.

Tehát, ha a X,Y,Z bázis , akkor elkézíthejük, az $(Y \vee Z) \wedge (Z \Rightarrow \rightarrow \neg X)$ formula ig.tábláját:

X	Y	Z	$(Y \vee Z) \wedge (Z \Rightarrow \rightarrow \neg X)$
i	i	i	H
i	i	h	I
i	h	i	h
i	h	h	H
h	i	i	i
h	i	h	i
h	h	i	i
h	h	h	h

Akkor a formula igazsághalmaza: {(i,i,h),(h,i,i),(h,i,h),(h,h,i)} halmaz,
valamint a formula hamishalmaza: {(i,i,i),(i,h,i),(i,h,h),(h,h,h)} halmaz.
Tehát meg tudjuk adni az adott nyelv és az adott univerzum esetén, a bázis alapján a formula interpretációit.

3. Tétel

Mit értünk ítélet vagy állítás alatt? Milyen esetekben nem tekintünk egy mondatot állításnak. Sorolja fel az alapeseteket. Mire szolgál az ítéletváltozó és az indivíduumváltozó? Melyek a legfontosabb logikai összekötőjelek? Mi a logikai művelet? Hány egy és kétváltozós logikai műveletet ismer? Mire valók ezek?

Mit értünk ítélet vagy állítás alatt?
Olyan megállípítás, melyről egyértelműen eldöntheő, hogy igaz vagy hamis.
Milyen esetekben nem tekintünk egy mondatot állításnak. Sorolja fel az alapeseteket.
Egy mondat nem állítás, ha:

1. Az individuumleírás nem egyértelműen határozza meg az individuumokat. (pl.:Anna elég jól úszik.)
2. Nem létezik az individuum. (pl.:A magyar pápa Bécsbe utazott.)
3. A mondat nem kijelentőmonadt. (pl.:Siess!)
4. A mondat jövő idejű. (pl.: Anna haja holnap is szőke lesz.)
5. Nem dönthető el az igazságérték. (pl.:És a festmény szép.)
6. Az önhivatkozást tartalmazó állítások. (pl.: Most nem mondok igazat.)

Mire szolgál az ítéletváltozó és az indivíduumváltozó?
<u>*Individuumváltozó:*</u> az individuumok halmazát (az univerzumot) futja be, tehát bármelyik individuum lehet az értéke.
pl.: Legyen az individuumhalmaz N_0;x,y,z individuumváltozók és a reláció:

$$R(x,y,z)\Leftrightarrow \begin{cases} \text{i(gaz)} & \text{ha z az x és y legkisseb közös többszöröse,} \\ \text{h(amis)} & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Ennek megfelelően R(2,3,6) egy igaz állítás.
<u>*Ítéletváltozó:*</u> az állítások halmazát futja be, beletartozik minden olyan szimbólum (pl.: R,S,...), mely az {i,h}halmazból vesz fel értéket. Lehet őket másnéven logikai változóknak is hívni, mert értéküket $\mathbb{L}$-ből veszik fel.
Melyek a legfontosabb logikai összekötőjelek?

¬ negáció
∧ konjunkció
∨ diszjunkció
⇒ implikáció
⇔ ekvivalencia

Mj.: a logikai összekötőjelek azok a logikai műveletek, amik az emberi gondolkodásban megszokott kapcsolatokat fejezik ki az állításokkal kapcsolatosan.
Mi a logikai művelet?
A logikai műveletek olyan állítások, amelyek közti művelet, mely érteke (eredménye) igazságérték, és ez az eredmény kizárólag az adott művelet argumentumában lévő állítások igazságértékétől függ.

	1	**2**	**3**	**4**
P	i	P	¬P	h
i	i	i	h	h
h	i	h	i	h

1. és a 4. nullváltozós műveletek vagy másnéven konstans függvények.
2. és a 3. egyváltozós műveletek.
Logikai összekötőjelként csak a 3. művelet használatos ez a ¬ vagyis a tagadás.

Hány egy és kétváltozós logikai műveletet ismer? Mire valók ezek?

		1.	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	**9.**	**10.**	**11.**	**12.**	**13.**	**14.**	**15.**	**16.**
X	**Y**	∧	∨	⇒	⇔	⊕	$\mid$	↓	¬⇒	⇐	¬⇐	**X**	**¬X**	**Y**	**¬Y**	**i**	**h**
i	**i**	i	i	i	i	h	h	h	h	i	h	i	h	i	h	i	h
i	**h**	h	i	h	h	i	i	h	i	i	h	i	h	h	i	i	h
h	**i**	h	i	i	h	i	i	h	h	h	i	h	i	i	h	i	h
h	**h**	h	h	i	i	h	i	i	h	i	h	h	i	h	i	i	h

<u>*A következő logikai jelek szerepelnek a fenti táblázatban, mint logikai összekötők:*</u>

¬ negáció →nem igaz, hogy... egyváltozós
∧ konjunkció →...és... kétváltozós
∨ diszjunkció →...vagy... kétváltozós
⇒ implikáció →ha...,akkor... kétváltozós
⇔ ekvivalencia →...akkor és csak akkor, ha... kétváltozós
⊕ kizáró vagy →vagy..., vagy.... kétváltozós
| Sheffer-vonás →...és... közül legalább az egyik sem kétváltozós
↓ Pierce-vonás →sem...,sem... kétváltozós

4. Tétel

Mit értünk egy formulának adott I interpretációban való Boole értékelésén (igazságkiértékelésén)? Milyen eleme az igazságkiértékelés az ítéletlogikának? Mit ad meg egy igazságtábla? Mi az igazságértékelés függvény (φA^i, φA^h)? Hogyan kapcsolódik egymáshoz az igazságértékelés, az igazságtábla, az igazságkiértékelés és az interpretáció?

Mit értünk egy formulának adott I interpretációban való Boole értékelésén (igazságkiértékelésén)?

Def.:(α_0 szemantikája) α_0-beli formulák I interpretációbeli Boole-értékelése a következő-szerkezeti indukció elve szerint definiált- B_I: $\alpha_0 \rightarrow \{i,h\}$ függvény:

1. ha A prímformula, akkor $B_I(A)$ legyen $I(A)$,
2. $B_I(\neg A)$ legyen $\neg B_I(A)$,
3. $B_I(A \wedge B)$ legyen $B_I(A) \wedge B_I(B)$,
4. $B_I(A \vee B)$ legyen $B_I(A) \vee B_I(B)$,
5. $B_I(A \Rightarrow B)$ legyen $B_I(A) \Rightarrow B_I(B)$.

Figyelem!!!

Rövidebben: a.) ha A prímformula, akkor $B_I(A)=I(A)$

b.) $B_I(\neg A)=\neg B_I(A)$

$B_I(AoB)= B_I(A)oB_I(B)$

Milyen eleme az igazságkiértékelés az ítéletlogikának?

α_0 szemantikája

Mit ad meg egy igazságtábla?

Megmondja az egyes logikai összekötőjelek igazságértékét.

__Def.:__ A egy formula; $P_1,...,P_n$ pedig benne szereplő ítéletváltozók. Az A formula igazságtáblája egy olyan táblázat melynek fejlécében a formulában szereplő minden egyes ítéletváltozó és a formula neve áll. A táblázat egyes soraiban az ítéletváltozókhoz logikai értékeket rendelünk. Az A formula oszlopában pedig az szerepel, hogy az adott interpretációban az A formula igaz vagy hamis-e.

Mi az igazságértékelés függvény (φA^i, φA^h)?

Def.:Egy A n-változós formula jelentése-rögzített bázis esetén- a formulával leírt b_A:$\{i,h\}^n \rightarrow \{i,h\}$ n-változós logikai művelet, ahol az ítéletváltozókat interpretáló igazságérték n-esek a formula A^i-val jelölt igaz. vagy A^h-val jelölt hamishalmazába tartoznak. Az ítéletlogikai formulák szemantikája ezek után megadható úgy is, hogy megadunk egy olyab függvényt, amelyik minden formulához a formula igazsághalmazát , vagy épp a formula hamishalmazát rendeli. Ez az igazságértékelés függvény.

Def.: Legyen A tetszőleges ítéletlogikai formula. Határozzuk meg A-hoz az interpretációira vonatkozó φA^i és φA^h feltételeket a szerkezeti rekurzió elve szerint:

1. Ha A prímformula, a φA^i feltételt pontosan azok az I interpretációk teljesítik, amelyekben I(A)=i, a φA^h feltételt pedig pontosan azok, amelyekben I(A)=h.
2. A $\varphi(\neg A)^i$ feltételek pontosan akkor teljesülnek, ha teljesülnek a φA^h feltételek.
3. A $\varphi(A \wedge B)^i$ feltételek pontosan akkor teljesülnek, ha a φA^i és a φB^i feltételek együtesen teljesülnek.
4. A $\varphi(A \vee B)^i$ feltételek pontosan akkor teljesülnek, ha a φA^i vagy a φB^i feltételek teljesülnek.
5. A $\varphi(A \Rightarrow B)^i$ feltételek pontosan akkor teljesülnak, ha a φA^h vagy a φB^i feltételek teljesülnek.

Hogyan kapcsolódik egymáshoz az igazságértékelés, az igazságtábla, az igazságkiértékelés és az interpretáció?

Mindegyik arra szolgál, hogy formuláról meghatározzuk, hogy milyen esetekben lesz igaz vagy hamis értékű.

5. tétel

Ismertesse az ítéletlogikat leíró nyelvet (ABC, szintaxis, szemantika). Mi a viszonya ennek az L elsőrendű nyelv L_0 nulladrendű résznyelvéhez. Mi a nyelv típusa, szintaxisa és szemantikája általában? Miért kell rögziteni a feldolgozás sorrendjét az implikációs láncban?

A legegyszerűbb logikai nyelv az ítélet- vagy állítás-logika nyelve.
A nyelv ABC-je:
-ítélet- vagy állításváltozók (az állítások szimbolizálására). Esetenként logikai változónak is nevezzük ezeket a változókat. Jelölés: X,Y,Z...(indexelt változatuk is).
-logikai összekötőjelek: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\supset$ vagy a jegyzetben még $\rightarrow$, esetleg $\leftrightarrow$.
-elválasztójelek: (és)
Szintaxis: A nyelvtanilag helyes mondatok szerkesztési szabályai.
Szemantika: A nyelv mondatainak értelmezése.

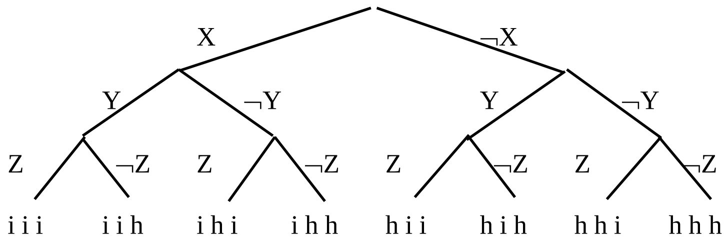
Az ítélet- vagy állításlogika szintaxisa:
A nyelvtanilag helyes mondatok a *jól formált formulák* (jff).
1.X ítéletváltozó jff. (prímformula)
2.Ha A, B jff-k, akkor (A), $\neg$A, (A$\wedge$B), (A$\vee$B), (A$\supset$B), (A$\leftrightarrow$B) jff-k.
3.Minden jff az 1,2 véges sokszori alkalmazásával áll elő.
Szerkezeti indukció elve.
L_0 minden formulája T tulajdonságú.
(alaplépés) minden prímformula T tulajdonságú.
(indukciós lépés)
Ha A$\in L_0$ T tulajdonságú, akkor $\neg$A is T tulajdonságú
Ha A és B$\in L_0$ T tulajdonságú, akkor AoB is T tulajdonságú
Egyértelmű elemzés.
Minden formulájára pontosan az egyik igaz
-A formula prímformula
-A formula egy egyértelműen meghatározott L_0–beli formula negáltja
-A formula az egyértelműen meghatározható A és B formulákból a o logikai művelettel előállított AoB formula
Logikai műveletek prioritása. Formulaszerkezet. Részformula: egy formula részformulája a benne előforduló olyan összefüggő jelsorozat, amely maga is ítéletlogikai formula. Közvetlen részformula - legszűkebb részformula vagy a logikai művelet hatásköre.
A prímformulának nincs közvetlen részformulája.
A $\neg$A közvetlen részformulája: A.
Az (AoB) közvetlen részformulái az A (baloldali) és a B (jobboldali).
A formulák típusának megállapítása (negációs, diszjunkciós, konjunkciós, implikációs…).
Formula szerkezeti fája. Zárójelelhagyás. – közvetlen részformulák ebben az esetben.
$\neg$ hatásköre tőle jobbra a vele azonos szinten lévő első logikai összekötőjelig lévő részformula.
o kétváltozós logika művelet hatásköre a tőle jobbra és balra az első nála kisebb prioritású logikai összekötőjelig lévő részformula.
Szerkezeti rekurzió elve.
Pontosan egy az L_0-on értekmezett F függvény van, amelynek
(alaplépés) értékeit rögzítjük minden prímformulára és megmondjuk, hogy.
(indukciós lépés)
- a $\neg$A-n felvett értéke az A-n felvett értékéből, illetve
- az (AoB)-n felvett értéke az A-n és a B-n felvett értékekből hogyan származtatható.

A B formula **logikai összetettségét** a szerkezeti rekurzióval definiáljuk. L(B)
1. Ha B prímformula. Akkor L(B)=0.
2. az L($\neg$B) legyen L(B)+1.
3. az L(BoD) legyen L(B) + L(B)+1.

Diszjunkciós, konjunkciós formulalánc - asszociativitás - tetszőleges zárójelezéssel wff alakúvá tehető. **Implikációs formulaláncra** a jobbról balra zárójelezés konvenció érvényes.

Szemantika: Az ítéletlogika nyelvének interpretációja egy I:$V_v \rightarrow \{i, h\}$ függvény
(az ítéletváltozók kiértékelése = igazságkiértékelés)**.**
Egy n-változós Q formula változói igaz vagy a hamis értéket vehetnek fel, ezek minden értékkombinációjához a formula helyettesítési értéke hozzárendeli az igaz vagy a hamis értéket (igazságtábla). Ez azt jelenti, hogy a Q n-változós formula egy
$\{i.h\}^n \rightarrow \{i,h\}$ leképezést ír le.
Az összes interpretáció megadható, adott bázis esetén szemantikus fával.
Definíció. Egy *n-változós szemantikus fa* egy n-szintű bináris fa, ahol a szintek a bázisbeli változóknak vannak megfeleltetve. Egy X változó szintjén a csúcsokból kiinduló élpárokhoz X, $\neg$X. cimkéket rendelünk. **X** jelentése X igaz,

$\neg X$ jelentése X hamis. Igy egy n- szintű szemantikus fa ágain az összes (2^n) lehetséges igazságkiértékelés (I interpretáció) megjelenik.
Szemantikus fa az X, Y, Z logikai változókra, mint bázisra:



Legyen A egy tetszőleges n-változós ítéletlogikai formula. Az általa leírt $\{i.h\}^n \rightarrow \{i,h\}$ leképezés megadása igazságtáblával a gyakorlati alkalmazásokban kivihetetlen.
Az ítéletlogika szemantikája a felhasználásorientált tárgyalásban Az **igazságértékelés**. Ez egy rekurzív módszer arra, hogy egy formulához,az igazságtábla felírása nélkül, hozzárendeljük annak jelentését oly módon, hogy megadjuk minden formulafajtára a φA^i és a φA^h feltételt amelyeknek pontosan azok az interpretációk tesznek eleget amelyekben *I* (A) igaz, illetve hamis.

Ugyanez a tétel másképpen:

Az ítéletlogika (nulladrendű logika) nyelve ($\boldsymbol{L}_0$, ez része az $\boldsymbol{L}$ elsőrendű nyelvnek): Nulladrendű nyelvnek nevezzük azt a logikai nyelvet, ahol a nyelvi eszközökből csak az egyes individuumokra (amikre vagy akikre az állítás vonatkozik) vonatkozó állítások fogalmazhatók meg. Ez a nyelv három részre bontható: ábécére, szintaxisra és szemantikára.

Az nyelv ábécéje ($\boldsymbol{V_0}$) egyszerű elemekből áll, úgy mint elválasztó jelekből (**( )**), ítéletváltozókból (**A**, **B**, **C**, …, **X**, **Y**, $\mathbf{X_i}$…)(jele: $\boldsymbol{V_v}$), konstansokból (**igaz**, **hamis**), valamint műveleti jelekből, összekötőkből ($\neg$ **negáció**; $\wedge$ **és**; $\vee$ **vagy**; $\rightarrow$ vagy $\supset$ **implikáció**; $\leftrightarrow$ vagy $\equiv$ **ekvivalencia**). A műveleti jeleket erősségük (prioritás) szerinti sorrendben (precedencia) írtam fel. Ezeket az elemeket összefoglalva betűknek, az ezekből álló véges sorozatokat pedig szavaknak nevezzük. Ebből a formális nyelv az ábécé elemeiből alkotott szavak egy részhalmaza, az ide tartozó szavakat kifejezéseknek nevezzük.

A nyelv szintaxisa (nyelvtan) megmutatja, hogy mely szavak a nyelv kifejezései, és ezekre milyen szabályok vannak, definíció szerint négy darab. Az első az, hogy minden ítéletváltozó ítéletlogikai formula is egyben, ezeket a formulákat atomi- vagy prímformuláknak nevezzük. A második az, ha A egy ítéletlogikai formula, akkor $\neg$A is az (itt $\neg$A közvetlen komponense A). A harmadik azt mondja ki, hogy ha A és B ítéletlogikai formulák és $\circ$ binér logikai összekötőjel (lehet $\wedge$, $\vee$, $\supset$, $\equiv$), akkor (A $\circ$ B) is ítéletlogikai formula (itt (A $\circ$ B) közvetlen komponense A és B). Végül az utolsó szabály szerint Minden ítéletlogikai formula az előző három szabály véges sokszori alkalmazásával áll elő.
Ide tartozik még három fontos tétel.
Az első a Szerkezeti indukció elve, amely azt mondja ki, hogy $\boldsymbol{L}_0$ minden formulája *T* tulajdonságú, ha minden prímformula *T* tulajdonságú. De ez csak akkor igaz, ha van olyan A $\in \boldsymbol{L}_0$, ami *T* tulajdonságú, akkor $\neg$A is *T* tulajdonságú, illetve ha van olyan A, B $\boldsymbol{L}_0$ *T* tulajdonságúak és $\circ$ binér logikai összekötőjel, akkor (A $\circ$ B) is *T* tulajdonságú.
A második Az egyértelmű elemzés tétele, mely szerint $\boldsymbol{L}_0$ minden formulájáról elmondható, hogy VAGY prímformula, VAGY egy egyértelműen meghatározható $\boldsymbol{L}_0$-beli formula negáltja, VAGY pedig egy egyértelműen meghatározható $\boldsymbol{L}_0$-beli A és B formulák és $\circ$ binér logikai összekötőjel felhasználásával előállított (A $\circ$ B) alakú formula.
A harmadik pedig a Szerkezeti rekurzió elve, amely kimondja, hogy pontosan egy olyan $\boldsymbol{L}_0$–on értelmezett *F* függvény van, amelynek értékeit $\boldsymbol{L}_0$ prímformuláival adjuk meg, és hogy az *F* $\neg$A–n felvett értéke az A-n értékből, illetve (A $\circ$ B)-n felvett értéke (ahol $\circ$ binér logikai összekötőjel) az A-n és a B-n felvett értékből hogyan származtatható.

A nyelv szemantikájával (jelentéstan) határozzuk meg, hogy mik is a kifejezések jelentései. Először is definiálnunk kell az interpretáció fogalmát. Ha megmondjuk, hogy egy formulában az ítéletváltozóknak (vagy csak egy adott ítéletváltozónak) mi az igazságértéke (igaz vagy hamis), azzal meghatározhatjuk a formula igazságértékét is. Ezekez a meghatározott (tetszőleges) értékadásokat nevezzük interpretációnak, amit ***I***-vel jelölünk. Ekkor tulajdonképpen (definíció szerint) $\boldsymbol{L}_0$ interpretációján egy $\boldsymbol{I}$: $\boldsymbol{V_v} \rightarrow \{i, h\}$ függvényt értjük (ahol **i** az igaz és **h** a hamis).
Mindezek után a szemantika definíció szerint $\boldsymbol{L}_0$–beli formulák ***I*** interpretációbeli igazságértékelése (Boole-értékelése) a $\boldsymbol{B_I}$: $\boldsymbol{L}_0 \rightarrow \{i, h\}$ (szerkezeti rezolúcióval definiált) függvény, ahol három szabály lép fel. Ha A prímformula, akkor $\boldsymbol{B_I}$ (A) legyen $\boldsymbol{I}$(A), $\boldsymbol{B_I}$ ($\neg$A) legyen $\neg\boldsymbol{B_I}$ (A), valamint $\boldsymbol{B_I}$(A $\circ$ B) legyen $\boldsymbol{B_I}$ (A) $\circ$ $\boldsymbol{B_I}$ (B).

Itt külön figyelmet kell szentelnünk arra, hogy milyen sorrendben szeretnénk feldolgozni az implikációs láncot, mert ennek elmulasztásával teljesen más értékek jöhetnek ki adott interpretációban, azaz ugyan arra a formulára kijöhetne igaz és hamis érték egyaránt, ráadásul mindez megkülönböztethető feldolgozási módszerekkel (különböző sorrendben).

6. Tétel

Mi a jólformált formula definíciója az ítéletlogikában? Mit ír le egy ilyen formula? Hány leképezést lehet definiálni *n* ítéletváltozó felett? Milyen eleme a jólformált formula fogalma az ítéletlogikának?

Az ítéletlogika nyelve –szintaxis (α_0 szintaxisa)
A nyelvtanilag helyes mondatok a *jól formált formulák* (jff) [well formed formula (wff)]
1. X ítéletváltozó jff. (prímformula)
2. Ha A, B jff-k, akkor (A), $\neg$A, (A$\wedge$B), (A$\vee$B), (A$\supset$B), (A$\leftrightarrow$B) jff-k.
3.Minden jff az 1,2 véges sokszori alkalmazásával áll elő.

Ki kell egészíteni!!!!!!!!!!!!! TK 46.-oldaltól!!!!!
FONTOS: AZ ELSŐRENDBELI JFF NEM U.A, MINT AZ ÍTÉLETLOGIKÁBAN

7. Tétel

Mit értünk formalizálás alatt az ítéletlogikában? Milyen lehetõségek vannak egy formula által leírt leképezés megadására? Mit jelent az, hogy egy formula leír egy leképezést? Mit jelent az, hogy adott leképezéshez megadunk egy azt leíró formulát? Formalizálja az IF-THEN és az IF-THEN-ELSE működését.

Mit értünk formalizálás alatt az ítéletlogikában?

