FUNDAÇÃO GETÚLIO VARGAS
ESCOLA DE MATEMÁTICA APLICADA
Processos Estocásticos

CADEIAS DE RAMIFICAÇÃO

GABRIEL CARNEIRO NUNES DA SILVA
LUCAS MENEZES DE LIMA
RODRIGO SEVERO ARAÚJO
VINICIUS TAVARES MENDES DOS SANTOS

Rio de Janeiro – RJ
Dezembro de 2025

Sumário

1 Introdução **2**
1.1 Exemplo Motivador 2

2 Processo de Ramificação **4**

3 A Função Geradora de Probabilidade **7**
3.1 Propriedades da FGP 7
3.2 Utilidade da FGP com processos de ramificação 8
3.2.1 FGP e a probabilidade de extinção 9
3.2.2 Análise Gráfica e Condições de Extinção 12
3.2.3 Valor Esperado de um processo de ramificação 13

4 Tempo de Extinção **15**

5 Aplicações **15**
5.1 Mutação 16
5.2 Resistência a um determinado Medicamento 18

1 Introdução

O estudo da dinâmica das populações é frutífero para a matemática, como sabemos do estudo das equações diferenciais de Verhulst ou dos modelos clássicos de predador-presa, como o de Lotka-Volterra. Nesse trabalho, apresentamos uma teoria que também se originou no estudo da dinâmica populacional, mas que se baseia principalmente na modelagem da reprodução como sendo um processo estocástico: A teoria das Cadeias de Ramificação.

A ideia de utilizar um processo estocástico para estudar o crescimento populacional tem origem nos trabalhos de Francis Galton[1] e de Henry William Watson, que estavam interessados na possível extinção de sobrenomes de aristocratas no Reino Unido. Em vista disso, a teoria das cadeias de ramificação carrega muitas nomenclaturas inspiradas no momento inicial de seu desenvolvimento, como veremos.

Uma descrição simples para uma cadeia de ramificação é a seguinte: um indivíduo de uma certa espécie se reproduz (e morre logo em seguida) de maneira assexuada, com o vetor $\mathbf{p} = (p_1, p_2 \ldots, p_k, \ldots)$ sendo a distribuição de probabilidade para o tamanho de sua prole. Queremos modelar a quantidade de indivíduos Z_n na enésima geração, considerando que todos indivíduos de uma mesma geração se reproduzem de maneira independente de acordo com $\mathbf{p}$ e que começamos em $Z_0 = 1$.

Estabelecido essa concepção do modelo, surgem as seguintes perguntas acerca de seu comportamento:

- Qual o número esperado de filhos de cada indivíduo?
- Qual a esperança e a variância de Z_n?;
- É possível achar a distribuição de Z_n?;
- É possível achar a probabilidade de extinção da cadeia? (ou seja, a probabilidade de que haja um instante N no qual $Z_N = 0$);
- É possível achar as condições para eventual extinção da cadeia?,
- Se é certa a extinção, podemos achar a distribuição do tempo até ela?

Planejamos, nas seguintes seções, desenvolver a teoria necessária para tentar responder as perguntas acima. Entretanto, vamos tentar aplicar os nossos conhecimentos já estabelecidos de probabilidade em um exemplo motivador básico.

1.1 Exemplo Motivador

Exemplo 1.1.1

Tome $\mathbf{p} \sim k \cdot \text{Bernoulli}(p)$, ou seja, cada indivíduo dessa espécie tem k filhos com probabilidade p ou não tem nenhum filho com probabilidade $1 - p$.

No exemplo 1.1.1, algumas das perguntas feitas inicialmente são relativamente fáceis de responder:

- O número esperado de filhos é $k\mathbb{E}(\mathbf{p}) = k \cdot p$;

[1]Curiosidade: era também primo de Charles Darwin e foi o idealizador da eugenia

- A distribuição condicional de Z_n dado Z_{n-1} é k vezes uma binomial de parâmetros Z_{n-1}, p, pois enésima geração é composta exatamente pela quantidade de filhos que cada um dos indivíduos da geração anterior teve, e a soma de Bernoullis resulta numa binomial. Esse é o melhor que conseguimos chegar com nossa ferramentas atuais, visto que a distribuição não condicional já é muito complicada de se descrever;

- Pelo dito acima, temos que $\mathbb{E}(Z_n) = kp\mathbb{E}(Z_{n-1})$, logo, resolvendo a recorrência com a condição de contorno de que $\mathbb{E}(Z_1) = kp$, concluímos que $\mathbb{E}(Z_n) = (kp)^n$. Usando a lei da variância total, obtemos:

$$Var(Z_n) = \mathbb{E}(Var(Z_n|Z_{n-1})) + Var(\mathbb{E}(Z_n|Z_{n-1}))$$
$$Var(Z_n) = \mathbb{E}(Z_{n-1}k^2p(1-p)) + k^2p^2Var(Z_{n-1})$$
$$Var(Z_n) = k^2p(1-p)(kp)^{n-1} + k^2p^2Var(Z_n - 1)$$

  Usando a condição de contorno $Var(Z_1) = k^2p^2(1-p)^2$, obtemos que

$$Var(Z_n) = k^{n+1}p^n(1-p)(1 + (kp) + (kp)^2 + \cdots + (kp)^{n-1})$$

Iremos abordar de maneira mais completa a probabilidade de extinção em seções posteriores, mas o modelo do exemplo 1.1.1 já nos leva a interessantes reflexões: a extinção ou não dos indivíduos modelo parece depender apenas da distribuição da prole; a esperança e a variância de Z_n parecem ter o mesmo comportamento assintótico, isto é, ambas convergem ou divergem quando o $n \to \infty$; combinando as duas afirmações anteriores com a desigualdade de Markov, obtemos que:

$$\mathbb{P}(Z_n \geqslant 1) \leqslant \mathbb{E}(Z_n) = (kp)^n$$

Ou seja, apesar da média de Z_n não nos dá informação muito útil quando ela é maior do que 1, mas parece nos dizer que Z_n converge em probabilidade para 0 quando é estritamente menor do que 1.

Abaixo, estão os resultados da distribuição de Z_{20} advindos de simulações implementadas no arquivo `bernoulli.py`.

