Gabriel Carneiro Nunes da Silva
Lucas Menezes de Lima
Rodrigo Severo Araújo
Vinicius Tavares Mendes dos Santos

Fundação Getúlio Vargas
Escola de Matemática Aplicada

Dezembro de 2025

Sumário

Motivação Histórica

O estudo da dinâmica das populações é frutífero para a matemática:

- Equações diferenciais de Verhulst
- Modelos clássicos de predador-presa (Lotka-Volterra)

Cadeias de Ramificação: modelagem da reprodução como processo estocástico.

Origem: Francis Galton e Henry William Watson estudavam a possível extinção de sobrenomes de aristocratas no Reino Unido.

Descrição do Modelo

Ideia básica:

- Um indivíduo se reproduz assexuadamente e morre logo em seguida
- $\mathbf{p} = (p_0, p_1, p_2, \ldots)$ é a distribuição do tamanho da prole
- $Z_n =$ número de indivíduos na n-ésima geração
- Reprodução independente segundo $\mathbf{p}$
- Condição inicial: $Z_0 = 1$

Perguntas Fundamentais

1. Qual o número esperado de filhos de cada indivíduo?
2. Qual a esperança e a variância de Z_n?
3. É possível achar a distribuição de Z_n?
4. Qual a probabilidade de extinção da cadeia?
5. Quais as condições para eventual extinção?
6. Se a extinção é certa, qual a distribuição do tempo até ela?

Exemplo Motivador

Exemplo 1.1 Distribuição Bernoulli escalada

Tome $\mathbf{p} \sim k \cdot \text{Bernoulli}(p)$: cada indivíduo tem k filhos com probabilidade p ou nenhum filho com probabilidade $1 - p$.

Resultados imediatos:

- Número esperado de filhos: $k \cdot \mathbb{E}(\mathbf{p}) = kp$
- $Z_n | Z_{n-1} \sim k \cdot \text{Binomial}(Z_{n-1}, p)$

Esperança:

$$\mathbb{E}(Z_n) = kp \cdot \mathbb{E}(Z_{n-1}) \implies \mathbb{E}(Z_n) = (kp)^n$$

Variância (pela lei da variância total):

$$\begin{aligned} \text{Var}(Z_n) &= \mathbb{E}(\text{Var}(Z_n|Z_{n-1})) + \text{Var}(\mathbb{E}(Z_n|Z_{n-1})) \\ &= k^2 p(1-p)(kp)^{n-1} + k^2 p^2 \text{Var}(Z_{n-1}) \end{aligned}$$

Solução:

$$\text{Var}(Z_n) = k^{n+1} p^n (1-p) \left(1 + kp + (kp)^2 + \cdots + (kp)^{n-1}\right)$$

Reflexões do Exemplo

Observações importantes:

- A extinção parece depender apenas da distribuição da prole
- $\mathbb{E}(Z_n)$ e $\text{Var}(Z_n)$ têm o mesmo comportamento assintótico

Pela desigualdade de Markov:

$$\mathbb{P}(Z_n \geqslant 1) \leqslant \mathbb{E}(Z_n) = (kp)^n$$

Se $kp < 1$, então $Z_n \xrightarrow{P} 0$ quando $n \to \infty$.

Definição Formal

Definição 2.1 Processo de Ramificação

Um **processo de ramificação** é definido por:

- Um único indivíduo no instante $n = 0$
- Cada indivíduo vive uma unidade de tempo, produz X descendentes e morre
- $\mathbb{P}(X = k) = p_k$ para $k = 0, 1, 2, \ldots$
- Reprodução independente: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ i.i.d.
- Z_n = número de indivíduos nascidos no instante n

O processo é $\{Z_0, Z_1, Z_2, \ldots\} = \{Z_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Relação de Recorrência

Se $X_i^{(n)} \sim p$ é o número de filhos do indivíduo i da n-ésima geração:

$$\boxed{Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_i^{(n)}}$$

Interpretação: A próxima geração é a soma dos filhos de todos os indivíduos da geração atual.

