

```
/tikz/,/tikz/graphs/  
conversions/canvas coordinate/.code=1 , conversions/coordinate/.code=1
```



FUNDAÇÃO GETÚLIO VARGAS  
ESCOLA DE MATEMÁTICA APLICADA  
Processos Estocásticos

## CADEIAS DE RAMIFICAÇÃO

GABRIEL CARNEIRO NUNES DA SILVA  
LUCAS MENEZES DE LIMA  
RODRIGO SEVERO ARAÚJO  
VINICIUS TAVARES MENDES DOS SANTOS

Rio de Janeiro – RJ  
Dezembro de 2025

## Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>2</b>
1.1	Exemplo Motivador . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Processo de Ramificação</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>A Função Geradora de Probabilidade</b>	<b>6</b>
3.1	Propriedades da FGP . . . . .	6
3.2	Utilidade da FGP com processos de ramificação . . . . .	7
3.2.1	FGP e a probabilidade de extinção . . . . .	8
3.2.2	Análise Gráfica e Condições de Extinção . . . . .	11
3.2.3	Valor Esperado de um processo de ramificação . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Tempo de Extinção</b>	<b>14</b>

# 1 Introdução

O estudo da dinâmica das populações é frutífero para a matemática, como sabemos do estudo das equações diferenciais de Verhulst ou dos modelos clássicos de predador-presa, como o de Lotka-Volterra. Nesse trabalho, apresentamos uma teoria que também se originou no estudo da dinâmica populacional, mas que se baseia principalmente na modelagem da reprodução como sendo um processo estocástico: A teoria das Cadeias de Ramificação.

A ideia de utilizar um processo estocástico para estudar o crescimento populacional tem origem nos trabalhos de Francis Galton<sup>1</sup> e de Henry William Watson, que estavam interessados na possível extinção de sobrenomes de aristocratas no Reino Unido. Em vista disso, a teoria das cadeias de ramificação carrega muitas nomenclaturas inspiradas no momento inicial de seu desenvolvimento, como veremos.

Uma descrição simples para uma cadeia de ramificação é a seguinte: um indivíduo de uma certa espécie se reproduz (e morre logo em seguida) de maneira assexuada, com o vetor  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_k, \dots)$  sendo a distribuição de probabilidade para o tamanho de sua prole. Queremos modelar a quantidade de indivíduos  $Z_n$  na  $n$ -ésima geração, considerando que todos indivíduos de uma mesma geração se reproduzem de maneira independente de acordo com  $\mathbf{p}$  e que começamos em  $Z_0 = 1$ .

Estabelecido essa concepção do modelo, surgem as seguintes perguntas acerca de seu comportamento:

- Qual o número esperado de filhos de cada indivíduo?
- Qual a esperança e a variância de  $Z_n$ ?
- É possível achar a distribuição de  $Z_n$ ?
- É possível achar a probabilidade de extinção da cadeia? (ou seja, a probabilidade de que haja um instante  $N$  no qual  $Z_N = 0$ );
- É possível achar as condições para eventual extinção da cadeia?
- Se é certa a extinção, podemos achar a distribuição do tempo até ela?

Planejamos, nas seguintes seções, desenvolver a teoria necessária para tentar responder as perguntas acima. Entretanto, vamos tentar aplicar os nossos conhecimentos já estabelecidos de probabilidade em um exemplo motivador básico.

## 1.1 Exemplo Motivador

### Exemplo 1.1.1

Tome  $\mathbf{p} \sim k \cdot \text{Bernoulli}(p)$ , ou seja, cada indivíduo dessa espécie tem  $k$  filhos com probabilidade  $p$  ou não tem nenhum filho com probabilidade  $1 - p$ .

No exemplo 1.1.1, algumas das perguntas feitas inicialmente são relativamente fáceis de responder:

*Solução.* • O número esperado de filhos é  $k\mathbb{E}(\mathbf{p}) = k \cdot p$ ;

<sup>1</sup>Curiosidade: era também primo de Charles Darwin e foi o idealizador da eugenia

- A distribuição condicional de  $Z_n$  dado  $Z_{n-1}$  é  $k$  vezes uma binomial de parâmetros  $Z_{n-1}$ ,  $p$ , pois  $n$ -ésima geração é composta exatamente pela quantidade de filhos que cada um dos indivíduos da geração anterior teve, e a soma de Bernoullis resulta numa binomial. Esse é o melhor que conseguimos chegar com nossas ferramentas atuais, visto que a distribuição não condicional já é muito complicada de se descrever;
- Pelo dito acima, temos que  $\mathbb{E}(Z_n) = kp\mathbb{E}(Z_{n-1})$ , logo, resolvendo a recorrência com a condição de contorno de que  $\mathbb{E}(Z_1) = kp$ , concluímos que  $\mathbb{E}(Z_n) = (kp)^n$ . Usando a lei da variância total, obtemos:

$$\text{Var}(Z_n) = \mathbb{E}(\text{Var}(Z_n|Z_{n-1})) + \text{Var}(\mathbb{E}(Z_n|Z_{n-1}))$$

$$\text{Var}(Z_n) = \mathbb{E}(Z_{n-1}k^2p(1-p)) + k^2p^2\text{Var}(Z_{n-1})$$

$$\text{Var}(Z_n) = k^2p(1-p)(kp)^{n-1} + k^2p^2\text{Var}(Z_{n-1})$$

Usando a condição de contorno  $\text{Var}(Z_1) = k^2p^2(1-p)^2$ , obtemos que

$$\text{Var}(Z_n) = k^{n+1}p^n(1-p)(1 + (kp) + (kp)^2 + \dots + (kp)^{n-1})$$

□

Iremos abordar de maneira mais completa a probabilidade de extinção em seções posteriores, mas o modelo do exemplo 1.1.1 já nos leva a interessantes reflexões: a extinção ou não dos indivíduos modelo parece depender apenas da distribuição da prole; a esperança e a variância de  $Z_n$  parecem ter o mesmo comportamento assintótico, isto é, ambas convergem ou divergem quando  $n \rightarrow \infty$ ; combinando as duas afirmações anteriores com a desigualdade de Markov, obtemos que:

$$\mathbb{P}(Z_n \geq 1) \leq \mathbb{E}(Z_n) = (kp)^n$$

Ou seja, apesar da média de  $Z_n$  não nos dá informação muito útil quando ela é maior do que 1, mas ela nos diz que  $Z_n$  converge em probabilidade para 0 quando é estritamente menor do que 1.

Abaixo, estão os resultados da distribuição de  $Z_{20}$  advindos de simulações implementadas no arquivo `bernoulli.py`.

## 2 Processo de Ramificação

### Definição 2.0.1 (Processo de Ramificação)

Um **processo de ramificação** é definido da seguinte forma:

- Um único indivíduo no instante  $n = 0$ .
- Cada indivíduo vive exatamente uma unidade de tempo, depois produz  $X$  descendentes e morre.
- O número de descendentes  $X$  assume valores  $0, 1, 2, \dots$ , e a probabilidade de produzir  $k$  descendentes é  $P(X = k) = p_k$ .
- Todos os indivíduos se reproduzem independentemente. Os indivíduos  $1, 2, \dots, n$  têm tamanhos de família  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , onde cada  $X_i$  tem a mesma distribuição que  $X$ .
- Seja  $Z_n$  o *número de indivíduos nascidos* no instante  $n$ , para  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Interprete  $Z_n$  como o “*tamanho*” da geração  $n$ .
- Então o processo de ramificação é  $\{Z_0, Z_1, Z_2, Z_3, \dots\} = \{Z_n : n \in \mathbb{N}\}$ .

Outra maneira de analisar, é o que foi dado na introdução, isto é, se  $X_i^{(n)} \sim p$  é o número de filhos do indivíduo  $i$  da  $n$ -ésima geração, temos que

$$Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_i^{(n)}$$

### Proposição 2.0.2

Seja  $Z_n$  o número de indivíduos na geração  $n$ , como definido acima, e  $X$  o número de descendentes de um determinado indivíduo (lembre que  $X \sim p$ ), então:

$$\mathbb{E}(Z_n) = \mathbb{E}(X)^n$$

Isto é, o valor esperado de indivíduos na cadeia no tempo  $n$  é o valor esperado do número de filhos que um indivíduo tenha na cadeia elevado a  $n$ .

*Demonstração.* De fato, podemos simplesmente fazer as contas:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z_n) &= \mathbb{E} \left( \sum_{i=1}^{Z_{n-1}} X_i^{(n)} \right) = \mathbb{E} \left( \mathbb{E} \left( \sum_{i=1}^{Z_{n-1}} X_i^{(n)} \middle| Z_{n-1} \right) \right) = \mathbb{E}(Z_{n-1} \cdot \mathbb{E}(X_i^{(n)})) \\ &= \mathbb{E}(Z_{n-1}) \cdot \mathbb{E}(X) = \dots = \mathbb{E}(X)^n \cdot \mathbb{E}(Z_0) = \mathbb{E}(X)^n \end{aligned}$$

Portanto,  $\mathbb{E}(Z_n) = \mathbb{E}(X)^n$ , como queríamos □

### Exemplo 2.0.3

Considere uma cadeia de ramificação  $(Z_n)$  com  $p = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots)$ , estudaremos alguma das perguntas vistas na introdução.

- Qual a esperança e a variância de  $Z_n$ ?

Observe que:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot \mathbb{P}(X = i) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i}{2^{i+1}}$$

E portanto, podemos escrever como

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots \\ &\quad + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots \\ &\quad + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots \end{aligned}$$

Logo, realizando a soma dessas progressões geométricas, temos  $\mathbb{E}(X) = 1$ , e também  $\mathbb{E}(Z_n) = 1^n = 1$  para todo  $n$ .

