(Determinisztikus) Turing-gépek

- A **Turing-gép** egy olyan $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n \rangle$ rendszer, ahol
  - Q az állapotok véges, nemüres halmaza,
  - $q_0, q_i, q_n \in Q$, q_0 a kezdő- q_i az elfogadó- és q_n az elutasító állapot,
  - Σ és Γ ábécék, a bemenő jelek illetve a szalagszimbólumok ábécéje úgy, hogy $\Sigma \subseteq \Gamma$ és $\sqcup \in \Gamma \setminus \Sigma$.
  - $\delta : (Q \setminus \{q_i, q_n\}) \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, R, S\}$ az átmenet függvény.
- A Turing-gép működésének fázisait a gép konfigurációival írjuk le. A Turing-gép **konfigurációja** egy uqv szó, ahol $q \in Q$ és $u, v \in \Gamma^*, v \neq \varepsilon$.

  A konfiguráció a gép azon állapotát tükrözi amikor a szalag tartalma uv (uv előtt és után a szalagon már csak $\sqcup$ van), a gép a q állapotban van, és a gép író-olvasó feje a v szó első betűjén áll.
- A gép **kezdőkonfigurációja** egy olyan $q_0 u$ szó, ahol u csak Σ-beli betűket tartalmaz.
- Egy Turing-gép **konfigurációátmenetét** az alábbiak szerint definiáljuk. Legyen $uqav$ egy konfiguráció, ahol $a \in \Gamma$, $u, v \in \Gamma^*$.
  - Ha $\delta(q, a) = (r, b, R)$, akkor $uqav \vdash ubrv'$, ahol $v' = v$, ha $v \neq \varepsilon$, különben $v' = \sqcup$,
  - ha $\delta(q, a) = (r, b, S)$, akkor $uqav \vdash urbv$,
  - ha $\delta(q, a) = (r, b, L)$, akkor $uqav \vdash u'rcbv$, ahol $c \in \Gamma$ és $u'c = u$, ha $u \neq \varepsilon$, különben $u' = u$ és $c = \sqcup$.
- Azt mondjuk, hogy M **véges sok lépésben eljut** a C konfigurációból a C' konfigurációba (jele $C \vdash^* C'$), ha van olyan $n \geq 1$ és $C_1, \ldots, C_n$ konfigurációsorozat, hogy $C_1 = C, C_n = C'$ és minden $1 \leq i < n$-re, $C_i \vdash C_{i+1}$.
- Ha $q \in \{q_i, q_n\}$, akkor azt mondjuk, hogy az uqv konfiguráció egy **megállási konfiguráció**. $q = q_i$ esetében **elfogadó**, míg $q = q_n$ esetében **elutasító konfigurációról** beszélünk.
- Az M által **felismert nyelv** (amit $L(M)$-mel jelölünk) azoknak az $u \in \Sigma^*$ szavaknak a halmaza, melyekre igaz, hogy $q_0 u \vdash^* x q_i y$ valamely $x, y \in \Gamma^*, y \neq \varepsilon$ szavakra.
- Egy $L \subseteq \Sigma^*$ nyelv **Turing-felismerhető**, ha $L = L(M)$ valamely M

  Turing-gépre. Továbbá, egy $L \subseteq \Sigma^*$ nyelv **eldönthető**, ha létezik olyan M

  Turing-gép, mely minden bemeneten megállási konfigurációba jut és felismeri az L-et. A Turing-felismerhető nyelveket szokás **rekurzívan felsorolhatónak**, az eldönthető nyelveket pedig **rekurzívnak** is nevezni. A rekurzívan felsorolható nyelvek osztályát RE -vel, a rekurzív nyelvek osztályát pedig R-rel jelöljük.
- Tekintsünk egy $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n \rangle$ Turing-gépet és annak egy $u \in \Sigma^*$ bemenő szavát. Azt mondjuk, hogy M **futási ideje (időigénye)** az u szón n ($n \geq 0$), ha M a $q_0 u$ kezdőkonfigurációból n lépésben (konfigurációátmenettel) jut el megállási konfigurációba. Ha nincs ilyen szám, akkor M futási ideje az u-n végtelen.
- Legyen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ egy függvény. Azt mondjuk, hogy M **időigénye** $f(n)$ (vagy, hogy M egy $f(n)$ időkorlátos gép), ha minden $u \in \Sigma^*$ input szóra, M időigénye az u szón legfeljebb $f(|u|)$.
- A k**-szalagos Turing-gép** egy olyan $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n \rangle$ rendszer, ahol
  - Q az állapotok véges, nemüres halmaza,
  - $q_0, q_i, q_n \in Q$, q_0 a kezdő- q_i az elfogadó- és q_n az elutasító állapot,
  - Σ és Γ ábécék, a bemenő jelek illetve a szalagszimbólumok ábécéje úgy, hogy $\Sigma \subseteq \Gamma$ és $\sqcup \in \Gamma \setminus \Sigma$,
  - $\delta : (Q \setminus \{q_i, q_n\}) \times \Gamma^k \to Q \times \Gamma^k \times \{L, R, S\}^k$ az átmenet függvény.
- A k szalagos Turing-gép **konfigurációja** egy $\begin{array}{ccc} u_1 & & v_1 \\ \vdots & q & \vdots \\ u_k & & v_k \end{array}$ szó, ahol $q \in Q$ és $u_i, v_i \in \Gamma^*, v_i \neq \varepsilon$ $(1 \leq i \leq k)$. Az u szóhoz tartozó **kezdőkonfiguráció:** $u_i = \varepsilon$ $(1 \leq i \leq k)$, $v_1 = u$, és $v_i = \sqcup$ $(2 \leq i \leq k)$. Időigény: mint az egyszalagosnál (konfigurációátmenetek száma alapján).
- **Szófüggvényt kiszámító Turing-gép**:

  Az M (determinisztikus) Turing-gép kiszámítja az $f : \Sigma^* \to \Gamma^*$ szófüggvényt, ha M minden $u \in \Sigma^*$-ra olyan vqw megállási konfigurációba jut ($q \in \{q_i, q_n\}$), ahol $vw = f(u)$ (szóeleji és szóvégi $\sqcup$-ektől eltekintve). Időigény: mint fent (konfigurációátmenetek száma alapján).