Legyen adott egy köznapi vagy matematikai probléma, mely csak indivídumokra vonatkozó állításokat (ítéletlogikai állítások) tartalmaz. Tekintsük át az ilyen problémák ítéletlogikai formulákkal való leírásának folyamatát. A problémát általában természetesnyelven leírt egyszerű vagy összetett kijelentőmondatokkal adják meg.. Minden állítást kifejező egyszerű mondat helyett bevezetünk egy-egy állításjelet. Egy összetett mondtot, amennyiben nem mellérendelt egyszerű mondatok kapcsolata, analizálunk, és átalakítjuk az eredeti mondattal azonos értelmű, de egyszerű mondatokból olyan nyelvtani összekötőkkel felépített mondattá, ahol a nyelvtani összekötők egyben logikai összekötők is. Ezután az állításjeleket a logikai összekötőknek megfelelő jelekkel összekapcsolva kapjuk a problémát vagy megállapítást leíró összetett ítéletlogikai állítást. Ebben kicserélve az állításjeleket ítéletváltozókkal nyerjük az ítéletlogikai formulát.

Pl.:"Panni, Robi és Sanyi készülnek a vizsgára."

Ez a kijelentő mondat 3 állítás – x készül a vizsgára (ahol x lehet Panni, Robi és Sanyi valamelyike) –együttes bekövet kezését jelenti.

Jelölje P,R,S rendre a következő mondatokat:

"Panni készül a vizsgára" ; "Robi készül a vizsgára" ; "Sanyi készül a vizsgára"

A formalizált mondat $P \wedge R \wedge S$ és a megfelelő ítéletlogikai formula: $X \wedge Y \wedge Z$.

Az eredmény egy konjunkciós formula(lánc).

Milyen lehetõségek vannak egy formula által leírt leképezés megadására?

Mit jelent az, hogy egy formula leír egy leképezést?

Mit jelent az, hogy adott leképezéshez megadunk egy azt leíró formulát?

Formalizálja az IF-THEN és az IF-THEN-ELSE működését.

A programozási nyelvekben feltételes utasításoknak (kapcsolóknak) nevezzük az

IF <feltétel> THEN <utasítás(ok)>

és az

IF <feltétel> THEN <utasítás(ok)> ELSE <utasítás(ok)>

szerkezetű utasításokat.

A program írásakor <feltétel> helyére egy F ítéletlogikai formula kerül, amelyben az ítéletváltozók igazságértéke az utasítás végrehajtásakor adott. Az <utasítás(ok)> helyére a programozó konkrét p, p_1, p_2 végrehajtandó programutasítás(oka)t ír (ezek tehát nem állítások). Vezessük be a

$$V(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{i(gaz)} & \text{ha az x programutasítások végrehajtódnak,} \\ \text{h(amis)} & \text{egyébként.} \end{cases}$$

relációt. Ekkor a két feltételes utasítás értelmezése: "IF F THEN $V(p)$" és az "IF F THEN $V(p_1)$ ELSE $V(p_2)$".

Formalizáljuk a két utasítás működését, azaz adjunk meg olyan formulákat, amelyek pontosan leírják az utasítások működését.

Az "IF F THEN V(p)" működését az

$$(F \vee V(p)) \vee (\neg F \wedge V(p))$$

formula és az "IF F THEN $V(p_1)$ ELSE $V(p_2)$" működését az

$$(F \wedge V(p_1) \wedge \neg V(p_2)) \vee (\neg F \wedge \neg V(p_1) \wedge V(p_2))$$

formula írja le.

HIÁNYOS!!!!!

8.a. Tétel

Mi egy formula igazságtáblája és igaz halmaza? Milyen speciális tulajdonságú formulákat ismer az általuk leírt leképezést tekintve? E speciális formulák igazságtáblája alapján felírható-e mind a KDNF mind a KKNF?

Mi egy formula igazságtáblája és igaz halmaza?

Formula igazságtáblája:

Def$_1$.: Azt, hogy milyen igazságértéket rendelünk egy formulához a közvetlen részformulák igazságértékének függvényében , kiolvashatjuk a logikai műveletek művelettábláiból, amelyeket – mivel igazságértékeken hajtjuk végre a műveleteket – igazságtáblának nevezzük.

Def$_2$.:Egy n-változós formula esetén egy 2^n sorból álló táblázat; fejlécében a formulában szereplő ítéletváltozók, alattuk az oszlopaikban az igazságértékek; a formula oszlopában az ítéletváltozók igazságértékei által meghatározott igazságértékek szerepelnek.

Formula igaz halamza:

Def.:Egy x formula igazsághalmazán $\{i,h\}^n$ azon részhalmazát értjük, mely elemeihez x az i igazságértéket rendeli. Rögzített bázis esetén a formulához ilyen módon megadható művelet egyértelmű, a művelet igazhalmazát ezért nevezhetjük egyúttal a formula igazsághalmazának.

Milyen speciális tulajdonságú formulákat ismer az általuk leírt leképezést tekintve?

negációs, konjunkciós, diszjunkciós, implikációs formula, valamint elsőrendben univerzális és egzisztenciális konjunkciós, diszjunkciós, implikációs láncformula

E speciális formulák igazságtáblája alapján felírható-e mind a KDNF mind a KKNF?

		1.	**2.**	**3.**	**4.**
X	**Y**	$\neg X$	$X \wedge Y$	$X \vee Y$	$X \Rightarrow Y$
i	**i**	h	i	i	i
i	**h**	h	h	i	h
h	**i**	i	h	i	i
h	**h**	i	h	h	i

1. formula KKNF-je: $(\neg X)\vee(\neg X)$
1. formula KDNF-je: $(\neg X)\wedge(\neg X)$

2. formula KKNF-je: $(\neg X\wedge Y)\vee(X\wedge\neg Y)\vee(X\wedge Y)$
2. formula KDNF-je: $(X\vee Y)$

3. formula KKNF-je: $(X\wedge Y)$
3. formula KDNF-je: $(X\vee Y)\wedge(X\vee\neg Y)\wedge(\neg X\vee Y)$

4. formula KKNF-je: $(\neg X\wedge Y)$
4. formula KDNF-je: $(X\vee Y)\wedge(\neg X\vee Y)\wedge(\neg X\vee\neg Y)$

Tehát felírható.

8. tétel

Mi egy formula igazságtáblája és igaz halmaza? Milyen speciális tulajdonságú formulákat ismer az általuk leírt leképezést tekintve? Lehet-e több formula igazhalmaza ugyanaz? Ha igen, akkor mi ennek a feltétele? Megkapható-e tetszőleges F_1 ,F_2 formulára az $F_1 \wedge F_2$ igazhalmaza az F_1 ,F_2 igazhalmazából?

Mi egy formula igazságtáblája és igaz halmaza?

Formula igazságtáblája:

Def$_1$.: Azt, hogy milyen igazságértéket rendelünk egy formulához a közvetlen részformulák igazságértékének függvényében , kiolvashatjuk a logikai műveletek művelettábláiból, amelyeket – mivel igazságértékeken hajtjuk végre a műveleteket – igazságtáblának nevezzük.

Def$_2$.:Egy n-változós formula esetén egy 2^n sorból álló táblázat; fejlécében a formulában szereplő ítéletváltozók, alattuk az oszlopaikban az igazságértékek; a formula oszlopában az ítéletváltozók igazságértékei által meghatározott igazságértékek szerepelnek.

Formula igaz halamza:

Def.:Egy x formula igazsághalmazán $\{i,h\}^n$ azon részhalmazát értjük, mely elemeihez x az i igazságértéket rendeli. Rögzített bázis esetén a formulához ilyen módon megadható művelet egyértelmű, a művelet igazhalmazát ezért nevezhetjük egyúttal a formula igazsághalmazának.

Milyen speciális tulajdonságú formulákat ismer az általuk leírt leképezést tekintve?

negációs, konjunkciós, diszjunkciós, implikációs formula, valamint elsőrendben univerzális és egzisztenciális konjunkciós, diszjunkciós, implikációs láncformula

Lehet-e több formula igazhalmaza ugyanaz?

Rögzített bázis esetén nem lehetséges, mert rögzített bázis esetén a a formulához megadható művelet egyértelmű a definíció alapján.

Ha igen, akkor mi ennek a feltétele?

A formula változói ne alkossanak rögzített bázist.

Megkapható-e tetszőleges F_1 ,F_2 formulára az $F_1 \wedge F_2$ igazhalmaza az F_1 ,F_2 igazhalmazából?

Igen.

Mert, ha tudjuk, hogy a két formula külön-külön hol igaz, akkor ott, ahol mind a két formula egyszerre igaz, ott az $F1 \wedge F2$ is igaz így, és így adva van $F1 \wedge F2$ igaz halamaza is.

9. Tétel

Mit jelent az, hogy egy adott igazságkiértékelés kielégít egy F formulahalmazt? Mi az igazságkiértékelés? Definiálja a tautológia, a kielégíthető formula, a kielégíthetetlen formula fogalmakat és a szemantikus következmény fogalmát.

Mit jelent az, hogy egy adott igazságkiértékelés kielégít egy F formulahalmazt?
Egy σ igazságkiértékelés akkor elégít ki egy F formulahalmazt, ha a formulahalmaz minden eleme igaz értéket vesz fel a σ igazságkiértékelésre. Jel.: σ|=F
Mi az igazságkiértékelés?
(Igazságkiértékelés másnéven Boole-értékelés)

Def.: (L_o szemantikája) L_o –beli formulák I interpretációbeli Boole-értékelése a következő – a szerkezeti rekurzió elve szerint definiált - $B_I : L_o \to \{i,h\}$ függvény:

1. ha A prímformula, akkor $B_I(A)$ legyen I(A),
2. $B_I(\neg A)$ legyen $\neg B_I(A)$,
3. $B_I(A \wedge B)$ legyen $B_I(A) \wedge B_I(B)$,
4. $B_I(A \vee B)$ legyen $B_I(A) \vee B_I(B)$,
5. $B_I(A \Rightarrow B)$ legyen $B_I(A) \Rightarrow B_I(B)$.

Figylem!!! $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow$ a definícióban a bal oldalon az ítéletlogika nyelvi ábécéjének szimbóluma, a jobb oldalon pedig logikai műveletek.

Definiálja a tautológia, a kielégíthető formula, a kielégíthetetlen formula fogalmakat és a szemantikus következmény fogalmát.

Tautológia: Az A formula tautológia, ha ¬A kielégíthetetlen.
Kielégíthető formula: Az A formula kielégíthető, ha ∃ olyan interpretáció, amire A értéke igaz. Egy ilyen interpretációt A modelljének nevezünk.
Kielégíthetetlen formula: Ha A-nak nem létezik modellje.
Szemantikus következmény: Legyen F az L_o nyelv formuláinak tetszöleges halmaza és B egy tetszőleges formula. B tautológikus következménye F formulahalmaznak, ha F minden modellje B-nek is modellje. F formulái a feltételformulák/premisszák. B a következményformula/konklúzió. Jelölés: $F|=_0 B$

10. Tétel

Mi a funkcionálisan teljes művelethalmaz? A logikai összekötőjelek mely részhalmazáról tudja közvetlenül eldönteni, hogy az funkcionálisan teljes? A logikai összekötőjelek mely egyéb részhalmazai alkotnak funkcionálisan teljes művelethalmazt? Ezt bizonyítsa is.

Kérdés: mi a funkcionálisan teljes művelethalmaz?

Definíció: *a logikai összekötőjelek egy halmazát funkcionálisan teljes művelethalmaznak nevezzük, ha e logikai összekötőjel-halmaz elemeinek felhasználásával tetszőleges* $\{i,h\}^n \rightarrow \{i,n\}$ *leképezéshez konstruálni lehet a leképezést leíró jól formált formulát.*

Az öt logikai összekötő jel ($\neg,\wedge,\vee,\Leftrightarrow,\supset$) mint művelethalmaz funkcionálisan teljes. Azaz (a definíció szerint) bármely $\{i,h\}^n \rightarrow \{i,n\}$ leképezés leírható az öt logikai összekötőjelet tartalmazó jól formált formulával.

Kérdés: a logikai összekötőjelek mely részhalmazai alkotnak funkcionálisan teljes művelethalmazt?

Állítás: az ilyen formulák leírásához nincs is szükség mindegyik logikai összekötőjelre, tehát a $\{\neg,\wedge,\vee\}$, $\{\neg,\wedge\}$, $\{\neg,\vee\}$, $\{\neg,\supset\}$ művelethalmazok külön-külön alkalmasak az előbb említett célra, azaz ezek mindegyike funkcionálisan teljes művelethalmaz.

Bizonyítás:

I. $\{\neg,\wedge,\vee\}$ funkcionálisan teljes: a következő két algoritmussal létrehozhatunk olyan kitüntetett diszjunktív normálfát (KDNF), illetve kitüntetett konjunktív normálfát (KKNF), amelyek tetszőleges $\{i,h\}^n \rightarrow \{i,n\}$ leképezést írnak le.

1.KDNF előállítása:

a) Tekintsük az $\alpha=\{i,h\}^n \rightarrow \{i,n\}$ leképezés igazságtábláját. Legyenek x_1, x_2, ..., x_n az igazságtáblában szereplő ítéletváltozók.

b) Jelöljük meg az igazságtáblában azokat a sorokat, ahol α igaz.

c) Minden megjelölt sorhoz rendeljünk hozzá egy $k_s=x_1' \wedge x_2' \wedge \ldots \wedge x_n'$ teljes elemi konjunkciót, amelyben x_i' legyen x_i, ha x_i abban a sorban igaz, $\neg x_i$, ha x_i abban a sorban hamis (i = 1 ... n).

d) A kapott teljes elemi konjunkciókat fűzzük diszjunktív lánccá.

Az így létrejött diszjunkció az α leképezést leíró KDNF, ugyanis láthatjuk, hogy k_s csak az igazságtábla hozzátartozó sorának megfelelő igazságértékelésre igaz, és ezért a végső KDNF pontosan azokban az igazságértékelések mellett igaz, amelyekre α is igaz.

2. *KKNF előállítása:*

a) Tekintsük az $\alpha=\{i,h\}^n \rightarrow \{i,n\}$ leképezés igazságtábláját. Legyenek x_1, x_2, ..., x_n az igazságtáblában szereplő ítéletváltozók.

b) Jelöljük meg az igazságtáblában azokat a sorokat, ahol α hamis.

c) Minden megjelölt sorhoz rendeljünk hozzá egy $k_s=x_1' \vee x_2' \vee \ldots \vee x_n'$ teljes elemi diszjunkciót, amelyben x_i' legyen x_i, ha x_i abban a sorban hamis, $\neg x_i$, ha x_i abban a sorban igaz (i = 1 ... n).

d) A kapott teljes elemi diszjunkciókat fűzzük konjunktív lánccá.

Az így létrejött konjunkció az α leképezést leíró KKNF, ugyanis láthatjuk, hogy k_s csak az igazságtábla hozzátartozó sorának megfelelő igazságértékelésre hamis, és ezért a végső KKNF pontosan azokban az igazságértékelések mellett hamis, amelyekre α is hamis.

II. Abból, hogy $\{\neg,\wedge,\vee\}$ funkcionálisan teljes, következik, hogy $\{\neg,\wedge\}$, $\{\neg,\vee\}$, $\{\neg,\supset\}$ művelethalmazok is funkcionálisan teljesek. Ugyanis a halmazokból hiányzó műveletek leírhatók a helyette szereplő(k) segítségével a következőképpen:

1.: $X \vee Y = \neg(\neg X \wedge \neg Y)$

2.: $X \wedge Y = \neg(\neg X \vee \neg Y)$

3.: $X \vee Y = \neg X \supset Y$

$X \wedge Y = \neg(X \supset \neg Y)$

11. Tétel

Lássa be, hogy a {¬,∧,∨} logikai összekötőjelek funkcionálisan teljes művelethalmazt alkotnak. Definiálja a 0. és 1. rendű klóz fogalmát. Milyen általános érvényű helyes következtetési formákat ismer?

Lássa be, hogy a {¬,∧,∨} logikai összekötőjelek funkcionálisan teljes művelethalmazt alkotnak.
Logikai műveletek egy halamza funkcionálisan teljes halmaz, ha ezen műveleteknek megfelelő logikai összekötő jeleknek és ítéletváltozóknak a felhasználásával bármilyen $\mathbb{L}^n \rightarrow \mathbb{L}$ logikai művelethez meg lehet konstruálni egy a műveletet leíró formulát.
{¬,∧,∨} funkcionálisan teljes ld. KKNF és KDNF
Definiálja a 0. és 1. rendű klóz fogalmát.
*0. rendű klóz*nak, másnéven elemi diszjunkciónak nevezzük az egységdiszjunkció és a különböző alapú literálok diszjunkcióját.
*1. rendű klóz*nak nevezzünk egy olyan zárt Skolem-formulát, amelynek a magja elsőrendű literálok diszjunkciója.

> *Magyarázat:*
> *Literál:egy prímformula, vagy annak negáltja*
> *Egy literált esetenként egységkonjunkciónak vagy egységdiszjunkciónak (egységklóznak) nevezünk.*

Milyen általános érvényű helyes következtetési formákat ismer?
Legyen $\{A_1,...,A_n\}$ tetszőleges formulahalmaz, és B egy formula. Az $(\{A_1,..,A_n\},B)$ párt következtetésformának nevezzük. Az $(\{A_1,...,A_n\},B)$ pár helyes következtetésforma, ha $\{A_1,...,A_n\}$ kielégíthető és $\{A_1,...,A_n\} \models_0 B$.
Így a következő következtetés formák igazak:

1. leválasztási szabály, vagy modus ponens	({A⇒B,A},B)
2. kontrapozíció vagy modus tollens	({A⇒B,¬B},¬A)
3. reductio ad abszurdum	({A⇒B,A⇒¬B},¬A)
4. indirekt bizonyítás	({¬A⇒B,¬A⇒¬B},A)
5. feltételes szillogizmus	({A⇒B,B⇒C},A⇒C)
6. következtetés esetszétválasztással	({A∨B,A⇒C,B⇒C},C)
7. modus tolledo ponens	({A∨B,¬A},B)
8. modus ponendo tollens	({A⊕B,A},¬B)
9. ∨-ra vonatkozó következtetésformák	({A},A∨B) és ({B},A∨B)
10. ∧-re vvonatkozó következtetésformák	({A,B},A∧B)
11. ⇒-re vonatkozó következtetésformák	({B},A⇒B)
12. ¬¬-re vonatkozó következtetésformák	({¬¬A},A) és ({A},¬¬A)

12. Tétel

Definiálja nullad- és elsőrendben a literállal, a diszjunkcióval, és a konjunkcióval kapcsolatos fogalmakat. Definiálja a különböző normálformákat. Miért fontosak a normálformák?

<u>Definiálja nullad- és elsőrendben a literállal, a diszjunkcióval, és a konjunkcióval kapcsolatos fogalmakat!</u>

- **Literál:** Egy prímformulát (prímváltozót) vagy annak a negáltját közös néven **literál**nak nevezünk. A prímformulát a *literál alap*jának hívjuk. Egy literált esetenként *egységkonjukció*nak vagy éppen *egységdiszjunkció*nak (*egységklóz*nak) is fogunk nevezni.

- **Diszjunkció:** $\vee$ műveleti jel, a neve **diszjunkció**. Logikai összekötőként … vagy … A „P vagy Q” állítás jelölése $P \vee Q$. jelentése $P \vee Q$ akkor és csak akkor igaz, ha P és Q közül legalább az egyik igaz, illetve akkor és csak akkor hamis, ha P is és Q is hamis. Ebből az értelmezésből látható, hogy ez a művelet a „megengedő vagy”, bár az elnevezés a „kizáró vagy”-ra utal.

- **Elemi diszjunkció:** Az *elemi diszjunkció* vagy más néven *klóz* az egységdiszjukció és a különböző alapú literálok diszjukciója.

- **Teljes diszjunkció:** Egy elemi diszjunkció teljes egy n változós logikai műveletre nézve, ha mind az n ítéletváltozó alapja valamely literáljának.

- **Konjukció:** A $\wedge$ műveleti jel neve **konjukció**. Logikai összekötőként … és … A „P és Q” állítás jelölése: $P \wedge Q$, jelentése : $P \wedge Q$ akkor és csak akkor igaz, ha P is és Q is igaz, illetve akkor és csak akkor hamis, ha P és Q közül legalább az egyik hamis.

- **Elemi konjukció:** Az *elemi konjukció* az egységkonjukció és a különböző alapú literálok konjukciója.

- **Teljes konjukció:** Egy elemi konjukció teljes egy n változós logikai műveletre nézve, ha mind az n ítéletváltozó alapja valamely literáljának.

<u>Definiálja a különböző normálformákat.</u>

Diszjunktív normálformának – röviden **DNF**-nek – nevezzük az elemi konjukciók diszjunkcióját. **Konjuktív normálformá**nak – röviden **KNF**-nek – pedig az elemi diszjunkciók (klózók) konjukcióját. **Kitüntetett a diszjunktív normálforma** (**KDNF**), ha teljes elemi konjukciók diszjunkciója, illetve **kitüntetett a konjuktív normálforma (KKNF)**, ha teljes elemi diszjunkciók konjukciója.

<u>Miért fontosak a normálformák?</u>

Mert a legegyszerűbb klózókat tartalmazza a legegyszerűbb (és, vagy) műveleteket. És ezekek használatával nagyon sok mindent be lehet rezolúcióval bizonyítani.

13. Tétel

Melyek a hálóaxiómák? Mit fejez ki a hálóelméleti dualitás? Milyen struktúrát alkot az {i,h} halmaz a $\{\neg,\wedge,\vee\}$ műveletekre? Lássa be, hogy az ítéletlogika is Boole algebra.

Melyek a hálóaxiómák?

Def.: Egy <U;=;⊗,⊙> matematikai struktúrát hálónak nevezünk, ha ⊗ és ⊙ binér műveletek U-n, és eleget tesznek az ún. hálóaxiómáknak, azaz tetszőleges $x,y,z \in U$-ra:

(1) $x \otimes y = y \otimes x$	(2) $x \odot y = y \odot x$	(kommutativitás)
(3) $(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z)$	(4) $(x \odot y) \odot z = x \odot (y \odot z)$	(asszociativitás)
(5) $x \otimes (x \odot y) = x$	(6) $x \odot (x \otimes y) = x$	(abszorptivitás)

Mit fejez ki a hálóelméleti dualitás?

(1) és (2), a (3) és (4), az (5) és a (6) kölcsönösen átírhatóak egymásba a ⊗,⊙ műveletek felcserélésével. Ezért mondjuk, hogy a két hálóművelet egymás duálisa.

Milyen struktúrát alkot az {i,h} halmaz a $\{\neg,\wedge,\vee\}$ műveletekre?

Boole-algebrát alkot. *Belátható a hálóaxiómákkal és ez egy elég hosszadalmas bizonyítás.*

Lássa be, hogy az ítéletlogika is Boole algebra.

$\{\neg,\wedge,\vee\}$ funkcionálisan teljes művelethalmaz.

$\{i,h\}^n \to \{i,h\}$ művelet igazsághalmaza az $\{i,h\}^n$ részhalmaza, így az összes $\mathbb{L}^n \to \mathbb{L}$ logikai művelet igazsághalmazainak halmaza: $P(\mathbb{L}^n)$ hatványhalmaz.

Egy halmaz hatványhalmaza Boole-algebra a $-,\cup,\cap$ műveletekkel.

Így az ítéletlogika algebrai modelljei a Boole-algebrának.

14. Tétel

Melyek a De Morgan azonosságok az ítéletlogikában és a predikátumlogikában? Mikor mondjuk, hogy egy struktúra komplementumos háló? Mi a Boole algebra? Lássa be a De Morgan azonosságok fennállását az ítéletlogikában a Boole algebra axiómái alapján.