2 Processo de Ramificação

Definição 2.0.1 (Processo de Ramificação)

Um **processo de ramificação** é definido da seguinte forma:

- Um único indivíduo no instante $n = 0$.
- Cada indivíduo vive exatamente uma unidade de tempo, depois produz X descendentes e morre.
- O número de descendentes X assume valores $0, 1, 2, \ldots$, e a probabilidade de produzir k descendentes é $\mathbb{P}(X = k) = p_k$.
- Todos os indivíduos se reproduzem independentemente. Os indivíduos $1, 2, \ldots, n$ têm tamanhos de família $X_1, X_2, \ldots, X_n$, onde cada X_i tem a mesma distribuição que X.
- Seja Z_n o *número de indivíduos nascidos* no instante n, para $n = 0, 1, 2, \ldots$. Interprete Z_n como o *"tamanho" da geração* n.
- Então o processo de ramificação é $\{Z_0, Z_1, Z_2, Z_3, \ldots\} = \{Z_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Outra maneira de analisar, é o que foi dado na introdução, isto é, se $X_i^{(n)} \sim p$ é o número de filhos do indivíduo i da n-ésima geração, temos que

$$Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_i^{(n)}$$

Proposição 2.0.2 (Valor Esperado de Z_n)

Seja (Z_n) uma cadeia de ramificação. Seja X o número de descendentes de um determinado indivíduo (lembre que $X \sim p$), e suponha que $\mathbb{E}[X] = \mu$, então:

$$\mathbb{E}(Z_n) = \mu^n$$

Isto é, o valor esperado de indivíduos na cadeia no tempo n é o valor esperado do número de filhos que um indivíduo tenha na cadeia elevado a n.

Demonstração. De fato, podemos simplesmente fazer as contas:

$$\mathbb{E}(Z_n) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{Z_{n-1}} X_i^{(n)}\right) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{Z_{n-1}} X_i^{(n)} \middle| Z_{n-1}\right)\right) = \mathbb{E}(Z_{n-1} \cdot \mathbb{E}(X_i^{(n)}))$$

$$= \mathbb{E}(Z_{n-1}) \cdot \mathbb{E}(X) = \cdots = \mathbb{E}(Z_0) \cdot \mathbb{E}(X)^n = \mathbb{E}(X)^n$$

Portanto, $\mathbb{E}(Z_n) = \mathbb{E}(X)^n$, como queríamos □

Proposição 2.0.3 (Variância de Z_n)

Seja (Z_n) uma cadeia de ramificação. Seja X o número de descendentes de um determinado indivíduo (lembre que $X \sim p$), e suponha que $\mathbb{E}[X] = \mu$ e $\operatorname{Var}(X) = \sigma^2$. Então

$$\operatorname{Var}(Z_n) = \begin{cases} \sigma^2 n, & \text{se } \mu = 1, \\ \sigma^2 \mu^{n-1}\left(\dfrac{1-\mu^n}{1-\mu}\right), & \text{se } \mu \neq 1. \end{cases}$$

Demonstração. Podemos demonstrar essa fórmula utilizando a lei da variância total. De fato, seja $V_n = \operatorname{Var}(Z_n)$ e $Z_n = \sum_{i=1}^{Z_{n-1}} X_i^{(n)}$, temos que:

$$\operatorname{Var}(Z_n) = \mathbb{E}(\operatorname{Var}(Z_n|Z_{n-1})) + \operatorname{Var}(\mathbb{E}(Z_n|Z_{n-1}))$$

$$V_n = \mathbb{E}(Z_{n-1} \cdot \sigma^2) + \operatorname{Var}(Z_{n-1} \cdot \mu)$$

$$V_n = \mu^{n-1} \cdot \sigma^2 + \mu \cdot V_{n-1}$$

Encontramos uma recorrência para V_n, substituindo para os valores iniciais, podemos perceber um padrão se formando (a prova formal é dada por indução e não será feita aqui). De fato, observe que:

$$V_1 = \sigma^2$$

$$V_2 = \mu^2 V_1 + \sigma^2 \mu = \mu^2\sigma^2 + \mu\sigma^2 = \mu\sigma^2(1+\mu)$$

$$V_3 = \mu^2 V_2 + \sigma^2\mu^2 = \mu^2\sigma^2(1+\mu+\mu^2)$$

$$\vdots$$

$$V_n = \mu^{n-1}\sigma^2(1+\mu+\mu^2+\cdots+\mu^{n-1})$$

$$= \mu^{n-1}\sigma^2\left(\frac{1-\mu^n}{1-\mu}\right). \quad \text{Válido para } \mu \neq 1.$$

E portanto, se $\mu = 1$, obtemos

$$V_n = 1^{n-1}\sigma^2(1+1+1^2+\cdots+1^{n-1}) = \sigma^2 n$$

como queríamos.

□

Exemplo 2.0.4

Considere uma cadeia de ramificação (Z_n) com $p = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots)$, estudaremos alguma das perguntas vistas na introdução.

- Qual a esperança e a variância de Z_n?

  Observe que:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot \mathbb{P}(X = i) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i}{2^{i+1}}$$

  E portanto, podemos escrever como

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \cdots \\ +\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \cdots \\ + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \cdots\end{aligned}$$

  Logo, realizando a soma dessas progressões geométricas, temos $\mathbb{E}(X) = 1$, e também $\mathbb{E}(Z_n) = 1^n = 1$ para todo n.

- Qual a probabilidade de extinção da cadeia?

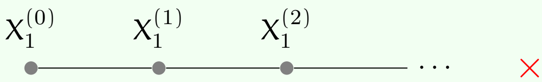
  É intuitivo imaginar que a probabilidade de extinção seja 1, a probabilidade de ter 0 filhos é muito maior que as demais probabilidades. Mas queremos ser capazes de fazer essas contas.

Exemplo 2.0.5

Aqui selecionamos alguns exemplos mais bobinhos que ajudam a nossa intuição quando queremos trabalhar sobre probabibilidade de extinção da cadeia.

1. Se eu tenho uma população tal que $p_0 = 1$, então na próxima geração certamente ela irá se extinguir, isto é $X_t = 0\ \forall t \geqslant 1$, e portanto, sua probabilidade de extinção é 1.

