

```
/tikz/,/tikz/graphs/  
conversions/canvas coordinate/.code=1 , conversions/coordinate/.code=1
```



FUNDAÇÃO GETÚLIO VARGAS
ESCOLA DE MATEMÁTICA APLICADA
Processos Estocásticos

CADEIAS DE RAMIFICAÇÃO

**GABRIEL CARNEIRO NUNES DA SILVA
LUCAS MENEZES DE LIMA
RODRIGO SEVERO ARAÚJO
VINICIUS TAVARES MENDES DOS SANTOS**

Rio de Janeiro – RJ
Dezembro de 2025

Sumário

1	Introdução	2
1.1	Exemplo Motivador	2
2	Processo de Ramificação	4
3	A Função Geradora de Probabilidade	6
3.1	Propriedades da FGP	6
3.2	Utilidade da FGP com processos de ramificação	7
3.2.1	FGP e a probabilidade de extinção	8
3.2.2	Análise Gráfica e Condições de Extinção	11
3.2.3	Valor Esperado de um processo de ramificação	12
4	Tempo de Extinção	14

1 Introdução

O estudo da dinâmica das populações é frutífero para a matemática, como sabemos do estudo das equações diferenciais de Verhulst ou dos modelos clássicos de predador-presa, como o de Lotka-Volterra. Nesse trabalho, apresentamos uma teoria que também se originou no estudo da dinâmica populacional, mas que se baseia principalmente na modelagem da reprodução como sendo um processo estocástico: A teoria das Cadeias de Ramificação.

A ideia de utilizar um processo estocástico para estudar o crescimento populacional tem origem nos trabalhos de Francis Galton¹ e de Henry William Watson, que estavam interessados na possível extinção de sobrenomes de aristocratas no Reino Unido. Em vista disso, a teoria das cadeias de ramificação carrega muitas nomenclaturas inspiradas no momento inicial de seu desenvolvimento, como veremos.

Uma descrição simples para uma cadeia de ramificação é a seguinte: um indivíduo de uma certa espécie se reproduz (e morre logo em seguida) de maneira assexuada, com o vetor $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_k, \dots)$ sendo a distribuição de probabilidade para o tamanho de sua prole. Queremos modelar a quantidade de indivíduos Z_n na enésima geração, considerando que todos indivíduos de uma mesma geração se reproduzem de maneira independente de acordo com \mathbf{p} e que começamos em $Z_0 = 1$.

Estabelecido essa concepção do modelo, surgem as seguintes perguntas acerca de seu comportamento:

- Qual o número esperado de filhos de cada indivíduo?
- Qual a esperança e a variância de Z_n ?
- É possível achar a distribuição de Z_n ?
- É possível achar a probabilidade de extinção da cadeia? (ou seja, a probabilidade de que haja um instante N no qual $Z_N = 0$);
- É possível achar as condições para eventual extinção da cadeia?,
- Se é certa a extinção, podemos achar a distribuição do tempo até ela?

Planejamos, nas seguintes seções, desenvolver a teoria necessária para tentar responder as perguntas acima. Entretanto, vamos tentar aplicar os nossos conhecimentos já estabelecidos de probabilidade em um exemplo motivador básico.

1.1 Exemplo Motivador

Exemplo 1.1.1

Tome $\mathbf{p} \sim k \cdot \text{Bernoulli}(p)$, ou seja, cada indivíduo dessa espécie tem k filhos com probabilidade p ou não tem nenhum filho com probabilidade $1 - p$.

No exemplo 1.1.1, algumas das perguntas feitas inicialmente são relativamente fáceis de responder:

Solução. • O número esperado de filhos é $k\mathbb{E}(\mathbf{p}) = k \cdot p$;

¹Curiosidade: era também primo de Charles Darwin e foi o idealizador da eugenia

- A distribuição condicional de Z_n dado Z_{n-1} é k vezes uma binomial de parâmetros Z_{n-1} , p , pois enésima geração é composta exatamente pela quantidade de filhos que cada um dos indivíduos da geração anterior teve, e a soma de Bernoullis resulta numa binomial. Esse é o melhor que conseguimos chegar com nossas ferramentas atuais, visto que a distribuição não condicional já é muito complicada de se descrever;
- Pelo dito acima, temos que $\mathbb{E}(Z_n) = kp\mathbb{E}(Z_{n-1})$, logo, resolvendo a recorrência com a condição de contorno de que $\mathbb{E}(Z_1) = kp$, concluímos que $\mathbb{E}(Z_n) = (kp)^n$. Usando a lei da variância total, obtemos:

