# Introdução a Métodos Computacionais em Física
# Módulo 4

Leonardo Cabral

12 de Setembro de 2019

### Objetivo

Estudar sistemas simples que apresentam dinâmica caótica.

### Exemplo simples: mapa logístico

$$x_{n+1} = 4\, r\, x_n\, (1 - x_n)\,, \qquad n = 0,\, 1,\, 2,\, 3,\, \ldots$$

Mais informações sobre este assunto podem ser encontradas no Cap. 6 do H. Gould, J. Tobochnik e W. Christian, "An Introduction to Computer Simulations Methods: Applications to Physical systems", $3^{\mathrm{rd}}$ Ed.

## Modelo para crescimento populacional

- Em geração a população cresce por um fator (acesso a recursos alimentícios, por exemplo, propicia aumento populacional), i.e., $P_{n+1} = aP_n$.
- Entretanto, devido à limitação dos recursos disponíveis, este fator deve depender da população: quanto maior a população, menor a quantidade de recursos disponíveis. Logo, $a \to a - bP_n$.
- A dinâmica do sistema é descrita por

$$P_{n+1} = (a - bP_n)\, P_n$$

  Definindo $x_n = bP_n/a$ e $a = 4r$, a equação acima se torna

$$x_{n+1} = f(x_n) = 4rx_n\,(1 - x_n)\,, \qquad 0 \leq x_n \leq 1, \qquad 0 < r \leq 1,$$

  Esta equação depende apenas de um parâmetro e a função $f(x_n)$ acima é chamada de mapa logístico.
- A sequência de valores $\{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ é chamada de *trajetória* e o valor inicial $x_0$ é chamado de *semente*.

# Atividade 1

Responda as questões abaixo em um breve relatório contendo seus resultados.

Utilizando diferentes valores da semente $x_0$, obtenha as trajetórias do mapa logístico (e as mostre graficamente) para os seguintes casos:

1. $r = 0.24$.
   Mostre que $x = 0$ é o único ponto fixo estável para este valor de $r$.

UFPE

DF-UFPE

# Atividade 1

Responda as questões abaixo em um breve relatório contendo seus resultados.

Utilizando diferentes valores da semente $x_0$, obtenha as trajetórias do mapa logístico (e as mostre graficamente) para os seguintes casos:

1. $r = 0.24$.
   Mostre que $x = 0$ é o único ponto fixo estável para este valor de $r$.
2. $r = 0.26$, $r = 0.5$ e $r = 0.748$.
   É $x = 0$ ponto fixo estável ou instável? Mostre que o sistema possui um único atrator estável, i.e., para $r$ fixo e $n \gg 1$, $x_n$ se aproxima de um valor específico, independentemente da semente escolhida. Diz-se, então, que o comportamento assintótico do sistema é de período 1.

UFPE

DF-UFPE

# Atividade 1

Responda as questões abaixo em um breve relatório contendo seus resultados.

Utilizando diferentes valores da semente $x_0$, obtenha as trajetórias do mapa logístico (e as mostre graficamente) para os seguintes casos:

1. $r = 0.24$.
   Mostre que $x = 0$ é o único ponto fixo estável para este valor de $r$.
2. $r = 0.26$, $r = 0.5$ e $r = 0.748$.
   É $x = 0$ ponto fixo estável ou instável? Mostre que o sistema possui um único atrator estável, i.e., para $r$ fixo e $n \gg 1$, $x_n$ se aproxima de um valor específico, independentemente da semente escolhida. Diz-se, então, que o comportamento assintótico do sistema é de período 1.
3. $r = 0.752$, $r = 0.8$ e $r = 0.862$.
   Examine o que acontece com $x_n$ para $n \gg 1$ (tipicamente $\sim 1000$). Verifique que o ponto fixo observado no item anterior se bifurca em dois pontos fixos, $x_1^*$ e $x_2^*$ (este par forma um atrator estável de período 2).

UFPE

DF-UFPE

# Atividade 1

Responda as questões abaixo em um breve relatório contendo seus resultados.