Valor Esperado de Z_n

Proposição 2.1 Valor Esperado de Z_n

Seja (Z_n) uma cadeia de ramificação com $\mathbb{E}[X] = \mu$. Então:

$$\mathbb{E}(Z_n) = \mu^n$$

Demonstração – Valor Esperado

Demonstração.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z_n) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{Z_{n-1}} X_i^{(n)}\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{Z_{n-1}} X_i^{(n)} \,\middle|\, Z_{n-1}\right)\right) \\
&= \mathbb{E}(Z_{n-1} \cdot \mathbb{E}(X)) \\
&= \mathbb{E}(Z_{n-1}) \cdot \mu = \cdots = \mu^n
\end{aligned}
$$

□

Variância de Z_n

Proposição 2.2 Variância de Z_n

Seja (Z_n) uma cadeia de ramificação com $\mathbb{E}[X] = \mu$ e $\operatorname{Var}(X) = \sigma^2$. Então:

$$\operatorname{Var}(Z_n) = \begin{cases} \sigma^2 n, & \text{se } \mu = 1 \\ \sigma^2 \mu^{n-1} \left(\dfrac{1-\mu^n}{1-\mu} \right), & \text{se } \mu \neq 1 \end{cases}$$

Demonstração – Variância (Parte 1)

Demonstração. Usando a lei da variância total. Seja $V_n = \mathrm{Var}(Z_n)$:

$$\mathrm{Var}(Z_n) = \mathbb{E}(\mathrm{Var}(Z_n|Z_{n-1})) + \mathrm{Var}(\mathbb{E}(Z_n|Z_{n-1}))$$

$$V_n = \mathbb{E}(Z_{n-1} \cdot \sigma^2) + \mathrm{Var}(Z_{n-1} \cdot \mu)$$

$$V_n = \mu^{n-1} \cdot \sigma^2 + \mu^2 \cdot V_{n-1}$$

Encontramos uma recorrência para V_n. □

Demonstração – Variância (Parte 2)

Resolvendo a recorrência:

$$
\begin{aligned}
V_1 &= \sigma^2 \\
V_2 &= \mu\sigma^2(1+\mu) \\
V_3 &= \mu^2\sigma^2(1+\mu+\mu^2) \\
&\vdots \\
V_n &= \mu^{n-1}\sigma^2(1+\mu+\cdots+\mu^{n-1}) \\
&= \mu^{n-1}\sigma^2\left(\frac{1-\mu^n}{1-\mu}\right) \quad (\mu \neq 1)
\end{aligned}
$$

Se $\mu = 1$: $V_n = \sigma^2 n$.

Exemplo: Distribuição Geométrica

Exemplo 2.1

Considere (Z_n) com $p = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots)$.

Esperança do número de filhos:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i}{2^{i+1}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 1$$

Portanto: $\mathbb{E}(Z_n) = 1^n = 1$ para todo n.

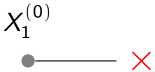
Intuição: A probabilidade de extinção parece ser 1 (alta chance de ter 0 filhos).

Exemplos Intuitivos de Extinção

Exemplo 2.2

Casos simples para desenvolver intuição:

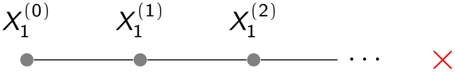
Caso 1: $p_0 = 1$



Extinção certa na próxima geração: $p_e = 1$.

Exemplos Intuitivos de Extinção (cont.)

Caso 2: $p_0 = \frac{1}{100}$, $p_1 = \frac{99}{100}$



Extinção eventual: $p_e = 1$.

Caso 3: $p_0 = \frac{1}{4}$, $p_1 = \frac{1}{2}$, $p_2 = \frac{1}{4}$
Veremos que também $p_e = 1$.

Probabilidade de Extinção – Notação

Pergunta natural: Como estudar p_e em casos não-triviais?

Notação:

$$p_e = \mathbb{P}(\text{Extinção}) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty}\{Z_n = 0\}\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Z_n = 0)$$

Na próxima seção, estudaremos uma ferramenta poderosa: a **Função Geradora de Probabilidade**.