$$\text{Var}(Z_n) = \mathbb{E}(\text{Var}(Z_n|Z_{n-1})) + \text{Var}(\mathbb{E}(Z_n|Z_{n-1}))$$

$$\text{Var}(Z_n) = \mathbb{E}(Z_{n-1}k^2p(1-p)) + k^2p^2\text{Var}(Z_{n-1})$$

$$\text{Var}(Z_n) = k^2p(1-p)(kp)^{n-1} + k^2p^2\text{Var}(Z_{n-1})$$

Usando a condição de contorno $\text{Var}(Z_1) = k^2p^2(1-p)^2$, obtemos que

$$\text{Var}(Z_n) = k^{n+1}p^n(1-p)(1 + (kp) + (kp)^2 + \dots + (kp)^{n-1})$$

□

Iremos abordar de maneira mais completa a probabilidade de extinção em seções posteriores, mas o modelo do exemplo 1.1.1 já nos leva a interessantes reflexões: a extinção ou não dos indivíduos modelo parece depender apenas da distribuição da prole; a esperança e a variância de Z_n parecem ter o mesmo comportamento assintótico, isto é, ambas convergem ou divergem quando o $n \rightarrow \infty$; combinando as duas afirmações anteriores com a desigualdade de Markov, obtemos que:

$$\mathbb{P}(Z_n \geq 1) \leq \mathbb{E}(Z_n) = (kp)^n$$

Ou seja, apesar da média de Z_n não nos dar informação muito útil quando ela é maior do que 1, mas ela nos diz que Z_n converge em probabilidade para 0 quando é estritamente menor do que 1.

Abaixo, estão os resultados da distribuição de Z_{20} advindos de simulações implementadas no arquivo `bernoulli.py`.

2 Processo de Ramificação

Definição 2.0.1 (Processo de Ramificação)

Um **processo de ramificação** é definido da seguinte forma:

- Um único indivíduo no instante $n = 0$.
- Cada indivíduo vive exatamente uma unidade de tempo, depois produz X descendentes e morre.
- O número de descendentes X assume valores $0, 1, 2, \dots$, e a probabilidade de produzir k descendentes é $P(X = k) = p_k$.
- Todos os indivíduos se reproduzem independentemente. Os indivíduos $1, 2, \dots, n$ têm tamanhos de família X_1, X_2, \dots, X_n , onde cada X_i tem a mesma distribuição que X .
- Seja Z_n o *número de indivíduos nascidos* no instante n , para $n = 0, 1, 2, \dots$. Interprete Z_n como o “tamanho” da geração n .
- Então o processo de ramificação é $\{Z_0, Z_1, Z_2, Z_3, \dots\} = \{Z_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Outra maneira de analisar, é o que foi dado na introdução, isto é, se $X_i^{(n)} \sim p$ é o número de filhos do indivíduo i da n -ésima geração, temos que

$$Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_i^{(n)}$$

Proposição 2.0.2

Seja Z_n o número de indivíduos na geração n , como definido acima, e X o número de descendentes de um determinado indivíduo (lembre que $X \sim p$), então:

$$\mathbb{E}(Z_n) = \mathbb{E}(X)^n$$

Isto é, o valor esperado de indivíduos na cadeia no tempo n é o valor esperado do número de filhos que um indivíduo tenha na cadeia elevado a n .

Demonstração. De fato, podemos simplesmente fazer as contas:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z_n) &= \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^{Z_{n-1}} X_i^{(n)} \right) = \mathbb{E} \left(\mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^{Z_{n-1}} X_i^{(n)} \mid Z_{n-1} \right) \right) = \mathbb{E}(Z_{n-1} \cdot \mathbb{E}(X_i^{(n)})) \\ &= \mathbb{E}(Z_{n-1}) \cdot \mathbb{E}(X) = \cdots = \mathbb{E}(X)^n \cdot \mathbb{E}(Z_0) = \mathbb{E}(X)^n \end{aligned}$$

Portanto, $\mathbb{E}(Z_n) = \mathbb{E}(X)^n$, como queríamos □

Exemplo 2.0.3

Considere uma cadeia de ramificação (Z_n) com $p = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots)$, estudaremos algumas perguntas vistas na introdução.

- Qual a esperança e a variância de Z_n ?

Observe que:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot \mathbb{P}(X = i) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i}{2^{i+1}}$$

E portanto, podemos escrever como

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots \\ &\quad + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots \\ &\quad + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots\end{aligned}$$

Logo, realizando a soma dessas progressões geométricas, temos $\mathbb{E}(X) = 1$, e também $\mathbb{E}(Z_n) = 1^n = 1$ para todo n .