Utilizando diferentes valores da semente $x_0$, obtenha as trajetórias do mapa logístico (e as mostre graficamente) para os seguintes casos:

1. $r = 0.24$.
   Mostre que $x = 0$ é o único ponto fixo estável para este valor de $r$.
2. $r = 0.26$, $r = 0.5$ e $r = 0.748$.
   É $x = 0$ ponto fixo estável ou instável? Mostre que o sistema possui um único atrator estável, i.e., para $r$ fixo e $n \gg 1$, $x_n$ se aproxima de um valor específico, independentemente da semente escolhida. Diz-se, então, que o comportamento assintótico do sistema é de período 1.
3. $r = 0.752$, $r = 0.8$ e $r = 0.862$.
   Examine o que acontece com $x_n$ para $n \gg 1$ (tipicamente $\sim 1000$). Verifique que o ponto fixo observado no item anterior se bifurca em dois pontos fixos, $x_1^*$ e $x_2^*$ (este par forma um atrator estável de período 2).
4. $r > 0.863$.
   Escolha alguns valores de $r$ acima de 0.863 e examine os resultados.

UFPE

DF-UFPE

# Atividade 1

Responda as questões abaixo em um breve relatório contendo seus resultados.

O comportamento do sistema dinâmico para tempos longos pode ser também observado em um gráfico dos valores de $x$ (para $n \gg 1$) em função de $r$. Escolha $n > 1000$ e proceda da seguinte maneira:

5. Escreva uma rotina que calcule $x_n$ (para $n$ muito grande) em função de $r$ (considere $0 \leq r \leq 1$). Para cada valor de $r$ inicie com diversos valores diferentes da semente $x_0$. Faça um gráfico dos valores obtidos em função de $r$.

UFPE

DF-UFPE

# Atividade 1

Responda as questões abaixo em um breve relatório contendo seus resultados.

O comportamento do sistema dinâmico para tempos longos pode ser também observado em um gráfico dos valores de $x$ (para $n \gg 1$) em função de $r$. Escolha $n > 1000$ e proceda da seguinte maneira:

5. Escreva uma rotina que calcule $x_n$ (para $n$ muito grande) em função de $r$ (considere $0 \leq r \leq 1$). Para cada valor de $r$ inicie com diversos valores diferentes da semente $x_0$. Faça um gráfico dos valores obtidos em função de $r$.
6. Amplie a escala do gráfico (i.e., restrinja o intervalo de valores para $r$) de modo a conseguir observar o dobramento de período.

UFPE

DF-UFPE

Responda as questões abaixo em um breve relatório contendo seus resultados.

O comportamento do sistema dinâmico para tempos longos pode ser também observado em um gráfico dos valores de $x$ (para $n \gg 1$) em função de $r$. Escolha $n > 1000$ e proceda da seguinte maneira:

5. Escreva uma rotina que calcule $x_n$ (para $n$ muito grande) em função de $r$ (considere $0 \leq r \leq 1$). Para cada valor de $r$ inicie com diversos valores diferentes da semente $x_0$. Faça um gráfico dos valores obtidos em função de $r$.
6. Amplie a escala do gráfico (i.e., restrinja o intervalo de valores para $r$) de modo a conseguir observar o dobramento de período.
7. Tente determinar o valor $r = r_{\text{ch}}$ para o qual o dobramento de período acaba. O que acontece quando $r$ for maior do que este valor?

# Atividade 1

Responda as questões abaixo em um breve relatório contendo seus resultados.

O comportamento do sistema dinâmico para tempos longos pode ser também observado em um gráfico dos valores de $x$ (para $n \gg 1$) em função de $r$. Escolha $n > 1000$ e proceda da seguinte maneira:

5. Escreva uma rotina que calcule $x_n$ (para $n$ muito grande) em função de $r$ (considere $0 \leq r \leq 1$). Para cada valor de $r$ inicie com diversos valores diferentes da semente $x_0$. Faça um gráfico dos valores obtidos em função de $r$.
6. Amplie a escala do gráfico (i.e., restrinja o intervalo de valores para $r$) de modo a conseguir observar o dobramento de período.
7. Tente determinar o valor $r = r_{\mathrm{ch}}$ para o qual o dobramento de período acaba. O que acontece quando $r$ for maior do que este valor?
8. Há janelas de comportamento periódico para $r > r_{\mathrm{ch}}$. Se sim, tente obtê-las.