- Qual a probabilidade de extinção da cadeia?

É intuitivo imaginar que a probabilidade de extinção seja 1, a probabilidade de ter 0 filhos é muito maior que as demais probabilidades. Mas queremos ser capazes de fazer essas contas.

#### Exemplo 2.0.4

Aqui selecionamos alguns exemplos mais bobinhos que ajudam a nossa intuição quando queremos trabalhar sobre probabilidade de extinção da cadeia.

- Se eu tenho uma população tal que  $p_0 = 1$ , então na próxima geração certamente ela irá se extinguir, isto é  $X_t = 0 \forall t \geq 1$ , e portanto, sua probabilidade de extinção é 1.

$$X_1^{(0)} \quad \bullet \text{---} \times$$

- Se eu te tenho uma população tal que  $p_0 = \frac{1}{100}$  e  $p_1 = \frac{99}{100}$ , então, no longo prazo, ela irá se extinguir, isto é, existirá um tempo  $t_0$  tal que  $X_t = 0 \forall t \geq t_0$ . Daí, sua probabilidade de extinção também é 1 e, em particular, o tempo até a extinção tem distribuição **Geom**( $\frac{1}{99}$ ).

$$X_1^{(0)} \quad X_1^{(1)} \quad X_1^{(2)} \quad \dots \quad \times$$

- Caso seja uma população tal que  $p_0 = \frac{1}{4}$ ,  $p_1 = \frac{1}{2}$ ,  $p_2 = \frac{1}{4}$ , mostraremos também que a população irá se extinguir.

Daí surge a pergunta natural, como estudar a probabilidade de extinção em casos não-triviais? Usaremos a seguinte notação

$$p_e = \mathbb{P}(\text{Extinção}) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} Z_n = 0\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Z_n = 0)$$

Na seção seguinte, estudaremos uma ferramenta poderosa para lidar com probabilidades de extinção.

### 3 A Função Geradora de Probabilidade

A principal ferramenta analítica para estudar a evolução de processos de ramificação é a Função Geradora de Probabilidade (FGP).

#### Definição 3.0.1 (Função Geradora de Probabilidade)

Seja  $X$  uma variável aleatória discreta que assume valores no conjunto de inteiros não negativos  $\{0, 1, 2, \dots\}$ , com função de massa de probabilidade  $p_k = P(X = k)$ .

A **Função Geradora de Probabilidade** de  $X$ , denotada por  $\Pi_X(s)$ , é a série de potências definida por:

$$\Pi_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X = k)s^k = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k \quad (1)$$

Equivalentemente, a FGP pode ser expressa como o valor esperado:

$$\Pi_X(s) = \mathbb{E}[s^X] \quad (2)$$

Esta série converge absolutamente para  $|s| \leq 1$ .

#### 3.1 Propriedades da FGP

Assumindo a definição da Função Geradora de Probabilidade (FGP) para uma v.a.  $X$  como  $\Pi_X(s) = \mathbb{E}[s^X] = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k$ , onde  $p_k = P(X = k)$ , temos as seguintes propriedades fundamentais.

##### Proposição 3.1.1 (Probabilidade na origem)

A FGP avaliada em  $s = 0$  retorna a probabilidade de  $X$  ser zero.

$$\Pi_X(0) = p_0 = P(X = 0)$$

*Demonstração.* A prova é obtida por substituição direta de  $s = 0$  na série de potências:

$$\Pi_X(s) = p_0 + p_1 s + p_2 s^2 + \dots$$

$$\Pi_X(0) = p_0 + p_1(0) + p_2(0)^2 + \dots = p_0$$

□

##### Proposição 3.1.2 (Derivadas na origem)

A  $n$ -ésima derivada da FGP avaliada em  $s = 0$  permite recuperar a  $n$ -ésima probabilidade  $p_n$ .

$$\left. \frac{d^n \Pi_X}{ds^n} \right|_{s=0} = n! \cdot p_n \implies p_n = \frac{\Pi_X^{(n)}(0)}{n!}$$

*Demonstração.* A FGP é, por definição, a série de Maclaurin (Taylor em  $s = 0$ ) para  $\Pi_X(s)$ , cuja forma geral é  $f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} s^n$ . Comparando os coeficientes da FGP,  $\Pi_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k$ , com a forma de Maclaurin, identificamos termo a termo que:

$$p_k = \frac{\Pi_X^{(k)}(0)}{k!}$$



Rearranjando, obtemos  $\Pi_X^{(k)}(0) = k! \cdot p_k$ . □

### Proposição 3.1.3 (Soma das Probabilidades)

A FGP avaliada em  $s = 1$  é sempre igual a 1.

$$\Pi_X(1) = 1$$

*Demonstração.* Substituindo  $s = 1$  na definição da FGP:

$$\Pi_X(1) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(1)^k = \sum_{k=0}^{\infty} p_k$$