- Qual a probabilidade de extinção da cadeia?

É intuitivo imaginar que a probabilidade de extinção seja 1, a probabilidade de ter 0 filhos é muito maior que as demais probabilidades. Mas queremos ser capazes de fazer essas contas.

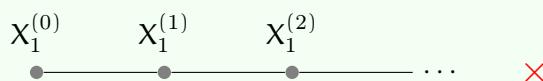
Exemplo 2.0.4

Aqui selecionamos alguns exemplos mais bobinhos que ajudam a nossa intuição quando queremos trabalhar sobre probabilidade de extinção da cadeia.

1. Se eu tenho uma população tal que $p_0 = 1$, então na próxima geração certamente ela irá se extinguir, isto é $X_t = 0 \forall t \geq 1$, e portanto, sua probabilidade de extinção é 1.



2. Se eu te tenho uma população tal que $p_0 = \frac{1}{100}$ e $p_1 = \frac{99}{100}$, então, no longo prazo, ela irá se extinguir, isto é, existirá um tempo t_0 tal que $X_t = 0 \forall t \geq t_0$. Daí, sua probabilidade de extinção também é 1 e, em particular, o tempo até a extinção tem distribuição $\text{Geom}(\frac{1}{99})$.



3. Caso seja uma população tal que $p_0 = \frac{1}{4}$, $p_1 = \frac{1}{2}$, $p_2 = \frac{1}{4}$, mostraremos também que a população irá se extinguir.

Daí surge a pergunta natural, como estudar a probabilidade de extinção em casos não-triviais? Usaremos a seguinte notação

$$p_e = \mathbb{P}(\text{Extinção}) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} Z_n = 0\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Z_n = 0)$$

Na seção seguinte, estudaremos uma ferramenta poderosa para lidar com probabilidades de extinção.

3 A Função Geradora de Probabilidade

A principal ferramenta analítica para estudar a evolução de processos de ramificação é a Função Geradora de Probabilidade (FGP).

Definição 3.0.1 (Função Geradora de Probabilidade)

Seja X uma variável aleatória discreta que assume valores no conjunto de inteiros não negativos $\{0, 1, 2, \dots\}$, com função de massa de probabilidade $p_k = P(X = k)$.

A **Função Geradora de Probabilidade** de X , denotada por $\Pi_X(s)$, é a série de potências definida por:

$$\Pi_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X = k)s^k = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k \quad (1)$$

Equivalentemente, a FGP pode ser expressa como o valor esperado:

$$\Pi_X(s) = \mathbb{E}[s^X] \quad (2)$$

Esta série converge absolutamente para $|s| \leq 1$.

3.1 Propriedades da FGP

Assumindo a definição da Função Geradora de Probabilidade (FGP) para uma v.a. X como $\Pi_X(s) = \mathbb{E}[s^X] = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k$, onde $p_k = P(X = k)$, temos as seguintes propriedades fundamentais.

Proposição 3.1.1 (Probabilidade na origem)

A FGP avaliada em $s = 0$ retorna a probabilidade de X ser zero.

$$\Pi_X(0) = p_0 = P(X = 0)$$

Demonstração. A prova é obtida por substituição direta de $s = 0$ na série de potências:

$$\Pi_X(s) = p_0 + p_1 s + p_2 s^2 + \dots$$

$$\Pi_X(0) = p_0 + p_1(0) + p_2(0)^2 + \dots = p_0$$

□

Proposição 3.1.2 (Derivadas na origem)

A n -ésima derivada da FGP avaliada em $s = 0$ permite recuperar a n -ésima probabilidade p_n .

$$\left. \frac{d^n \Pi_X}{ds^n} \right|_{s=0} = n! \cdot p_n \implies p_n = \frac{\Pi_X^{(n)}(0)}{n!}$$

Demonstração. A FGP é, por definição, a série de Maclaurin (Taylor em $s = 0$) para $\Pi_X(s)$, cuja forma geral é $f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} s^n$. Comparando os coeficientes da FGP, $\Pi_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k$, com a forma de Maclaurin, identificamos termo a termo que:

$$p_k = \frac{\Pi_X^{(k)}(0)}{k!}$$

Rearranjando, obtemos $\Pi_X^{(k)}(0) = k! \cdot p_k$. □

Proposição 3.1.3 (Soma das Probabilidades)

A FGP avaliada em $s = 1$ é sempre igual a 1.

$$\Pi_X(1) = 1$$

Demonstração. Substituindo $s = 1$ na definição da FGP:

$$\Pi_X(1) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(1)^k = \sum_{k=0}^{\infty} p_k$$