2. Se eu te tenho uma população tal que $p_0 = \frac{1}{100}$ e $p_1 = \frac{99}{100}$, então, no longo prazo, ela irá se extinguir, isto é, existirá um tempo t_0 tal que $X_t = \ \forall t \geqslant t_0$. Daí, sua probabilidade de extinção também é 1.



3. Caso seja uma população tal que $p_0 = \frac{1}{4}$, $p_1 = \frac{1}{2}$. $p_2 = \frac{1}{4}$, mostraremos também que a população irá se extinguir.

Daí surge a pergunta natural, como estudar a probabilidade de extinção em casos não-triviais? Usaremos a seguinte notação

$$p_e = \mathbb{P}(\text{Extinção}) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} Z_n = 0\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Z_n = 0)$$

Na seção seguinte, estudaremos uma ferramenta poderosa para lidar com probabilidades de extinção.

3 A Função Geradora de Probabilidade

A principal ferramenta analítica para estudar a evolução de processos de ramificação é a Função Geradora de Probabilidade (FGP).

Definição 3.0.1 (Função Geradora de Probabilidade)

Seja X uma variável aleatória discreta que assume valores no conjunto de inteiros não negativos $\{0, 1, 2, \dots\}$, com função de massa de probabilidade $p_k = P(X = k)$.
A **Função Geradora de Probabilidade** de X, denotada por $\Pi_X(s)$, é a série de potências definida por:

$$\Pi_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X = k)s^k = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k \tag{1}$$

Equivalentemente, a FGP pode ser expressa como o valor esperado:

$$\Pi_X(s) = \mathbb{E}[s^X] \tag{2}$$

Esta série converge absolutamente para $|s| \leqslant 1$.

3.1 Propriedades da FGP

Assumindo a definição da Função Geradora de Probabilidade (FGP) para uma v.a. X como $\Pi_X(s) = \mathbb{E}[s^X] = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k$, onde $p_k = P(X = k)$, temos as seguintes propriedades fundamentais.

Proposição 3.1.1 (Probabilidade na origem)

A FGP avaliada em $s = 0$ retorna a probabilidade de X ser zero.

$$\Pi_X(0) = p_0 = P(X = 0)$$

Demonstração. A prova é obtida por substituição direta de $s = 0$ na série de potências:

$$\Pi_X(s) = p_0 + p_1 s + p_2 s^2 + \dots$$
$$\Pi_X(0) = p_0 + p_1(0) + p_2(0)^2 + \dots = p_0$$

□

Proposição 3.1.2 (Derivadas na origem)

A n-ésima derivada da FGP avaliada em $s = 0$ permite recuperar a n-ésima probabilidade p_n.

$$\left.\frac{d^n \Pi_X}{ds^n}\right|_{s=0} = n! \cdot p_n \quad \Longrightarrow \quad p_n = \frac{\Pi_X^{(n)}(0)}{n!}$$

Demonstração. A FGP é, por definição, a série de Maclaurin (Taylor em $s = 0$) para $\Pi_X(s)$, cuja forma geral é $f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} s^n$. Comparando os coeficientes da FGP, $\Pi_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k$, com a forma de Maclaurin, identificamos termo a termo que:

$$p_k = \frac{\Pi_X^{(k)}(0)}{k!}$$

Rearranjando, obtemos $\Pi_X^{(k)}(0) = k! \cdot p_k$. □

Proposição 3.1.3 (Soma das Probabilidades)

A FGP avaliada em $s = 1$ é sempre igual a 1.

$$\Pi_X(1) = 1$$

Demonstração. Substituindo $s = 1$ na definição da FGP:

$$\Pi_X(1) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k (1)^k = \sum_{k=0}^{\infty} p_k$$

Pela definição de probabilidade, a soma de todas as probabilidades p_k para uma variável aleatória discreta deve ser 1.

$$\Pi_X(1) = 1$$

□

Exemplo 3.1.4

Considere a v.a. $X \sim \mathtt{Bernoulli}(p)$, iremos calcular a F.G.P desta variável aleatória.

$$\Pi_X(S) = \mathbb{E}(S^X) = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) \cdot S = (1 - p) + p \cdot S$$

3.2 Utilidade da FGP com processos de ramificação

A utilidade da FGP em processos de ramificação decorre da forma como ela lida com somas de variáveis aleatórias. Seja Z_n o tamanho da população na n-ésima geração, com FGP $\Pi_{Z_n}(s) = \mathbb{E}[s^{Z_n}]$. Seja X a variável aleatória da prole de um único indivíduo, com FGP $\Pi_X(s) = \mathbb{E}[s^X]$.

A relação fundamental entre as gerações é dada pela composição de funções:

$$\Pi_{Z_{n+1}}(s) = \Pi_{Z_n}(\Pi_X(s)) \tag{3}$$

Demonstração. Seja Z_n o número de indivíduos na geração n. O número de indivíduos na geração $n + 1$ é a soma dos descendentes de todos os Z_n indivíduos:

$$Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_i$$

Onde X_i é uma variável aleatória que representa o número de descendentes do i-ésimo indivíduo da geração n. Assumimos que todos os X_i são independentes e identicamente distribuídos (i.i.d.) com a mesma FGP da prole, $\Pi_X(s) = \mathbb{E}[s^X]$.

Pela definição da FGP para Z_{n+1}:

$$\Pi_{Z_{n+1}}(s) = \mathbb{E}[s^{Z_{n+1}}] = \mathbb{E}\left[s^{\sum_{i=1}^{Z_n} X_i}\right]$$

Usando a Lei da Expectativa Total (condicionando no valor de Z_n):

$$\Pi_{Z_{n+1}}(s) = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[s^{\sum_{i=1}^{Z_n} X_i} \middle| Z_n\right]\right]$$

Dado que $Z_n = k$, a expectativa interna se torna a FGP de uma soma de k variáveis i.i.d.:

$$\mathbb{E}\left[s^{\sum_{i=1}^{k} X_i} \middle| Z_n = k\right] = \mathbb{E}\left[s^{X_1} \cdot s^{X_2} \cdots s^{X_k}\right]$$

Pela independência dos X_i, isto é:

$$\mathbb{E}[s^{X_1}] \cdot \mathbb{E}[s^{X_2}] \cdots \mathbb{E}[s^{X_k}] = (\Pi_X(s))^k$$