Definição da FGP

Definição 3.1 Função Geradora de Probabilidade

Seja X uma v.a. discreta com valores em $\{0, 1, 2, \ldots\}$ e $p_k = P(X = k)$.
A **Função Geradora de Probabilidade** de X é:

$$\Pi_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X = k)s^k = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k = \mathbb{E}[s^X]$$

Esta série converge absolutamente para $|s| \leqslant 1$.

Propriedade 1: Probabilidade na Origem

Proposição 3.1 Probabilidade na origem

A FGP avaliada em $s = 0$ retorna a probabilidade de X ser zero:

$$\Pi_X(0) = p_0 = P(X = 0)$$

Demonstração.

$$\Pi_X(s) = p_0 + p_1 s + p_2 s^2 + \cdots$$

$$\Pi_X(0) = p_0 + p_1(0) + p_2(0)^2 + \cdots = p_0$$

$\square$

Propriedade 2: Derivadas na Origem

Proposição 3.2 Derivadas na origem

A n-ésima derivada da FGP em $s = 0$ recupera a probabilidade p_n:

$$\left.\frac{d^n \Pi_X}{ds^n}\right|_{s=0} = n! \cdot p_n \quad \Longrightarrow \quad p_n = \frac{\Pi_X^{(n)}(0)}{n!}$$

Demonstração. A FGP é a série de Maclaurin para $\Pi_X(s)$:

$$f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} s^n$$

Comparando: $p_k = \frac{\Pi_X^{(k)}(0)}{k!}$, logo $\Pi_X^{(k)}(0) = k! \cdot p_k$. $\square$

Propriedade 3: Soma das Probabilidades

Proposição 3.3 Soma das Probabilidades

A FGP avaliada em $s = 1$ é sempre igual a 1:

$$\Pi_X(1) = 1$$

Demonstração.

$$\Pi_X(1) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k (1)^k = \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$$

□

Exemplo: FGP da Bernoulli

Exemplo 3.1

Considere $X \sim \text{Bernoulli}(p)$. Calcule a FGP.

Solução.

$$\begin{aligned} \Pi_X(s) &= \mathbb{E}(s^X) = \mathbb{P}(X = 0) \cdot s^0 + \mathbb{P}(X = 1) \cdot s^1 \\ &= (1 - p) + ps \end{aligned}$$

$\square$

FGP e Processos de Ramificação

A utilidade da FGP decorre de como ela lida com somas de v.a.'s.

Relação fundamental:

$$\boxed{\Pi_{Z_{n+1}}(s) = \Pi_{Z_n}(\Pi_X(s))}$$

Composição de funções!

Demonstração da Relação de Composição (Parte 1)

Demonstração. O número de indivíduos na geração $n+1$ é:

$$Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_i$$

onde X_i são i.i.d. com FGP $\Pi_X(s)$.

Pela definição da FGP:

$$\Pi_{Z_{n+1}}(s) = \mathbb{E}[s^{Z_{n+1}}] = \mathbb{E}\left[s^{\sum_{i=1}^{Z_n} X_i}\right]$$

□

Demonstração da Relação de Composição (Parte 2)

Usando a Lei da Expectativa Total:

$$\Pi_{Z_{n+1}}(s) = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[s^{\sum_{i=1}^{Z_n} X_i} \middle| Z_n\right]\right]$$

Dado $Z_n = k$, pela independência dos X_i:

$$\mathbb{E}\left[s^{\sum_{i=1}^{k} X_i}\right] = \prod_{i=1}^{k} \mathbb{E}[s^{X_i}] = (\Pi_X(s))^k$$

Portanto:

$$\Pi_{Z_{n+1}}(s) = \mathbb{E}\left[(\Pi_X(s))^{Z_n}\right] = \Pi_{Z_n}(\Pi_X(s))$$