Pela definição de probabilidade, a soma de todas as probabilidades p_k para uma variável aleatória discreta deve ser 1.

$$\Pi_X(1) = 1$$

□

Exemplo 3.1.4

Considere a v.a. $X \sim \text{Bernoulli}(p)$, iremos calcular a F.G.P desta variável aleatória.

$$\Pi_X(s) = \mathbb{E}(s^X) = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) \cdot s = (1 - p) + p \cdot s$$

3.2 Utilidade da FGP com processos de ramificação

A utilidade da FGP em processos de ramificação decorre da forma como ela lida com somas de variáveis aleatórias. Seja Z_n o tamanho da população na n -ésima geração, com FGP $\Pi_{Z_n}(s) = \mathbb{E}[s^{Z_n}]$. Seja X a variável aleatória da prole de um único indivíduo, com FGP $\Pi_X(s) = \mathbb{E}[s^X]$.

A relação fundamental entre as gerações é dada pela composição de funções:

$$\Pi_{Z_{n+1}}(s) = \Pi_{Z_n}(\Pi_X(s)) \tag{3}$$

Demonstração. Seja Z_n o número de indivíduos na geração n . O número de indivíduos na geração $n + 1$ é a soma dos descendentes de todos os Z_n indivíduos:

$$Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_i$$

Onde X_i é uma variável aleatória que representa o número de descendentes do i -ésimo indivíduo da geração n . Assumimos que todos os X_i são independentes e identicamente distribuídos (i.i.d.) com a mesma FGP da prole, $\Pi_X(s) = \mathbb{E}[s^X]$.

Pela definição da FGP para Z_{n+1} :

$$\Pi_{Z_{n+1}}(s) = \mathbb{E}[s^{Z_{n+1}}] = \mathbb{E}\left[s^{\sum_{i=1}^{Z_n} X_i}\right]$$

Usando a Lei da Expectativa Total (condicionando no valor de Z_n):

$$\Pi_{Z_{n+1}}(s) = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[s^{\sum_{i=1}^{Z_n} X_i} \mid Z_n\right]\right]$$

Dado que $Z_n = k$, a expectativa interna se torna a FGP de uma soma de k variáveis i.i.d.:

$$\mathbb{E} \left[s^{\sum_{i=1}^k X_i} \mid Z_n = k \right] = \mathbb{E} [s^{X_1} \cdot s^{X_2} \cdots s^{X_k}]$$

Pela independência dos X_i , isto é:

$$\mathbb{E}[s^{X_1}] \cdot \mathbb{E}[s^{X_2}] \cdots \mathbb{E}[s^{X_k}] = (\Pi_X(s))^k$$

Portanto, a expectativa interna é $(\Pi_X(s))^{Z_n}$. Substituindo de volta na expressão principal:

$$\Pi_{Z_{n+1}}(s) = \mathbb{E} [(\Pi_X(s))^{Z_n}]$$

Reconhecemos esta forma. A FGP da geração n é $\Pi_{Z_n}(s) = \mathbb{E}[s^{Z_n}]$. Se substituirmos o argumento s por $\Pi_X(s)$, temos:

$$\Pi_{Z_n}(\Pi_X(s)) = \mathbb{E} [(\Pi_X(s))^{Z_n}]$$

Concluímos assim que:

$$\Pi_{Z_{n+1}}(s) = \Pi_{Z_n}(\Pi_X(s))$$

□

3.2.1 FGP e a probabilidade de extinção

A Função Geradora de Probabilidade é a ferramenta analítica central para calcular a probabilidade de extinção, p_e . A relação fundamental vem da Propriedade 1 (que provamos anteriormente): a FGP de uma geração Z_n , avaliada em $s = 0$, nos dá a probabilidade $\Pi_{Z_n}(0) = P(Z_n = 0)$, ou seja, a probabilidade de a população estar extinta na n -ésima geração. A probabilidade de extinção eventual, p_e , é obtida analisando o limite deste valor à medida que n cresce, levando a um resultado de ponto fixo.

Teorema 3.2.1

A probabilidade de extinção p_e é o limite da probabilidade de extinção na n -ésima geração.

$$p_e = \lim_{n \rightarrow \infty} \Pi_{Z_n}(0)$$

Demonstração. Seja E_n o evento $\{Z_n = 0\}$, que significa que a população está extinta na geração n . A probabilidade deste evento é $P(E_n) = P(Z_n = 0)$. Pela Propriedade 1 da FGP (provada anteriormente), temos $P(Z_n = 0) = \Pi_{Z_n}(0)$.

