# Introdução a Métodos Computacionais em Física
# Módulo 7

Leonardo Cabral

3 de Outubro de 2019

UFPE

DF-UFPE

### Objetivo 1

Estudo de sistemas de corpos interagindo gravitacionalmente. Órbitas estáveis e espalhamento.

### Objetivo 2

Elaboração de rotinas que simulem corpos interagentes. Visualização utilizando biblioteca `OpenGL`

# Corpos interagentes

Sistema de $N$ corpos interagentes

Equação de movimento (forças de interação mútua centrais)

$$m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \vec{f}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|), \qquad \text{onde } i = 1,\, 2,\, \ldots, N,$$

com $\vec{r}_i(0) = \vec{r}_0$ e $\vec{v}_i(0) = \vec{v}_0$

Exemplo: interações gravitacionais

$$\vec{f}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) = -\frac{Gm_im_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^2}\hat{r}_{ij}, \qquad \hat{r}_{ij} = \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|},$$

Energia mecânica e momento angular total do sistema se conservam:

$$E = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_iv_i^2}{2} + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{i-1} U(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|), \qquad \text{onde } U(r_{ij}) = -\frac{Gm_im_j}{r_{ij}},$$

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{p}_i, \qquad \text{onde } \vec{p}_i = m_i\vec{v}_i$$

# Corpos celestes

- Solução para $N = 2$ é conhecida (ver H. Goldstein, *Classical Mechanics*, $2^{\text{nd}}$ Ed., Addison-Wesley, Cap. 3.)

# Corpos celestes

- Solução para $N = 2$ é conhecida (ver H. Goldstein, *Classical Mechanics*, $2^{\mathrm{nd}}$ Ed., Addison-Wesley, Cap. 3.)
- Solução para $N > 2$: ????

UFPE

DF-UFPE

# Corpos celestes

- Solução para $N = 2$ é conhecida (ver H. Goldstein, *Classical Mechanics*, $2^{\mathrm{nd}}$ Ed., Addison-Wesley, Cap. 3.)
- Solução para $N > 2$: ????
- Recurso para resolver o problema de $N$ corpos: Simulações numéricas!

UFPE

DF-UFPE

# Corpos celestes

Algumas observações:

1. Interações gravitacionais são *atrativas*. Isto quer dizer que se deve ter atenção redobrada para situações em que dois corpos estejam muito próximos (por que?).

Estas observações estão melhor detalhadas nas notas de aula.

# Corpos celestes

Algumas observações:

1. Interações gravitacionais são *atrativas*. Isto quer dizer que se deve ter atenção redobrada para situações em que dois corpos estejam muito próximos (por que?).
2. A trajetória a ser descrita pelos corpos depende das posições e velocidades iniciais dos mesmos.

Estas observações estão melhor detalhadas nas notas de aula.

# Corpos celestes

Algumas observações:

1. Interações gravitacionais são *atrativas*. Isto quer dizer que se deve ter atenção redobrada para situações em que dois corpos estejam muito próximos (por que?).
2. A trajetória a ser descrita pelos corpos depende das posições e velocidades iniciais dos mesmos.
3. É recomendável *normalizar* as quantidades envolvidas no problema. Isto porque as ordens de grandezas das variáveis são muito diferentes (e.g. $G = 6.67 \times 10^{-11}$ m$^3$/kg s$^2$, enquanto que a distância terra-sol é da ordem de $1.5 \times 10^8$ km).

Estas observações estão melhor detalhadas nas notas de aula.

# Corpos celestes

O que é preciso para escrever um programa para um sistema de corpos integarindo entre si?

1. O sistema de corpos é mais convenientemente descrito por um *array* (ou as posições, velocidades e forças em cada corpo são elementos de um *array*).

# Corpos celestes

O que é preciso para escrever um programa para um sistema de corpos integarindo entre si?

1. O sistema de corpos é mais convenientemente descrito por um *array* (ou as posições, velocidades e forças em cada corpo são elementos de um *array*).
2. A força sobre o $i$-ésimo corpo é a soma de cada uma das forças exercidas por todos os outros corpos do sistema.

UFPE

DF-UFPE

# Corpos celestes

O que é preciso para escrever um programa para um sistema de corpos integarindo entre si?

1. O sistema de corpos é mais convenientemente descrito por um *array* (ou as posições, velocidades e forças em cada corpo são elementos de um *array*).
2. A força sobre o $i$-ésimo corpo é a soma de cada uma das forças exercidas por todos os outros corpos do sistema.
3. As forças sobre todos os corpos do sistema devem ser calculadas antes de as equações de movimento serem integradas.