Pela definição de probabilidade, a soma de todas as probabilidades  $p_k$  para uma variável aleatória discreta deve ser 1.

$$\Pi_X(1) = 1$$

□

### Exemplo 3.1.4

Considere a v.a.  $X \sim \text{Bernoulli}(p)$ , iremos calcular a F.G.P desta variável aleatória.

$$\Pi_X(s) = \mathbb{E}(s^X) = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) \cdot s = (1 - p) + p \cdot s$$

## 3.2 Utilidade da FGP com processos de ramificação

A utilidade da FGP em processos de ramificação decorre da forma como ela lida com somas de variáveis aleatórias. Seja  $Z_n$  o tamanho da população na  $n$ -ésima geração, com FGP  $\Pi_{Z_n}(s) = \mathbb{E}[s^{Z_n}]$ . Seja  $X$  a variável aleatória da prole de um único indivíduo, com FGP  $\Pi_X(s) = \mathbb{E}[s^X]$ .

A relação fundamental entre as gerações é dada pela composição de funções:

$$\Pi_{Z_{n+1}}(s) = \Pi_{Z_n}(\Pi_X(s)) \quad (3)$$

*Demonstração.* Seja  $Z_n$  o número de indivíduos na geração  $n$ . O número de indivíduos na geração  $n + 1$  é a soma dos descendentes de todos os  $Z_n$  indivíduos:

$$Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_i$$

Onde  $X_i$  é uma variável aleatória que representa o número de descendentes do  $i$ -ésimo indivíduo da geração  $n$ . Assumimos que todos os  $X_i$  são independentes e identicamente distribuídos (i.i.d.) com a mesma FGP da prole,  $\Pi_X(s) = \mathbb{E}[s^X]$ .

Pela definição da FGP para  $Z_{n+1}$ :

$$\Pi_{Z_{n+1}}(s) = \mathbb{E}[s^{Z_{n+1}}] = \mathbb{E} \left[ s^{\sum_{i=1}^{Z_n} X_i} \right]$$

Usando a Lei da Expectativa Total (condicionando no valor de  $Z_n$ ):

$$\Pi_{Z_{n+1}}(s) = \mathbb{E} \left[ \mathbb{E} \left[ s^{\sum_{i=1}^{Z_n} X_i} \middle| Z_n \right] \right]$$

Dado que  $Z_n = k$ , a expectativa interna se torna a FGP de uma soma de  $k$  variáveis i.i.d.:

$$\mathbb{E} \left[ s^{\sum_{i=1}^k X_i} \middle| Z_n = k \right] = \mathbb{E} [s^{X_1} \cdot s^{X_2} \dots s^{X_k}]$$

Pela independência dos  $X_i$ , isto é:

$$\mathbb{E}[s^{X_1}] \cdot \mathbb{E}[s^{X_2}] \dots \mathbb{E}[s^{X_k}] = (\Pi_X(s))^k$$

Portanto, a expectativa interna é  $(\Pi_X(s))^{Z_n}$ . Substituindo de volta na expressão principal:

$$\Pi_{Z_{n+1}}(s) = \mathbb{E} [(\Pi_X(s))^{Z_n}]$$

Reconhecemos esta forma. A FGP da geração  $n$  é  $\Pi_{Z_n}(s) = \mathbb{E}[s^{Z_n}]$ . Se substituirmos o argumento  $s$  por  $\Pi_X(s)$ , temos:

$$\Pi_{Z_n}(\Pi_X(s)) = \mathbb{E} [(\Pi_X(s))^{Z_n}]$$

Concluimos assim que:

$$\Pi_{Z_{n+1}}(s) = \Pi_{Z_n}(\Pi_X(s))$$

□

### 3.2.1 FGP e a probabilidade de extinção

A Função Geradora de Probabilidade é a ferramenta analítica central para calcular a probabilidade de extinção,  $p_e$ . A relação fundamental vem da Propriedade 1 (que provamos anteriormente): a FGP de uma geração  $Z_n$ , avaliada em  $s = 0$ , nos dá a probabilidade  $\Pi_{Z_n}(0) = P(Z_n = 0)$ , ou seja, a probabilidade de a população estar extinta na  $n$ -ésima geração. A probabilidade de extinção eventual,  $p_e$ , é obtida analisando o limite deste valor à medida que  $n$  cresce, levando a um resultado de ponto fixo.

#### Teorema 3.2.1

A probabilidade de extinção  $p_e$  é o limite da probabilidade de extinção na  $n$ -ésima geração.

$$p_e = \lim_{n \rightarrow \infty} \Pi_{Z_n}(0)$$

*Demonstração.* Seja  $E_n$  o evento  $\{Z_n = 0\}$ , que significa que a população está extinta na geração  $n$ . A probabilidade deste evento é  $P(E_n) = P(Z_n = 0)$ . Pela Propriedade 1 da FGP (provada anteriormente), temos  $P(Z_n = 0) = \Pi_{Z_n}(0)$ .