Melyek a De Morgan azonosságok az ítéletlogikában és a predikátumlogikában?

Ítéletlogika:

1. $\neg(X\wedge Y)= \neg X\vee\neg Y$,
2. $\neg(X\vee Y)= \neg X\wedge\neg Y$

Predikátumlogikában:

1. $\neg\forall xA=\exists x\neg A$
2. $\neg\exists xA=\forall x\neg A$

Mikor mondjuk, hogy egy struktúra komplementumos háló?

Az $<U;=; \otimes, \oplus>$ korlátos háló valamely a elemének komplementuma egy olyan $x\in U$ elem, amelyre
$a \otimes x = min$ és $a \oplus x = max$

Azt az a elemet, amelynek van legalább egy komplementuma, a háló *komplementumos elemének,* ha pedig a-nak pontosan egy komplementuma van, akkor a háló *egyértelműen komplementumos elemének* nevezzük. Ha a háló minden eleme komplementumos (egyértelműen komplementumos), akkor azt mondjuk, hogy a **háló komplementumos (egyértelműen komplementumos)**.

Mi a Boole algebra?

Bool algebrának nevezzük a disztributív, egyértelműen koplementumos hálókat.

Lássa be a De Morgan azonosságok fennállását az ítéletlogikában a Boole algebra axiómái alapján.

Bool algebra axiómái:
1. $x, \otimes y)=y\otimes x$
2. $(x, \oplus y)=y\oplus x$
3. $(x, \otimes y) \otimes z= x\otimes(y\otimes z)$
4. $(x, \oplus y) \oplus z=x\oplus(y\oplus z)$
5. $x, \otimes(x\oplus y)= x$
6. $x, \oplus(x\otimes y)= x$
7. $x, \otimes(y\oplus z)= (x, \otimes y)\oplus (x, \otimes z)$
8. $x, \oplus (y\otimes z)= (x\oplus y)\otimes(x\oplus z)$
9. $x \otimes k(x)=O$
10. $x \oplus k(x)=I$

Egy $<U;=; k, \otimes, \oplus>$ Bool algebrában minden $x,y\in U$-ra

$k(x \otimes y) = k(x) \oplus k(y)$ és $k(x \oplus y) = k(x) \otimes k(y)$.

Bizonyítsuk be az első azonosságot. Ha $k(x) \oplus k(y)$ valóban komplementuma $x \otimes y$-nak, akkor (9) és (10) bal oldalán behelyettesítve a két kifejezést, a min, illetve a max elemet kellene kapjuk. (9) bal oldalán behelyettesítés után az

$$(x \otimes y) \otimes (k(x) \oplus k(y))$$

kifejezés áll, ami (7) miatt

$$((x \otimes y) \otimes k(x)) \oplus ((x \otimes y) \otimes k(y)).$$

Alkalmazva (1)-et és (3)-at, ebből az

$$((x \otimes k(x)) \otimes y) \oplus (x \otimes (y \otimes k(y)))$$

kifejezést nyerjük. (9) miatt ez $(min \otimes y) \oplus (x \otimes min)$, ami (8)-at alkalmazva a

$$((min \otimes y) \oplus x) \otimes ((min \otimes y) \oplus min)$$

kifejezést adja. De (2) és (6) miatt ez épp

$$((\min \otimes y) \oplus x) \otimes \min.$$

Megint alkalmazzuk (1)et és (7)-et, így nyerjük, hogy

$$((\min \otimes y) \otimes \min) \oplus (x \otimes \min),$$

majd pedig megint (1)-et és (5)-öt alkalmazva kapjuk, hogy $\min \oplus (x \otimes \min)$. Végül még egyszer (6) alkalmazásával megkapjuk az eredményt: min. Hasonlóan járhatunk el a (10) axiómába való helyettesítés után.

A másik De Morgan-azonosság ennek duálisa, tehát a dualitás elve miatt fennáll.

15. Tétel

Hogyan lehet megadni egy $B^n \to B$, (B={i,h}) leképezést leíró DNF-et, illetve KNF-et? Milyen egyszerűsítési szabályokat ismer? Hogyan lehet ezek segítségével belátni, hogy egy formula tautológia, vagy hogy kielégíthetetlen?

Könyv: 94-102. o. (teljesen használható, anyagot teljesen lefedi, egyszerűen érthető)

Definíciók:
Egy prímformulát (ítéletváltozót) vagy annak negáltját közös néven *literálnak* nevezünk. A prímformulát a *literál alapjának* hívjuk. Egy literált esetenként (?pontos def. hiányzik?) egységkonjunkciónak vagy éppen egységdiszjunkciónak is fogunk nevezni.

Elemi konjunkció az egységkonjunkció és különböző alapú literálok konjunkciója, *elemi diszjunkció vagy klóz* pedig az egységdiszjnunkció és különböző alapú literálok diszjunkciója. Egy elemi konjunkció, illetve egy elemi diszjunkció *teljes* egy n-változós logikai műveletre nézve, ha mind az n változó alapja valamely literálnak.

Diszjunktív normálforma (DNF) az elemi konjunkciók diszjunkciója.
Kitüntetett diszjunktív normálforma (KDNF), ha teljes elemi konjunkciók diszjunkciója.
Konjunktív normálforma (KNF) az elemi diszjunkciók (klózok) konjunkciója.
Kitüntetett konjunktív normálforma (KKNF), ha teljes elemi diszjunkciók konjunkciója.

Algoritmus a KDNF és KKNF megkonstruálásához:
Adjuk meg b művelet művelettábláját. Az első n oszlopba a művelettábla fejlécébe írjuk be a(z) [b-t meghatározó rögzített bázis szerinti] $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ítéletváltozókat.

A b-t leíró KDNF előállítása:	A b-t leíró KKNF előállítása:
1. Legyenek a művelettábla azon sorai ahol az igazságérték n-eshez b az i igazságértéket rendeli rendre $s_1, s_2, \ldots s_n$. Minden ilyen sorhoz rendeljük hozzá egy $X'_1 \wedge X'_2 \wedge \ldots \wedge X'_n$ teljes elemi konjunkció, úgy hogy X'_j literál X_j vagy $\neg X_j$ legyen aszerint, hogy ebben a sorban X_j oszlopában i vagy h igazságérték szerepel. Az így nyert elemi konjunkciók legyenek rendre $k_{s1}, k_{s2}, \ldots, k_{sr}$. 2. A $k_{s1}, k_{s2}, \ldots, k_{sr}$ teljes elemi konjunkciókból készítsünk egy diszjunkciós láncformulát. Az így kapott $k_{s1} \vee k_{s2} \vee \ldots \vee k_{sr}$ formula a KDNF.	1. Legyenek a művelettábla azon sorai ahol az igazságérték n-eshez b a h igazságértéket rendeli rendre $s_1, s_2, \ldots s_n$. Minden ilyen sorhoz rendeljük hozzá egy $X'_1 \vee X'_2 \vee \ldots \vee X'_n$ teljes elemi diszjunkciót, úgy hogy X'_j literál X_j vagy $\neg X_j$ legyen aszerint, hogy ebben a sorban X_j oszlopában h vagy i igazságérték szerepel. Az így nyert elemi diszjunkciók legyenek rendre $d_{s1}, d_{s2}, \ldots, d_{sr}$. 2. A $d_{s1}, d_{s2}, \ldots, d_{sr}$ teljes elemi diszjunkciókból készítsünk egy konjunkciós láncformulát. Az így kapott $d_{s1} \wedge d_{s2} \wedge \ldots \wedge d_{sr}$ formula a KKNF.

Példa:

X	Y	Z	b	Elemi konjunkciók a KDNF-hez	Elemi diszjunkciók A KKNF-hez
…					
I	H	H	i	$X \wedge \neg Y \wedge \neg Z$	
H	H	H	h		$X \vee Y \vee Z$
I	I	I	i	$X \wedge Y \wedge Z$	
I	H	I	h		$\neg X \vee Y \vee \neg Z$
…					

KDNF: $(\ldots) \vee (X \wedge \neg Y \wedge \neg Z) \vee (X \wedge Y \wedge Z) \vee (\ldots)$ KKNF: $(\ldots) \wedge (X \vee Y \vee Z) \wedge (\neg X \vee Y \vee \neg Z)$ $(\ldots)$

Tétel: A $k_{s1} \vee k_{s2} \vee \ldots \vee k_{sr}$ formula valóban a b logikai műveletet írja le. **Bizonyítás**: A k_{sj} teljes elemi konjunkcióhoz az s_j sorban lévő interpretációbeli Boole-értékelés az i igazságértéket, a több interpretációbeli Boole-értékelés pedig h igazságértéket rendel. Tehát az $s_1, s_2, \ldots, s_r$ sorokbeli interpretációban – mivel van egy olyan diszjunkciós tag, amely i igazságértékű – a KDNF helyettesítési értéke i. A többi sorba viszont a KDNF-ben szereplő minden teljes elemi konjunkció igazságértéke h, tehát a KDNF helyettesítési értéke h.	**Tétel**: A $d_{s1} \wedge d_{s2} \wedge \ldots \wedge d_{sr}$ formula valóban a b logikai műveletet írja le. **Bizonyítás**: A d_{sj} teljes elemi diszjunkcióhoz az s_j sorban lévő interpretációbeli Boole-értékelés a h igazságértéket, a több interpretációbeli Boole-értékelés pedig i igazságértéket rendel. Tehát az $s_1, s_2, \ldots, s_r$ sorokbeli interpretációban – mivel van egy olyan konjunkciós tag, amely h igazságértékű – a KKNF helyettesítési értéke h. A többi sorba viszont a KKNF-ben szereplő minden teljes elemi diszjunkció igazságértéke i, tehát a KKNF helyettesítési értéke i.

Egyszerűsítési szabályok:

1. $(X \wedge k) \vee (\neg X \wedge k) \sim_0 k$
2. $(X \vee d) \wedge (\neg X \vee d) \sim_0 d$

Bizonyítás:

(1.) Disztributivitás miatt: $(X \wedge k) \vee (\neg X \wedge k) \sim_0 (X \vee \neg X) \wedge k$, de
$(X \vee \neg X) \sim_0 \top$ és $\top \wedge k \sim_0 k$ [megj. $\top$ mint tautológia].
A (2.) ennek a duálisa, tehát a dualitás elve miatt fennáll.

Az 1. ill. 2. egyszerűsítési szabály (többszöri) alkalmazásával előállíthatjuk a KDNF-ből a DNF-et (a KKNF-ból a KNF-t), amely során minden lehetséges lépésben összehasonlítunk minden elemi konjunkciópárt (diszjunkciópárt), és ha lehetséges $(X \wedge k)$, $(\neg X \wedge k)$ elemi konjunkciópárt k-val helyettesítjük ($(X \vee d)$, $(\neg X \vee d)$ elemi diszjunkciópárt d-vel). Így minden lépésben a formulában szereplő elemi konjunkciók száma, és az egyes elemi konjunkciókban szereplő literálok száma is csökken. Ha tovább nem egyszerűsíthetnénk az 1. ill. 2. szabály alkalmazásával, ekkor a kapott formula az adott b műveletet leíró diszjunkciós normálforma ill. konjunkciós normálforma. „Quine-McCluskey" algoritmus.

Példa:
KDNF legyen $(X\wedge Y\wedge\neg Z) \vee (X\wedge\neg Y\wedge\neg Z) \vee (\neg X\wedge Y\wedge Z) \vee (\neg X\wedge\neg Y\wedge Z) \vee (\neg X\wedge\neg Y\wedge\neg Z)$

L_0	L_1	L_3
1. $X\wedge Y\wedge\neg Z$	$X\wedge\neg Z$	$\varnothing$
2. $X\wedge\neg Y\wedge\neg Z$	$\neg Y\wedge\neg Z$	
3. $\neg X\wedge Y\wedge Z$	$\neg X\wedge Z$	
4. $\neg X\wedge\neg Y\wedge Z$	$\neg X\wedge\neg Y$	
5. $\neg X\wedge\neg Y\wedge\neg Z$		

➔DNF: $(X\wedge\neg Z)\vee (\neg Y\wedge\neg Z) \vee (\neg X\wedge Z) \vee(\neg X\wedge\neg Y)$

Tautológiák:
Ha a b művelet egy n-változós tautológia, akkor a fenti algoritmust a KDNF-re alkalmazva az n-1-edik lépésében az X_n és $\neg X_n$ elemi konjunkció marad, ami tovább egyszerűsítve $X_n \vee \neg X_n$, ami nyilván tautológia, így az n-edik lépésben nem marad több literál az elemi konjunkcióban. Ez az üres elemi konjunkció, jelölése: ■

Kielégíthetetlen formulák:
Analóg módon, csupán most a KKNF-t egyszerüsítjük [!ne felejtsük, ezt azon sorokból nyertük, melyhez b h értéket rendel, és most minden sor ilyen!]. Ekkor az n-edik lépésben $X_n \wedge \neg X_n$, ami nyilván kielégíthetetlen. Az eredmény az üres elemi konjunkció, vagy üres klóz.
Jelölése: □

TÉTEL VÉGE

Megjegyzések:

i) Soknak tűnik, de nem az
ii) Az algoritmusokat jegyezd meg, lehetőleg formalizálva (gyakorlatban már gyakZHra úgyis kellett tudni ☺), valamint, hogy miből mi következik
iii) A példákat ne jegyezd meg, csak a rizsát szemléltetik, olyat bármikor králhatsz, ha az eljárást ismered.

16. Tétel

Tartalmilag mit jelent az üres klóz (□) és a tele klóz (■)? Milyen módon és milyen esetekeben nyerhetők ezek azonos átalakításokkal egy formulából? Milyen formulával ekvivalens logikailag az üres klóz és a tele klóz? Formula-e az üres klóz és a tele klóz?

A klasszikus Quine-McCulske-féle algoritmus kitüntetett diszjunktív normálforma egyszerűsítése:

1. Soroljuk fel a KDNF-ben szereplő összes teljes elemi konjukciót az L0 listában, j :=0.

2. Megvizsgáljuk az Lj-ben szereplő összes lehetséges elemi konjukciópárt, hogy alkalmazható-e rájuk az (1) egyszerűsétési szabály. Ha igen, akkor a két kiválasztott
konjukciót √-val megjelöljük, és az eredmény konjukciót beírjuk az L_{j+1} listába. Azok az elemi konjukciók, amelyek az L_j vizsgálata végén nem lesznek megjelölve, nem voltak egyszerűsíthetők, tehát belekerülnek az egyszerűsített diszjunktív normálformába.

3. Ha az L_{j+1} konjukciólista nem üres akkor j:= j+1. Hajtsuk végre újból a 2. lépést.

4. Az algoritmus során kapott, de meg nem jelölt elemi konjukcióból készítsünk egy diszjunkciós láncformulát. Így az eredeti KDNF-fel logikailag ekvivalens, egyszerűsített DNF-et kapunk.

Példa:

$$(X \wedge Y \wedge \neg Z) \vee (X \wedge \neg Y \wedge \neg Z) \vee (\neg X \wedge Y \wedge Z) \vee (\neg X \wedge \neg Y \wedge Z) \vee (\neg X \wedge \neg Y \wedge \neg Z)$$

KDNF egyszerűsítése.
Az L_0 konjukciólista:

1. $X \wedge Y \wedge \neg Z$ √
2. $X \wedge \neg Y \wedge \neg Z$ √
3. $\neg X \wedge Y \wedge Z$ √
4. $\neg X \wedge \neg Y \wedge Z$ √
5. $\neg X \wedge \neg Y \wedge \neg Z$ √

Egy A diszjunktív normálforma bármelyik k_j elemi konjukcióra igaz, hogy $\models_0 k_j \supset A$. Ezt más szóval úgy fejezzük ki, hogy k_j implikánsa A-nak, ami azt jelenti hogy k_j igazhalmaza az A igazhalmaznak.

A Quine-McCulskey-féle eljárással kapott DNF-et redukált DNF-nek a benne lévő elemi konjukciókat pedig prímimplikánsoknak nevezzük, mivel az elemi konjukciókból nem hagyható el literált úgy, hogy a formula még mindig leírja az eredeti logikai műveletet. Az eredmény DNF elemi konjukcióban lévő literálok száma minimális.

Lehetséges azonban hogy a redukált DNF-ből egyes elemi konjukciókat elhagyva a formula továbbra is az eredeti logikai műveletet írja le. Ehhez azt kel biztosítani, hogy a megmaradó prímimplikánsok igazhalmazainak uniója megegyezzen a McCluskey-algoritmussal kapott DNF igazhalmazainak uniója megegyezzen a McCluskey-algoritmussal kapott DNF igazhalmazával. Azt a redukált DNF-et, amelyből már nem hagyható el elemi konjukció, minimális DNF-nek nevezzük. A minimális DNF megkereséséhez megadunk egy „lefedési" táblázatot a formula igazhalmazának elemei és a formula prímimplikánsai között. A tábázat felső szegélyében a formula igazhalmazának elemeit az oldalszegélyben a prímimplikánsokat soroljuk fel. Egy prímimlikáns sorában az ő igazhalmazának elemei alá × jelt írunk. Azt mondjuk, hogy a prímimplikáns „lefedi" ezeket az elemeket. Ha van a prímimlikáns által „lefedett" elemek között olyan, amelyet csak ez a prímimplikáns fed le, akkor az illető prímimplikánst lényeges prímimplikánsnak nevezzük és a lefedési táblában *-gal jelöljük.

Most megadjuk az előző példa lefedési táblázatát és lényeges prímimplikánsait.

		iih	ihh	hii	hhi	hhh
*	$X \wedge \neg Z$	×	×			
	$\neg Y \wedge \neg Z$		×			×
*	$\neg X \wedge Z$			×	×	
	$\neg X \wedge \neg Y$				×	×

A formula igazhalmazának elemei közül megtartjuk azokat, amelyeket a lényeges prímimplikánsok nem fednek le. Ezekkel, valamint azokkal a nemlényeges prímimplikánsokkal, amelyek a maradék igazhalmazelemek közül lefednek legalább egyet, új lefedési táblázatot szerkesztünk. Az új táblázat alapján – valamilyen heurisztika szerint – kiválasztjuk azokat a prímimplikánsokat, amelyek szükségesek a maradék elemek lefedéséhez.

	hhh
$\neg Y \wedge \neg Z$	×
$\neg X \wedge \neg Y$	×

A lényeges prímimplikánsok és az új lefedési táblázat alapján kiválasztott prímimplikánsok diszjunkciója minimális DNF. Ez esetünkben vagy az

$$(X \wedge \neg Z) \vee (\neg X \wedge Z) \wedge (\neg Y \wedge \neg Z),$$

vagy az

$$(X \wedge \neg Z) \vee (\neg X \wedge Z) \wedge (\neg X \wedge \neg Y)$$

formula.

Most alkalmazzuk a McCluskey-féle eljárást arra az esetre, amikor a logikai művelet a tábla minden sorában i igazságértéket rendel az interpretációhoz, tehát minden sorhoz rendeltünk teljes elemi konjukciót. A logikai műveletet leíró KDNF-ben ezért az összes lehetséges teljes elemi konjukciót. A logikai műveletet leiró KDNF-ben ezért az összes lehetséges teljes elemi konjukció szerepel.

Vegyük észre, hogy ha kiválasztunk egy teljes elemi konjukciót és abban egy ítéletváltozt akkor biztosan van a teljes elemi konjukciók között olyan, aminek a segítségével a kiválasztott változó kiegyszerűsíthető. Az interpretációkat a táblázat soraiba úgy irjuk be hogy az első oszlopba a táblázat első felében (első 2^{n-1} sor) i igazságértékek, a második felében h igazságértékek kerüljenek. Ugyan ezt a beírási módot kövessük a két kitöltendő 2^{n-1} sort tartalmazó résztáblára, és így tovább. Ennek a jelentősége , hogy nem kell minden konjukciópárra ellenőrizni az egyszerűsíthetőséget, hanem ezt csak első 2^{n-1} konjukcióhoz vizsgáljuk. A k-adik konjukcióhoz kiválasztjuk a (2^{n-1}+k)-adik sorban lévő konjukciót, amelyel az első változót kiegyszerűsítjük. Így megkapjuk a maradék n – 1 változóval felirható összes lehetséges teljes elemi konjukciót. Az eljárás ugyanígy folytatódik a soronkövetkező változóra, míg az n—1-edik lépés után a megmaradt két elemi konjukció az X_n és a $\neg X_n$ DNF-hez jutottunk, ami viszont tautológia. Így az n-edik lépés után már nem marad literál az elemi konjukcióban. Azt mondjuk hogy az eredmény az üres elemi konjukció, jelölése:■

Vizsgáljuk most azt az n-változós műveletet, amelyik minden sorban h igazságértéket rendel az interpretációhoz. Ennek felírva a KKNF-jét, minden sorhoz rendeltünk teljes elemi diszjunkciót. A leképezést leíró KKNF-ben ezért az összes lehetséges teljes elemi diszjunkció szereel. A KDNF egyszerűsítésénél elmondottakat kövejtük itt is, és az ítéletváltozókat sorra kiegyszerűsítjük. Az n-1-edik lépés után a megmaradt két elemi diszjunkció az X_n és a $\neg X_{n.}$ Az így kapott $Xn \wedge \neg Xn$ KNF kielégíthetetlen formula. Az n-edik lépés után most sem marad literál az elemi diszjunkcióban. Azt mondjuk hogy az eredmény az üres elemi diszjunkció vagy üres klóz, jelölése: □

17. Tétel

Mi a szemantikus vagy tautológikus következményfogalom, valamint az ezt előkészítő fogalmak definíciója? Mi az a feltételhalmaz, amelynek következménye a) tautológia, b) valamely azonosan hamis formula? Használja fel a szemantikus következményfogalom definícióját.

Definíciók:

1. Az L_0 nyelv egy A formulája kielégíthető, ha van L_0 olyan I interpretációja, hogy $I \models_0 A$. Egy ilyen interpretációt A modelljének nevezzünk. Ha A-nak nincs modellje, az A formulát kielégíthetetlennek mondjuk.
2. Az A formula ítéletlogika törvény vagy másképp tautológia, ha L_0 minden I interpretációja $I \models_0 A$.
3. L_0 formuláinak egy tetszőleges F halmaza kielégíthető, ha van L_0–nak olyan I interpretációja, hogy $I \models_0 A$, $\forall A \in F$-re. Egy ilyen interpretációt F modelljének nevezzünk. Ha nincs F-nek modellje, akkor F kielégíthetetlen.

Ítéletlogikai következmény fogalom:

Legyen F az L_0 nyelv formuláinak tetszőleges halmaza és B egy tetszőleges formula. Azt mondjuk hogy a B formula tautologikus következménye a F formulahalmaznak, ha F minden modellje az modellje a B formulánk is. Az F-beli formulákat feltételformuláknak, a B formulát következmény formulának nevezzük. Jele: $F \models_0 B$.

Mi az a feltételhalmaz, amelynek következménye a) tautológia, b) valamely azonosan hamis formula:

Legyenek $A_1, A_2, \ldots, A_n, B$ tetszőleges ítéletlogikai formulák. $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \models_0 B \Leftrightarrow$ az $\{A_1, A_2, \ldots, A_n, \neg B\}$ formulahalmaz kielégíthetetlen. Azaz $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge \neg B$ formula kielégíthetetlen.