Portanto, a expectativa interna é $(\Pi_X(s))^{Z_n}$. Substituindo de volta na expressão principal:

$$\Pi_{Z_{n+1}}(s) = \mathbb{E}\left[(\Pi_X(s))^{Z_n}\right]$$

Reconhecemos esta forma. A FGP da geração n é $\Pi_{Z_n}(s) = \mathbb{E}[s^{Z_n}]$. Se substituirmos o argumento s por $\Pi_X(s)$, temos:

$$\Pi_{Z_n}(\Pi_X(s)) = \mathbb{E}\left[(\Pi_X(s))^{Z_n}\right]$$

Concluímos assim que:

$$\Pi_{Z_{n+1}}(s) = \Pi_{Z_n}(\Pi_X(s))$$

□

3.2.1 FGP e a probabilidade de extinção

A Função Geradora de Probabilidade é a ferramenta analítica central para calcular a probabilidade de extinção, p_e. A relação fundamental vem da Propriedade 1 (que provamos anteriormente): a FGP de uma geração Z_n, avaliada em $s = 0$, nos dá a probabilidade $\Pi_{Z_n}(0) = P(Z_n = 0)$, ou seja, a probabilidade de a população estar extinta na n-ésima geração. A probabilidade de extinção eventual, p_e, é obtida analisando o limite deste valor à medida que n cresce, levando a um resultado de ponto fixo.

Teorema 3.2.1

A probabilidade de extinção p_e é o limite da probabilidade de extinção na n-ésima geração.

$$p_e = \lim_{n\to\infty} \Pi_{Z_n}(0)$$

Demonstração. Seja E_n o evento $\{Z_n = 0\}$, que significa que a população está extinta na geração n. A probabilidade deste evento é $P(E_n) = P(Z_n = 0)$. Pela Propriedade 1 da FGP (provada anteriormente), temos $P(Z_n = 0) = \Pi_{Z_n}(0)$.

Se a população está extinta em E_n (zero indivíduos), ela certamente estará extinta em E_{n+1} (pois não há pais para gerar filhos). Portanto, $E_n \subseteq E_{n+1}$. Temos uma sequência crescente de eventos.

A probabilidade de extinção eventual, p_e, é a probabilidade da união de todos esses eventos:

$$p_e = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)$$

Pela continuidade da probabilidade para uniões crescentes de eventos, o limite da probabilidade é a probabilidade do limite:

$$p_e = \lim_{n\to\infty} P(E_n)$$

Substituindo $P(E_n) = \Pi_{Z_n}(0)$, concluímos que:

$$p_e = \lim_{n\to\infty} \Pi_{Z_n}(0)$$

□

Teorema 3.2.2 (Recorrência da Extinção)

Assumindo que o processo inicia com um único ancestral ($Z_0 = 1$), a probabilidade de extinção na geração $n+1$ se relaciona com a da geração n através da FGP da prole, $\Pi_X(s)$.

$$\Pi_{Z_{n+1}}(0) = \Pi_X(\Pi_{Z_n}(0))$$

Demonstração. Vamos denotar $q_n = P(Z_n = 0) = \Pi_{Z_n}(0)$. Queremos provar que $q_{n+1} = \Pi_X(q_n)$.

$q_{n+1} = P(Z_{n+1} = 0)$. Usamos a Lei da Probabilidade Total, condicionando no número de filhos do ancestral original (geração Z_1, que tem a mesma distribuição de X):

$$q_{n+1} = \sum_{k=0}^{\infty} P(Z_{n+1} = 0 \mid Z_1 = k) \cdot P(Z_1 = k)$$

Se $Z_1 = k$, o processo se divide em k processos de ramificação independentes, cada um começando com um indivíduo. Para Z_{n+1} ser 0, todas essas k linhagens devem se extinguir nas n gerações seguintes. A probabilidade de **uma** dessas linhagens se extinguir nas n gerações seguintes é $P(Z_n = 0) = q_n$. Como são independentes, a probabilidade de todas as k se extinguirem é $(q_n)^k$.

$$P(Z_{n+1} = 0 \mid Z_1 = k) = (q_n)^k$$

Seja $p_k = P(Z_1 = k) = P(X = k)$. Substituindo na soma:

$$q_{n+1} = \sum_{k=0}^{\infty} (q_n)^k \cdot p_k$$

Reconhecemos esta soma como a definição da FGP da prole, $\Pi_X(s)$, avaliada no ponto $s = q_n$:

$$q_{n+1} = \Pi_X(q_n)$$

Substituindo a notação q_n de volta, temos:

$$\Pi_{Z_{n+1}}(0) = \Pi_X(\Pi_{Z_n}(0))$$

□

Teorema 3.2.3 (Ponto Fixo da Extinção)

A probabilidade de extinção p_e é um ponto fixo da FGP da prole.

$$p_e = \Pi_X(p_e)$$

Demonstração. Dos resultados anteriores, temos:

1. $p_e = \lim_{n\to\infty} \Pi_{Z_n}(0)$
2. $\Pi_{Z_{n+1}}(0) = \Pi_X(\Pi_{Z_n}(0))$

Vamos aplicar o limite $n \to \infty$ em ambos os lados da Equação (2):

$$\lim_{n\to\infty} \Pi_{Z_{n+1}}(0) = \lim_{n\to\infty} \Pi_X(\Pi_{Z_n}(0))$$

Pelo Resultado (1), o lado esquerdo é p_e (pois se $n \to \infty$, $n+1 \to \infty$):

$$p_e = \lim_{n\to\infty} \Pi_X(\Pi_{Z_n}(0))$$

Uma Função Geradora de Probabilidade $\Pi_X(s)$ é uma série de potências e, portanto, é uma função contínua em seu intervalo de convergência (pelo menos para $|s| \leqslant 1$). Como $q_n = \Pi_{Z_n}(0)$ é uma probabilidade, $0 \leqslant q_n \leqslant 1$. Devido à continuidade da função $\Pi_X(s)$, podemos trocar a ordem do limite e da função:

$$p_e = \Pi_X\left(\lim_{n\to\infty} \Pi_{Z_n}(0)\right)$$

Usando o Resultado (1) novamente no argumento da função:

$$p_e = \Pi_X(p_e)$$

Isso mostra que p_e deve ser uma solução de ponto fixo para a equação $s = \Pi_X(s)$. $\square$

Exemplo 3.2.4

Voltando ao exemplo da cadeia de ramificação (Z_n) com $p = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots)$, qual a probabilidade de extinção da cadeia?