Se a população está extinta em  $E_n$  (zero indivíduos), ela certamente estará extinta em  $E_{n+1}$  (pois não há pais para gerar filhos). Portanto,  $E_n \subseteq E_{n+1}$ . Temos uma sequência crescente de eventos.

A probabilidade de extinção eventual,  $p_e$ , é a probabilidade da união de todos esses eventos:

$$p_e = P \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right)$$

Pela continuidade da probabilidade para uniões crescentes de eventos, o limite da probabilidade é a probabilidade do limite:

$$p_e = \lim_{n \rightarrow \infty} P(E_n)$$

Substituindo  $P(E_n) = \Pi_{Z_n}(0)$ , concluímos que:

$$p_e = \lim_{n \rightarrow \infty} \Pi_{Z_n}(0)$$

□

### Teorema 3.2.2 (Recorrência da Extinção)

Assumindo que o processo inicia com um único ancestral ( $Z_0 = 1$ ), a probabilidade de extinção na geração  $n + 1$  se relaciona com a da geração  $n$  através da FGP da prole,  $\Pi_X(s)$ .

$$\Pi_{Z_{n+1}}(0) = \Pi_X(\Pi_{Z_n}(0))$$

*Demonstração.* Vamos denotar  $q_n = P(Z_n = 0) = \Pi_{Z_n}(0)$ . Queremos provar que  $q_{n+1} = \Pi_X(q_n)$ .

$q_{n+1} = P(Z_{n+1} = 0)$ . Usamos a Lei da Probabilidade Total, condicionando no número de filhos do ancestral original (geração  $Z_1$ , que tem a mesma distribuição de  $X$ ):

$$q_{n+1} = \sum_{k=0}^{\infty} P(Z_{n+1} = 0 \mid Z_1 = k) \cdot P(Z_1 = k)$$

Se  $Z_1 = k$ , o processo se divide em  $k$  processos de ramificação independentes, cada um começando com um indivíduo. Para  $Z_{n+1}$  ser 0, todas essas  $k$  linhagens devem se extinguir nas  $n$  gerações seguintes. A probabilidade de **uma** dessas linhagens se extinguir nas  $n$  gerações seguintes é  $P(Z_n = 0) = q_n$ . Como são independentes, a probabilidade de todas as  $k$  se extinguírem é  $(q_n)^k$ .

$$P(Z_{n+1} = 0 \mid Z_1 = k) = (q_n)^k$$

Seja  $p_k = P(Z_1 = k) = P(X = k)$ . Substituindo na soma:

$$q_{n+1} = \sum_{k=0}^{\infty} (q_n)^k \cdot p_k$$

Reconhecemos esta soma como a definição da FGP da prole,  $\Pi_X(s)$ , avaliada no ponto  $s = q_n$ :

$$q_{n+1} = \Pi_X(q_n)$$

Substituindo a notação  $q_n$  de volta, temos:

$$\Pi_{Z_{n+1}}(0) = \Pi_X(\Pi_{Z_n}(0))$$

□

### Teorema 3.2.3 (Ponto Fixo da Extinção)

A probabilidade de extinção  $p_e$  é um ponto fixo da FGP da prole.

$$p_e = \Pi_X(p_e)$$

*Demonstração.* Dos resultados anteriores, temos:

$$1. \quad p_e = \lim_{n \rightarrow \infty} \Pi_{Z_n}(0)$$

$$2. \Pi_{Z_{n+1}}(0) = \Pi_X(\Pi_{Z_n}(0))$$

Vamos aplicar o limite  $n \rightarrow \infty$  em ambos os lados da Equação (2):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pi_{Z_{n+1}}(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Pi_X(\Pi_{Z_n}(0))$$

Pelo Resultado (1), o lado esquerdo é  $p_e$  (pois se  $n \rightarrow \infty$ ,  $n+1 \rightarrow \infty$ ):

$$p_e = \lim_{n \rightarrow \infty} \Pi_X(\Pi_{Z_n}(0))$$

Uma Função Geradora de Probabilidade  $\Pi_X(s)$  é uma série de potências e, portanto, é uma função contínua em seu intervalo de convergência (pelo menos para  $|s| \leq 1$ ). Como  $q_n = \Pi_{Z_n}(0)$  é uma probabilidade,  $0 \leq q_n \leq 1$ . Devido à continuidade da função  $\Pi_X(s)$ , podemos trocar a ordem do limite e da função:

$$p_e = \Pi_X\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \Pi_{Z_n}(0)\right)$$

Usando o Resultado (1) novamente no argumento da função:

$$p_e = \Pi_X(p_e)$$

Isso mostra que  $p_e$  deve ser uma solução de ponto fixo para a equação  $s = \Pi_X(s)$ . □

### Exemplo 3.2.4

Voltando ao exemplo da cadeia de ramificação  $(Z_n)$  com  $p = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots)$ , qual a probabilidade de extinção da cadeia?

