Cadeias de Ramificação

Gabriel Carneiro Nunes da Silva

Escola de Matemática Aplicada

Dezembro de 2025

ESCOLA DE MATEMÁTICA APLICADA

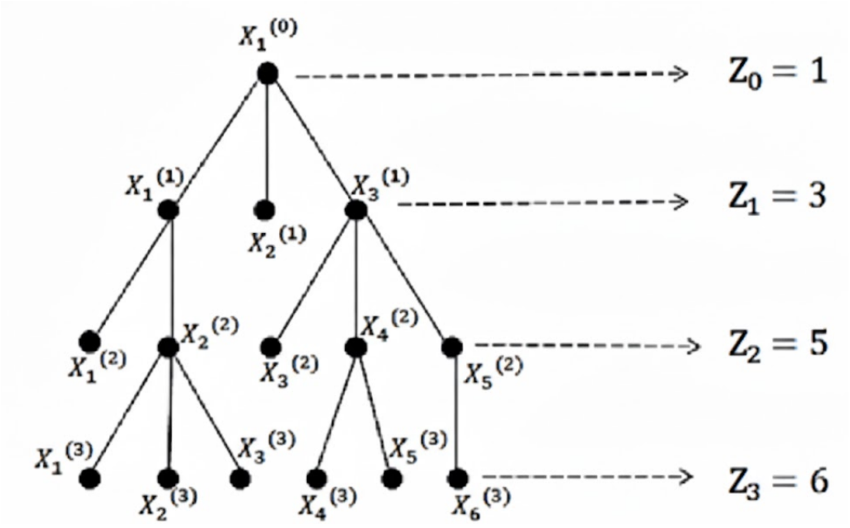
Definição

Definição 1: Processo de Ramificação

Um **processo de ramificação** é definido da seguinte forma:

- Um único indivíduo no instante $n = 0$.
- Cada indivíduo vive exatamente uma unidade de tempo, depois produz X descendentes e morre.
- O número de descendentes X assume valores $0, 1, 2, \ldots$, e a probabilidade de produzir k descendentes é $\mathbb{P}(X = k) = p_k$.
- Todos os indivíduos se reproduzem independentemente. Os indivíduos $1, 2, \ldots, n$ têm tamanhos de família $X_1, X_2, \ldots, X_n$, onde cada X_i tem a mesma distribuição que X.
- Seja Z_n o *número de indivíduos nascidos* no instante n, para $n = 0, 1, 2, \ldots$. Interprete Z_n como o *"tamanho" da geração* n.
- Então o processo de ramificação é $\{Z_0, Z_1, Z_2, Z_3, \ldots\} = \{Z_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Ilustração



$X_1^{(0)}$
$Z_0 = 1$
$X_1^{(1)}$
$X_2^{(1)}$
$X_3^{(1)}$
$Z_1 = 3$
$X_1^{(2)}$
$X_2^{(2)}$
$X_3^{(2)}$
$X_4^{(2)}$
$X_5^{(2)}$
$Z_2 = 5$
$X_1^{(3)}$
$X_2^{(3)}$
$X_3^{(3)}$
$X_4^{(3)}$
$X_5^{(3)}$
$X_6^{(3)}$
$Z_3 = 6$

Sim

Lembrete 1

Outra forma de analisar, é observando que

$$Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_i^{(n)}$$

Lema 1: Valor Esperado e variância de Z_n

Seja (Z_n) uma cadeia de ramificação. Seja X o número de descendentes de um determinado indivíduo (lembre que $X \sim p$), e suponha que $\mathbb{E}[X] = \mu$, e $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$. Então

- $\mathbb{E}(Z_n) = \mu^n$
- $$\mathrm{Var}(Z_n) = \begin{cases} \sigma^2 n, & \text{se } \mu = 1, \\ \sigma^2 \mu^{n-1} \left(\dfrac{1-\mu^n}{1-\mu} \right), & \text{se } \mu \neq 1. \end{cases}$$

Proof of Lema ??

De fato, podemos simplesmente fazer as contas:

$$\mathbb{E}(Z_n) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{Z_{n-1}} X_i^{(n)}\right) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{Z_{n-1}} X_i^{(n)} \middle| Z_{n-1}\right)\right) = \mathbb{E}(Z_{n-1} \cdot \mathbb{E}(X_i^{(n)}))$$

$$= \mathbb{E}(Z_{n-1}) \cdot \mathbb{E}(X) = \cdots = \mathbb{E}(Z_0) \cdot \mathbb{E}(X)^n = \mathbb{E}(X)^n$$

Portanto, $\mathbb{E}(Z_n) = \mu^n$, como queríamos

Exemplo 1

Considere uma cadeia de ramificação (Z_n) com $p = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots)$.

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot \mathbb{P}(X = i) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i}{2^{i+1}}$$

E portanto, podemos escrever como

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots \\ + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots \\ + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots\end{aligned}$$

Logo, realizando a soma dessas progressões geométricas, temos $\mathbb{E}(X) = 1$, e também $\mathbb{E}(Z_n) = 1^n = 1$ para todo n.

Probabilidade de Extinção

Qual a probabibilidade de extinção da cadeia?

Definição 2

Definiremos a probabilidade de extinção como segue:

$$p_e = \mathbb{P}(\text{Extinção}) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} Z_n = 0\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Z_n = 0)$$

Exemplos

Exemplo 2

Abaixo segue alguns exemplos simples

1. População tal que $p_0 = 1$, então na próxima geração certamente ela irá se extinguir, isto é $Z_n = 0\ \forall n \geq 1$, daí, sua probabilidade de extinção é 1.

2. População tal que $p_0 = \frac{1}{100}$ e $p_1 = \frac{99}{100}$, então, no longo prazo, ela irá se extinguir, isto é, existirá um tempo n_0 tal que $Z_n = 0\ \forall n \geq n_0$. Daí, sua probabilidade de extinção também é 1.