Solução. Queremos encontrar o ponto físo $p_e = \Pi_X(p_e)$. Observe que:

$$\Pi_X(s) = \sum_{x=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = x)s^x = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{s^x}{2^{i+1}} = \frac{1}{2} + \frac{s}{4} + \frac{s^2}{8} + \ldots$$

Que é uma P.G infinita com razão $s/2$, como $p_e \leqslant 1$, temos que

$$\Pi_X(p_e) = \frac{1}{2 - p_e}$$

Resolvendo $\Pi_X(p_e) = p_e$, obtemos $(p_e - 1)^2 = 0$, e portanto $p_e = 1$. $\square$

Exemplo 3.2.5

Voltando ao exemplo da cadeia de ramificação (Z_n) com $p_0 = \frac{1}{4}$, $p_1 = \frac{1}{2}$, $p_2 = \frac{1}{4}$ e $p_i = 0 \quad \forall i \geqslant 3$, qual a probabilidade de extinção da cadeia?

Solução. Novamente, buscamos encontrar o ponto fixo $p_e = \Pi_X(p_e)$. Temos:

$$\Pi_X(s) = \sum_{x=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = x)s^x = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}s + \tfrac{1}{4}s^2.$$

Fazendo $\Pi_X(p_e) = p_e$, obtemos, novamente, $(p_e - 1)^2 = 0$, e portanto, $p_e = 1$.

$\square$

3.2.2 Análise Gráfica e Condições de Extinção

Provamos que a probabilidade de extinção, p_e, deve satisfazer a equação de ponto fixo $p_e = \Pi_X(p_e)$. As soluções para esta equação podem ser encontradas graficamente, identificando as interseções das curvas $y = s$ e $y = \Pi_X(s)$ no intervalo $s \in [0, 1]$.

A análise depende de uma nova propriedade da FGP, que relaciona sua derivada em $s = 1$ com a média (valor esperado) da distribuição da prole, $\mu = \mathbb{E}[X]$.

Proposição 3.2.6 (Média da Prole)

A derivada da FGP da prole, avaliada em $s = 1$, é igual ao número esperado de descendentes, μ.

$$\Pi'_X(1) = \mathbb{E}[X]$$

Demonstração. Derivamos a série de potências da FGP, $\Pi_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k$, termo a termo em relação a s:

$$\Pi'_X(s) = \frac{d}{ds} \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k s^{k-1}$$

Avaliando em $s = 1$:

$$\Pi'_X(1) = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k (1)^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k$$

Esta última soma é, por definição, o valor esperado $\mathbb{E}[X]$ da variável aleatória X. □

A inclinação da curva $\Pi_X(s)$ no ponto $(1, 1)$ é exatamente $\mu = \mathbb{E}[X]$. Além disso, a FGP é uma função convexa em $[0, 1]$ (pois $\Pi''_X(s) = \sum k(k-1)p_k s^{k-2} \geqslant 0$). Isso nos leva a três casos, como ilustrado na Figura 1:

- **Caso 1: $\mu > 1$ (Supercrítico).** A inclinação $\Pi'_X(1) > 1$. Como $\Pi_X(s)$ é convexa e $\Pi_X(1) = 1$, a curva deve cruzar a linha $y = s$ em exatamente um outro ponto $p_e \in [0, 1)$. A probabilidade de extinção p_e é esta solução, que é o **menor** ponto fixo positivo.
- **Caso 2: $\mu < 1$ (Subcrítico).** A inclinação $\Pi'_X(1) < 1$. Devido à convexidade, a curva $\Pi_X(s)$ estará sempre acima da linha $y = s$ para $s \in [0, 1)$, tocando-a apenas em $s = 1$. O único ponto fixo é $s = 1$.
- **Caso 3: $\mu = 1$ (Crítico).** A inclinação $\Pi'_X(1) = 1$. A linha $y = s$ é tangente à curva convexa $\Pi_X(s)$ em $s = 1$. Novamente, o único ponto fixo no intervalo $[0, 1]$ é $s = 1$ (assumindo que $P(X = 1) \neq 1$).

Isso leva ao teorema fundamental sobre as condições de extinção.

Teorema 3.2.7 (Condição para Extinção Certa)

Seja $\mu = \mathbb{E}[X]$ o número esperado de descendentes por indivíduo.

- Se $\mu \leqslant 1$, a probabilidade de extinção é $p_e = 1$ (assumindo $P(X = 1) \neq 1$, o caso trivial).
- Se $\mu > 1$, a probabilidade de extinção p_e é a única solução no intervalo $[0, 1)$ para a equação $s = \Pi_X(s)$.

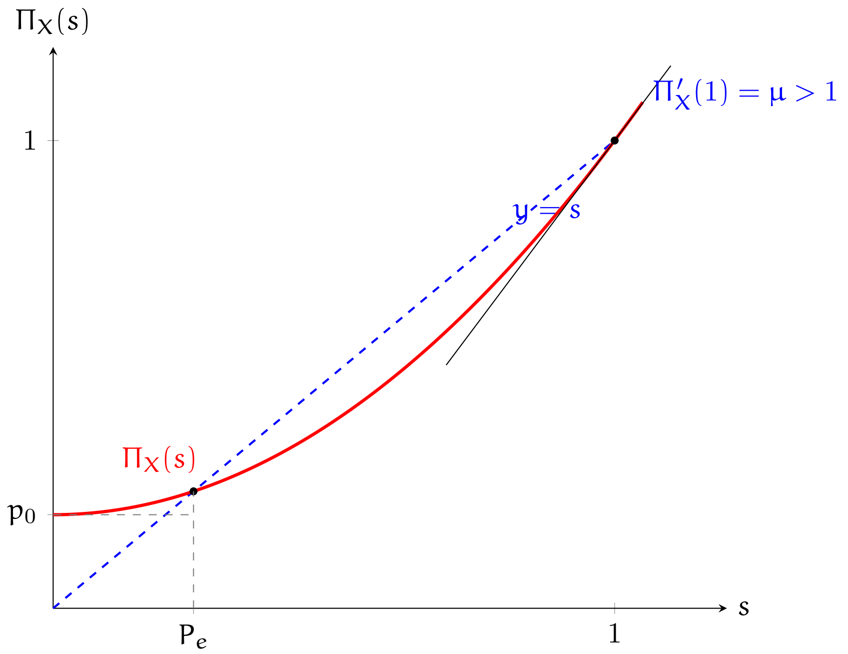


Figura 1: Interpretação gráfica da probabilidade de extinção P_e como o menor ponto fixo positivo de $\Pi_X(s)$, no caso supercrítico ($\mu > 1$).