*Solução.* Queremos encontrar o ponto fixo  $p_e = \Pi_X(p_e)$ . Observe que:

$$\Pi_X(s) = \sum_{x=0}^{\infty} \mathbb{P}(X=x)s^x = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{s^x}{2^{x+1}} = \frac{1}{2} + \frac{s}{4} + \frac{s^2}{8} + \dots$$

Que é uma P.G infinita com razão  $s/2$ , como  $p_e \leq 1$ , temos que

$$\Pi_X(p_e) = \frac{1}{2 - p_e}$$

Resolvendo  $\Pi_X(p_e) = p_e$ , obtemos  $(p_e - 1)^2 = 0$ , e portanto  $p_e = 1$ . □

### Exemplo 3.2.5

Voltando ao exemplo da cadeia de ramificação  $(Z_n)$  com  $p_0 = \frac{1}{4}$ ,  $p_1 = \frac{1}{2}$ ,  $p_2 = \frac{1}{4}$  e  $p_i = 0 \quad \forall i \geq 3$ , qual a probabilidade de extinção da cadeia?

*Solução.* Novamente, buscamos encontrar o ponto fixo  $p_e = \Pi_X(p_e)$ . Temos:

$$\Pi_X(s) = \sum_{x=0}^{\infty} \mathbb{P}(X=x)s^x = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}s + \frac{1}{4}s^2.$$

Fazendo  $\Pi_X(p_e) = p_e$ , obtemos, novamente,  $(p_e - 1)^2 = 0$ , e portanto,  $p_e = 1$ . □

### 3.2.2 Análise Gráfica e Condições de Extinção

Provamos que a probabilidade de extinção,  $p_e$ , deve satisfazer a equação de ponto fixo  $p_e = \Pi_X(p_e)$ . As soluções para esta equação podem ser encontradas graficamente, identificando as interseções das curvas  $y = s$  e  $y = \Pi_X(s)$  no intervalo  $s \in [0, 1]$ .

A análise depende de uma nova propriedade da FGP, que relaciona sua derivada em  $s = 1$  com a média (valor esperado) da distribuição da prole,  $\mu = \mathbb{E}[X]$ .

#### Proposição 3.2.6 (Média da Prole)

A derivada da FGP da prole, avaliada em  $s = 1$ , é igual ao número esperado de descendentes,  $\mu$ .

$$\Pi'_X(1) = \mathbb{E}[X]$$

*Demonstração.* Derivamos a série de potências da FGP,  $\Pi_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k$ , termo a termo em relação a  $s$ :

$$\Pi'_X(s) = \frac{d}{ds} \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k s^{k-1}$$

Avaliando em  $s = 1$ :

$$\Pi'_X(1) = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k (1)^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k$$

Esta última soma é, por definição, o valor esperado  $\mathbb{E}[X]$  da variável aleatória  $X$ .  $\square$

A inclinação da curva  $\Pi_X(s)$  no ponto  $(1, 1)$  é exatamente  $\mu = \mathbb{E}[X]$ . Além disso, a FGP é uma função convexa em  $[0, 1]$  (pois  $\Pi''_X(s) = \sum k(k-1)p_k s^{k-2} \geq 0$ ). Isso nos leva a três casos, como ilustrado na Figura 1:

- **Caso 1:  $\mu > 1$  (Supercrítico).** A inclinação  $\Pi'_X(1) > 1$ . Como  $\Pi_X(s)$  é convexa e  $\Pi_X(1) = 1$ , a curva deve cruzar a linha  $y = s$  em exatamente um outro ponto  $p_e \in [0, 1]$ . A probabilidade de extinção  $p_e$  é esta solução, que é o **menor** ponto fixo positivo.
- **Caso 2:  $\mu < 1$  (Subcrítico).** A inclinação  $\Pi'_X(1) < 1$ . Devido à convexidade, a curva  $\Pi_X(s)$  estará sempre acima da linha  $y = s$  para  $s \in [0, 1]$ , tocando-a apenas em  $s = 1$ . O único ponto fixo é  $s = 1$ .
- **Caso 3:  $\mu = 1$  (Crítico).** A inclinação  $\Pi'_X(1) = 1$ . A linha  $y = s$  é tangente à curva convexa  $\Pi_X(s)$  em  $s = 1$ . Novamente, o único ponto fixo no intervalo  $[0, 1]$  é  $s = 1$  (assumindo que  $P(X = 1) \neq 1$ ).

Isso leva ao teorema fundamental sobre as condições de extinção.

#### Teorema 3.2.7 (Condição para Extinção Certa)

Seja  $\mu = \mathbb{E}[X]$  o número esperado de descendentes por indivíduo.