Biz.:

1. Legyen $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \models_0 B$ Ekkor a következmény fogalom definíciója szerint minden olyan interpretáció, amely kielégíti a feltételformulák halmazát az kielégíti a B következmény formulát is. Ezekben az interpretációkban tehát $\neg B$ illetve $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge \neg B$ is hamis, továbbá ezek az interpretációk nem elégítik ki $\{A_1, A_2, \ldots, A_n, \neg B\}$-t. Azok az interpretációk, amelyek már nem elégítik ki a feltétel formulák halmazát sem, nyilván nem elégítheti ki a bővebb $\{A_1, A_2, \ldots, A_n, \neg B\}$ formula halmazt sem.
2. Legyen most az $\{A_1, A_2, \ldots, A_n, \neg B\}$ formulahalmaz vagy $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge \neg B$ formula kielégíthetetlen. Ekkor vagy már az $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ is kielégíthetetlen, ekkor nyilván $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \models_0 B$. Ha viszont $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ kielégíthető, akkor rögzítsük egy tetszőleges F modelljét. Ez a modell sem elégíti ki $\{A_1, A_2, \ldots, A_n, \neg B\}$formulahalmazt tehát $\neg B$ hamis azaz B igaz benne így F modellje B-nek is az.

18. Tétel

Mit értünk helyes következtetésforma alatt? Hogyan lehet igazságtáblával ellenőrizni, hogy $F|=_0A$ fennáll-e? Hogyan lehet igazságtáblával megadni a legszűkebb következményt. Definiálja a tautológikus ekvivalencia fogalmat.

Mit értünk helyes következtetésforma alatt?

Legyen $\{ A_1, A_2, ..., A_n \}$ tetszőleges formulahalmaz, és B egy formula. Az $(\{ A_1, A_2, ..., A_n \}, B)$ párt következtetésformának nevezzük. Az $(\{ A_1, A_2, ..., A_n \}, B)$ pár helyes következtetésforma, ha $\{ A_1, A_2, ..., A_n \}$ kielégíthető és $\{ A_1, A_2, ..., A_n \} |=_0 B$.

Nem tekintjük helyes következtetésformának, ha a premisszák halmaza kielégíthetetlen. Ugyanis így a következményformula számára nincs előírva, hogy milyen interpretációkban kell igaznak lennie, tehát a következményformula bármilyen formula lehet.

Ezen kívül nyílván helyes következtetésforma, amikor a konklúzió tautológia, hiszen a logikai törvények feltétel nélkül igazak.

(Logika könyv, 81. oldal, 4.4.11. definíció)

Hogyan lehet igazságtáblával ellenőrizni, hogy $F |=_0 A$ fenn áll-e?

$F |=_0 A$:

Az A formula tautologikus következménye az F formulahalmaznak, ha $\forall I : I |=_0 F \Rightarrow I |=_0 A$.

Az F-beli formulákat feltételformuláknak (premisszáknak), az A formulát következményformulának (konklúziónak) nevezzük. Azt, hogy $F |=_0 A$ fenn áll, ellenőrizni lehet igazságtáblával.

A közös igazságtáblának tartalmaznia kell a premisszákat, illetve a konklúziót. A kiértékelés után kell megvizsgálni, hogy az F-nek tautologikus következménye-e A. Mindezt úgy, hogy megkeressük mely interpretációk mellett van F-et kielégítő sor, majd megvizsgáljuk, hogy minden(!) ilyen „igaz sorban” igaz-e a következmény. Ha mindez teljesül, akkor $F |=_0 A$ fenn áll.

Hogyan lehet igazságtáblával megadni a legszűkebb következményt?

Az $\{ A_1, A_2, ..., A_n \}$ formulahalmaz formuláiban előforduló ítéletváltozók legyenek: $X_1, X_2, ..., X_m$. $\{ A_1, A_2, ..., A_n \}$ legszűkebb következménye (rögzített bázis mellett) az az $\{i,h\}^m \rightarrow \{i,h\}$ logikai leképezés, amely pontosan azokhoz az interpretációkhoz rendel igaz értéket, amelyek kielégítik az $\{ A_1, A_2, ..., A_n \}$ formulahalmazt.

A legszűkebb következmény az igazságtáblával úgy adható meg, hogy a formulahalmaz formuláit kiértékeljük az igazságtáblában, majd megkeressük mely interpretációk mellett van „igaz sor”, azaz mely interpretációk mellett lesz az összes formula igaz. Ez a legszűkebb következmény.

(Logika könyv, 84. oldal, 4.4.14. definíció)

Definiálja a tautologikus ekvivalencia fogalmat.

Azt mondjuk, hogy az A és B ítéletlogikai formulák tautologikusan ekvivalensekm és ezt a tényt úgy jelöljük, hogy $A \sim_0 B$, ha minden interpretációban $\boldsymbol{B}_I(A) = \boldsymbol{B}_I(B)$.

Könnyen eldönthető, hogy két formula tautologikusan ekvivalens-e egymással, vagy sem. Ha közös igazságtáblájukhoz tartozó oszlopokban minden sorban ugyanaz az igazságérték található, akkor a két formula tautologikusan ekvivalens, egyébként – ha van olyan sor, ahol az értékek különböznek – nem.
Például tautologikusan ekvivalens a $X \rightarrow Y$ és a $\neg X \vee Y$ formula.

(Logika könyv, 72. oldal, 4.3.7. definíció)

19. Tétel

1. Ha $\{F_1,F_2,...,F_n\}\models_o A$, akkor milyen tulajdonsága van a $\{F_1,F_2,...,F_n,\neg A\}$ formulahalmaznak és miért?
2. Ha $\{F_1,F_2,...,F_n\}\vdash_o A$, akkor milyen tulajdonsága van a $\{F_1,F_2,...,F_n,\neg A\}$ formulahalmaznak? Ismer-e erre vonatkozó tételt?

1.
Gödel féle gondolat menet alapján
Kielégíthetetlen, mert
Ha {F1,F2,...,Fn}|=oA akkor a kielégítetlen {F1,F2,...,Fn,¬A} formulahalmaz (4.4.4 tétel 79 oldal.)

Kapcsolódó tétel:
Ha {F1,F2,...,Fn}|=oA, akkor {F1,F2,...,Fn }|–oA tétel: ítéletkalkulus helyesség..

2.
A tétel szerint: ellentmondásos.
Tétel:
legyen {F1,F2,...,Fn,¬A} egy formulahalmaz és b egy ítéletlogikai formula.
1. {F1,F2,...,Fn,¬A} pontosan akkor ellentmondásos, ha {F1,F2,...,Fn}|–o A.
2. { F1,F2,...,Fn,A }| pontosan akkor ellentmondásos, ha {F1,F2,...,Fn }|–o¬A.

20. Tétel

Bizonyítsa be, hogy $\{F_1,F_2,...,F_n\}|=_0 A$ akkor és csak akkor, ha $\{F_1,F_2,...,F_{n-1}\}|=_0 F_n \supset A$. Milyen fontos logikai eredményt lehet a tétel felhasználásával belátni?

Bizonyítsa be, hogy $\{F_1,F_2,...,F_n\}|=_0 A$ akkor és csak akkor, ha $\{F_1,F_2,...,F_{n-1}\}|=_0 F_n \supset A$.

Ez nem más, mint a dedukciós tétel.

Dedukciós tétel bizonyításának elve:

Azt mondjuk, hogy jelölje Γ az $\{F_1,F_2,\ldots,F_{n-1},F_n\}$, Γ' pedig az $\{F_1,F_2,\ldots,F_{n-1}\}$ formulahalmazt.

1. Először azt bizonyítjuk, hogy ha $\Gamma \models_0 A$ akkor $\Gamma' \models_0 F_n \Rightarrow B$.
   Azt kell megmutatni, hogy Γ' modelljei kielégítik $F_n \Rightarrow B$-t is.
   Γ' modelljeit két csoportba osztjuk: az egyikben azok az interpretációk vannak, amelyek Γ-nak is modelljei, a másikban a többi Γ'-t kielégítő interpretáció van.
   Világos, hogy Γ minden modellje modellje Γ'-nek is.
   Nyilván Γ modelljeiben mind F_n, mind A és így $F_n \Rightarrow A$ is igaz. Γ'-nek pedig azon modelljeiben, melyek Γ-nak nem modelljei, F_n hamis, ezért az $F_n \Rightarrow A$ most is igaz.
2. Most pedig azt bizonyítjuk, hogy ha $\Gamma' \models_0 F_n \Rightarrow A$, akkor $\Gamma \models_0 A$.
   A Γ formulahalmazt kielégítő interpretációk kielégítik Γ'-t is.
   A feltétel miatt ezekben az interpretációkban $F_n \Rightarrow A$ és F_n is igaz, következésképpen A is igaz.

Így a dedukciós tételt bebizonyítottuk.

Milyen fontos logikai eredményt lehet a tétel felhasználásával belátni?

(Eldöntésprobléma tétele):

Legyenek $F_1,...,F_n,B$ ítéletlogikai formulák.

$\{F_1,...,F_{n-1},F_n\} \models_0 B$ pontosan akkor, ha $\models_0 F_1 \Rightarrow F_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow F_{n-1} \Rightarrow F_n \Rightarrow B$.

[Vagyis $F_1 \Rightarrow F_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow F_{n-1} \Rightarrow F_n \Rightarrow B$ logikailag igaz.]

Biz.: $\Rightarrow$: Az előzőleg bizonyított tétel n-szeres alkalmazása $\Rightarrow$ irányba.

$\Leftarrow$: Az előzőleg bizonyított tétel n-szeres alkalmazása $\Leftarrow$ irányba.

21. Tétel

Mi az ítéletlogika eldöntésproblémája? Mi közte és az automatikus tételbizonyítás közötti kapcsolat? Melyik tétel adja ezt meg? Ismertesse e tétel bizonyításának elvét. Van-e elsőrendben is hasonló eredmény?

1. Mi az ítéletlogika eldöntésproblémája?

Legyenek $A_1, A_2, \ldots, A_n$, B *ítéletlogikai formulák*. $\{A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n\} \models_0 B$ pontosan akkor, ha $\models_0 A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_{n-1} \supset A_n \supset B$.

Bizonyítás: $\{A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n\} \models_0 B$-re n-szer alkalmazva a dedukciós tételt egyik irányban, $\models_0 A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_{n-1} \supset A_n \supset B$-re n-szer alkalmazva a dedukciós tételt visszafelé, a tétel mindkét irányú állítása bizonyítást nyer.

Megjegyzés: Az eldöntésprobléma tétele bizonyítható úgy is, hogy megmutatjuk, hogy
$A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_{n-1} \supset A_n \supset B \sim_0 A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \supset B$, és alkalmazzuk a 4.4.6 tételt.
(4.4.6. tétel: Legyenek $A_1, A_2, \ldots, A_n$, B ($n \geq 1$) tetszőleges ítéletlogikai formulák.
$\{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \models_0 B$ pontosan akkor, ha $\models_0 A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \supset B$.)

2. Mi közte és az automatikus tételbizonyítás közötti kapcsolat?

(…)
Leibniz szerint, ha a matematikai képletek közötti logikai kapcsolatot logikai műveletekkel fejezzük ki, akkor ilyen képletekkel teljes bizonyításokat lehetne felírni és ki lehetne számolni a képlet igazságértékét, az eredmény a tétel igazolása vagy cáfolása. Ez az *automatikus tételbizonyítás* első megfogalmazása.
(…)

3. Melyik tétel adja meg ezt?

(…)
A dedukciós tétel:
Legyenek $A_1, A_2, \ldots, A_n$, B ($n \geq 1$) tetszőleges ítéletlogikai formulák.
$\{A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n\} \models_0 B$ pontosan akkor, ha $\{A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}\} \models_0 A_n \supset B$.
(…)

4. Ismertesse a bizonyítás elvét.

(…)
Dedukciós tétel bizonyításának elve:
Azt mondjuk, hogy jelölje Γ az $\{A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n\}$, Γ' pedig az $\{A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}\}$ formulahalmazt.

3. Először azt bizonyítjuk, hogy ha $\Gamma \models_0 B$ akkor $\Gamma' \models_0 A_n \Rightarrow B$. Azt kell megmutatni, hogy Γ' modelljei kielégítik $A_n \Rightarrow B$-t is. Γ' modelljeit két csoportba osztjuk: az egyikben azok az interpretációk vannak, amelyek Γ-nak is modelljei, a másikban a többi Γ'-t kielégítő interpretáció van. Világos, hogy Γ minden modellje modellje Γ'-nek is. Nyilván Γ modelljeiben mind A_n, mind B és így $A_n \Rightarrow B$ is igaz. Γ'-nek pedig azon modelljeiben, melyek Γ-nak nem modelljei, A_n hamis, ezért az $A_n \Rightarrow B$ most is igaz.
4. Most pedig azt bizonyítjuk, hogy ha $\Gamma' \models_0 A_n \Rightarrow B$, akkor $\Gamma \models_0 B$. A Γ formulahalmazt kielégítő interpretációk kielégítik Γ'-t is. A feltétel miatt ezekben az interpretációkban $A_n \Rightarrow B$ és A_n is igaz, következésképpen B is igaz.

Így a dedukciós tételt bebizonyítottuk.
(…)

5. Van-e elsőrendben is hasonló eredmény?

Igen, elsőrendben is létezik eldöntésprobléma.
Legyenek $A_1, A_2, \ldots, A_n$, B ($n \geq 1$) az $L[V_v]$ nyelv tetszőleges formulái.
$\{A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n\} \models B$ pontosan akkor, ha:

$\models A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_{n-1} \supset A_n \supset B$

A tétel természetesen kimondható úgy is, hogy $\{A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n\} \models B$ akkor és csak akkor, ha $\models Ai_1 \supset Ai_2 \supset \ldots \supset Ai_n \supset B$, ahol $i_1, i_2, \ldots, i_n$ az 1, 2, …, n számok tetszőleges permutációja.

22. Tétel

Mi a rezolúciós elv eldöntésproblémája az ítéletlogikában? Melyek a rezolúciós elv alapfogalmai? Definiálja a rezolúciós levezetést. Lássa be, hogy a rezolúciós kalkulus helyes.

Mi a rezolúciós elv eldöntésproblémája az ítéletlogikában?

Rezolúciós elv eldöntésproblémája az ítéletlogikában:

Legyenek $A_1, A_2, \ldots, A_n, B$ ($n \geq 1$) tetszőleges ítéletlogikai formulák. Az ismert ítéletlogika eldöntésproblémájának két megfogalmazása:

1. az $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset B$ formula tautológia-e
2. az $\{A_1, A_2, \ldots, A_n, \neg B\}$ formulahalmaz kielégíthetetlen-e.

Az utóbbi halmaz átírása KNF-be: $\{KNF_{A1}, KNF_{A2}, \ldots, KNF_{An}, KNF_{\neg B}\}$

Melyek a rezolúciós elv alapfogalmai?

A rezolúciós elv egy döntési eljárás. Minden új döntési eljárás kialakítása esetén a szemantikus eldöntésprobléma egyik alakjából indulunk ki.

Megadjuk a levezetési szabályokat és levezetésfogalmat definiálunk.

Amennyiben az eljárás megköveteli, a formulákat speciális alakba írjuk át. Ezután megfogalmazunk egy szintaktikus eldöntésproblémát, meghatározva a döntési eljárás megállási feltételét. A kalkulus helyes, ha a szintaktikus eldöntésproblémára adott „igen" válaszból következik a szemantikus eldöntésprobléma kérdésére is az „igen" válasz. A kalkulus teljes, ha minden olyan esetben, amikor a szemantikus eldöntésproblémára „igen" a válasz, akkor a kalkulus biztosan eléri megállási feltételét. A rezolúciós kalkulus esetén a formulahalmaz kielégíthetetlenségének igazolása a „háttér" a szemantikus eldöntésprobléma.

Definiálja a rezolúciós levezetést.

Egy S klózhalmazból a C klóz *rezolúciós levezetése* egy olyan véges $k_1, k_2, \ldots, k_m$ ($m \geq 1$) klózsorozat, ahol minden j = 1, 2, …, m-re

1. vagy k_j ™ S,
2. vagy van olyan $1 \leq s, t < j$, hogy kj a (k_s, k_t) klózpár rezolvense, és klózsorozat utolsó tagja km, éppen a C klóz.

Megállapodásunk szerint a rezolúciós kalkulus eldöntésproblémája az, hogy levezethető-e S-ből az üres klóz. A rezolúciós levezetés célja tehát az üres klóz levezetése S-ből. Azt, hogy S-ből levezethető az üres klóz, úgy is ki lehet fejezni, hogy S-nek van rezolúciós cáfolata.

Lássa be, hogy a rezolúciós kalkulus helyes:

Legyen S tetszőleges klózhalmaz. Ha S-ből levezethető az üres klóz, akkor S kielégíthetetlen.

Bizonyítás:

Tegyük fel, hogy van olyan I interpretáció, ami kielégíti S-et. Egy S-ből való rezolúciós levezetésbeli bármely k_j klózra $S \models_0 k_j$, tehát I kielégíti a rezolúciós levezetés minden klózát is. De az üres klóz kielégíthetetlen, tehát nem lehet eleme a levezetésnek. Így tehát ha S-ből levezethető az üres klóz, akkor S kielégíthetetlen.

22.a Tétel

Milyen rezolúciós stratégiákat (algoritmusokat) ismer? Melyek teljesek ezek közül? A nem teljes stratégiák milyen klózhalmazok esetén teljesek?

Milyen rezolúciós stratégiákat ismer?

Levezetési fa:

Egy rezolúciós levezetés szerkezetét levezetési fa segítségével szemléltethetjük. A levezetési fa csúcsai klózok. Két csúcsból pedig pontosan akkor vezet él egy harmadik, közös csúcsba, ha ott a két klóz rezolvense található.

Lineáris rezolúciós levezetés:

Egy S klózhalmazból való lineáris rezolúciós levezetés egy olyan

$k_1, l_1, k_2, l_2, \ldots, k_{m-1}, l_{m-1}, k_m$ rezolúciós levezetés, amelyen minden j = 2, 3, …, m-re k_j a (k_{j-1}, l_{j-1}) klózpár rezolvense. A k_j klózokat centrális klózoknak, az l_j klózokat mellékklózoknak nevezzük.

Lineáris inputrezolúció:

Egy S klózhalmazból való lineáris inputrezolúciós levezetés egy olyan $k_1, l_1, k_2, l_2, \ldots, k_{m-1}, l_{m-1}, k_m$ lineáris rezolúciós levezetés, amelyben minden j = 1, 2, …, m-1 – re $l_j \in S$, azaz a lineáris input rezolúciós levezetésben a mellékklózok S-nek elemei.

Egységrezolúciós levezetés:

Egy S klózhalmazból való egységrezolúciós levezetés egy olyan $k_1, k_2, \ldots, k_m$ rezolúciós levezetés, ahol minden j = 1, 2, …, m-re ha $k_j \notin S$, akkor k_j két olyan őt a levezetésben megelőző k_s, k_t $(1 \leq s,t < j)$ klóznak a rezolvense, amelyek közül az egyik egységklóz.

Melyek teljesek ezek közül?

- Levezetési fa
- Lineáris rezolúciós levezetés

A nem teljes stratégiák milyen klózhalmazok esetén teljesek?

Lineáris inputrezolúció igaz, hogy nem teljes, de meg lehet adni olyan formulaosztályt, amelyre az lesz. Az olyan klózokat, amelyek legfeljebb egy negált literált tartalmaznak, Horn-klózoknak nevezzük. Horn-formulák pedig azok a formulák, melyek konjunktív normálformája Horn-klózok konjunkciója. A lineáris inputrezolúciós stratégia Horn-formulák esetén teljes.

23. Tétel

Milyen kapcsolat van a C rezolvens klóz és ősei, C_1 ,C_2 között az ítéletlogikában és az 1.-rendű logikában.? Bizonyítsa be az erre vonatkozó tételt az ítéletlogikában. Mit biztosít ez a kapcsolat a rezolúciós elvre, mint kalkulusra nézve?

Ítéletlogikában:

Definíció:

Legyenek C_1 és C_2 pontosan egy komplemens literálpárt tartalmazó klózok. Ha $C_1 = C'_1 \vee L_1$ és $C_2 = C'_2 \vee L_2$, ahol L_1 és L_2 a komplemens literálpár, a $C'_1 \vee C'_2$ klózt a (C_1, C_2) klózpár (vagy a $C_1 \wedge C_2$ formula) rezolvensének nevezzük. Ha $C_1 = L_1$ és $C_2 = L_2$, rezolvensük az üres klóz.

Tétel:

Ha $C_1 = C'_1 \vee L_1$ és $C_2 = C'_2 \vee L_2$, ahol L_1 és L_2 komplemens literálpár, akkor $\{C_1, C_2\} \models_0 C'_1 \vee C'_2$

Bizonyítás:

Be kell látni, hogy minden olyan **I** interpretáció, amely kielégíti a $\{C_1,C_2\}$ klózhalmazt, kielégíti a $C'_1 \vee C'_2$ klózt is. Világos, hogy ha $C_1 = L_1$ és $C_2 = L_2$, akkor nincs a $\{C_1, C_2\}$ klózhalmazt kielégítő interpretáció, tehát igaz az állítás. Egyébként a $\{C_1, C_2\}$ klózhalmazt kielégítő tetszőleges interpretáció:

- vagy olyan, hogy az L_1-hez rendel igaz értéket (jelöljük ezeket I_{L1}-gyel),
- vagy olyan, hogy az L_2-höz rendel igaz értéket (jelöljük ezeket I_{L2}-vel).

Tekintsünk egy $\mathbf{I}_{L1}$ interpretációt. $\mathbf{I}_{L1}$ kielégíti a $\{C_1, C_2\}$ klózhalmazt, tehát $\mathbf{B}_{IL1}(C_1) = i$ és $\mathbf{B}_{IL1}(C_2) = i$, de az $\mathbf{I}_{L1}$ interpretációban $\mathbf{B}_{IL1}(L_2) = h$, ezért $\mathbf{B}_{IL1}(C'_2) = i$, tehát $\mathbf{B}_{IL1}(C'_1 \vee C'_2) = i$. Hasonlóképpen láthatjuk be, hogy az $\mathbf{I}_{L2}$ interpretációkban $\mathbf{B}_{IL2}(C'_1) = i$. Tehát mind $\mathbf{I}_{L1}$, mind $\mathbf{I}_{L2}$ kielégíti a $C'_1 \vee C'_2$ klózt.

Megállapodásunk szerint a rezolúciós kalkulus eldöntésproblémája az, hogy levezethető-e **S**-ből (klózhalmaz) az üres klóz. A rezolúciós levezetés célja tehát az üres klóz levezetése **S**-ből. Azt, hogy **S**-ből levezethető az üres klóz, úgy is ki lehet fejezni, hogy **S**-nek van rezolúciós cáfolata.

- <u>A rezolúciós kalkulus helyessége:</u> Legyen **S** tetszőleges klózhalmaz. Ha **S**-ből levezethető az üres klóz, akkor **S** kielégíthetetlen.
- <u>A rezolúciós kalkulus teljessége</u>: Ha az **S** véges klózhalmaz kielégíthetetlen, akkor **S**-ből levezethető az üres klóz.