Se a população está extinta em E_n (zero indivíduos), ela certamente estará extinta em E_{n+1} (pois não há pais para gerar filhos). Portanto, $E_n \subseteq E_{n+1}$. Temos uma sequência crescente de eventos.

A probabilidade de extinção eventual, p_e , é a probabilidade da união de todos esses eventos:

$$p_e = P \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right)$$

Pela continuidade da probabilidade para uniões crescentes de eventos, o limite da probabilidade é a probabilidade do limite:

$$p_e = \lim_{n \rightarrow \infty} P(E_n)$$

Substituindo $P(E_n) = \Pi_{Z_n}(0)$, concluímos que:

$$p_e = \lim_{n \rightarrow \infty} \Pi_{Z_n}(0)$$

□

Teorema 3.2.2 (Recorrência da Extinção)

Assumindo que o processo inicia com um único ancestral ($Z_0 = 1$), a probabilidade de extinção na geração $n + 1$ se relaciona com a da geração n através da FGP da prole, $\Pi_X(s)$.

$$\Pi_{Z_{n+1}}(0) = \Pi_X(\Pi_{Z_n}(0))$$

Demonstração. Vamos denotar $q_n = P(Z_n = 0) = \Pi_{Z_n}(0)$. Queremos provar que $q_{n+1} = \Pi_X(q_n)$.

$q_{n+1} = P(Z_{n+1} = 0)$. Usamos a Lei da Probabilidade Total, condicionando no número de filhos do ancestral original (geração Z_1 , que tem a mesma distribuição de X):

$$q_{n+1} = \sum_{k=0}^{\infty} P(Z_{n+1} = 0 | Z_1 = k) \cdot P(Z_1 = k)$$

Se $Z_1 = k$, o processo se divide em k processos de ramificação independentes, cada um começando com um indivíduo. Para Z_{n+1} ser 0, todas essas k linhagens devem se extinguir nas n gerações seguintes. A probabilidade de **uma** dessas linhagens se extinguir nas n gerações seguintes é $P(Z_n = 0) = q_n$. Como são independentes, a probabilidade de todas as k se extinguirem é $(q_n)^k$.

$$P(Z_{n+1} = 0 | Z_1 = k) = (q_n)^k$$

Seja $p_k = P(Z_1 = k) = P(X = k)$. Substituindo na soma:

$$q_{n+1} = \sum_{k=0}^{\infty} (q_n)^k \cdot p_k$$

Reconhecemos esta soma como a definição da FGP da prole, $\Pi_X(s)$, avaliada no ponto $s = q_n$:

$$q_{n+1} = \Pi_X(q_n)$$

Substituindo a notação q_n de volta, temos:

$$\Pi_{Z_{n+1}}(0) = \Pi_X(\Pi_{Z_n}(0))$$

□

Teorema 3.2.3 (Ponto Fixo da Extinção)

A probabilidade de extinção p_e é um ponto fixo da FGP da prole.

$$p_e = \Pi_X(p_e)$$

Demonstração. Dos resultados anteriores, temos:

1. $p_e = \lim_{n \rightarrow \infty} \Pi_{Z_n}(0)$

$$2. \Pi_{Z_{n+1}}(0) = \Pi_X(\Pi_{Z_n}(0))$$

Vamos aplicar o limite $n \rightarrow \infty$ em ambos os lados da Equação (2):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pi_{Z_{n+1}}(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Pi_X(\Pi_{Z_n}(0))$$

Pelo Resultado (1), o lado esquerdo é p_e (pois se $n \rightarrow \infty$, $n + 1 \rightarrow \infty$):

$$p_e = \lim_{n \rightarrow \infty} \Pi_X(\Pi_{Z_n}(0))$$

Uma Função Geradora de Probabilidade $\Pi_X(s)$ é uma série de potências e, portanto, é uma função contínua em seu intervalo de convergência (pelo menos para $|s| \leq 1$). Como $q_n = \Pi_{Z_n}(0)$ é uma probabilidade, $0 \leq q_n \leq 1$. Devido à continuidade da função $\Pi_X(s)$, podemos trocar a ordem do limite e da função:

$$p_e = \Pi_X \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \Pi_{Z_n}(0) \right)$$

Usando o Resultado (1) novamente no argumento da função:

$$p_e = \Pi_X(p_e)$$

Isso mostra que p_e deve ser uma solução de ponto fixo para a equação $s = \Pi_X(s)$. \square

Exemplo 3.2.4

Voltando ao exemplo da cadeia de ramificação (Z_n) com $p = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots)$, qual a probabilidade de extinção da cadeia?