Exemplo 3.2.8

Considere uma cadeia de ramificação (Z_n) com $p_0 = \frac{1}{4}$, $p_1 = \frac{1}{4}$, $p_2 = \frac{1}{2}$ e $p_i = 0 \quad \forall i \geqslant 3$, qual a probabilidade de extinção da cadeia?

Solução. Observe que $\mu = \mathbb{E}[X] = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4} > 1$. Portanto, já sabemos que a probabibilidade de extinção não é 1. Podemos calcula-la buscando o ponto fixo $p_e = \Pi_X(p_e)$. Temos:

$$\Pi_X(s) = \sum_{x=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = x)s^x = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}s + \frac{1}{2}s^2.$$

Fazendo $\Pi_X(p_e) = p_e$, obtemos, a equação quadrática $2p_e^2 - 3p_e + 1 = 0$, cuja a única raíz não-negativa menor que 1 é $p_e = \frac{1}{2}$.

□

3.2.3 Valor Esperado de um processo de ramificação

Uma das aplicações mais diretas da FGP é o cálculo do valor esperado (a média) do tamanho da população em qualquer geração t, que denotaremos por $\mu_t = \mathbb{E}[Z_t]$. O resultado mostra uma progressão geométrica simples, governada pela média da prole, $\mu = \mathbb{E}[X]$.

Teorema 3.2.9

Seja $\mu = \mathbb{E}[X]$ a média da prole de um único indivíduo e assumindo que o processo começa com um único ancestral ($Z_0 = 1$), o valor esperado da população na t-ésima geração é:

$$\mu_t = \mathbb{E}[Z_t] = \mu^t$$

Demonstração. Para provar este resultado, utilizamos duas propriedades da FGP estabelecidas anteriormente:

1. A relação de recorrência: $\Pi_{Z_{t+1}}(s) = \Pi_{Z_t}(\Pi_X(s))$
2. A propriedade da média: $\mathbb{E}[Y] = \Pi'_Y(1)$

Nosso objetivo é encontrar $\mu_{t+1} = \mathbb{E}[Z_{t+1}] = \Pi'_{Z_{t+1}}(1)$. Começamos com a relação de recorrência (1) e derivamos ambos os lados em relação a s, utilizando a Regra da Cadeia no lado direito:

$$\Pi'_{Z_{t+1}}(s) = \frac{d}{ds}\Pi_{Z_t}(\Pi_X(s))$$
$$\Pi'_{Z_{t+1}}(s) = \Pi'_{Z_t}(\Pi_X(s)) \cdot \Pi'_X(s)$$

Agora, avaliamos esta expressão em $s = 1$:

$$\Pi'_{Z_{t+1}}(1) = \Pi'_{Z_t}(\Pi_X(1)) \cdot \Pi'_X(1)$$

Lembramos de duas propriedades cruciais avaliadas em $s = 1$:

- $\Pi_X(1) = 1$ (Propriedade 3: a soma das probabilidades é 1)
- $\Pi'_X(1) = \mathbb{E}[X] = \mu$ (Propriedade 4: a média da prole)

Substituindo estes valores na equação:

$$\Pi'_{Z_{t+1}}(1) = \Pi'_{Z_t}(1) \cdot \mu$$

Traduzindo a notação das derivadas da FGP de volta para a notação do valor esperado (onde $\mu_t = \Pi'_{Z_t}(1)$), obtemos a relação de recorrência para a média:

$$\mu_{t+1} = \mu_t \cdot \mu$$

Esta é uma progressão geométrica simples. Assumindo que o processo inicia com $Z_0 = 1$, temos $\mu_0 = \mathbb{E}[Z_0] = 1$. Resolvendo a recorrência:

- $\mu_1 = \mu_0 \cdot \mu = 1 \cdot \mu = \mu$
- $\mu_2 = \mu_1 \cdot \mu = (\mu) \cdot \mu = \mu^2$
- $\mu_3 = \mu_2 \cdot \mu = (\mu^2) \cdot \mu = \mu^3$
- ...
- $\mu_t = \mu^t$

□

Este resultado confirma a intuição da análise de extinção: se $\mu < 1$, o tamanho esperado da população decai geometricamente para zero. Se $\mu > 1$, o tamanho esperado da população cresce exponencialmente. Se $\mu = 1$, o tamanho esperado da população permanece constante em 1.

4 Tempo de Extinção

Uma das perguntas feitas na introdução foi sobre a distribuição do tempo de extinção de uma cadeia de ramificação. Para ser mais específicos, nos referimos à variável aleatória

$$\tau = \min\{n \in \mathbb{Z} : Z_n = 0\}$$

dessa forma, $\tau = t \iff Z_t = 0, Z_{t-1} > 0$. É útil achar a distribuição dessa variável porque ela pode ser útil quando a extinção é algo quisto pelo modelo, por exemplo, quando a cadeia de ramificação representa o número de indivíduos infectados numa população. Pela equivalência acima, sabemos que

$$\mathbb{P}(\tau = t) = \mathbb{P}(Z_t = 0, Z_{t-1} > 0)$$

. E pela lei da probabilidade total, temos

$$\mathbb{P}(Z_t = 0, Z_{t-1} > 0) = \mathbb{P}(Z_t = 0) - \mathbb{P}(Z_t = 0, Z_{t-1} = 0)$$

No lado direito da igualdade acima, sabemos que $\mathbb{P}(Z_t = 0, Z_{t-1})$ é redundante e igual a $\mathbb{P}(Z_{t-1} = 0)$. Pela proposição **3.1.1**, temos que $\mathbb{P}(Z_t = 0) = \Pi_{Z_t}(0) = p_{t,0}$. Assim, concluímos que a distribuição do tempo de extinção obedece à equação:

$$\mathbb{P}(\tau = t) = p_{t,0} - p_{t-1,0}$$

Com a condição inicial de que $\mathbb{P}(\tau = 1) = p_0$.