1-rendű logikában:

Tétel:

Legyen a C elsőrendű klóz, a C_1 és C_2 elsőrendű klózok elsőrendű rezolvense. Ekkor $\{C_1, C_2\} \models C$

A C_1 és C_2 klózokat szokás szülő klózoknak, az L_1 és L_2 literálokat kirezolvált literáloknak nevezni.

Definíció:

A C_1 és a C_2 szülő klózok **elsőrendű rezolvense** a következő bináris rezolvensek valamelyike:

1. A C_1 és a C_2 klózok bináris rezolvense.
2. A C_1 klóz és a C_2 klóz egy faktorának bináris rezolvense.
3. A C_1 klóz egy faktorának és a C_2 klóznak a bináris rezolvense.
4. A C_1 klóz egy faktorának és a C_2 klóz egy faktorának bináris rezolvense.

24. Tétel

A nullad- és elsőrendű rezolúciós elv alkalmas-e előrekövetkeztetésre, vagy csak visszakövetkeztetés végezhető vele? Mit értünk a fenti következtetésfajták alatt? Milyen következtetésfajták végezhetők el az ismert kalkulusokkal?

HIÁNYOS!!!!Milyen következtetésfajták végezhetők el az ismert kalkulusokkal??? Valamint a nullad-és elsőrendű rezolúciós elv alkalmas-e az előrekövetkeztetésre, vagy csak a visszakövetkeztetés végezhető el vele?

III. Válaszok:

A gondolkodás egyik közismert formája a következtetés. Bizonyos adott információkból - előzményekből, premisszákból – kiindulva következtetéssel olyan új információhoz – következményhez, konklúzióhoz – juthatunk, amely az előzményekben rejtetten szerepelt. A logika legfontosabb feladatainak egyike annak tisztázása, hogy melyek a helyes következtetés ismérvei.

Következtetési módok

A következményfogalom alapján el lehet dönteni, hogy egy formulahalmaz és egy formula párosa helyes következtetésforma-e. Megmutatjuk, hogy milyen – szemantikai eszközöket használó - következtetési módok ismertek a döntés meghozatalára.

Visszakövetkeztetés: Azt jelenti, hogy az $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ formulahalmaz és a B formula együttes ismerete alapján döntünk. Szemantikai alapon működő döntést hozhatunk közös igazságtáblával. Alkalmas az olyan módszer is, ahol az $A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_n \wedge \neg B$ formuláról vagy az $\{A_1, A_2, ..., A_n, \neg B\}$ formulahalmazról kell eldönteni, hogy kielégíthetetlen-e. A módszer közös igazságtáblával feldolgozott példákon jól megfigyelhető.

Előrekövetkeztetés: Ilyenkor az $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ formulahalmaz lehetséges következményeit keressük. Ha egy B formuláról el kell dönteni, hogy következménye-e ennek a formulahalmaznak, akkor azt ellenőrizzük, hogy a lehetséges következmények között van-e. A szemantikai alapon működő döntési módszerünk alapja a legszűkebb következmény fogalma lesz.

Definíció:

Az $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ formulahalmaz formuláiban előforduló ítéletváltozók legyenek $X_1, X_2, ..., X_m$. $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ legszűkebb következménye – rögzített bázis mellett – az az $\{i, h\}^m \rightarrow \{i, h\}$ logikai leképezés, amely pontosan azokhoz az interpretációkhoz rendel igaz értéket, amelyek kielégítik az $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ formulahalmazt.

Minden kalkulus a tételbizonyítási feladatot oldja meg. A rezolúciós kalkulus következtetési módja a visszakövetkeztetés, hiszen a tételformula negáltja is szerepet játszik a klózhalmaz kialakításában. Legyen $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ a feltételformulák halmaza és B a tételformula.

Visszakövetkeztetés:
A feltételhalmazhoz hozzávesszük a tételformula negáltját és a kapott $\{A_1, A_2, ..., A_n\} \cup \{\neg B\}$ formulahalmazból előállítjuk az S klózhalmazt. Ha S-nek van rezolúciós cáfolata, akkor $\{A_1, A_2, ..., A_n\} \models_0 B$.

Előrekövetkeztetés:
Mivel egy S klózhalmazból való rezolúcós levezetés minden klóza szemantikus következménye S-nek, ezért ha S a feltételformulák halmazából alkotott klózhalmaz, akkor az S-ből való rezolúciós levezetés minden klóza az $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ feltételhalmaz szemantikus következménye.

25. Tétel

Hogyan kell előkészíteni egy 0-ad illetve egy 1. rendű tételbizonyítási feladatot a rezolúciós elvvel való megoldásra? Mi a rezolvens? Mikor létezik rezolvens? Lássa be, hogy az üres klóz kielégíthetetlen.

<u>Hogyan kell elôkészíteni egy 0-ad illetve egy 1. rendű tételbizonyítási feladatot a rezolúciós elvvel való megoldásra?</u>

$\Sigma \models \varphi$ ez teljesül-e ez a kérdés.

<u>Nulladrendben a rezolúciós algoritmus:</u>

1.) $\Gamma=\sum\bigcup\{\neg\varphi\}$-t klóz alakra hozzuk
2.) $\vdash_R$ -ben megpróbáljuk levezetni az üres klózt.

($\vdash_R$ rezolúciós levezetést jelöli)

Rezolúciós-szabály: $\{ A\vee B, \neg A\vee C \} \equiv B\vee C$
Rezolúciós levezetés: c1,…,cn klózsorozat: $\forall$ici feltételi klóz vagy korábbiakból jön R-szabálya
Teljességi tétel: Γ ellentmondásos a.cs.a $\Gamma\vdash_R \square$

Pl.: $\{a\Rightarrow b, b\Rightarrow c\} \models ?\ a\Rightarrow c$

A $\{a\Rightarrow b, b\Rightarrow c\} \models a\Rightarrow c$ a.cs.a $\{a\Rightarrow b, b\Rightarrow c, \neg(a\Rightarrow c)\}$ ellentmondásos

$\{a\Rightarrow b, b\Rightarrow c, \neg(a\Rightarrow c)\}$-t klóz alakra kell hozni. $\rightarrow$ $\{\neg a\vee b, \neg b\vee c, a, \neg c\}$ már klóz alak.

Ekkor felírhatjuk a klózokat:

1.) $\neg a\vee b$
2.) $\neg b\vee c$
3.) a
4.) $\neg c$
5.) b R(1,3)
6.) c R(2,5)
7.) $\square$ R(6,4)

<u>Elsőrendben a rezolúciós algoritmus:</u>

1.) $\Sigma\vee\{\neg\varphi\}$ –t skolemizáljuk $\forall x_1\ \forall x_2 \dots \forall x_n\ (C_1\wedge C_2\wedge\dots\wedge C_k)$
2.) kigyűjtjük a klózokat (csak negáció[$\neg$] illetve diszjunkció[$\vee$] lehet benne)
3.)a változókba beírjuk a Herband-univerzum összes elemét az összes módon

“egyszerre” “lépésenként”

alaprezolúció 1. rendű rezolúció

4.)levezetjük az üres klózt, ha lehet

Pl.: 1. 2. 3. ? 4.

$\Sigma=\{ \forall x\exists y R(x,y),\ \forall x\forall y(R(x,y)\supset R(y,x)),\ \forall x\forall y\forall z((R(x,y)\wedge R(y,z))\supset R(x,z)) \} \models \forall x R(x,x)$

<u>Skolem alak:</u>

1. $\equiv \forall x R(x,f(x))$
2. $\equiv \forall x\forall y(\neg R(x,y)\vee R(y,x))$
3. $\equiv \forall x\forall y\forall z(\neg R(x,y)\vee \neg R(y,z)\vee R(x,z))$
4. $\neg\varphi \equiv \neg\forall x\, \neg R(x,x) \equiv \exists x\, \neg R(x,x) \equiv \neg R(c,c)$

<u>Klózok:</u>

a. $R(x,f(x))$
b. $\neg R(x,y)\vee R(y,x)$
c. $\neg R(x,y)\vee \neg R(y,z)\vee R(x,z)$
d. $\neg R(c,c)$

Ekkor az elsőrendű rezolúciós levezetés:

i.) (x helyébe c-t írok) $R(c,f(c))$
ii.) (x helyébe c-t és y helyébe f(c)-t írok) $\neg R(c,f(c))\vee R(f(c),c)$
iii.)(x, z helyébe c-t írok y helyébe f(c)-t) $\neg R(c,f(c))\vee \neg R(f(c),c)\vee R(c,c)$
iv.) $\neg R(c,c)$

Elkezdhetjük a rezolúciós levezetést:

I.	i.)	$R(c,f(c))$
II.	ii.)	$\neg R(c,f(c))\vee R(f(c),c)$
III.	Rez(I.,II.):	$R(f(c),c)$
IV.	iii.)	$\neg R(c,f(c))\vee \neg R(f(c),c)\vee R(c,c)$
V.	Rez(I.,IV.):	$\neg R(f(c),c)\vee R(c,c)$
VI.	Rez(III.,V.):	$R(c,c)$
VII.	iv.)	$\neg R(c,c)$
VIII.	Rez(VI.,VII.):	$\square$

Mi a rezolvens?
Rezolvens fogalma: Rez(C_1, C_2) a C klóz; { C_1, C_2} $\models_0$ C

Mikor létezik rezolvens?
Akkor létezik, ha van két olyan formula, hogy az A formula negáltja szerepel a B formulában.

Lássa be, hogy az üres klóz kielégíthetetlen.
Ha van egy n változós műveletünk, akkor viszgáljuk azokat a sorokat, ahol hamis igazságértéket rendel az interpretációhoz. Ennek felírva a KKNF-jét minden sorhoz rendeltünk egy elemi diszjunkciót. A leképezést leíró KKNF-ben ezért az összes lehetséges teljes elemi diszjunkció szerepel. McCulskyval egyszerűsítünk.
Az n-1-edik egyszeűsítés után megmazadt két elemi diszjunkció az X_n és a $\neg X_n$.
Az így kapott $X_n \wedge \neg X_n$ KNF kielégíthetetlen formula. Az n-edik lépés után nem marad literál az elemi diszjunkcióban.
Azt mondjuk, hogy az eredmény az üres elemi diszjunkció vagy másnéven az üresklóz.
Innen adódik, hogy a6 üres klóz kielégíthetetlen.

26. Tétel

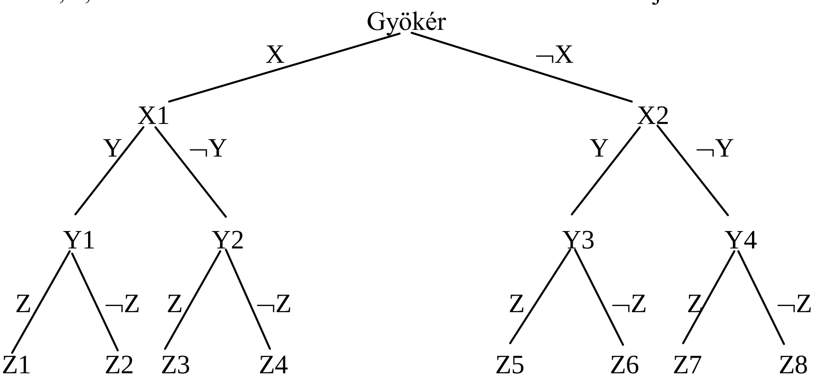
Definiálja a szemantikus fa és a levezetési fa fogalmat az ítéletlogikában. Fejtse ki mi a kapcsolatuk? Bizonyítsa be a rezolúciós elv teljességét ezek felhasználásával. Ismer-e a teljességre másféle bizonyítást is?

Definiálja a szemantikus fa és a levezetési fa fogalmat az ítéletlogikában.

Szemantikus fa:

Egy formula különböző interpretációit a szemantikus fa segítségével szemléltethetjük. nevezzük a formula ítéletváltozóinak egy rögzített sorrendjét bázisnak. A szemantikus fa egy olyan bináris fa, amelynek i-edik ($i \geq 1$) szintszámú csúcsa a bázis i-edik ítéletváltozójához tartozik, és egy-egy szint minden csúcsából pontosan két él indul, az egyik a szinthez rendelt ítéletváltozóval, a másik ennek negáltjával címkézve. Az X ítéletváltozó esetén jelentse az X címke azt, hogy az interpretáció i(gaz), a ¬X címke pedig azt, hogy h(amis) értéket rendel az X-hez. Egy n-változós formula szemantikus fájában minden ág n élt tartalmaz, melyek a formula egy-egy interpretációját szemléltetik. A fának 2n különböző ága lesz, melyek a formula összes lehetséges interpretációját bemutatják.

Példa: Az X,Y,Z ítéletváltozókat tartalmazó formula szemantikus fája a következő:



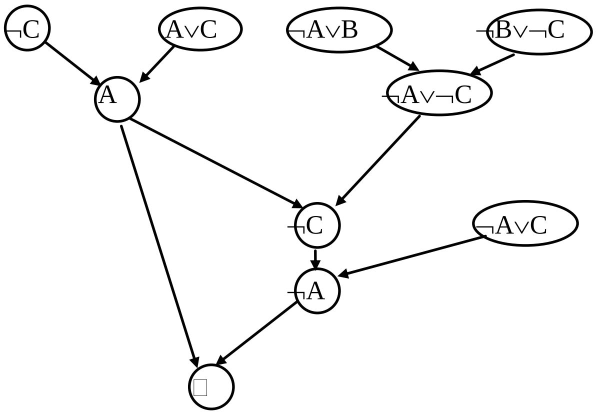
(Levelek)

Levezetési fa:

Egy rezolúciós levezetés szerkezetét mutatja. A levezetési fa csúcsai klózok. Két csúcsból pedig pontosan akkor vezet él egy harmadik, közös csúcsba, ha ott a két klóz rezolvense található

S={¬A∨B, ¬A∨C, A∨C, ¬B∨¬C, ¬C}

1. ¬C ∈S
2. A∨C ∈S
3. A res(1,2)
4. ¬A∨B ∈S
5. ¬B∨¬C ∈S
6. ¬A∨¬C res(4,5)
7. ¬C res(3,6)
8. ¬A∨C ∈S
9. ¬A res(3,6)
10. □ res(3,6)



Fejtse ki mi a kapcsolatuk?

Az, hogy egy 1.rendű formula S logikailag igaz(|=B) elképzelhető úgy is, hogy minden lehetséges struktúrában interpretáljuk S-t és kiszámítjuk az értékét. Ha ez az érték i minden srtuktúrában, akkir B logikailag igaz. Ez a B-t interpretáló lehetséges struktúrák száma miatt nem végrehajtható. Ehhez döntési algoritmust (vagy levezető rendszert) kell találni.

Bizonyítsa be a rezolúciós elv teljességét ezek felhasználásával.

Tétel: Ha az S véges klózhalmaz kielégíthetetlen, akkor S-ből levezethető az üresklóz.

Biz.: A tételt úgy bizonyítjuk, hogy a klózhalmaz kielégíthetetlenségét feltételezve előállítjuk az üres klóz levezetését S-ből. Mint láttuk, ha S kielégíthetetlen, akkor S szemantikus fája zárt, és egy zárt szemantikus fának van legalább egy levezető csúcsa. Megmutatjuk, hogy a zárt szemantikus fa tulajdonságainak felhasználásával, hogy a fát lezáró S klózhalmaznak mindig létezik rezolúciós cáfolata. Megadjuk egy algoritmust az üres klózt eredményező rezolúciós levezetés előállítására:

1.) j:=0, S_j:=S, LIST:=ø

2.) Állítsuk elő S_j szemantikus fáját.

n_j :=a szemantikus fa szintjeinek a száma.

Ha n_j =0, akkor levezettük az üres klózt, a levezetés LIST-ből kiolvasható.

3.) Egyébként válasszuk ki a fa egy levezető csúcsát.
A levezető csúcsot tartalmazó két ágra illesztett klózok legyenek k'_j és k''_j, rezolvensük pedig kj.
Tegyük a LIST végére a k'j,k''j,kj klózokat.
4.)$S_{j+1}:=S_j \cup \{k_j\}$,j:=j+1. Folytassuk a 2. lépéssel.

Az algoritmus véges sok lépésben végetér, mert minden j-re az élek száma S_{j+1} szemantikus fájában kevesebb, mint S_j szemantikus fájában, ugyanis két klóz rezolvensének hamissá válásához a két klózban szereplő ítéletváltozók közül csak a komplemens párban szereplő változóktól eltérők értékét kell rögzíteni. Ezért a két csúcshoz vezető ágon a rezolvenshez tartozó cáfoló csúcsba a rezolvens a rezolvens utolsó literáljának illesztésére használt él mutat. Ez a csúcs vagy maga a levezető csúcs, vagy egy annál magasabban lévő csúcs. vagyis, ha S két klózának rezolvensét hozzávesszük S-hez, akkor $S \cup \{k\}$ szemantikus fájában kevesebb lesz az élek száma, mint S szemantikus fájában volt. Ez biztosítja, hogy a fenti algoritmus véges számú lépésben befejeződik.

Ismer-e a teljességre másféle bizonyítást is?

Az előző bizonyításban leírt algoritmus egy klózhalmaz zárt szemantikus fájából előállít egy rezolúciós levezetést. az algoritmus lépéseit követve egy levezetési fát is könnyen kaphatunk az előző módon: Tükrözzük a szemantikus fát a gyökerén átmenő vízszintes egyenesre. Írjuk a cáfoló csúcsokba az ágakat lezáró klózokat. Írjuk a rezolvens klózt a rezolvens cáfoló csúcsába.
Ezzel a módszerrel általában levezetési fát kapunk.

27. Tétel

Miért nevezhetjük a bizonyításelmélet következményfogalmát szintaktikus következményfogalomnak? Mi a bizonyításelmélet eldöntésproblémája? Definiálja a bizonyíthatóan ekvivalens fogalmat.

Az itéletlogikában a szemantikus eldöntésprobléma megoldásakor a vizsgált itéletlogikai formuláról el kell tudni dönteni azt, hogy tautológia-e, esetleg azt, hogy kielégithetetlen-e. A döntéshez egy *n*-változós formula esetén a formula összes (2^n különböző) interpretációjában szükséges lehet a formula vizsgálata. Ez mind az itéletlogika, mind az elsőrendű logika vonatkozásában kezelhetetlen feladat. Ezért olyan módszereket kerestek, amelyek a formula szintaktikai jellegzetességeit használják ki, és egy olyan szintaktikus eldöntésproblémára adnak döntési eljárást, amely megoldása az eredeti szemantikus eldöntésprobléma megoldását vonja maga után.
Egy ilyen döntési eljárás során „adatokból" (egy formulából vagy egy formulahalmazból) kiindulva az eljárás lépései során formulák egy sorozatát állitjuk elő. Ezt a formulasorozatot *levezetés*nek nevezzük. Az eljáráshoz *levezetési szabályok* tartoznak, amelyek formulákból új formulát alkotva lehetővé teszik a levezetés előállitását. Minden döntési eljárás esetén adott egy ún. *megállási feltétel*. Ez általában egy meghatározott formula megjelenése a levezetésben vagy a levezetés speciális szerkezetűvé válása. Egy konkrét döntési eljárás esetén az a kérdés, hogy „adott bemenet mellett elérhető-e a megállási feltétel" úgy is tekinthető, mint a döntési eljáráshoz tartozó (szintaktikus) eldöntésprobléma.
Ezen döntési eljárásokat *kalkulusok*nak szokás nevezni.
Egy kalkulus helyes, ha a szintaktikus eldöntésproblémára adott igen válaszból következik, hogy a szemantikus eldöntésproblémára is igen a válasz.
Egy kalkulus teljes, ha minden olyan esetben, amikor a szemantikus eldöntésproblémára igen a válasz, a döntési eljárás a szintaktikus eldöntésproblémára adott igen válasszal eléri a megállási feltételt.
Ha a logika alapproblémájának a *tételbizonyitás* megoldását tekintjük, akkor a logika tárgyalásának tekinthető bármely kalkulus, amely mögött következményfogalom és/vagy eldöntésprobléma áll. Ezért mondhatjuk azt, hogy a logika=nyelv+kalkulus. A logika ilyen felépitését (szintaktikus következményfogalom, szintaktikus eldöntésprobléma) szokták a *logika értékmentes tárgyalásá*nak is nevezni, mivel logikai igazságértékeket, igazságtáblát nem használ.

A bizonyitáselmélet eldöntésproblémája
<u>Az eldöntésprobléma tétele</u>:
Legyenek $A_1,A_2,\dots,A_n,B$ (>=1) tetszőleges itéletlogikai formulák.
$\{A_1,A_2,\dots,A_{n-1},A_n\}|\!-_0 B$ pontosan akkor, ha
$|\!-_0 A_1\text{->}A_2\text{->}\dots\text{->}A_{n-1}\text{->}A_n\text{->}B$

<u>Bizonyitás</u>:
$\{A_1,A_2,\dots,A_{n-1},A_n\}|\!-_0 B$-re n-szer alkalmazva a dedukciós tételt egyik irányban, és $|\!-_0 A_1\text{->}A_2\text{->}\dots\text{->}A_{n-1}\text{->}A_n\text{->}B$-re n-szer alkalmazva a dedukciós tételt visszafelé, a tétel mindkét irányú állítása könnyen adódik.

A tétel azt mondja ki, hogy a következő két állítás ekvivalens:
1. Az $\{A_1,A_2,\dots,A_n\}$ formulahalmazból a B formula levezethető.
2. Az $A_1\text{->}A_2\text{->}\dots\text{->}A_n\text{->}B$ formula bizonyitható.

Tehát annak eldöntéséhez, hogy egy B formula az adott feltételek mellett tétel-e, el kell tudni dönteni, hogy a megfelelő itéletlogikai formula bizonyitható-e. Ez az itéletkalkulus eldöntésproblémája. Az eldöntésprobléma megoldása itt is az automatikus tételbizonyitást jelenti. A bizonyitáselméleti levezetés célja (megállási feltétele) az, hogy a levezetés során előálljon a levezetendő formula. A levezetés definiciója miatt az itéletkalkulusban eldöntésproblémának nem csak azt tekintjük, hogy bizonyitható-e egy adott formula, hanem azt is, hogy levezethető-e feltételformulák valamely halmazából a formula.

<u>Definició</u>:
Az A és a B formula bizonyithatóan ekvivalensek, ha $\{A\}\ |\!-_0 B$ és $\{B\}|\!-_0 A$.

Ez a szemantikus tárgyalásnál definiált tautologikus ekvivalenciafogalom bizonyitáselméleti megfelelője. A dedukciós tételből könnyen adódik, hogy ez pontosan akkor áll fenn, ha $|\!-_0 A\text{->}B$ és $|\!-_0 B\text{->}A$.