Solução. Queremos encontrar o ponto fixo $p_e = \Pi_X(p_e)$. Observe que:

$$\Pi_X(s) = \sum_{x=0}^{\infty} \mathbb{P}(X=x)s^x = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{s^x}{2^{x+1}} = \frac{1}{2} + \frac{s}{4} + \frac{s^2}{8} + \dots$$

Que é uma P.G infinita com razão $s/2$, como $p_e \leq 1$, temos que

$$\Pi_X(p_e) = \frac{1}{2 - p_e}$$

Resolvendo $\Pi_X(p_e) = p_e$, obtemos $(p_e - 1)^2 = 0$, e portanto $p_e = 1$. \square

Exemplo 3.2.5

Voltando ao exemplo da cadeia de ramificação (Z_n) com $p_0 = \frac{1}{4}$, $p_1 = \frac{1}{2}$, $p_2 = \frac{1}{4}$ e $p_i = 0 \quad \forall i \geq 3$, qual a probabilidade de extinção da cadeia?

Solução. Novamente, buscamos encontrar o ponto fixo $p_e = \Pi_X(p_e)$. Temos:

$$\Pi_X(s) = \sum_{x=0}^{\infty} \mathbb{P}(X=x)s^x = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}s + \frac{1}{4}s^2.$$

Fazendo $\Pi_X(p_e) = p_e$, obtemos, novamente, $(p_e - 1)^2 = 0$, e portanto, $p_e = 1$. \square

3.2.2 Análise Gráfica e Condições de Extinção

Provamos que a probabilidade de extinção, p_e , deve satisfazer a equação de ponto fixo $p_e = \Pi_X(p_e)$. As soluções para esta equação podem ser encontradas graficamente, identificando as interseções das curvas $y = s$ e $y = \Pi_X(s)$ no intervalo $s \in [0, 1]$.

A análise depende de uma nova propriedade da FGP, que relaciona sua derivada em $s = 1$ com a média (valor esperado) da distribuição da prole, $\mu = \mathbb{E}[X]$.

Proposição 3.2.6 (Média da Prole)

A derivada da FGP da prole, avaliada em $s = 1$, é igual ao número esperado de descendentes, μ .

$$\Pi'_X(1) = \mathbb{E}[X]$$

Demonstração. Derivamos a série de potências da FGP, $\Pi_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k$, termo a termo em relação a s :

$$\Pi'_X(s) = \frac{d}{ds} \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k s^{k-1}$$

Avaliando em $s = 1$:

$$\Pi'_X(1) = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k (1)^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k$$

Esta última soma é, por definição, o valor esperado $\mathbb{E}[X]$ da variável aleatória X . \square

A inclinação da curva $\Pi_X(s)$ no ponto $(1, 1)$ é exatamente $\mu = \mathbb{E}[X]$. Além disso, a FGP é uma função convexa em $[0, 1]$ (pois $\Pi''_X(s) = \sum k(k-1)p_k s^{k-2} \geq 0$). Isso nos leva a três casos, como ilustrado na Figura 1:

- **Caso 1: $\mu > 1$ (Supercrítico).** A inclinação $\Pi'_X(1) > 1$. Como $\Pi_X(s)$ é convexa e $\Pi_X(1) = 1$, a curva deve cruzar a linha $y = s$ em exatamente um outro ponto $p_e \in [0, 1)$. A probabilidade de extinção p_e é esta solução, que é o **menor** ponto fixo positivo.
- **Caso 2: $\mu < 1$ (Subcrítico).** A inclinação $\Pi'_X(1) < 1$. Devido à convexidade, a curva $\Pi_X(s)$ estará sempre acima da linha $y = s$ para $s \in [0, 1]$, tocando-a apenas em $s = 1$. O único ponto fixo é $s = 1$.
- **Caso 3: $\mu = 1$ (Crítico).** A inclinação $\Pi'_X(1) = 1$. A linha $y = s$ é tangente à curva convexa $\Pi_X(s)$ em $s = 1$. Novamente, o único ponto fixo no intervalo $[0, 1]$ é $s = 1$ (assumindo que $P(X = 1) \neq 1$).

Isso leva ao teorema fundamental sobre as condições de extinção.

Teorema 3.2.7 (Condição para Extinção Certa)

Seja $\mu = \mathbb{E}[X]$ o número esperado de descendentes por indivíduo.

- Se $\mu \leq 1$, a probabilidade de extinção é $p_e = 1$ (assumindo $P(X = 1) \neq 1$, o caso trivial).
- Se $\mu > 1$, a probabilidade de extinção p_e é a única solução no intervalo $[0, 1)$ para a equação $s = \Pi_X(s)$.