# Corpos celestes

O que é preciso para escrever um programa para um sistema de corpos integarindo entre si?

1. O sistema de corpos é mais convenientemente descrito por um *array* (ou as posições, velocidades e forças em cada corpo são elementos de um *array*).
2. A força sobre o $i$-ésimo corpo é a soma de cada uma das forças exercidas por todos os outros corpos do sistema.
3. As forças sobre todos os corpos do sistema devem ser calculadas antes de as equações de movimento serem integradas.
4. Após o computo de todas as forças um passo do método de integração escolhido é implementado.

# Corpos celestes

O que é preciso para escrever um programa para um sistema de corpos integarindo entre si?

1. O sistema de corpos é mais convenientemente descrito por um *array* (ou as posições, velocidades e forças em cada corpo são elementos de um *array*).
2. A força sobre o $i$-ésimo corpo é a soma de cada uma das forças exercidas por todos os outros corpos do sistema.
3. As forças sobre todos os corpos do sistema devem ser calculadas antes de as equações de movimento serem integradas.
4. Após o computo de todas as forças um passo do método de integração escolhido é implementado.
5. Ao término da atualização de todas as posições e velocidades dos corpos, as forças são recalculadas. O processo de 2. a 4. é repetido até que algum critério de parada seja atigindo ou se deseje encerrar a execução do programa.

# Atividade 1

Responda as questões abaixo em um breve relatório contendo seus resultados.
Se possível, visualize a dinâmica do sistema de corpos celestes utilizando a biblioteca `OpenGL` (e uma biblioteca como `glfw` ou `glut`, por exemplo, para gerenciar janelas).

Construa numericamente um 'sistema solar' (ver Seção 5.9 do Tobochnik), i.e., considere um corpo celeste (uma estrela, por exemplo) de massa $m_0 = M$ e planetas de massas $m_i$. Inicialmente posicione-os em posições $\vec{r}_i$ com velocidades $\vec{v}_i$, onde $i = 1, 2, \dots N$ (fique à vontade para escolher o valor de $N$, desde que $N > 1$). Como o sistema é conservativo, escolha um método simplético para simular o sistema.

1. Obtenha órbitas fechadas para os planetas. Como estas órbitas são modificadas quando as condições iniciais são alteradas.

# Atividade 1

Responda as questões abaixo em um breve relatório contendo seus resultados.
Se possível, visualize a dinâmica do sistema de corpos celestes utilizando a biblioteca `OpenGL` (e uma biblioteca como `glfw` ou `glut`, por exemplo, para gerenciar janelas).

Construa numericamente um 'sistema solar' (ver Seção 5.9 do Tobochnik), i.e., considere um corpo celeste (uma estrela, por exemplo) de massa $m_0 = M$ e planetas de massas $m_i$. Inicialmente posicione-os em posições $\vec{r}_i$ com velocidades $\vec{v}_i$, onde $i = 1, 2, \ldots N$ (fique à vontade para escolher o valor de $N$, desde que $N > 1$). Como o sistema é conservativo, escolha um método simplético para simular o sistema.

1. Obtenha órbitas fechadas para os planetas. Como estas órbitas são modificadas quando as condições iniciais são alteradas.
2. Verifique que a energia mecânica e o momento angular total se conservam (i.e., flutuam em torno de um valor médio). Verifique também a validade das leis de Kepler.

UFPE

DF-UFPE

# Atividade 1

Responda as questões abaixo em um breve relatório contendo seus resultados.
Se possível, visualize a dinâmica do sistema de corpos celestes utilizando a biblioteca `OpenGL` (e uma biblioteca como `glfw` ou `glut`, por exemplo, para gerenciar janelas).

Construa numericamente um 'sistema solar' (ver Seção 5.9 do Tobochnik), i.e., considere um corpo celeste (uma estrela, por exemplo) de massa $m_0 = M$ e planetas de massas $m_i$. Inicialmente posicione-os em posições $\vec{r}_i$ com velocidades $\vec{v}_i$, onde $i = 1, 2, \ldots N$ (fique à vontade para escolher o valor de $N$, desde que $N > 1$). Como o sistema é conservativo, escolha um método simplético para simular o sistema.