28. Tétel

Ismertesse a nulladrendű bizonyításelmélet axiómáit és levezetési szabályát, valamint a levezetési szabályt megalapozó tételt. Lássa be, hogy két levezetés konkatenációja is levezetés. Lát-e kapcsolatot e bizonyításelméleti tétel és azon szemantikai alapon bizonyított tétel között, hogy "Ha mind A mind B tautologikus következménye egy F formulahalmaznak és C tautologikus következménye {A,B}-nek, akkor C is tautologikus következménye F-nek"

Ismertesse a nulladrendű bizonyításelmélet axiómáit és levezetési szabályát, valamint a levezetési szabályt megalapozó tételt.
(A nulladrendű bizonyításelmélet nem más, mint az ítéletkalkulusban vett bizonyításelmélet.)
A nulladrendű bizonyításelmélet axiómái:

$A \Rightarrow B \Rightarrow A$
$(A \Rightarrow B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$
$(\neg A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow A$

A nulladrendben a levezetési szabály a Modus Ponens:

Legyenek A, B tetszőleges ítéletlogikai formulák. Az alábbi következtetési forma helyes ($\{A \Rightarrow B, A\}, B$).
Ezt nevezik modus ponensnek vagy más néven leválasztási szabálynak.
A teljességi-tétel alapján mondhatjuk, hogyha $\Sigma \models \varphi$ a.cs.a $\Sigma \vdash \varphi$.
Így $\Sigma \vdash \varphi$ (vagyis szigma formulahalmazból levezethető fi), ha van $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, hogy $\varphi_n = \varphi$ és

$$\forall\ 1 \le i \le n:\quad \varphi_i \begin{cases} \text{axióma vagy} \\ \in \Sigma \text{ vagy} \\ \varphi_k,\ \varphi_k \Rightarrow \varphi_i \text{ szerepel } \varphi_i \text{ előtt} \end{cases}$$

Lássa be, hogy két levezetés konkatenációja is levezetés.
Def.: A $D_1, D_2, \ldots, D_{m1}$ és a $D'_1, D'_2, \ldots, D'_{m2}$ formulasorozatok konkatenációján a $D_1, D_2, \ldots, D_{m1}, D'_1, D'_2, \ldots, D'_{m2}$ formulasorozatot értjük.

Tétel: Ha a d_1 és d_2 rendre Γ_1 és a Γ_2 hipotézishalmazokból való levezetés, akkor a két levezetés konkatenációja egy -a $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ hipotézishalmazból való- levezetés.

Biz.:
A d_1 és d_2 levezetések konkatenációjával kapott formulasorozat tetszőleges D eleme

1. vagy hipotézisként került valamelyik levezetébe, tehát $D \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2$,
2. vagy axiómasémából állt elő a két levezetés valamelyikében, akkor a konkatenációban is axiómaformula,
3. vagy a modus ponenssel állt elő két őt megelőző formulából, a két levezetés valamelyikében, akkor (mivel a formulák sorendjét a levezetésekben nem áltoztattuk meg) a konkatenált formulasorozatban ugyanez a szerepe.

Tehát a konkatenáció egy levezetés, ahol a hipotézishalmaz $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$.
Magyarázat: *(hipotézishalmaz)* =feltételhalmaz

Lát-e kapcsolatot e bizonyításelméleti tétel és azon szemantikai alapon bizonyított tétel között, hogy "Ha mind A mind B tautologikus következménye egy F formulahalmaznak és C tautologikus következménye {A,B}-nek, akkor C is tautologikus következménye F-nek"

Tehát a két tétel:
1. Ha a d_1 és d_2 rendre Γ_1 és a Γ_2 hipotézishalmazokból való levezetés, akkor a két levezetés konkatenációja egy -a $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ hipotézishalmazból való- levezetés.
2. Ha mind A mind B tautologikus következménye egy F formulahalmaznak és C tautologikus következménye {A,B}-nek, akkor C is tautologikus következménye F-nek.

HIÁNYOS!!!
Vajon mi lehet a kapcsolat???

29. Tétel

Bizonyítsa be, hogy $\{F_1,F_2,...,F_n\}\models_0 A$ akkor és csak akkor, ha $\{F_1,F_2,...,F_{n-1}\}\models_0 F_n \rightarrow A$. Milyen fontos logikai eredményt lehet a tétel felhasználásával belátni?

Bizonyísa be, hogy $\{F_1,F_2,\ldots,F_n\}$ |---$_0$ A akkor, és csak akkor, ha $\{F_1,F_2,\ldots,F_{n-1}\}$ |---$_0$ F_n!

=>

$\{F_1,F_2,\ldots,F_n\}$ |---$_0$ A azt jelenti, hogy minden olyan δ igazság értékelésre, melyre F_j^{δ} =i (j=1,2,…,n-re) az A^{δ} =i. Ezen esetekben $(F_n \rightarrow A)^{\delta}$ =i.
Amikor F_n^{δ} =h, de δ |---$_0$ $\{F_1,F_2,\ldots,F_{n-1}\}$, az $(F_n \rightarrow A)^{\delta}$ =i szintén fennáll.
<=
$\{F_1,F_2,\ldots,F_{n-1}\}$ |---$_0$ $F_n \rightarrow A$ azt jelenti, hogy minden olyan δ igazság értékelésre, melyre F_j^{δ}=i (j=1,2,…,n-1-re) az $(F_n \rightarrow A)^{\delta}$ =i fennáll, függetlenül attól F_n^{δ} =i , vagy F_n^{δ} =h. Annak igazolásásra, hogy $\{F_1,F_2,\ldots,F_n\}$ |---$_0$ A fennáll-e a fenti δ igazságértékelések közül csak azokat kell vizsálni, melyekre F_n^{δ}=i A feltétel miatt $(F_n \rightarrow A)^{\delta}$ =i fennáll, ez viszont csak F^{δ}=i teljesülése esetén lehetséges.
Ezzel az állítást bizonyítottuk.

Milyen fontos logikai eredményt lehet a tétel felhasználásával belátni?

Tudjuk, hogy egy B tétel bizonyítottá válik, ha belátjuk, hogy F|---$_0$B fennáll. Azonban célszerű ítéletkalkulusbeli eszközökkel, vagyis formulával leírni. Ehhez nyújt segítséget a fenti tétel.

30. Tétel

Melyek a kielégíthető, kielégíthetetlen, tautológia, tautológikusan következik, tautológikusan ekvivalens fogalmak bizonyításelméleti megfelelői. Definiálja a bizonyításelméleti levezetés fogalmát. Lássa be, hogy a bizonyításelmélet helyes. Mikor teljes egy módszer?

Melyek a kielégíthető, kielégíthetetlen, tautológia, tautológikusan következik, tautológikusan ekvivalens fogalmak bizonyításelméleti megfelelői.

Ítéletlogika:

1.) Kielégíthető: Az L_0 nyelv egy A formulája kielégíthető, ha van L_0-nak olyan I interpretációja, hogy $I|=_0A$. Egy ilyen interpretációt A modelljének nevezünk.

2.) Kielégíthetetlen: Ha A-nak nincs ilyen modellje, az A formulát kielégíthetetlennek mondjuk.

3.) Tautológia: Az a formula ítéletlogikai törvény vagy másképp tautológia, ha L_0 minden interpretációjára $I|=_0A$. Jel.: $|=_0A$

4.) Tautológikusan következik: Legyen Γ az L_0 nyelv fromuláinak tetszőleges halmaza és B egy tetszőleges formula. Azt mondjuk, hogy a B formula tautológikus következménye Γ formulahalmaznak, ha Γ minden modellje modellje a B formulának is. A Γ beli formulákat feltételformuláknak (premisszáknak), a B formulát következményformulának (konklúziónak) nevezzük. Arra pedig, hogy a Γ formulahalmaznak tautológikus következménye B, a $\Gamma|=_0B$ jelöléssel hivatkozunk.

5.) Tautológikusan ekvivalens: Azt mondjuk, hogy az A és B ítéletlogikai formulák tautológikusan ekvivalaensek, és egy a tényt úgy jelüljük, hogy $A\sim_0B$, ha minden I interpretációban $B_I(A)=B_I(B)$.

Bizonyításelmélet:

(Ítéletkalkulus, másnéven az ítéletlogika bizonyításelméleti tárgyalása.)

1.)Ellentmondástalan: ld. lentebb.

2.)Ellentmondásos: Ha egy $\{A_1,A_2,...\}$ formula ellentmondásos, akkor kielégíthetetlen. Egy formula pontosan akkor ellentmondásos, ha van olyan A formula, hogy $\{A_1,A_2,...\}$-ből A is és $\neg A$ is levezethető. Egyébként $\{A_1,A_2,...\}$ ellentmondástalan.

3.)Bizonyítható: Egy B formula bizonyítható az ítéletkalkulusba, ha létezik hipotézismentes levezetése (azaz levezethető az üres feltételformula-halmazból). ebben az esetben a $|-_0B$ jelölést alkalmazzuk.

4.) Levezethető (szekvencia): Azt mondjuk, hogy a B formulahalmaz $\{A_1,A_2,...\}$ formulahalmazból az ítéletkalkulusban levezethető, ha B-nek van az $\{A_1,A_2,...\}$ formulahalmazból levezetése. Jelölése: $\{A_1,A_2,...\}|-_0B$, amit röviden szekvenciának fogunk nevezni.

5.)Bizonyíthatóan ekvivalensek: Azt mondjuk, hogy az A és B formula bizonyíthatóan ekvivalensek, ha $\{A\}|-_0B$ és $\{B\}|-_0A$.

Definiálja a bizonyításelméleti levezetés fogalmát.

Def.: Legyen $\{A_1,A_2,...\}$formulák tetszőleges, esetleg üres halmaza és B egy formula. Az $\{A_1,A_2,...\}$ formulahalmazból a B formula ítéletkalkulusbeli levezetése egy olyan $D_1,D_2,...,D_m$ ($m\geq1$) formulasorozat, ahol minden j=1,2,...,m-re D_j

1.) vagy eleme az $\{A_1,A_2,...\}$ formulahalmaznak, az ún. feltételformula avgy hipotézis,
2.) vagy valamelyik axiómasémából formulahelyettesítéssel állt elő, azaz axiómaformula,
3.) vagy van olyan $1 \leq s,t < j$, hogy a D_s és D_t formulákból a levezetési szabállyal állt elő,

és a formulasorozat utolsó tagja, D_m, éppen a B formula.

Lássa be, hogy a bizonyításelmélet helyes.

Tétel: Legyenek $A_1,A_2,...,B$ ítéletlogikai fomulák. Ha $\{A_1,A_2,...\}|-_0B$, akkor $\{A_1,A_2,...\}|=_0B$.

Biz.: Jelölje Γ az $\{A_1,A_2,...\}$ formulahalmazt. A tétel feltétele miatt adott a $D_1,D_2,...,D_m=B$ levezetés. Indukcióval megmutatjuk, hogy a levezetés minden D_k ($1\leq k\leq m$) formulája tautológikus következménye a hipotézisek halmazának, azaz $\Gamma|=_0D_k$.

1.) Tetszőleges axiómaformula, illetve Γ tetszőleges eleme nyilvánvalóan szemantikus következménye Γ-nak és D_1 (a levezetés első formulája) xsak axiómaformula vagy Γ-beli hipotézis lehet.
2.) Tegyük most fel, hogy minden ($n\leq k$)-ra igazoltuk már, hogy $\Gamma|=_0D_n$.
3.) Ha most D_{k+1} axiómaformula vagy hipotézis, akkor azelőzők szerint $\Gamma|=_0D_{k+1}$. Ha D_{k+1} modus ponenssel állt elő D_s-ből és $D_t=D_s\Rightarrow D_{k+1}$-ből, akkor $s,t\leq k$ miatt az indukciós feltételből $\Gamma|=_0D_s$ és $\Gamma|=_0D_s\Rightarrow D_{k+1}$ adódik. A modus ponensre vonatkozó szemantikus tétel (4.3.6. tétel TK 71.oldal) miatt $\{D_s,D_t\}|=_0D_{k+1}$, a 4.4.3. tétel miatt (TK 79. oldal) pedig $\Gamma|=_0D_{k+1}$

Ezzel a tétel bizonyítást nyert.

Mikor teljes egy módszer?

$Tétel_1$: (Az ítéletkalkulus gyönge teljessége): Legyen $\{A_1,A_2,...,A_n\}$ véges formulahalmaz és B tetszőleges formula. ha $\{A_1,A_2,...,A_n\}|=_0B$, akkor $\{A_1,A_2,...A_n\}|-_0B$.

$Tétel_2$: (Az ítéletkalkulus teljessége): Legyen $\{A_1,A_2,...\}$ tetszőlege, nem feltétlenül véges formulahalmaz és B teszőleges formula. Ha $\{A_1,A_2,...\}|=_0B$, akkor $\{A_1,A_2,...\}|=_0B$.

31. Tétel

Fogalmazza meg a bizonyításelmélet (ítéletlogika) helyességét és teljességét kimondó tételt. Lássa be a gyenge teljességet. Mi a Gődel teljesség bizonyításának váza?

31.a Tétel

Fogalmazza meg a bizonyításelmélet helyességét és teljességét kimondó tételt. Mondja ki a gyenge teljességi tételt. Lássa be. Mit fed a Gődel teljesség?

Két definícióval kezdeném:

◊ Azt mondjuk, hogy egy kalkulus helyes, ha a szintaktikus eldöntésproblémára adott igen válaszból következik, hogy a szemantikus eldöntésproblémára is igen a válasz.

mj.: Egy levezetési szabály ítéletlogikai formulákból új ítéletlogikai formulát állít elő. Azt mondjuk, hogy egy levezetési szabály helyes, ha a levezetett formula szemantikus következménye azoknak a formuláknak amelyekből levezettük.

◊ Egy kalkulus teljes, ha minden olyan esetben, amikor a szemantikus eldöntésproblémára igen a válasz, a döntési eljárás a szintaktikus eldöntésproblémára adott igen válasz eléri a megállási feltételt.

Tételek:

❖ Az ítéletkalkulus helyessége: Legyenek A_1 , A_2, … B ítéletlogikai formulák.
Ha { A_1 , A_2, …} $\vdash_0$ B , akkor { A_1 , A_2, …} $\models_0$ B.

❖ Az ítéletkalkulus teljessége: Legyen { A_1 , A_2, …} tetszőleges, nem feltétlenül véges formulahalmaz és B tetszőleges formula. Ha { A_1 , A_2, …} $\models_0$ B, akkor { A_1 , A_2, …} $\vdash_0$ B.

❖ Az ítéletkalkulus gyenge teljessége: Legyen { A_1 , A_2, … ,A_n } véges formulahalmaz, és B tetszőleges formula. Ha { A_1 , A_2, …, A_n } $\models_0$ B, akkor { A_1 , A_2, …, A_n } $\vdash_0$ B.

Bizonyítások:

Ez utóbbi bizonyítása a következő: A szemantikus, és a szintaktikus dedukciós tétel miatt elegendő azt belátni, hogy ha $\models_0$ $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset B$, akkor $\vdash_0 A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset B$. Feltételeink szerint az $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset B$ formula tatulógia, tehát (Legyen A ítéletlogikai formula. Ha A tautológia, akkor A bizonyítható, azaz, ha $\models_0$ akkor $\vdash_0$ A –tétel miatt) bizonyítható.

Az ítéletkalkulus teljességét a Gödel-féle gondolatmenet ismertetésével bizonyítanám: Ha { A_1 , A_2, …} $\models_0$ B, akkor ─ ha A_1 , A_2, … ,A_n (n => 0) tetszőleges ítéletlogikai formulák. { A_1 , A_2, …, A_n } $\models_0$ B pontosan akkor, ha az { A_1 , A_2, …, A_n , ¬B} formulahalmaz kielégíthetetlen ─ szerint { A_1 , A_2, …, A_n , ¬B} kielégíthetetlen. A kielégíthetetlen formulahalmazok ellentmondásosak is ─ egy formulahalmaz pontosan akkor kielégíthetetlen, ha nincs benne inkonzisztens ─ tehát { A_1 , A_2, …, A_n , ¬B} ellentmondásos.

{ A_1 , A_2, …, A_n , ¬B} pontosan akkor ellentmondásos, ha { A_1 , A_2, …, A_n } $\vdash_0$ B, és { A_1 , A_2, …, A_n , B} pontosan akkor ellentmondásos, ha { A_1 , A_2, …, A_n } $\vdash_0$ A } ah ygoh ,kizektevök za lőbimA .B¬$_1$, A_2, …, A_n , ¬B} ellentmondásos, akkor { A_1 , A_2, …, A_n } $\vdash_0$ B.

Azt kaptuk tehát, hogy a szintaktikus, és a szemantikus következményfogalom azonos egymással, azaz a (szemantikusan) helyes következtetések formálisan bizonyíthatók, valamint hogy minden szintaktikus következmény egyben szemantikus következmény is. Az ítéletkalkulus teljessége azt jelenti , hogy az ítéletlogikát fel lehet építeni szintaktikai alapokon, és a felépítés ekvivalens a szemantikai alapú felépítéssel. Szokásos ezt úgy is fogalmazni, hogy az ítéletlogika minden tautológiája bizonyítható.

Már csak az ítéletkalkulus helyességének a bizonyítása kell: Jelölje Γ az { A_1 , A_2, …} formulahalmazt. A tétel feltételei miatt adott a D_1, D_2, …, D_m =B levezetés. Indukcióval megmutatjuk, hogy minden D_k (1<= k <=m) formulája tautologikus következménye a hipotézisek halmazának, azaz $\Gamma \models_0 D_k$.

1. Tetszőleges axiómaformula, ill. Γ tetszőleges eleme nyilvánvalóan szemantikus következménye Γ -nak és D_1 (a levezetés első formulája) csak axiómaformula, vagy Γ -beli hipotézis lehet.
2. Tegyük most fel, hogy minden (n<=k) –ra igazoltuk már, hogy D_{k+1}.
3. Ha most D_{k+1} axiómaformula, vagy hipotézis, akkor az előzőek szerint $\Gamma \models_0 D_{k+1}$. Ha D_{k+1} modus ponensel áll elő D_s –ből és $D_t = D_s \supset D_{k+1}$ –ből, akkor s,t<=k miatt az indukciós feltételből $\Gamma \models_0 D_s$ és $\Gamma \models_0 D_t \supset D_{k+1}$ adódik. A modus ponensre vonatkozó szemantikus tétel miatt $\{D_s, D_t\} \models_0 D_{k+1}$, $\Gamma \models_0 D_{k+1}$ – mert ha Γ ítéletlogikai formulák tetszőleges halmaza, A, B, C pedig tetszőleges ítéletlogikai formulák. Ha $\Gamma \models_0$ A, $\Gamma \models_0$ B, és $\{A, B\} \models_0$, akkor $\Gamma \models_0$ C.

mj.: Ezzel a 31. tétel és a 31a tétel is „kész” Remélem mindenki számára elfogadható a fogalmazásom, és mindenki épülésére szolgál. Az esetleges hibákért „kezdő vagyok, nem kell Sydney” ☺ Sok sikert, avagy kéz és lábtörést!

32. Tétel

Ismertesse a predikátumlogikát leíró nyelvet. Mi a nyelv szintaxisa és szemantikája? A nyelv típusa alapján határozza meg a lehetséges interpretáló struktúrák számát adott számosságú univerzumon (szemantikus fával vagy kombinatorikus úton).

Ismertesse a predikátumlogikát leíró nyelvet. Mi a nyelv szintaxisa és szemantikája?
(Elsőrendű logika≡Predikátumlogika)
Szintaxis:

A predikátumlogika elnevezésen kívül használják még a klasszikus vagy elsőrendű logika kifejezéseket is. A nyelv nyelvtana vagy szintaxisa a matematikai és logikai leképezéseket leíró nyelvi kifejezések szerkesztési szabályait adja meg. Az elsőrendű nyelv nyelvtanilag helyes kifejezéseire szokás a jólformált kifejezés vagy szabályos alakú kifejezés elnevezést használni.
A matematikai leképezések leírására alkalmas kifejezéseket termeknek, a logikai leképezések leírására alkalmas kifejezéseket formuláknak nevezzük.
Termek:

1. egy x változószimbólum term.
2. ha f egy n-változós függvényszimbólum és $t_1, t_2,\ldots,t_n$ termek, akkor $f(t_1,t_2,\ldots,t_n)$ term.
3. minden term az 1 és 2 véges sokszori alkalmazásával áll elő

Formulák (elsőrendű, jólformált formulák):

1. ha P egy n-változós predikátumszimbólum és $t_1,t_2,\ldots,t_n$ termek, akkor $P(t_1,t_2,\ldots,t_n)$ formula (atomi formula).
2. ha A és B formulák, akkor (A), $\neg A$, $A\wedge B$, $A\vee B$, $A\rightarrow B$ és $A\leftrightarrow B$ is formulák
3. ha A formula, akkor $\forall xA$ is formula (univerzális formula) és $\exists xA$ is formula (egzisztenciális formula). (Közös elnevezésük a kvantált formula)
4. minden formula előáll az 1-3 véges sokszori alkalmazásával

Az L elsőrendű formalizált nyelv szemantikája:

Az L formalizált nyelv szemantikáját úgy kell definiálni, hogy a nyelv alkalmas legyen olyan logikai kifejezések felépítésére, amely képes a nyelv által leírható rendszerek következményfogalmait kezelni.
A szemantika alatt a nyelv kifejezéseinek értelmezését értjük. Vagyis azokat a szabályokat, amelyek biztosítják egy kifejezés értékének meghatározását.
Az elsőrendű logika szemantikája a logika leíró nyelvének, az L elsőrendű formalizált nyelvnek a szemantikáját jelenti. Ez a σ L-értékelés. Egy t term illetve egy A formula σ L-értékelés szerinti értékét t^{σ}-val illetve A^{σ}-val jelöljük. Először informálisan, majd formálisan írjuk le a σ L-értékelést.

Informális leírás: A folyamat két fázisból áll

1. Kiválasztunk egy, a leíró nyelvvel azonos típusú interpretáló struktúrát. Megfeleltetjük a struktúra relációit és műveleteit a nyelv predikátum- és függvényszimbólumainak. P^{σ}, f^{σ} jelöli a P és f-nek megfelelő, az interpretáló struktúrabeli relációit, illetve műveletet a nyelv és a struktúra típusával összhangban. A struktúra szimbólumait tartalmazó kifejezést átírjuk a struktúra szintaxisa szerint.
2. A kifejezésben szereplő változószimbólumokhoz értékeket rendelünk a struktúra univerzumból. Kiszámítjuk a kifejezés értékét.

Formális leírás:
Termek esetén:

1. t=x: $t^{\sigma}=x^{\sigma} \in U$
2. $t= f(t_1,t_2,\ldots,t_n)$: $t^{\sigma}= (f(t_1,t_2,\ldots,t_n))^{\sigma}= f^{\sigma}(t_1^{\sigma},t_2^{\sigma},\ldots,t_n^{\sigma})$

Formulák esetén:

1. Atomi formulák.
   $A^{\sigma} = (P(t_1,t_2,\ldots,t_n))^{\sigma} = P\ (t_1^{\sigma},t_2^{\sigma},\ldots,t_n^{\sigma})$
   $A^{\sigma} = i$, ha $< t_1^{\sigma},t_2^{\sigma},\ldots,t_n^{\sigma} > \in W_P\ \sigma$
2. Kiértékelés a logikai összekötőjelek szintjén.
   $(\neg A)^{\sigma} = \neg A^{\sigma}$
   $(A \wedge B)^{\sigma} = A^{\sigma} \wedge B^{\sigma}$
   $(A \vee B)^{\sigma} = A^{\sigma} \vee B^{\sigma}$
   $(A^{\sigma}\rightarrow B)^{\sigma} = A\rightarrow B^{\sigma}$
   $(A \leftrightarrow B)^{\sigma} = A^{\sigma} \leftrightarrow B^{\sigma}$
3. Kvantált formulák kiértékelése.
   $(\forall xA)^{\sigma} = i$, ha $A^{\sigma (x/u)} = i$ az U univerzum minden u elemére
   $(\exists xA)^{\sigma} = i$, ha $A^{\sigma (x/u)} = i$ az U univerzum legalább egy u elemére

   Az $A^{\sigma (x/u)}$ azt a kiértékelt formulát jelöli, ahol a formula esetleges szabad változóit már kiértékeltük és egy ilyen kiértékelés mellett az x az u értékét kapta.