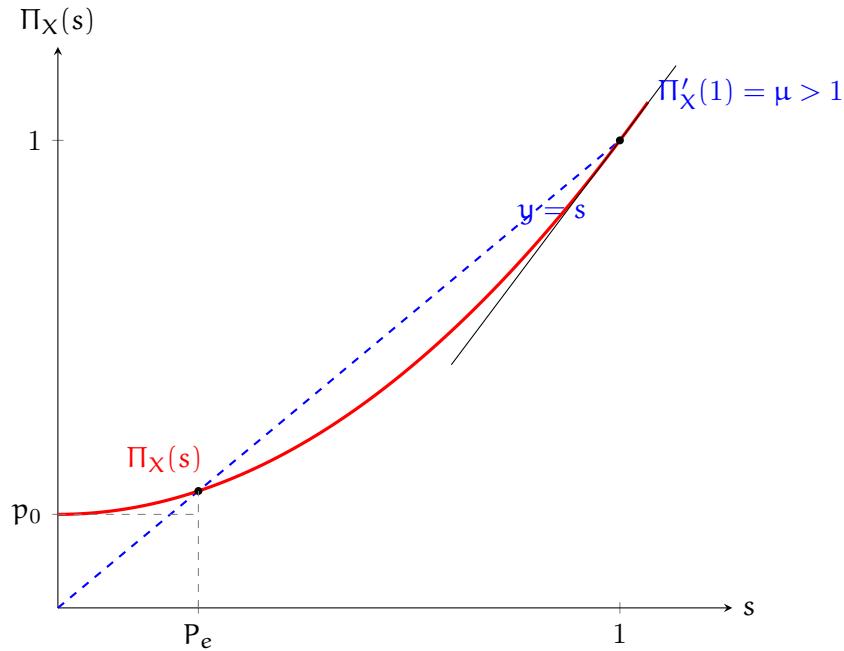


Figura 1: Interpretação gráfica da probabilidade de extinção P_e como o menor ponto fixo positivo de $\Pi_X(s)$, no caso supercrítico ($\mu > 1$).

Exemplo 3.2.8

Considere uma cadeia de ramificação (Z_n) com $p_0 = \frac{1}{4}$, $p_1 = \frac{1}{4}$, $p_2 = \frac{1}{2}$ e $p_i = 0 \quad \forall i \geq 3$, qual a probabilidade de extinção da cadeia?

Solução. Observe que $\mu = \mathbb{E}[X] = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4} > 1$. Portanto, já sabemos que a probabilidade de extinção não é 1. Podemos calculá-la buscando o ponto fixo $p_e = \Pi_X(p_e)$. Temos:

$$\Pi_X(s) = \sum_{x=0}^{\infty} \mathbb{P}(X=x)s^x = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}s + \frac{1}{2}s^2.$$

Fazendo $\Pi_X(p_e) = p_e$, obtemos, a equação quadrática $2p_e^2 - 3p_e + 1 = 0$, cuja a única raiz não-negativa menor que 1 é $p_e = \frac{1}{2}$.

□

3.2.3 Valor Esperado de um processo de ramificação

Uma das aplicações mais diretas da FGP é o cálculo do valor esperado (a média) do tamanho da população em qualquer geração t , que denotaremos por $\mu_t = \mathbb{E}[Z_t]$. O resultado mostra uma progressão geométrica simples, governada pela média da prole, $\mu = \mathbb{E}[X]$.

Teorema 3.2.9

Seja $\mu = \mathbb{E}[X]$ a média da prole de um único indivíduo e assumindo que o processo começa com um único ancestral ($Z_0 = 1$), o valor esperado da população na t -ésima geração é:

$$\mu_t = \mathbb{E}[Z_t] = \mu^t$$

Demonstração. Para provar este resultado, utilizamos duas propriedades da FGP estabelecidas anteriormente:

1. A relação de recorrência: $\Pi_{Z_{t+1}}(s) = \Pi_{Z_t}(\Pi_X(s))$
2. A propriedade da média: $\mathbb{E}[Y] = \Pi'_Y(1)$

Nosso objetivo é encontrar $\mu_{t+1} = \mathbb{E}[Z_{t+1}] = \Pi'_{Z_{t+1}}(1)$. Começamos com a relação de recorrência (1) e derivamos ambos os lados em relação a s , utilizando a Regra da Cadeia no lado direito:

$$\begin{aligned}\Pi'_{Z_{t+1}}(s) &= \frac{d}{ds} \Pi_{Z_t}(\Pi_X(s)) \\ \Pi'_{Z_{t+1}}(s) &= \Pi'_{Z_t}(\Pi_X(s)) \cdot \Pi'_X(s)\end{aligned}$$