Num geral, como já visto, achar os valores de $p_{t,0}$ pode ser uma tarefa complicada, principalmente porque envolve calcular órbitas da p_0 pela iteração da função $\Pi_X(s)$ consigo mesma, que pode não ser uma série simples de calcular explicitamente, mas ainda pode ser aproximada pelo computador.

Um outro problema é calcular os momentos de τ. O principal resultado sobre tal assunto é o seguinte:

Proposição 4.0.1

$$\mathbb{E}(\tau) = \begin{cases} \text{finita , se } \mathbb{E}(Z_1) < 1 \text{ ;} \\ \text{infinita , se } \mathbb{E}(Z_1) = 1 \text{ e } \mathrm{Var}(Z_1) \text{ é finita;} \\ \text{infinita , se } \mathbb{E}(Z_1) > 1; \end{cases}$$

A demonstração do afirmado exige alguns conhecimentos sobre o comportamento assintótico de Z_n, resultados um pouco mais técnicos que decidimos não incluir no texto.

Dessa forma, concluímos que apesar de conseguirmos simular de maneira mais precisa a distribuição de τ, ainda é muito difícil encontrar uma fórmula fechada para tal.

5 Aplicações

O estudo de cadeias de ramificação pode ser aplicado em vários cenários. Mostraremos aqui algumas aplicações biológicas do estudo de cadeias de ramificação, sendo o segundo modelo uma extensão do primeiro.

5.1 Mutação

Suponha uma população que pode ser modelada através de um modelo de cadeias ramificação, porém cada novo indivíduo possui uma probabilidade γ de possuir uma mutação. Qual a probabilidade de que essa população contraia essa mutação?

Seja X a variável aleatória que conta todos os nascimentos a partir do primeiro indivíduo, ou seja:

$$X = \sum_{i \geqslant 0} Z_i$$

onde $Z_0 = 1$. Logo a FGP de X é dada por

$$\Pi_X(s) = \sum_{k \geqslant 0} s^k P(X = k) = \mathbb{E}(s^k)$$

Condicionando $\Pi_X(s)$ no número de indivíduos da primeira geração:

$$\Pi_X(s) = \mathbb{E}(s^X) = \sum_{k \geqslant 0} \mathbb{E}(s^X | X_1 = k) P(Z_1 = k | Z_0 = 1) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(s^x | Z_1))$$

Tomando $Z_1 = k$, temos k indivíduos no tempo 1, que começam k processos de ramificação independentes, logo X é a soma do indivíduo original somado aos indivíduos de cada um desses k processos de ramificação, que possuem mesma distribuição de X, ou seja: $\mathbb{E}(s^X | Z_1 = k) = \mathbb{E}(s^{1 + X_1 + \cdots + X_k})$

Por independência temos que

$$\mathbb{E}(s^x | Z_1 = k) = s\mathbb{E}(s^{X_1}) \dots \mathbb{E}(s^{X_k}) = s\mathbb{E}(s^X)^k$$

Como a função geradora de probabilidade da distribuição do número de filhos é

$$\phi(s) = \sum p_k s^k$$

podemos afirmar que

$$\Pi_X(s) = s\phi(\Pi_X(s))$$

.

Vamos agora considerar o caso particular onde $p_0 = 1 - p$ e $p_2 = p$. A FGP dessa distribuição é

$$\phi(s) = p_0 s^0 + p_2 s^2 = 1 - p + ps^2$$

então

$$\Pi_X(s) = s\phi(\Pi_X(s)) = s(1 - p + p\Pi_X(s)^2) = s - ps + ps\Pi_X(s)^2 \implies ps\Pi_X(s)^2 - \Pi_X(s) + s(1-p) = 0$$

provido do fato de que $\lim_{s \to 0} \Pi_X(s) = 0$, podemos resolver a equação, encontrando

$$\Pi_X(s) = \frac{1}{2ps} - \sqrt{\frac{1 - 4ps^2(1-p)}{4p^2 s^2}} = \frac{1}{2ps}(1 - \sqrt{1 - 4ps^2(1-p)}).$$

Queremos agora encontrar uma expansão em série de potências para Π_X. Usando a Fórmula de Newton, temos o seguinte resultado.

Lema 5.1.1

Seja $c_n = \frac{(2n-2)}{2^{2n-1}n!(n-1)!} = \frac{1}{n}2^{1-2n}\binom{2n-2}{n-1}, /n \geqslant 1$. Então para $x \in (-1,1)$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n = -\sum_{n=1}^{\infty}\binom{1/2}{n}(-x)^n = -(\sum_{n=0}^{\infty}\binom{1/2}{n}(-x)^n - 1) = 1 - \sqrt{1-x}.$$

Voltando para o problema, usando $x = 4ps^2(1-p)$ e c_n como no Lema acima, temos:

$$\Pi_X(s) = \frac{1}{2ps}\sum_{n=1}^{\infty} c_n(4p(1-p)s^2)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}p^{n-1}(1-p)^n a^{2n-1}.$$

Temos assim uma expansão em série de potências para $g(s), s \in (-1,1)$, o que nos fornece a distribuição de X. Para $n \geqslant 1$,

$$P(X = 2n-1|Z_0 = 1) = \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)}p^{n-1}(1-p)^n.$$

Voltando agora ao problema inicial, sejam M o evento em que a mutação aparece na populaçãop e M^c o complementar de M. Se X é infinito, então a probabilidade da população contrair a mutação é sempre 1, logo estamos interessados nos casos em que a população é extinta em algum momento. A probabilidade de que a mutação nunca apareça é:

$$P(M^c) = P(M^c, X < \infty) = \sum_{k=1}^{\infty} P(M^c|X = k)P(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty}(1-\gamma)^{k-1}P(X = k).$$

Porém sabemos que

$$P(x = 2n-1|Z_0 = 1) = \frac{(2n-2)!}{k!(n-1)!}p^{n-1}(1-p)^n,$$

logo

$$P(M^c) = \sum_{k=1}^{\infty}(1-\gamma)^{2k-2}\frac{(2k-2)}{k!(k-1)!}p^{k-1}(1-p)^k.$$