FGP e Probabilidade de Extinção

Conexão fundamental:

$$\Pi_{Z_n}(0) = P(Z_n = 0)$$

Teorema 3.1

A probabilidade de extinção p_e é o limite:

$$p_e = \lim_{n\to\infty} \Pi_{Z_n}(0)$$

Demonstração do Teorema

Demonstração. Seja $E_n = \{Z_n = 0\}$ (extinção na geração n).
Se $Z_n = 0$, então $Z_{n+1} = 0$, logo $E_n \subseteq E_{n+1}$ (sequência crescente).

$$p_e = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(E_n) = \lim_{n\to\infty} \Pi_{Z_n}(0)$$

$\square$

Recorrência da Extinção

Teorema 3.2 Recorrência da Extinção

Assumindo $Z_0 = 1$, a probabilidade de extinção na geração $n + 1$ satisfaz:

$$\Pi_{Z_{n+1}}(0) = \Pi_X(\Pi_{Z_n}(0))$$

Demonstração da Recorrência

Demonstração. Seja $q_n = P(Z_n = 0) = \Pi_{Z_n}(0)$. Pela Lei da Probabilidade Total:

$$q_{n+1} = \sum_{k=0}^{\infty} P(Z_{n+1} = 0 \mid Z_1 = k) \cdot P(Z_1 = k)$$

Se $Z_1 = k$, temos k processos independentes. Para extinção total:

$$P(Z_{n+1} = 0 \mid Z_1 = k) = (q_n)^k$$

Logo:

$$q_{n+1} = \sum_{k=0}^{\infty} (q_n)^k \cdot p_k = \Pi_X(q_n)$$

□

Ponto Fixo da Extinção

Teorema 3.3 Ponto Fixo da Extinção

A probabilidade de extinção p_e é um ponto fixo da FGP da prole:

$$\boxed{p_e = \Pi_X(p_e)}$$

Demonstração do Ponto Fixo

Demonstração. Dos resultados anteriores:

1. $p_e = \lim_{n\to\infty} \Pi_{Z_n}(0)$
2. $\Pi_{Z_{n+1}}(0) = \Pi_X(\Pi_{Z_n}(0))$

Aplicando o limite em (2):

$$\lim_{n\to\infty} \Pi_{Z_{n+1}}(0) = \lim_{n\to\infty} \Pi_X(\Pi_{Z_n}(0))$$

Como Π_X é contínua (série de potências):

$$p_e = \Pi_X\left(\lim_{n\to\infty} \Pi_{Z_n}(0)\right) = \Pi_X(p_e)$$

$\square$

Exemplo: Distribuição Geométrica

Exemplo 3.2

Cadeia com $p = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots)$. Qual p_e?

Solução.

$$\Pi_X(s) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{s^x}{2^{x+1}} = \frac{1}{2} + \frac{s}{4} + \frac{s^2}{8} + \cdots = \frac{1}{2-s}$$

Resolvendo $\Pi_X(p_e) = p_e$:

$$\frac{1}{2-p_e} = p_e \implies (p_e - 1)^2 = 0 \implies p_e = 1$$

□

Exemplo: Distribuição Simétrica

Exemplo 3.3

Cadeia com $p_0 = \frac{1}{4}$, $p_1 = \frac{1}{2}$, $p_2 = \frac{1}{4}$. Qual p_e?

Solução.

$$\Pi_X(s) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}s + \frac{1}{4}s^2$$

Fazendo $\Pi_X(p_e) = p_e$:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2}p_e + \frac{1}{4}p_e^2 = p_e \implies (p_e - 1)^2 = 0 \implies p_e = 1$$

□

Propriedade da Média

Proposição 3.4 Média da Prole

A derivada da FGP em $s = 1$ é o número esperado de descendentes:

$$\Pi'_X(1) = \mathbb{E}[X] = \mu$$

Demonstração.

$$\Pi'_X(s) = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k s^{k-1}$$

$$\Pi'_X(1) = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = \mathbb{E}[X]$$