Agora, avaliamos esta expressão em $s = 1$:

$$\Pi'_{Z_{t+1}}(1) = \Pi'_{Z_t}(\Pi_X(1)) \cdot \Pi'_X(1)$$

Lembramos de duas propriedades cruciais avaliadas em $s = 1$:

- $\Pi_X(1) = 1$ (Propriedade 3: a soma das probabilidades é 1)
- $\Pi'_X(1) = \mathbb{E}[X] = \mu$ (Propriedade 4: a média da prole)

Substituindo estes valores na equação:

$$\Pi'_{Z_{t+1}}(1) = \Pi'_{Z_t}(1) \cdot \mu$$

Traduzindo a notação das derivadas da FGP de volta para a notação do valor esperado (onde $\mu_t = \Pi'_{Z_t}(1)$), obtemos a relação de recorrência para a média:

$$\mu_{t+1} = \mu_t \cdot \mu$$

Esta é uma progressão geométrica simples. Assumindo que o processo inicia com $Z_0 = 1$, temos $\mu_0 = \mathbb{E}[Z_0] = 1$. Resolvendo a recorrência:

- $\mu_1 = \mu_0 \cdot \mu = 1 \cdot \mu = \mu$
- $\mu_2 = \mu_1 \cdot \mu = (\mu) \cdot \mu = \mu^2$
- $\mu_3 = \mu_2 \cdot \mu = (\mu^2) \cdot \mu = \mu^3$
- ...
- $\mu_t = \mu^t$

□

Este resultado confirma a intuição da análise de extinção: se $\mu < 1$, o tamanho esperado da população decai geometricamente para zero. Se $\mu > 1$, o tamanho esperado da população cresce exponencialmente. Se $\mu = 1$, o tamanho esperado da população permanece constante em 1.

4 Tempo de Extinção

Uma das perguntas feitas na introdução foi sobre a distribuição do tempo de extinção de uma cadeia de ramificação. Para ser mais específicos, nos referimos à variável aleatória

$$\tau = \min n \in \mathbb{Z} : Z_n = 0$$

dessa forma, $\tau = t \iff Z_t = 0, Z_{t-1} > 0$. É útil achar a distribuição dessa variável porque ela pode ser útil quando a extinção é algo quisto pelo modelo, por exemplo, quando a cadeia de ramificação representa o número de indivíduos infectados numa população. Pela equivalência acima, sabemos que

$$\mathbb{P}(\tau = t) = \mathbb{P}(Z_t = 0, Z_{t-1} > 0)$$

. E pela lei da probabilidade total, temos

$$\mathbb{P}(Z_t = 0, Z_{t-1} > 0) = \mathbb{P}(Z_t = 0) - \mathbb{P}(Z_t = 0, Z_{t-1} = 0)$$

No lado direito da igualdade acima, sabemos que $\mathbb{P}(Z_t = 0, Z_{t-1})$ é redundante e igual a $\mathbb{P}(Z_{t-1} = 0)$. Pela proposição 3.1.1, temos que $\mathbb{P}(Z_t = 0) = \Pi_{Z_t}(0) = p_{t,0}$. Assim, concluímos que a distribuição do tempo de extinção obedece à equação:

$$\mathbb{P}(\tau = t) = p_{t,0} - p_{t-1,0}$$

Com a condição inicial de que $\mathbb{P}(\tau = 1) = p_0$.

Num geral, como já visto, achar os valores de $p_{t,0}$ pode ser uma tarefa complicada, principalmente porque envolve calcular órbitas da p_0 pela iteração da função $\Pi_X(s)$ consigo mesma, que pode não ser uma série simples de calcular explicitamente, mas ainda pode ser aproximada pelo computador.

Um outro problema é calcular os momentos de τ . O principal resultado sobre tal assunto é o seguinte:

$$\mathbb{E}(\tau) = \begin{cases} \text{finita , se } \mathbb{E}(Z_1) < 1 ; \\ \text{infinita , se } \mathbb{E}(Z_1) = 1 \text{ e } \text{Var}(Z_1) \text{ é finita;} \\ \text{infinita , se } \mathbb{E}(Z_1) > 1; \end{cases}$$

A demonstração do afirmado exige alguns conhecimentos sobre o comportamento assintótico de Z_n , resultados um pouco mais técnicos que decidimos não incluir no texto.

Dessa forma, concluímos que apesar de conseguirmos simular de maneira mais precisa a distribuição de τ , ainda é muito difícil encontrar uma fórmula fechada para tal.