1. Obtenha órbitas fechadas para os planetas. Como estas órbitas são modificadas quando as condições iniciais são alteradas.
2. Verifique que a energia mecânica e o momento angular total se conservam (i.e., flutuam em torno de um valor médio). Verifique também a validade das leis de Kepler.
3. Para um sistema contendo apenas dois corpos celestes (e.g., uma extrela e um planeta) compare o resultado numérico ao da solução analítica (ver ver H. Goldstein, *Classical Mechanics*, $2^{\mathrm{nd}}$ Ed., Addison-Wesley, Cap. 3).

# Atividade 1

Responda as questões abaixo em um breve relatório contendo seus resultados.
Se possível, visualize a dinâmica do sistema de corpos celestes utilizando a biblioteca `OpenGL` (e uma biblioteca como `glfw` ou `glut`, por exemplo, para gerenciar janelas).

Construa numericamente um 'sistema solar' (ver Seção 5.9 do Tobochnik), i.e., considere um corpo celeste (uma estrela, por exemplo) de massa $m_0 = M$ e planetas de massas $m_i$. Inicialmente posicione-os em posições $\vec{r}_i$ com velocidades $\vec{v}_i$, onde $i = 1, 2, \ldots N$ (fique à vontade para escolher o valor de $N$, desde que $N > 1$). Como o sistema é conservativo, escolha um método simplético para simular o sistema.

1. Obtenha órbitas fechadas para os planetas. Como estas órbitas são modificadas quando as condições iniciais são alteradas.
2. Verifique que a energia mecânica e o momento angular total se conservam (i.e., flutuam em torno de um valor médio). Verifique também a validade das leis de Kepler.
3. Para um sistema contendo apenas dois corpos celestes (e.g., uma extrela e um planeta) compare o resultado numérico ao da solução analítica (ver ver H. Goldstein, *Classical Mechanics*, $2^{\text{nd}}$ Ed., Addison-Wesley, Cap. 3).

**Observação:** O 'sistema solar' considerado aqui pode ser o de um planeta orbitado por luas, assim como júpiter ou saturno, por exemplo.

# Atividade 2

Responda as questões abaixo em um breve relatório contendo seus resultados.
Se possível, visualize a dinâmica do sistema de corpos celestes utilizando a biblioteca `OpenGL` (e uma biblioteca como `glfw` ou `glut`, por exemplo, para gerenciar janelas).

1. Modifique o dependência com a distância das forças de atração entre os corpos, ao introduzir uma correção relativística $\sim r^{-4}$ para a força gravitacional (ver o problema 5.4(b) do Tobochnik). Descreva o que acontece com as órbitas dos planetas.

# Atividade 2

Responda as questões abaixo em um breve relatório contendo seus resultados.
Se possível, visualize a dinâmica do sistema de corpos celestes utilizando a biblioteca `OpenGL` (e uma biblioteca como `glfw` ou `glut`, por exemplo, para gerenciar janelas).

1. Modifique o dependência com a distância das forças de atração entre os corpos, ao introduzir uma correção relativística $\sim r^{-4}$ para a força gravitacional (ver o problema 5.4(b) do Tobochnik). Descreva o que acontece com as órbitas dos planetas.
2. Considere, agora, um sistema binário, formado por duas estrelas de massas similares $M_1 \sim M_2$. Estude as órbitas de planetas (de massas $m \ll M_1$) neste sistema. Tente encontrar órbitas estáveis. O que você acha que aconteceria em sistemas ternários por exemplo?

UFPE

DF-UFPE

# Atividade 2

Responda as questões abaixo em um breve relatório contendo seus resultados.
Se possível, visualize a dinâmica do sistema de corpos celestes utilizando a biblioteca `OpenGL` (e uma biblioteca como `glfw` ou `glut`, por exemplo, para gerenciar janelas).

1. Modifique o dependência com a distância das forças de atração entre os corpos, ao introduzir uma correção relativística $\sim r^{-4}$ para a força gravitacional (ver o problema 5.4(b) do Tobochnik). Descreva o que acontece com as órbitas dos planetas.
2. Considere, agora, um sistema binário, formado por duas estrelas de massas similares $M_1 \sim M_2$. Estude as órbitas de planetas (de massas $m \ll M_1$) neste sistema. Tente encontrar órbitas estáveis. O que você acha que aconteceria em sistemas ternários por exemplo?
3. Você é capaz de obter órbitas estáveis de três corpos de mesma massa?

UFPE

DF-UFPE