□

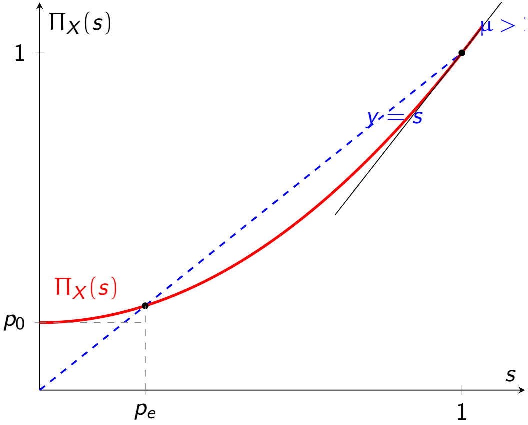
Análise Gráfica – Casos

A inclinação de $\Pi_X(s)$ em $(1,1)$ é $\mu = \mathbb{E}[X]$.
A FGP é **convexa** em $[0,1]$: $\Pi''_X(s) = \sum k(k-1)p_k s^{k-2} \geqslant 0$.

Três casos:

- **Supercrítico** ($\mu > 1$): $\Pi_X(s)$ cruza $y = s$ em $p_e \in [0,1)$
- **Subcrítico** ($\mu < 1$): Único ponto fixo é $s = 1$
- **Crítico** ($\mu = 1$): $y = s$ é tangente em $s = 1$

Análise Gráfica – Figura



Caso supercrítico: p_e é o menor ponto fixo positivo.

Teorema Fundamental de Extinção

Teorema 3.4 Condição para Extinção Certa

Seja $\mu = \mathbb{E}[X]$ o número esperado de descendentes.

- Se $\mu \leqslant 1$: $p_e = 1$ (assumindo $P(X = 1) \neq 1$)
- Se $\mu > 1$: p_e é a única solução em $[0, 1)$ de $s = \Pi_X(s)$

Exemplo: Caso Supercrítico

Exemplo 3.4

Cadeia com $p_0 = \frac{1}{4}$, $p_1 = \frac{1}{4}$, $p_2 = \frac{1}{2}$. Qual p_e?

Solução. Primeiro: $\mu = \mathbb{E}[X] = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{4} > 1$.
Logo, $p_e < 1$. A FGP é:

$$\Pi_X(s) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}s + \frac{1}{2}s^2$$

Resolvendo $\Pi_X(p_e) = p_e$:

$$2p_e^2 - 3p_e + 1 = 0 \implies p_e = \frac{1}{2}$$

$\square$

Valor Esperado via FGP

Teorema 3.5

Seja $\mu = \mathbb{E}[X]$ e $Z_0 = 1$. O valor esperado na geração t é:

$$\mu_t = \mathbb{E}[Z_t] = \mu^t$$

Demonstração – Valor Esperado via FGP

Demonstração. Usando $\Pi_{Z_{t+1}}(s) = \Pi_{Z_t}(\Pi_X(s))$ e derivando (Regra da Cadeia):

$$\Pi'_{Z_{t+1}}(s) = \Pi'_{Z_t}(\Pi_X(s)) \cdot \Pi'_X(s)$$

Em $s = 1$, usando $\Pi_X(1) = 1$ e $\Pi'_X(1) = \mu$:

$$\Pi'_{Z_{t+1}}(1) = \Pi'_{Z_t}(1) \cdot \mu$$

Como $\mu_t = \Pi'_{Z_t}(1)$:

$$\mu_{t+1} = \mu_t \cdot \mu \implies \mu_t = \mu^t$$

□

Interpretação do Valor Esperado

Comportamento assintótico de $\mathbb{E}[Z_t] = \mu^t$:

- $\mu < 1$ (subcrítico): população esperada decai geometricamente $\to 0$
- $\mu > 1$ (supercrítico): população esperada cresce exponencialmente $\to \infty$
- $\mu = 1$ (crítico): população esperada constante $= 1$

Consistente com a análise de extinção!

Aplicação: Mutação em Populações

Problema: Uma população segue um processo de ramificação. Cada novo indivíduo tem probabilidade γ de possuir uma mutação.