A nyelv típusa alapján határozza meg a lehetséges interpretáló struktúrák számát adott számosságú univerzumon (szemantikus fával vagy kombinatorikus úton).

Szemantikus fával:
Elsőrendű szemantikus fa, mint adott univerzum feletti $(r_1,r_2,\ldots,r_n;\ s_1,s_2,\ldots,s_k)$ típusú struktúrák megadásának eszköze. Az univerzum elemeinek felhasználásával előállítjuk az összes alapatomot, rögzítjük sorrendjüket (ez a bázis), a szemantikus fa szintjeihez ebben a sorrendben rendeljük hozzá az alapatomokat. Egy interpretáció a szemantikus fa egy ágán áll elő.

33. Tétel

Mit ír le egy jólformált formula a predikátumlogikában? Mit értünk formalizálás alatt elsőrendben?
Hogyan lehet megadni egy elsőrendű formula által leírt leképezést? Mit jelent az, hogy egy elsőrendű formula logikailag igaz. Lehet-e egy elsőrendű formula tautológia?

Mit ír le egy jól formált formula a predikátumlogikában? (Elsőrendű logikában)
Az elsőrendű logika szintaxisát. Megmondja, hogy hogy állnak elő a termek és a formulák az elsőrendű nyelvben.

Mit értünk formalizálás alatt elsőrendben?
Egy állítás formalizálásához először az állítás környezetét mint formális rendszert tekintjük. Ez a formális rendszer adja a leíró nyelvet. Az ABC: az univerzum elemei, és a rajta definiált relációk és operációk. Ezzel a nyelvvel leírhatjuk az egyszerű (prím) állításokat majd a logikai összekötők és a kvantorok felhasználásával a további prím és az összetett állításokat. Tehát a feltétel formulákat és a tétel formulát ezen a nyelven formalizáljuk.

Hogyan lehet megadni egy elsőrendű formula által leírt leképezést?
σ L-értékelés egy olyan leképezés, amely egy formulához hozzárendeli annak jelentését.
Informális leírás: A folyamat két fázisból áll

1. Kiválasztunk egy, a leíró nyelvvel azonos típusú interpretáló struktúrát. Megfeleltetjük a struktúra relációit és műveleteit a nyelv predikátum- és függvényszimbólumainak. P^{σ}, f^{σ} jelöli a P és f-nek megfelelő, az interpretáló struktúrabeli relációit, illetve műveletet a nyelv és a struktúra típusával összhangban. A struktúra szimbólumait tartalmazó kifejezést átírjuk a struktúra szintaxisa szerint.
2. A kifejezésben szereplő változószimbólumokhoz értékeket rendelünk a struktúra univerzumból. Kiszámítjuk a kifejezés értékét.

Formális leírás:
Termek esetén:

1. $t=x$: $t^{\sigma}=x^{\sigma} \in U$
2. $t= f(t_1,t_2,\ldots,t_n)$: $t^{\sigma}= (f(t_1,t_2,\ldots,t_n))^{\sigma}= f^{\sigma}(t_1^{\sigma},t_2^{\sigma},\ldots,t_n^{\sigma})$

Formulák esetén:

1. Atomi formulák.
   $A^{\sigma} = (P(t_1,t_2,\ldots,t_n))^{\sigma} = P\ (t_1^{\sigma},t_2^{\sigma},\ldots,t_n^{\sigma})$
   $A^{\sigma} = i$, ha $< t_1^{\sigma},t_2^{\sigma},\ldots,t_n^{\sigma} > \in W_P\ \sigma$
2. Kiértékelés a logikai összekötőjelek szintjén.
   $(\neg A)^{\sigma} = \neg A^{\sigma}$
   $(A \wedge B)^{\sigma} = A^{\sigma} \wedge B^{\sigma}$
   $(A \vee B)^{\sigma} = A^{\sigma} \vee B^{\sigma}$
   $(A^{\sigma} \rightarrow B)^{\sigma} = A \rightarrow B^{\sigma}$
   $(A \leftrightarrow B)^{\sigma} = A^{\sigma} \leftrightarrow B^{\sigma}$
3. Kvantált formulák kiértékelése.
   $(\forall xA)^{\sigma} = i$, ha $A^{\sigma(x/u)} = i$ az U univerzum minden u elemére
   $(\exists xA)^{\sigma} = i$, ha $A^{\sigma(x/u)} = i$ az U univerzum legalább egy u elemére

   Az $A^{\sigma(x/u)}$ azt a kiértékelt formulát jelöli, ahol a formula esetleges szabad változóit már kiértékeltük és egy ilyen kiértékelés mellett az x az u értékét kapta.

Mit jelent az, hogy egy elsőrendű formula logikailag igaz.
Legyen A az $L[V_v]$ nyelv tetszőleges formulája.
Ha A tautológikusan igaz, akkor logikailag igaz is, azaz ha $\models_0 A$, akkor $\models A$.

Lehet-e egy elsőrendű formula tautológia?
Igen, mert:
Legyen $L[V_v]$ egy elsőrendű logikai nyelv. Ekkor az $L[V_v]$ nyelv egy A formulája tautológikusan igaz, ha a formula Quine-táblázatában A oszlopában csupa i igazságérték található. Jelölése: $\models_0 A$.

34. Tétel

Mi egy elsőrendű formula értéktáblája? Milyen speciális alakú, elsőrendű formulákat ismer? Mit jelent az, hogy a leíró L nyelv egy I interpretációja és egy változókiértékelés kielégít egy F formulahalmazt? Definiálja a logikailag igaz, a kielégíthető formula és a kielégíthetetlen formula fogalmakat. Beszélhetünk-e itt tautológiáról? Zárt formulák-e az elsőrendű bizonyításelméleti axiómák?

Mi egy elsőrendű formula értéktáblája?

Egy *n-változós formula igazságtáblája* egy olyan n+1 oszlopból és 2^n sorból álló táblázat, melynek elemei igazságértékek. A táblázat fejlécében az i-edik ($1 \leq i \geq n$) oszlophoz a formula báziaának i-edik ítéletváltozója, az n+1-edik oszlophoz maga a formula van hozzárendelve. Az első n oszlopban az egyes sorokban az ítéletváltozókhoz megadjuk rendre a formula különböző interpretációit, majd a formula oszlopába minden sorba beírjuk a formula igazságértékét.

Például a következő táblázatban láthatjuk az $(Y \vee Z) \wedge (Z \supset \neg X)$ formula igazságtábláját.

X	Y	Z	$(Y \vee Z) \wedge (Z \supset \neg X)$
i	i	i	h
i	i	h	i
i	h	i	h
i	h	h	h
h	i	i	i
h	i	h	i
h	h	i	i
h	h	h	h

Milyen speciális alakú, elsőrendű formulákat ismer?

Két speciális alakú elsőrendű formulát ismerünk.

- Prenex forma

  Jelölje Q bármely kvantort. Egy $Q_1x_1Q_2x_2\ldots Q_nx_nA$ alakú formulát **prenex formulá**nak nevezzünk. A $Q_1x_1Q_2x_2\ldots Q_nx_n$ szimbólumsorozat a prenexformula *prefixum*a, és A a prenexformula *magja (*vagy *mátrixa).*
- Skolem forma

  A $\forall x_1, \forall x_2, \ldots, \forall x_n A$ formulát, ahol a prefixumban csak univerzális kvantorok vannak **Skolem formulá**nak, ha az A formula alakja KNF, akkor **Skolem normál formulá**nak nevezzük.

Mit jelent az, hogy egy σ L értékelés kielégít egy F formulahalmazt?

Egy *I*-interpretáció (igazságkiértékelés) **kielégít** egy formulát, formulahalmazt, ha a formula vagy a formulahalmaz minden eleme igaz *I*-ben. Ha van ilyen *I*-interpretáció, akkor a formula vagy formulahalmaz **kielégíthető**.

Definiálja a logikailag igaz, a kielégíthető formula és a kielégíthetetlen formula fogalmakat.

Egy G formula **logikailag igaz**, ha G igaz minden lehetséges I interpretációra. Ez azt jelenti, hogy **G igaz minden lehetséges interpretáló struktúrában**. *Jelölés:* $\models$ G.

Egy *I*-interpretáció (igazságkiértékelés) **kielégít** egy formulát, formulahalmazt, ha a formula vagy a formulahalmaz minden eleme igaz *I*-ben. Ha van ilyen *I*-interpretáció, akkor a formula vagy formulahalmaz **kielégíthető**.

Kielégíthetetlen egy formula/ formulahalmaz, ha egyetlen *I*-igazságkiértékelés sem elégít ki**.**

Beszélhetünk-e itt tautológiáról?

Igen beszélhetünk itt, vagyis elsőrendben tautológiáról.
Definíció: Az A formula *ítéletlogikai törvény* vagy másképp *tautológia,* ha L_0 minden I interpretációjára I $\models_0$ A.
Jelölése: $\models_0$ A

Zárt formulák-e az elsőrendű bizonyításelméleti axiómák?

Nem zárt formulák. Mert zárt formulák csak az predikátumkalkulusban vannak.

35. Tétel

Mit fejez ki a F|=A jelsorozat? Mi a predikátumlogika következményfogalma és eldöntésproblémája. Megoldható-e ez kiértékeléssel? Mi a formula kifejtése? Rezolúciós kalkulussal való döntéshez hogyan kell átalakítani a feltételhalmazt és a tételformulát?

Mit fejez ki a F|=A jelsorozat?
(Elsőrendű logikában a logikai vagy szemantikus következmény).
Azt mondjuk, hogy az A formula logikai következménye az F formulahalmaznak, ha minden olyan σ-ra amelyre σ|=F a σ|=A is fennáll. Jelölése: F|=A.
Másszóval F|=A ha egy interpretáló struktúrában az F,A közös értéktábláján minden sorban ahol az F elemeinek helyettesítési értéke i(gaz), a A helyettesítési értéke is i(gaz). Jelölés: F|=A vagy $\{F_1,F_2,\ldots,F_n\}$|=A.
Mi a predikátumlogika következményfogalma és eldöntésproblémája. (predikátumlogika≡elsőrendű logika)
Következményfogalom: Legyen Γ az $L[V_v]$ nyelv formuláinak tetszőleges halmaza és B tetszőleges formulája. Azt mondjuk hogy a b formula logikai következménye a Γ formulahalmaznak (vagy Γ-beli formulának), ha minden olyan $L[V_v]$-beli interpretáció és változókiértékelés, amely kielégít minden Γ beli formulát, az kielégíti a B formulát is. Jelölése: Γ|=B.
Eldöntésprobléma:
Legyenek $F_1,...,F_n$,G elsőrendű formulák.
$\{F_1,...,F_{n-1},F_n\}\models G$ pontosan akkor, ha $\models F_1\Rightarrow F_2\Rightarrow\ldots\Rightarrow F_{n-1}\Rightarrow F_n\Rightarrow G$.
[Vagyis $F_1\Rightarrow F_2\Rightarrow\ldots\Rightarrow F_{n-1}\Rightarrow F_n\Rightarrow G$ logikailag igaz.]
Biz.: ⇒: Az előzőleg bizonyított tétel n-szeres alkalmazása ⇒ irányba.
⇐: Az előzőleg bizonyított tétel n-szeres alkalmazása ⇐ irányba.
Megoldható-e ez kiértékeléssel?

Mi a formula kifejtése?

Rezolúciós kalkulussal való döntéshez hogyan kell átalakítani a feltételhalmazt és a tételformulát?
KNF-re hozzuk a feltételhalmazt és hozzávesszük a tételformula negáltját. Ekkor elsőrendű klózokat kapunk, amikkel a rezolúciós kalkulust végre lehet hajtani.

36. Tétel

Mi a logikai összekötőjelek és a kvantor hatásköre? Definiálja a szabad, a kötött és a vegyes előfordulású változó, a nyitott formula és a mondat fogalmát. A különböző formulák egy vagy több állítást fejeznek ki? Melyik az a formulafajta, amely egyetlen állítást jelent?

Mi a logikai összekötőjelek és a kvantor hatásköre?

A *logikai összekötőjelek* : ($\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\supset$).
Egy logikai mûvelet ***hatásköre*** az a formula,vagy formulák, amelyen, vagy amelyeken, ezt a mûveletet el kell végezni.A logikai ***összekötõjelek hatáskörét*** a logikai összekötõjelek prioritása és az esetleges zárójelezés alapján állapíthatjuk meg.
Precedencia, prioritás: (precedencia rendszer, prioritási sorrend) Mûveleti sorrend.

Definiálja a szabad, a kötött és a vegyes előfordulású változó, a nyitott formula és a mondat fogalmát.
Egy formulában egy x változó egy előfordulása :
szabad, ha nem esik x-re vonatkozó kvantor hatáskörébe
kötött, ha x-re vonatkozó kvantor hatáskörébe esik
vegyes, ha mindkettő.
Egy formula nyitott, ha legalább egy indivíduum változónak van legalább egy szabad előfordulása.
Mondat egy szabad változót nem tartalmazó elsőrendű formula (minden változó kvantált vagy más szóval kötött).
Igazságérték csak az interpretációtól függ, a változók felvett értékektől nem.

A különböző formulák egy vagy több állítást fejeznek ki? Melyik az a formulafajta, amely egyetlen állítást jelent?
Az *állítás fogalma*, igazságértéke. Hogyan lehet az állítás igazságértékét megállapítani.
Az *állítás* egy olyan kijelentés, amelyről el lehet dönteni, hogy igaz-e vagy nem.
Azt, hogy egy állítás *igaz (i)* vagy *hamis (h)* az állítás *igazságérték*ének nevezzük.
Az igazságértékek. Kettőnél több igazságérték lehetősége.
A különböző formulák kifejezhetnek egy, de több állítást is, az igazságértékeiktől függően.

37. Tétel

Mikor függ egy formula a benne szereplő változók valamelyikétől? Hogyan és mikor lehet egy kvantált formulát kvantormentes formulává kifejteni? Mit értünk paraméteres állítás alatt?

Mikor függ egy formula a benne szereplő változók valamelyikétől?
TK 140. oldal + TK 137. oldal
Akkor, hogyha a vannak a formulában kötött változók.

Hogyan és mikor lehet egy kvantált formulát kvantormentes formulává kifejteni?
(Predikátumkogikában[elsőrend] illetve predikátumkalkulusban lehet csak kvantált formula)
A $\forall x A$ alakú formulákat univerzálisan kvantált formulának nevezzük.
A $\exists x A$ alakú formulákat egzisztenciálisan kvantált formulának nevezzük.

A formulánkat prenex alakra kell hozni:

1. A formulában szereplő logikai összekötőjelek átírása $\neg$, $\wedge$, $\vee$ logikai műveletekre.
2. A De Morgan- és általános De Morgan – szabályok alkalmazása addig, amíg a $\neg$ hatásköre minden esetben atomi formula nem lesz.
3. A kvantorkiemelési szabályok alkalmazása addig, amíg minden kvantor a formula elé nem kerül.

Kvantorkiemelési szabályok:
Kvantorok egyoldali kiemelése:

1. $A\wedge \forall x B[x] \equiv \forall x(A\wedge B[x])$	$A \wedge \exists x B[x] \equiv \exists x(A\wedge B[x])$
2. $A\vee \forall x B[x] \equiv \forall x(A\vee B[x])$	$A \vee \exists x B[x] \equiv \forall x(A\vee B[x])$
3. $A\Rightarrow\forall x B[x] \equiv \forall x(A\Rightarrow B[x])$	$A\Rightarrow\exists x B[x] \equiv \exists x(A\Rightarrow B[x])$
4. $\forall x B[x]\Rightarrow A \equiv \exists x(B[x]\Rightarrow A)$	$\exists x B[x]\Rightarrow A \equiv \forall x(B[x]\Rightarrow A)$

Kvantorok kétoldali kiemelése:
5. $\forall x A[x]\wedge\forall x B[x] \equiv \forall x(A[x] \wedge B[x])$, de $\vee$-re nem áll fenn.
6. $\exists x A[x]\vee \exists x B[x] \equiv \exists x(A[x]\vee B[x])$, de $\wedge$-re nem áll fenn.
Kvantorok kétoldali kiemelése (átnevezéssel):
7. $Q_1xA[x] \wedge Q_2xB[x] \equiv Q_1xQ_2y(A[x]\wedge B[y])$
8. $Q_1xA[x] \vee Q_2xB[x] \equiv Q_1xQ_2y(A[x]\vee B[y])$

(Ezek közül az 5. csak az univerzális kvantorra, a 6. csak az egzisztenciális kvantorra érvényes.)

A formulánkat skolem normálformára kell hozni:
Legyen a prenex formula $Q_1x_1Q_2x_2\ldots Q_nx_nA$.

1. Megkeressük az első egzisztenciális kvantort. Ha ilyen nincs, akkor a formula Skolem-formula. Vége az algoritmusnak.
2. Legyen az első egzisztenciális kvantor a j-edik. Válasszunk egy olyan függvényszimbólumot, amely nem szerepel a nyelvben és jelöljük
   $f(x_1, x_2,\ldots,x_{j-1})$-el a Skolem függvényt. Az új formulát úgy kapjuk meg, hogy elhagyjuk a $\exists x_j$ kvantort és a B-ben elvégezzük az $(x_j/ f(x_1, x_2,\ldots,x_{j-1}))$ helyettesítést. A kapott formulán újra elvégezzük az 1. lépést …

Abban az esetben kaptunk kvantormentes formulát, ha a prenex formánk után nem volt már univerzális kvantorunk, minden további esetben olyan formulát kapunk, amiben van $\forall$ kvantor.

Mit értünk paraméteres állítás alatt?
Ha egy változónak egy kifejezésben van szabad előfordulása, akkor ezt a változót a kifejezés paraméterének, a kifejezést pedig paraméteres kifejezésnek nevezzük.

Prenex másképpen:
Def.: φ prenex formula, ha $\varphi= Q_1x_1Q_2x_2\ldots Q_nx_n\ \psi$, ahol Q_1, Q_2, …Q_n kvantorok, és ψ kvantormentes.
Prenex formára hozás algoritmusa: 1.) $\Rightarrow$ és $\Leftrightarrow$ kiküszöbölése
2.) $\neg$ hatáskörét redukáljuk
3.) a kvantorokat kiemeljük a szabály szerint, ha kell változókat átnevezünk.
Skolem másképpen:
Def.: φ skolem normálforma, ha prenex, csak $\forall$ kvantor van benne (lehet hogy nincs) és a kvantormentes rész KNF.
Skolem normálformára hozás algoritmusa: 1.) prenex formára hozunk
2.) kiküszöböljük $\exists$-et
3.) a kvantormentes részt KNF-re hozzuk.

38. Tétel

Mi a prenex formula? Ismertesse előállításának algoritmusát? Melyek a kvantorkiemelési szabályok? Ezek közül melyik olyan, ami csak az egyik kvantorra érvényes? Lássa is be.

Mi a prenex formula?
Egy $B=Q_1x_1Q_2x_2\ldots Q_sx_sA$ formulát prenex formulának nevezzük, ha az A formula kvantormentes. A formula $Q_1x_1Q_2x_2\ldots Q_sx_s$ részét a formula prefixumának, az A részét a formula magjának vagy mátrixának nevezzük. Egy prenex formula prenex-konjunktív normálformájú illetve prenex-diszjunktív normálformájú, ha a magja KNF ill. DNF.
Mi a Skolem-formula?
Egy prenex formulát Skolem-formulának nevezünk, ha a prefixumában csak univerzális kvantorok szerepelnek és a formula magja KNF.

Skolem függvény:
Tekintsük az első egzisztenciális kvantort a prenex formula prefixumában, legyen ez $\exists x_j$. Ha a formula igaz, akkor az $x_1, x_2, ..., x_{j-1}$ változók minden értékkombinációjához létezik legalább egy értéke az x_j változónak amelyre a formula értéke i. Ezt a tényt az
$\mathbf{f(x_1, x_2, ..., x_{j-1}) = x_j}$ függvénnyel fejezzük ki. Ez a függvény rendeli az x_j -hez a megfelelő értéket. Ezt a lépést végrehajtjuk a soronkövetkező egzisztenciális kvantorra addig amíg, minden egzisztenciális kvantort nem elimináltunk.
Pl. $\forall x\exists yP(x,y)$ Skolem alak: $\forall x\ P(x,f(x))$
Interpretációk
Minden emberhez van olyan nő, aki az anyja. Skolem fv. anyja(x).
Egy sokszög minden csúcsához van legalább egy hozzá legközelebbi csúcs. Skolem fv. legközelebbi(x).
Minden számhoz van nála eggyel nagyobb szám. Skolem fv.s(x), a rákövetkezési fv..

Tetszőleges formula prenex alakra való átírásának algoritmusa:
1. A formulában szereplő logikai összekötőjelek átírása $\neg$, $\wedge$, $\vee$ logikai művletekre.
2. A De Morgan- és általános De Morgan – szabályok alkalmazása addig, amíg a $\neg$ hatásköre minden esetben atomi formula nem lesz.
3. A kvantorkiemelési szabályok alkalmazása addig, amíg minden kvantor a formula elé nem kerül.

Skolem - formula előállításának algoritmusa:
Legyen a prenex formula $Q_1x_1Q_2x_2\ldots Q_nx_nA$.
1. Megkeressük az első egzisztenciális kvantort. Ha ilyen nincs, akkor a formula Skolem-formula. Vége az algoritmusnak.
2. Legyen az első egzisztenciális kvantor a j-edik. Válasszunk egy olyan függvényszimbólumot, amely nem szerepel a nyelvben és jelöljük
$f(x_1, x_2,\ldots,x_{j-1})$-el a Skolem függvényt. Az új formulát úgy kapjuk meg, hogy elhagyjuk a $\exists x_j$ kvantort és a B-ben elvégezzük az $(x_j/ f(x_1, x_2,\ldots,x_{j-1}))$ helyettesítést. A kapott formulán újra elvégezzük az 1. lépést …

Kvantorkiemelési szabályok:
Kvantorok egyoldali kiemelése:

1. $A\wedge \forall xB[x] \equiv \forall x(A\wedge B[x])$	$A \wedge \exists xB[x] \equiv \exists x(A\wedge B[x])$
2. $A\vee \forall xB[x] \equiv \forall x(A\vee B[x])$	$A \vee \exists xB[x] \equiv \forall x(A\vee B[x])$
3. $A\Rightarrow\forall xB[x] \equiv \forall x(A\Rightarrow B[x])$	$A\Rightarrow\exists xB[x] \equiv \exists x(A\Rightarrow B[x])$
4. $\forall xB[x]\Rightarrow A \equiv \exists x(B[x]\Rightarrow A)$	$\exists xB[x]\Rightarrow A \equiv \forall x(B[x]\Rightarrow A)$

Kvantorok kétoldali kiemelése:
5. $\forall xA[x]\wedge\forall xB[x] \equiv \forall x(A[x] \wedge B[x])$, de $\vee$-re nem áll fenn.
6. $\exists xA[x]\vee \exists xB[x] \equiv \exists x(A[x]\vee B[x])$, de $\wedge$-re nem áll fenn.
Kvantorok kétoldali kiemelése (átnevezéssel):
7. $Q_1xA[x] \wedge Q_2xB[x] \equiv Q_1xQ_2y(A[x]\wedge B[y])$
8. $Q_1xA[x] \vee Q_2xB[x] \equiv Q_1xQ_2y(A[x]\vee B[y])$
(Ezek közül az 5. csak az univerzális kvantorra, a 6. csak az egzisztenciális kvantorra érvényes.)