- Se  $\mu \leq 1$ , a probabilidade de extinção é  $p_e = 1$  (assumindo  $P(X = 1) \neq 1$ , o caso trivial).
- Se  $\mu > 1$ , a probabilidade de extinção  $p_e$  é a única solução no intervalo  $[0, 1]$  para a equação  $s = \Pi_X(s)$ .

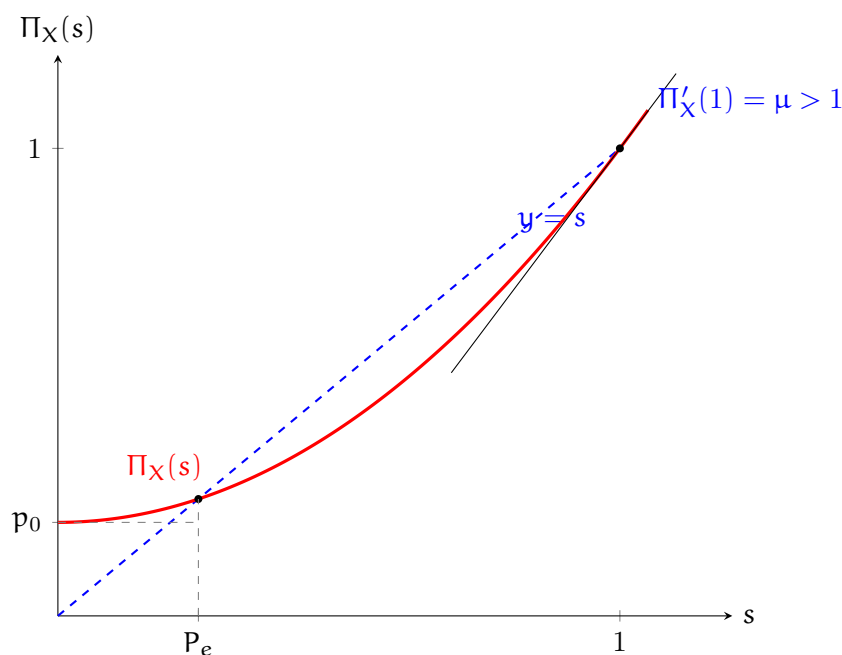


Figura 1: Interpretação gráfica da probabilidade de extinção  $P_e$  como o menor ponto fixo positivo de  $\Pi_X(s)$ , no caso supercrítico ( $\mu > 1$ ).

### Exemplo 3.2.8

Considere uma cadeia de ramificação  $(Z_n)$  com  $p_0 = \frac{1}{4}$ ,  $p_1 = \frac{1}{4}$ ,  $p_2 = \frac{1}{2}$  e  $p_i = 0 \quad \forall i \geq 3$ , qual a probabilidade de extinção da cadeia?

**Solução.** Observe que  $\mu = \mathbb{E}[X] = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4} > 1$ . Portanto, já sabemos que a probabilidade de extinção não é 1. Podemos calculá-la buscando o ponto fixo  $p_e = \Pi_X(p_e)$ . Temos:

$$\Pi_X(s) = \sum_{x=0}^{\infty} \mathbb{P}(X=x)s^x = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}s + \frac{1}{2}s^2.$$

Fazendo  $\Pi_X(p_e) = p_e$ , obtemos, a equação quadrática  $2p_e^2 - 3p_e + 1 = 0$ , cuja a única raiz não-negativa menor que 1 é  $p_e = \frac{1}{2}$ . □

### 3.2.3 Valor Esperado de um processo de ramificação

Uma das aplicações mais diretas da FGP é o cálculo do valor esperado (a média) do tamanho da população em qualquer geração  $t$ , que denotaremos por  $\mu_t = \mathbb{E}[Z_t]$ . O resultado mostra uma progressão geométrica simples, governada pela média da prole,  $\mu = \mathbb{E}[X]$ .

#### Teorema 3.2.9

Seja  $\mu = \mathbb{E}[X]$  a média da prole de um único indivíduo e assumindo que o processo começa com um único ancestral ( $Z_0 = 1$ ), o valor esperado da população na  $t$ -ésima geração é:

$$\mu_t = \mathbb{E}[Z_t] = \mu^t$$

*Demonstração.* Para provar este resultado, utilizamos duas propriedades da FGP estabelecidas anteriormente:

1. A relação de recorrência:  $\Pi_{Z_{t+1}}(s) = \Pi_{Z_t}(\Pi_X(s))$

2. A propriedade da média:  $\mathbb{E}[Y] = \Pi'_Y(1)$

Nosso objetivo é encontrar  $\mu_{t+1} = \mathbb{E}[Z_{t+1}] = \Pi'_{Z_{t+1}}(1)$ . Começamos com a relação de recorrência (1) e derivamos ambos os lados em relação a  $s$ , utilizando a Regra da Cadeia no lado direito:

$$\Pi'_{Z_{t+1}}(s) = \frac{d}{ds} \Pi_{Z_t}(\Pi_X(s))$$

$$\Pi'_{Z_{t+1}}(s) = \Pi'_{Z_t}(\Pi_X(s)) \cdot \Pi'_X(s)$$

Agora, avaliamos esta expressão em  $s = 1$ :

$$\Pi'_{Z_{t+1}}(1) = \Pi'_{Z_t}(\Pi_X(1)) \cdot \Pi'_X(1)$$

Lembramos de duas propriedades cruciais avaliadas em  $s = 1$ :