Pergunta: Qual a probabilidade de que essa população contraia a mutação?

Seja X o total de nascimentos a partir do primeiro indivíduo:

$$X = \sum_{i \geqslant 0} Z_i, \quad Z_0 = 1$$

FGP do Total de Nascimentos

A FGP de X é:

$$\Pi_X(s) = \mathbb{E}(s^X)$$

Condicionando em $Z_1 = k$: temos k processos independentes.

$$\mathbb{E}(s^X | Z_1 = k) = s \cdot \mathbb{E}(s^X)^k$$

Portanto:

$$\boxed{\Pi_X(s) = s \cdot f(\Pi_X(s))}$$

onde $f(s) = \sum p_k s^k$ é a FGP do número de filhos.

Caso Particular: $p_0 = 1 - p$, $p_2 = p$

A FGP do número de filhos é:

$$f(s) = (1 - p) + ps^2$$

Substituindo em $\Pi_X(s) = s \cdot f(\Pi_X(s))$:

$$\Pi_X(s) = s(1 - p + p\Pi_X(s)^2)$$

Resolvendo a equação quadrática (com $\lim_{s \to 0} \Pi_X(s) = 0$):

$$\Pi_X(s) = \frac{1}{2ps}\left(1 - \sqrt{1 - 4ps^2(1 - p)}\right)$$

Expansão em Série de Potências

Lema 4.1

Seja $c_n = \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1} n!(n-1)!} = \frac{1}{n} 2^{1-2n} \binom{2n-2}{n-1}$ para $n \geqslant 1$.
Para $x \in (-1, 1)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n = 1 - \sqrt{1-x}$$

(Segue da Fórmula Binomial de Newton)

Distribuição do Total de Nascimentos

Usando $x = 4ps^2(1-p)$ no Lema:

$$\Pi_X(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!} p^{n-1}(1-p)^n s^{2n-1}$$

Distribuição de X: Para $n \geqslant 1$,

$$\boxed{P(X = 2n-1 | Z_0 = 1) = \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!} p^{n-1}(1-p)^n}$$

Observe: X assume apenas valores ímpares!

Probabilidade da Mutação

Seja M o evento "mutação aparece" e M^c seu complemento.

Se $X = \infty$: $P(M) = 1$.

Se $X < \infty$ (extinção):

$$P(M^c) = \sum_{k=1}^{\infty} (1-\gamma)^{k-1} P(X = k)$$

(Nenhum dos k indivíduos tem a mutação, exceto possivelmente o primeiro)

Cálculo Final

Substituindo a distribuição de X:

$$P(M^c) = \sum_{k=1}^{\infty} (1-\gamma)^{2k-2} \frac{(2k-2)!}{k!(k-1)!} p^{k-1}(1-p)^k$$

Reorganizando e aplicando o Lema:

$$P(M^c) = \frac{1}{2p(1-\gamma)^2} \left(1 - \sqrt{1 - 4(1-p)p(1-\gamma)^2}\right)$$

Resultado Final

Teorema 4.1 Probabilidade de Mutação

A probabilidade de que a população contraia a mutação é:

$$\boxed{P(M) = 1 - \frac{1}{2p(1-\gamma)^2}\left(1 - \sqrt{1 - 4p(1-p)(1-\gamma)^2}\right)}$$

Casos especiais:

- $\gamma \to 1$: $P(M) \to 1$ (mutação certa)
- $\gamma \to 0$: $P(M) \to 0$ (sem mutação)

Resumo

O que estudamos:

- Definição e propriedades de processos de ramificação
- Esperança e variância de Z_n
- Função Geradora de Probabilidade (FGP)
- Probabilidade de extinção como ponto fixo
- Condições para extinção certa ($\mu \leqslant 1$)
- Aplicação: mutações em populações

Resultado central:

$$p_e = \Pi_X(p_e) \quad \text{e} \quad \mathbb{E}[Z_n] = \mu^n$$

Obrigado!

FGV/EMAp – Dezembro de 2025