## Como determinar se um sistema é caótico?

- Característica: sensibilidade às condições iniciais. Por exemplo, tome $r = 0.91$ no mapa logístico e duas sementes, $x_0 = 0.5$ e $x_0 = 0.5001$. Observe o que acontece com a diferença entre os $x_n$ das duas sementes a medida que $n$ cresce.

## Como determinar se um sistema é caótico?

- Característica: sensibilidade às condições iniciais. Por exemplo, tome $r = 0.91$ no mapa logístico e duas sementes, $x_0 = 0.5$ e $x_0 = 0.5001$. Observe o que acontece com a diferença entre os $x_n$ das duas sementes a medida que $n$ cresce.
- Divergência das trajetórias pode ser descrita pelo *expoente de Lyapunov*, $\lambda$, definido por

$$|\Delta x_n| = |\Delta x_0| \, e^{\lambda n}.$$

  Se $\lambda > 0$ trajetórias vizinhas divergem exponencialmente.

## Como determinar se um sistema é caótico?

- Característica: sensibilidade às condições iniciais. Por exemplo, tome $r = 0.91$ no mapa logístico e duas sementes, $x_0 = 0.5$ e $x_0 = 0.5001$. Observe o que acontece com a diferença entre os $x_n$ das duas sementes a medida que $n$ cresce.
- Divergência das trajetórias pode ser descrita pelo *expoente de Lyapunov*, $\lambda$, definido por
$$|\Delta x_n| = |\Delta x_0|\, e^{\lambda n}.$$
Se $\lambda > 0$ trajetórias vizinhas divergem exponencialmente.
- Determinação de $\lambda$: Dada uma trajetória $\{x_i\}_{i=0}^{n}$,
$$\lambda = \frac{1}{n}\ln\left|\frac{\Delta x_n}{\Delta x_0}\right| = \frac{1}{n}\ln\left|\frac{\Delta x_1}{\Delta x_0}\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}\cdots\frac{\Delta x_{n-1}}{\Delta x_{n-2}}\frac{\Delta x_n}{\Delta x_{n-1}}\right| = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\ln\left|\frac{\Delta x_{i+1}}{\Delta x_i}\right|$$
Se a diferença inicial das trajetórias é suficientemente pequena: $\dfrac{\Delta x_{i+1}}{\Delta x_i} \to \dfrac{dx_{i+1}}{dx_i}$.
Exclusão das $n_t \sim 10^3$ iterações iniciais referente ao período transiente.
$$\lambda = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n-n_t}\sum_{i=n_t}^{n-1}\ln\left|f'(x_i)\right|, \qquad \frac{dx_{i+1}}{dx_i} = f'(x_i) = 4r\,(1-2x_i)$$

# Atividade 1

Responda as questões abaixo em um breve relatório contendo seus resultados.

10. Faça um gráfico de $\lambda$ versus $r$ e compare com o gráfico de $x$ versus $r$.

# Atividade 1

Responda as questões abaixo em um breve relatório contendo seus resultados.

10. Faça um gráfico de $\lambda$ versus $r$ e compare com o gráfico de $x$ versus $r$.
11. O que acontece com o expoente de Lyapunov quando há dobramento de período?

# Atividade 1

Responda as questões abaixo em um breve relatório contendo seus resultados.

10. Faça um gráfico de $\lambda$ versus $r$ e compare com o gráfico de $x$ versus $r$.
11. O que acontece com o expoente de Lyapunov quando há dobramento de período?
12. As regiões em que o comportamento parece caótico no gráfico de $x$ versus $r$ coincidem com valores positivos de $\lambda$? Por que?

# Atividade 1

Responda as questões abaixo em um breve relatório contendo seus resultados.

10. Faça um gráfico de $\lambda$ versus $r$ e compare com o gráfico de $x$ versus $r$.
11. O que acontece com o expoente de Lyapunov quando há dobramento de período?
12. As regiões em que o comportamento parece caótico no gráfico de $x$ versus $r$ coincidem com valores positivos de $\lambda$? Por que?
13. Utilizando o procedimento descrito acima, determine as propriedades dos seguintes mapas unidimensionais:

    13.1 $f(x) = x\, e^{r(1-x)}$

    13.2 $f(x) = r\ \mathrm{sen}(\pi x)$