Reorganizando os termos,

$$P(M^c) = \frac{1}{2p(1-\gamma)^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-2)!}{k!(k-1)!2^{2k-1}}(2^2(1-\gamma)^2(1-p)p)^k,$$

Assim, pelo Lema 4.1.1,

$$P(M^c) = \frac{1}{2p(1-\gamma)^2}(1 - \sqrt{1-4(1-p)(1-\gamma)^2}).$$

Finalmente,

$$P(M) = 1 - \frac{1}{2p(1-\gamma)^2}(1 - \sqrt{1-4(1-p)(1-\gamma)^2}).$$

5.2 Resistência a um determinado Medicamento

Imagine agora que a população trabalhada anteriormente é uma população de patógenos, e que a mutação torna cada indivíduo resistente a um determinado medicamento usado no tratamento contra esse patógeno. Qual a probabilidade de que a população seja extinta antes do aparecimento dessa resistência?

Continuando nas mesmas condinções da aplicação anterior, vimos que caso a população inicialmente possua apenas 1 indivíduo, a probabilidade de não ocorrer a mutação é

$$P(M^c) = \frac{1}{2p(1-\gamma)^2}(1 - \sqrt{1-4(1-p)(1-\gamma)^2}).$$

Porém quando uma pessoa inicia um tratamento para uma doença ela já possui alguns sintomas e consequentemente o número de patógenos é maior que 1.Tomando $Z_0 = N$, podemos definir a seguinte função

$$f(N,\gamma,p) = P(M^c|Z_0 = N).$$

Como cada um dos potógenos possui seu próprio porcesso de ramificação de forma independente dos demais, a probabilidade que queremos calcular é

$$f(N,\gamma,p) = f(1,\gamma,p)^N = (\frac{1}{2p(1-\gamma)^2}(1 - \sqrt{1-4(1-p)(1-\gamma)^2}))^N \tag{4}$$

que é uma expressão um pouco complicada de se trabalhar.

Queremos estudar o comportamento da função para diferentes valores de p. Para facilitar um pouco os cálculos iremos utilizar aproximação linear para obter uma expressão mais simples.

Definição 5.2.1 (Aproximação linear)

Dada uma função $f(x)$ contínua, diferenciável e com variável real x,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o(x)$$

Onde $o(x)$ é uma função que representa o erro ($\lim_{x\to a} \frac{o(x)}{x} = 0$).Uma aproximação linear de f(x) é obtida desconsiderando a função erro, isto é,

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a),$$

para valores próximos de a, a curva descrita pela função $f(x)$ se aproxima de uma reta.

Dada a definição, podemos separar nossa função em partes e encontrar uma aproximação linear para cada.

Para a primeira função $f_1(\gamma) = (1-\gamma)^{-2}$ temos a aproximação linear

$$f_1(\gamma) \approx 1 + 2\gamma$$

Para a função $f_2(\gamma) = \sqrt{1-4p(1-p)(1-\gamma)^2}$ temos a aproximação linear

$$f_2(\gamma) \approx |1-2p|(1 + \frac{4p(1-p)}{(1-2p)^2}\gamma).$$

Usando as aproximações de f_1 e f_2 conseguimos para $p < \frac{1}{2}$ fixo a seguinte aproximação para nossa expressão

$$
\begin{aligned}
f(N,\gamma,p) &\approx (\frac{(1+2\gamma)}{2p}(1-(1-2p)(1+\frac{4p(1-p)}{(1-2p)^2}\gamma)))^N \\
&= (\frac{(1+2\gamma)}{2p}(2p-\frac{4p(1-p)}{(1-2p)}\gamma))^N \\
&= ((1+2\gamma)(1-\frac{2(1-p)}{(1-2p)}\gamma))^N.
\end{aligned}
$$

Fazendo agora $f_3(\gamma) = (1+2\gamma)(1-\frac{2(1-p)}{(1-2p)}\gamma)$, encontramos a seguinte aproximação linear

$$f_3(\gamma) \approx 1 - \frac{2p}{1-2p}\gamma.$$

Logo,

$$f(N,\gamma,p) \approx (1-\frac{2p}{1-2p})^N, \text{ para } p < \frac{1}{2}.$$

Podemos agora limitar essa aproximação utilizando o fato $e^{-x} > 1-x, \ \forall x > 0$, ou seja,

$$f(N,\gamma,p) \approx (1-\frac{2p}{1-2p}\gamma)^N < exp(-\frac{2p}{1-2p}N\gamma).$$

A partir disso, observa-se que para $p < \frac{1}{2}$ fixo, a probabilidade de não ter resistência depende do parâmetro $m \equiv N\gamma$, e decresce exponenciamente quando m aumenta.

Usando agora as aproximações de f_1 e f_2 e $p > \frac{1}{2}$ fixo na expressão original, obtemos a seguinte aproximação para a expressão

$$f(N,\gamma,p) \approx ((1+2\gamma)\frac{(1-p)}{p}(1+\frac{2p}{(1-2p)}\gamma))^N.$$

Usando então $f_4(\gamma) = (1+2\gamma)\frac{(1-p)}{p}(1+\frac{2p}{(1-2p)}\gamma)$, obtemos a aproximação linear

$$f_4(\gamma) \approx \frac{(1-p)}{p}(1-\frac{2(1-p)}{(2p-1)}\gamma).$$

Encontramos então o seguinte resultado,

$$f(N,\gamma,p) \approx (\frac{(1-p)}{p}(1-\frac{2(1-p)}{(2p-1)}\gamma))^N, \text{ para } p > \frac{1}{2}.$$

Usando novamente o fato $e^{-x} > 1-x, \ \forall x > 0$, obtemos um limitante para essa aproximação,

$$f(N,\gamma,p) \approx (\frac{(1-p)}{p}(1-\frac{2(1-p)}{(2p-1)}\gamma))^N < (\frac{1-p}{p})^N exp(-\frac{2(1-p)}{(2p-1)}N\gamma),$$

e como consequência temos também que

$$f(N,\gamma,p) < (\frac{1-p}{p})^N.$$

mostrando que a medida que N aumenta, a probabilidade de que os patógenos adquiram a resistência ao medicamento também aumenta, tornando o tratamento bem mais complicado.