- $\Pi_X(1) = 1$  (Propriedade 3: a soma das probabilidades é 1)
- $\Pi'_X(1) = \mathbb{E}[X] = \mu$  (Propriedade 4: a média da prole)

Substituindo estes valores na equação:

$$\Pi'_{Z_{t+1}}(1) = \Pi'_{Z_t}(1) \cdot \mu$$

Traduzindo a notação das derivadas da FGP de volta para a notação do valor esperado (onde  $\mu_t = \Pi'_{Z_t}(1)$ ), obtemos a relação de recorrência para a média:

$$\mu_{t+1} = \mu_t \cdot \mu$$

Esta é uma progressão geométrica simples. Assumindo que o processo inicia com  $Z_0 = 1$ , temos  $\mu_0 = \mathbb{E}[Z_0] = 1$ . Resolvendo a recorrência:

- $\mu_1 = \mu_0 \cdot \mu = 1 \cdot \mu = \mu$
- $\mu_2 = \mu_1 \cdot \mu = (\mu) \cdot \mu = \mu^2$
- $\mu_3 = \mu_2 \cdot \mu = (\mu^2) \cdot \mu = \mu^3$
- ...
- $\mu_t = \mu^t$

□

Este resultado confirma a intuição da análise de extinção: se  $\mu < 1$ , o tamanho esperado da população decai geometricamente para zero. Se  $\mu > 1$ , o tamanho esperado da população cresce exponencialmente. Se  $\mu = 1$ , o tamanho esperado da população permanece constante em 1.

## 4 Tempo de Extinção

Uma das perguntas feitas na introdução foi sobre a distribuição do tempo de extinção de uma cadeia de ramificação. Para ser mais específicos, nos referimos à variável aleatória

$$\tau = \min n \in \mathbb{Z} : Z_n = 0$$

dessa forma,  $\tau = t \iff Z_t = 0, Z_{t-1} > 0$ . É útil achar a distribuição dessa variável porque ela pode ser útil quando a extinção é algo quisto pelo modelo, por exemplo, quando a cadeia de ramificação representa o número de indivíduos infectados numa população. Pela equivalência acima, sabemos que

$$\mathbb{P}(\tau = t) = \mathbb{P}(Z_t = 0, Z_{t-1} > 0)$$

. E pela lei da probabilidade total, temos

$$\mathbb{P}(Z_t = 0, Z_{t-1} > 0) = \mathbb{P}(Z_t = 0) - \mathbb{P}(Z_t = 0, Z_{t-1} = 0)$$

No lado direito da igualdade acima, sabemos que  $\mathbb{P}(Z_t = 0, Z_{t-1})$  é redundante e igual a  $\mathbb{P}(Z_{t-1} = 0)$ . Pela proposição **3.1.1**, temos que  $\mathbb{P}(Z_t = 0) = \Pi_{Z_t}(0) = p_{t,0}$ . Assim, concluímos que a distribuição do tempo de extinção obedece à equação:

$$\mathbb{P}(\tau = t) = p_{t,0} - p_{t-1,0}$$

Com a condição inicial de que  $\mathbb{P}(\tau = 1) = p_0$ .

Num geral, como já visto, achar os valores de  $p_{t,0}$  pode ser uma tarefa complicada, principalmente porque envolve calcular órbitas da  $p_0$  pela iteração da função  $\Pi_X(s)$  consigo mesma, que pode não ser uma série simples de calcular explicitamente, mas ainda pode ser aproximada pelo computador.

Um outro problema é calcular os momentos de  $\tau$ . O principal resultado sobre tal assunto é o seguinte:

$$\mathbb{E}(\tau) = \begin{cases} \text{finita} , & \text{se } \mathbb{E}(Z_1) < 1 ; \\ \text{infinita} , & \text{se } \mathbb{E}(Z_1) = 1 \text{ e } \text{Var}(Z_1) \text{ é finita;} \\ \text{infinita} , & \text{se } \mathbb{E}(Z_1) > 1; \end{cases}$$

A demonstração do afirmado exige alguns conhecimentos sobre o comportamento assintótico de  $Z_n$ , resultados um pouco mais técnicos que decidimos não incluir no texto.

Dessa forma, concluímos que apesar de conseguirmos simular de maneira mais precisa a distribuição de  $\tau$ , ainda é muito difícil encontrar uma fórmula fechada para tal.