Lássa is be. (Kvantorkiemelési szabályok)
Egyedül a $\forall xB[x]\Rightarrow A \equiv \exists x(B[x]\Rightarrow A)$ ekvivalenciát bizonyítjuk, a többi ezalapján illetve természetes módon adódik.
Legyen $L[V_v]$-nek I tetszőleges interpretációja és κ az interpretációban tetszőleges változókiértékelés. Vizsgáljuk meg a $\forall xB[x]\Rightarrow A$ formula igazságértékét I-ben κ mellett. Két lehetséges eset van:
1. Ha $|\forall xB[x]\Rightarrow A|^{I,\kappa}$=i, akkor vagy $|\forall xB[x]|^{I,\kappa}$=h, vagy $|A|^{I,\kappa}$=i.
   - Ha $|\forall xB[x]|^{I,\kappa}$=h, akkor van κ-nak olyan κ' x-invariánsa, hogy $|B[x]|^{I,\kappa}$=h. Ez azt jelenti, hogy $|\forall xB[x]\Rightarrow A|^{I,\kappa}$=i, tehát $|\exists x(B[x]\Rightarrow A)|^{I,\kappa}$=i.
   - Ha pedig $|A|^{I,\kappa}$=i, akkor nyilván $|B[x]\Rightarrow A|^{I,\kappa}$=i, tehát most is $|\exists x(B[x]\Rightarrow A)|^{I,\kappa}$=i.
2. Másrészt, ha $|\forall xB[x]\Rightarrow A|^{I,\kappa}$=h, akkor $|\forall xB[x]|^{I,\kappa}$=i és $|A|^{I,\kappa}$=h. Ez azt jelenti, hogy K minden invariánsa K' x-variánsa esetén $|B[x]\Rightarrow A|^{I,\kappa}$=h, azaz $|\exists x(B[x]\Rightarrow A)|^{I,\kappa}$=h.

Mivel beláttuk, hogy tetszőleges I interpretációban és K változókiértékelés mellett $|\forall xB[x]\Rightarrow A|^{I,\kappa} \equiv |\exists x(B[x]\Rightarrow A)|^{I,\kappa}$, beláttuk, hogy a két formula logikailag ekvivalens.

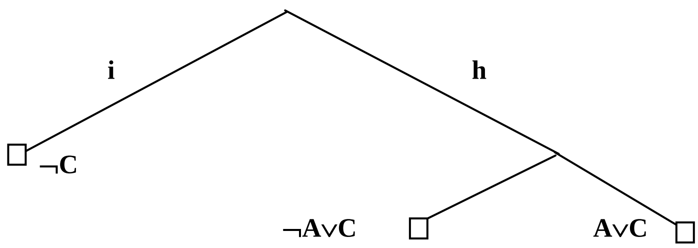
39. Tétel

Mi a rezolúciós eldöntésprobléma elsőrendben? Mi az elsőrendű klóz? Az elsőrendű rezolúciós elvhez hogyan lehet előállítani a klózhalmazt? Hogy oldjuk ezt meg alaprezolúcióval és szemantikus fával?

Mi a rezolúciós eldöntésprobléma elsőrendben?
A rezolúciós kalkulus eldöntésproblémája az, hogy levezethető-e S-ből az üres klóz.
A rezolúciós levezetés célja tehát az üres klóz levezetése S-ből. Azt, hogy S-ből levezethető az üres klóz, úgy is ki lehet fejezni, hogy S-nek van rezolúciós cáfolata.
Mi az elsőrendű klóz?
Elsőrendű klóznak nevezünk egy olyan zárt Skolem-formulát, amelynek a magja elsőrendű literálok (változók vagy annak negáltjuk) diszjunkciója.
Az elsőrendű rezolúciós elvhez hogyan lehet előállítani a klózhalmazt?
Az elsőrendű rezolúciós elvnél az a kérdés, hogy $\Sigma|=^{?}\varphi$
Az elsőrendű klózhalmazt úgy tudjuk előállítani, hogy $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$- skolemizáljuk, és a skolemizált alak KNF, és abból ki tudjuk gyűjteni az elsőrendű klózhalmazt.
Hogy oldjuk ezt meg alaprezolúcióval és szemantikus fával?

$S=\{\neg A\vee B, \neg A\vee C, A\vee C, \neg B\vee\neg C, \neg C\}$
Alaprezolúcióval:
1. $\neg C$ $\in S$
2. $A\vee C$ $\in S$
3. A res(1,2)
4. $\neg A\vee C$ $\in S$
5. C res(3,4)
6. $\square$ res(5,1)

Szemantikus fával:



39.a. Tétel

Hogyan kapjuk meg egy S elsőrendű klózhalmaz alapján azt az alapklózhalmazt, amelyből – S kielégíthetetlensége esetén – levezethető az üresklóz. Definiálja az S-ből való alaprezolúciós levezetés fogalmát.

Hogyan kapjuk meg egy S elsőrendű klózhalmaz alapján azt az alapklózhalmazt, amelyből – S kielégíthetetlensége esetén – levezethető az üresklóz.

Néhány definíció:

Alappéldány: Legyen $L[V_v]$ egy elsőrendű logikai nyelv. Rögzítsünk egy U univerzumot. A nyelv egy termjének U feletti alappéldányát úgy nyerjük, hogy egy-egy κ változókiértékelés mellett a termben előforfuló minden változó helyére formálisan beírunk egy a κ által a változóhoz rendelt U-beli individuumot azonosító jelet. Ha pedig a nyelv egy $P(t_1,t_2,...,t_n)$ atomi foltmulájában minden ti elemet kicserélünk egy rögzített κ változókiértékelés mellett nyert U feletti alappéldányára, akkor az atomi formula egy U feletti alappéldányához jutunk.

Alapatomok: Atomi formulák U feletti alappéldányait röviden U feletti alapatomoknak nevezzük.

Alapliterál: Egy U feletti alapliterál egy alapatom vagy annak negáltja.

Alapklóz: U feletti alapliterálok diszjunkciója az U feletti alapklóz.

Egységalapklóz: az egyetlen alapliterált tartalmazó alapklóz.

Üres klóz: literált nem tartalmazó alapklóz neve itt is üresklóz.

Bázis: Bázisnak nevezzük U feletti egyszerű alapatomoknak egy rögzített sorrendjét.

Egy adott U univerzumon egy elsőrendű klózhalmaz pontosan akkor kielégíthetetlen, ha U-n a klózhalmazban szereplő klózok alappéldányainak halamza kielégíthetetlen. Ezt úgy ellenőrizhetjük, hogy interpretáljuk a klózhalmaz leíró nyelvében szereplő konstans-és függvényszimbólumokat (a Skolem-konstansokat és –függvényeket is) az összes lehetséges módon U felett.

Az egyes interpretációkban előállítjuk a klózhalmazban szereplő klózok alappéldányai halmazából az egyszerű alapklózok halmazát.

Ha az így nyert egyszerű klózhalmazok mindegyike kielégíthetetlen, akkor az alappéldányok halamza U-n kielégíthetetlen. Az egyszerű alapklózokat ugyanúgy illesztjük a szemantikus fára, mint az ítéletlogikában. Ez azt jelenti, hogy az egyszerű alapklózok halamza pontosan akkor kielégíthetetlen, ha az egyszerű alapklózhalamz szemantikus fája zárt.

Definiálja az S-ből való alaprezolúciós levezetés fogalmát.

Egy S elsőrendű klózhalmaz klózai U feletti egyszerű alapklózainak halmazából való alaprezolúciós levezetés egy olyan véges $k_1,k_2,...,k_m$ $(m\geq 1)$ alapklózsorozat, ahol minden j=1,2,...,m-re k_j

1.) vagy S-beli klóz U feletti egyszerű alapklózokra,

2.) vagy olyan $1 \leq s,t < j$, hogy k_j a (k_s,k_t) alapklózpár rezolvense.

40. Tétel

Miért ekvivalens a Skolem normálforma kielégíthetetlensége a magjában szereplő KNF klózaiból alkotott elsőrendű klózhalmaz kielégíthetlenségével? Mi az elsőrendű szemantikus fa, mit ír le? Mit jelent az alapatom és alapklóz kifejezés?

Ha $\forall x A$ formula törzse, A KNF alakú, akkor minden $A^{\delta(x/y)}$ egy-egy alap KNF, vagyis $(\forall x A)^{\delta}$ alapklózok konjunkciója. Ha a $\forall x A$ formula kielégíthetetlen, akkor azon alap KNF-ák konjunkciója kielégíthetetlen, azt jelenti, hogy alapklózok halmaza kielégíthetetlen. Az üres klóz levezethető ezen alapklózok halmazából 0-rendű rezolúciós kalkulussal.

Elsőrendű szemantikus fa: Szemantikus fa (jegyzet): Egy K elsőrendű klózhalmaz adott univerzum feletti teljes szemantikus fája, egy olyan bináris fa, ahol a szintek száma és a bázisbeli alapatomok halmazának számossága megegyezik. A szintek és az alapatomok között egy-egyértelmű megfeleltetést definiálunk. Az Ai-hez rendelt szinten az élpárokban az egyik élhez Ai, a másik élhez ¬Ai címkét írunk.
Legyen a K klózhalmaz alapatomhalmaza A. A K szemantikus fája egy olyan fa, amelynek éleihez az A elemeinek megfelelő literálok egy véges halmazát rendeljük hozzá: 1) egy csúcsból véges sok E1,E2,…,En él indul ki. Legyen Qi az Ei élhez rendelt literálok konjunkciója, a $Q1 \vee Q2 \vee \ldots \vee Qn$ pedig tautológia. 2)Legyen l(N) a gyökérből az N csúcsba vezető úton lévő élekhez rendelt literálhalmazok uniója. Egyetlen ilyen halmaz sem tartalmazhat komplemens párt.
Szemantikus fa.
Olyan bináris fa, amelynek ágain az U feletti összes lehetséges - adott típusú - struktúra megjeleníthető.
A *szemantikus fa* mindig egy *B bázisra* épül. Annyi szintet tartalmaz amennyi eleme a bázisnak van. Az **Aj** báziselemhez rendelt szinten az élpárokhoz az Aj, ¬Aj cimkéket rendeljük. Aj azt jelenti, hogy Aj igaz, ¬Aj azt jelenti, hogy Aj hamis az interpretációban. Igy a szemantikus fa egy-egy ágán egy-egy interpretáció jelenik meg.
A szemantikus fa tartalmazza egy U univerzum feletti összes lehetséges - adott típusú - struktúrát (interpretációt).

Alapatom:az atomi formulák U feletti alappéldányait röviden U feletti alapatomoknak nevezzük. (ha egy atomban nem szerepelnek szabad formulák, alapatomnak nevezzük)
Az U feletti alapliterálok diszjunkciója. Az U feletti alapklóz az egyetlen alapliteráált tartalmazó alapklóz az egységklóz
Alapklóz: Az 1. rendű literál egy atomi formula vagy egy negált atomi formula: pl. $P(x_1, x_2, ..., x_j)$, $\neg P(x_1, x_2, ..., x_j)$.
Alapliterál egy változót nem tartalmazó literál : $P(a_1, a_2, ..., a_j)$, $\neg P(a_1, a_2, ..., a_j)$.
Alapklóz alapliterálok diszjunkciója:pl. $P(a) \vee R(a,b)$

Alapklózok

x	y	z	v	u	$P(x)\vee\neg Q(x,f(y))$	$\neg P(g(z))\vee\neg P(v)$	$Q(g(u),u)$
a	a	a	a	a	$P(a)\vee\neg Q(a,f(a))$	$\neg P(g(a))\vee\neg P(a)$	$Q(g(a),a)$
g(a)	a	a	g(a)	a	$P(g(a))\vee\neg Q(g(a),f(a))$	$\neg P(g(a))\vee\neg P(g(a))$	$Q(g(a),a)$
g(a)	a	a	g(a)	f(a)	$P(g(a))\vee\neg Q(g(a),f(a))$	$\neg P(g(a))\vee\neg P(g(a))$	$Q(g(f(a)), f(a))$
g(f(a))	a	f(a)	g(f(a))	f(a)	$\mathbf{P(g(f(a)))\vee\neg Q(g(f(a)),f(a))}$	$\mathbf{\neg P(g(f(a)))}\vee\neg P(g(f(a)))$	$\mathbf{Q(g(f(a)), f(a))}$

42. tétel

Melyek a Skolem függvény független változói? Mi a Skolem konstans? Hogyan kapjuk meg egy KNF maggal rendelkező Skolem formulával ekvivalens változóidegen, elsőrendű klózok konjunkciójaként előálló formulát?

Melyek a Skolem függvény független változói?

Azoktól a változóktól, amelyek az adott Skolem függvény által helyettesített egzisztenciális kvantor után (azaz „jobbra") helyezkednek el, nyilván nem függ a Skolem függvény, hiszen az csak azoktól a változóktól függ, amelyek a prenex alakban az egzisztenciális kvantor előtt (azaz „balra") helyezkednek el: ezen változók minden értékkombinációjához létezik legalább egy olyan értéke az aktuális egzisztenciálisan kvantált változónak, melyre a formula igazságértéke igaz.

Mi a Skolem konstans?

Vizsgájuk meg a $\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_{j-1} \exists xj Q_{j+1} x_{j+1} \ldots Q_n x_n A$ prenexformulát, amelynek a prefixumából az egzisztenciális kvantorokat eliminálni szeretnénk. Legyen a prefixumban az első egzisztenciális kvantor a prefixum j-edik kvantora. Ha j=1, azaz a prefixumban az első kvantor rögtön egy egzisztenciális, akkor nyilván minden olyan interpretációban, amikor van olyan változókiértékelés, amely mellett a formula i igazságértékű, az interpretáció U univerzumában van legalább egy $u \in U$, hogy valamely κ változókiértékelés során az x változóhoz éppen u-t rendeljük és κ mellett a $Q_2 x_2 \ldots Q_n x_n A$ formula i igazságértékű lesz. Ezt az elemet **Skolem-konstans**nak nevezzük.

Hogyan kapjuk meg egy KNF maggal rendelkező Skolem formulával ekvivalens változóidegen, elsőrendű klózok konjunkciójaként előálló formulát?

A kvantorok bevitelével átírjuk 1. rendű klózok konjunkciójaként a formulát, ezek a klózok már változóidegenek lesznek, illetve a kapott formula nyilván ekvivalens az eredeti Skolem alakjával.

43. Tétel

Legyen Q egy Skolem formula és U egy n elemű univerzum. Milyen kapcsolat van a Q értékének kifejtéssel illetve szemantikus fával való megállapítása között? Adott univerzum és típus esetén hogyan lehet megadni itt az összes struktúrát szemantikus fával?

Milyen kapcsolat van a Q értékének kifejtéssel illetve szemantikus fával való megállapítása között?
Q értékének kifejtése egy konjunkció lesz, melyben a tagokba az összes lehetséges módon behelyettesítjük a változókat. Hasonlóan, ha a szemantikus fát felrajzoljuk, ott is az összes lehetséges módon előállított klózokat kell a szemantikus fa csúcsára illeszteni, a klózok és a konjunkció tagja egyértelműen megfeleltethetők egymásnak.

Adott univerzum és típus esetén hogyan lehet megadni itt az összes struktúrát szemantikus fával?
Az univerzum elemeinek felhasználásával előállítjuk az összes alapatomot, rögzítjük sorrendjüket (ez a bázis), a szemantikus fa szintjeihez ebben a sorrendben rendeljük hozzá az alapatomokat. Egy interpretáció a szemantikus fa egy ágán áll elő.

44. Tétel

Hogyan formalizálunk egy problémát az elsőrendű logikával való megoldásra? Egyenlõségjel nélküli nyelv esetén mit lehet tudni egy A fornula kielégíthetõségérõl illetve egy B formula azonosan igaz voltáról ha az A kielégíthetõ illetve a B azonosan igaz n számosságú halmazon.

Hogyan formalizálunk egy problémát az elsőrendű logikával való megoldásra?

Egy matematikai probléma mindig egy adott struktúrával kapcsolatban merül fel. A probléma formalizálásához pedig az illető struktúra(osztály) leíró nyelvének használata célszerű. A formalizáláshoz hozzátartozik az elméletet leíró formuláinak megadása is.
Ha egy adott nem matematikai probléma megoldásában logikai eszközökkel szeretnénk dolgozni, akkor a problémát és minden körülményt, amely ok-okozati kapsolatba hozható a problémával, egy formális rendszerbeli környezetbe kell helyezni. Ehhez rögzíteni kell a probléma megoldásához szükséges nyelvi elemeket, vagyis azokat a reláció- és függvényszimbólumokat, melyekkel ki lehet fejezni a probléma kapcsán érintett objektumok közötti kapcsolatokat. (Ezek mellett megadhatunk akár egy modellt, szemléltetésre, amely az adott nyelv logikán kivüli jeleinek jelentését rögzíti.) Az így kialakult nyelven formalizálhatjuk a problémát és a probléma környezetében meglévő speciális kapcsolatrendszert, valamint a feltételeket. ***Ezt a folyamatot nevezzük formalizálásnak.***

Legyen adott egy köznapi vagy matematikai probléma.
Tekintsük át az ilyen problémák elsőrendű formulákkal való leírásának folyamatát.
A problémát általában természetesnyelven leírt egyszerű vagy összetett kijelentőmondatokkal adják meg.
Minden állítást kifejező egyszerű mondat helyett bevezetünk egy-egy állításjelet vagy reláció vagy függvényszimbólumot. Egy összetett mondtot, amennyiben nem mellérendelt egyszerű mondatok kapcsolata, analizálunk, és átalakítjuk az eredeti mondattal azonos értelmű, de egyszerű mondatokból olyan nyelvtani összekötőkkel felépített mondattá, ahol a nyelvtani összekötők egyben logikai összekötők is. Ezután az állításjeleket, reláció és függvényszimbólumokat a logikai összekötőknek megfelelő jelekkel összekapcsolva kapjuk a problémát vagy megállapítást leíró összetett logikai állítást. Ebben kicserélve az állításjeleket változókkal nyerjük az elsőrendű formulát.
Pl.:”Minden labda pöttyös vagy nem pöttyös.”

$P(x)=i$, akkor, ha x pöttyös labda
Ekkor az állításunk $\forall x(P(x) \vee \neg P(x))$.

Egyenlõségjel nélküli nyelv esetén mit lehet tudni egy A fornula kielégíthetõségérõl illetve egy B formula azonosan igaz voltáról ha az A kielégíthetõ illetve a B azonosan igaz n számosságú halmazon.

45. Tétel

Mit értünk egy elsõrendű klózhalmaz Herbrand univerzumán, bázisán és interpretációján. Hogyan kapcsolhatók ezek a fogalmak a szemantikus fához. Mit jelent egy alapklóz illesztése egy szemantikus fára?

Herbrand-univerzum: Legyen K egy elsőrendű klózhalmaz. Legyen H0 a K-ban szereplő konstansok halmaza, ha K-ban nincs konstans, akkor H0={a}, ahol az a egy fiktív konstans. Legyen i=0,1,…-re Hi+1=Hi$\cup$Fi, ahol Fi az összes olyan f(t1,t2,…,tn) termek halmaza, amelyekre az f függvényszimbólum szerepel K-ban és tj$\in$Hi, (j=1,2,…,n). Hi-t a K i-edrendű konstansai halmazának, a H_∞-t a K Herbrand univerzumának nevezzük.

Herbrand-bázis: Legyen K egy elsőrendű klózhalmaz. A K atomhalmazának vagy Herbrand-bázisának nevezzük a K-beli literálokban szereplő atomi formulák H_∞ feletti összes alapelőfordulását.

Herbrand-interpretáció: Egy K elsőrendű klózhalmaz által meghatározott nyelv H interpretációjának nevezzük a K Herbrand-univerzumán értelmezett, az alábbiaknak eleget tevő I_H struktúrát: 1) A K-ban szereplő konstansokat I_H önmagukba képezi le. 2) Ha f egy a K-ban előforduló n-változós függvényszimbólum, akkor az I_H-ban az f egy H_∞^n->H_∞ leképezést jelöl. Ez a leképezés minden I_H-ban ugyanaz, és K Herbrand-univerzumából leolvasható. Ez azt jelenti, hogy a K-hoz tartozó Herbrand-interpretációkban a műveletek értelmezése egyforma. 3)Ha P egy a K-ban előforduló n-változós predikátumszimbólum, akkor az I_H-ban a P egy H_∞^n->{i,h} leképezést jelöl.

Egy K elsőrendű klózhalmazhoz tartozó Herbrand-univerzum feletti összes Herbrand-interpretáció ábrázolását ennek megfelelően, szintén szemantikus fával oldjuk meg. A K klózhalmaz kielégíthetetlenségének szemantikus fa lezárásával való igazolása is ugyanúgy történik. Vegyük észre, hogy megszámlálható számosságú Herbrand—univerzum feletti Herbrand-struktúrák számossága kontinuum.

Az a folyamat, amikor egy C klózhoz megkeresünk egy olyan utat a szemantikus fában, amelyen C minden literálja negálva szerepel, a C-nek az illető ágra való illesztése.

46. Tétel

Legyen S egy strukrúra, A az S axiómarendszere, F egy feltételhalmaz és B egy tételformula. Ha azt kell eldönteni, hogy F -bõl levezethetõ-e B bizonyításelméleti levezetéssel, akkor A a logika axiómarendszeréhez, vagy az F feltételhalmazhoz tartozik?

46.a. Tétel

Legyen S egy strukrúra, A az S axiómarendszere, F egy feltételhalmaz és B egy tételformula. Ha azt kell eldönteni, hogy az S strukrúrában F -nek következménye-e B, az A axiómarendszernek van-e szerepe a fenti következmény fennállásának igazolásában?

Az, hogy az S struktúrában F-nek következménye B, pontosan azt jelenti, hogy F-ből B levezethető (bizonyításelméleti levezetéssel). A bizonyításelméleti levezetéshez viszont szükségünk van olyan axiómákra, melyek leírják S műveleteit, hiszen a levezetés egy formulasorozat. Minden eleme ennek a formulasorozatnak háromféleképpen kerülhetett oda (1. Feltételhalmazban szerepel, 2. Modus Ponens alkalmazásával, 3. **axiómák alapján**). Tehát a válasz igen, van szerepe az A axiómarendszernek a következmény fennállásának igazolásában.