Universidade Federal do Paraná

Alunos:

Rubens Zandomenighi Laszlo - GRR20206147

Gabriel Razzolini Pires de Paula - GRR20197155

Disciplina: Otimização - CI1238

Data: 29/05/2023

Modelagem e Implementação por programação linear de uma solução para o problema de Produção de Produtos Químicos

1. Introdução

Dado o problema de Produção de Produtos Químicos em que uma empresa produz n tipos diferentes de produto. Utilizando proporções de m diferentes compostos.
Cada produto i tem valor de venda (por litro), vi. Cada composto j usado tem um preço (por litro), pj , e um limite diário de volume (em litros), qj. A quantidade (em litros) de uso de cada composto j na produção de 1 litro do produto i é dada por cij.
Deseja-se maximizar os lucros da empresa, supondo que toda a produção será vendida.

2. Modelagem

Conforme a introdução do problema, dados que:

n: Quantidade de produtos,

m: Quantidade de compostos,

vi: Valor de venda do produto i,

xi: Variável que representa a quantidade para o produto xi,

cij: Custo de cada composto j na produção dos produtos,

pj: Preço por litro do composto j,

qj: Limite diário de volume para o composto j,

Como é desejado a maximização do lucro da empresa, modelamos o problema tal que a função objetiva: z = (∑(vi - cij)) * xi, para todo xi pertencente aos produtos. Já para as restrições, utilizamos as células referentes aos produtos x compostos para restringir a quantidade dos compostos conforme os limites diários, gerando uma restrição para cada composto utilizado, tal que: (cij * xi) ≤ qj para todo j pertencente aos compostos e i pertencente aos produtos.

Assim, geramos ao seguinte modelo:

$\text{Max } z = (\sum(vi - cij)) * xi$

Sujeito a:

$c[1][1] * (x1) + c[2][1] * (x2+1) + \ldots + c[n][1] * (Xn)$

$c[1][2] * (x1) + c[2][2] * (x2+1) + \ldots + c[n][2] * (Xn)$

...

$c[1][m] * (xi) + c[2][m] * (xi+1) + \ldots + c[n][m] * (Xn)$

$xi >= 0$, para todo $xi \in R$

3. Implementação

O objetivo deste projeto é a geração uma saída para ser usada pelo resolvedor lp_solve, tal que a entrada segue o formato segue o padrão, a seguir;

O trabalho está dividido em dois arquivos: producao.awk e makefile, e um diretório contendo do exemplos que utilizamos para testes e análises das gerações do programa: examples.

Entrada:

* Inicia com dois números inteiros n e m indicando a quantidade de produtos e compostos, respectivamente.

* n números indicando os preços de venda (de 1 litro, vi) de cada produto.

* m linhas, com 2 números em cada, indicando o custo (de 1 litro, pj) e o limite de produção (qj) de cada composto usado como matéria prima.

* n × m números indicando a quantidade de cada composto usada na produção de 1 litro de cada produto.

Saída

Saída seguindo o padrão aceito pelo lp_solve, abordada com mais detalhes nos exemplos na seção 4.

Algoritmo:

Percorremos as linhas de entrada do arquivo, atribuindo ao vetor V os valores dos produtos, ao vetor C os custos dos produtos, o vetor L os limites dos compostos e as proporções de compostos/produto à matriz P.

Após percorrermos a entrada, geramos a saída conforme impressão "max", somando a variável cost os custos para produção de cada produto (somatório(<P[i][j]>preço_dos_compostos * <C[j]> porcentagem_no_produto)), atribuindo então à variável profit o lucro do produto i: profit = V[i] - cost. Posteriormente impressão da unção de maximização conforme profit[i], i + 1, e finalmente, a impressão das restrições conforme citados na seção de modelagem de cada composto e seu limite diário e as variáveis de não restrição.

4. Exemplos

Foram gerados exemplos distintos para teste do programa e análise de diferentes casos para o problema apresentado, tais como abordados a seguir:

4.1. Exemplo em que todos os produtos dão lucros diferentes (exemplo do enunciado)

		Com	Pos	tos		
	n/m	1	2	3	4	VALOR
PRO	1	0.2	0.5	1.0	0.1	10
DU	2	1.0	0.1	0.3	0.1	7
TOS	3	0.4	0.2	0.2	0.0	3
	CUSTO	1	2	5	10	
	LIMITE	1000	2000	500	2000	

INPUT :

3 4

10 7 3

1 1000

2 2000

5 500

10 2000

0.2 0.5 1.0 0.1

1.0 0.1 0.3 0.1

0.4 0.2 0.2 0.0

OUTPUT PRODUCAO:

max: 2.8x1 + 3.3x2 + 1.2x3;

0.2x1 + 1.0x2 + 0.4x3 <= 1000;

0.5x1 + 0.1x2 + 0.2x3 <= 2000;

1.0x1 + 0.3x2 + 0.2x3 <= 500;

0.1x1 + 0.1x2 + 0.0x3 <= 2000;

x1 >= 0;

x2 >= 0;

x3 >= 0;

OUTPUT LP_SOLVE:

Value of objective function: 3755.31914894

Actual values of the variables:

x1 212.766

x2 957.447

x3 0

Portanto, uma solução ótima tem lucro de R$ 3755.31 com 212,766 litros do produto 1 e 957,44 do produto 2 e 0 litros do produto 3, podemos perceber que a solução gerada é a mesma do enunciado, conforme esperado.

4.2. Caso em que foi criado um produto que utiliza um composto com limite de produção baixo porém é o com maior lucro.

		Com	pos	tos		
	n/m	1	2	3	4	VALOR
PRO	1	0.2	0.5	1.0	0.1	10
DU	2	1.0	0.1	0.3	0.1	7
TOS	3	0.4	0.2	0.2	0.0	3
	4	0.0	0.0	0.8	0.0	100
	CUSTO	1	2	5	10	
	LIMITE	1000	2000	500	2000	

INPUT :

4 4

10 7 3 100

1 1000

2 2000

5 10

10 2000

0.2 0.5 0.0 0.1

1.0 0.1 0.0 0.1

0.4 0.2 0.0 0.0

0.0 0.0 0.8 0.0

OUTPUT:

max: 7.8x1 + 4.8x2 + 2.2x3 + 96.0x4;

0.2x1 + 1.0x2 + 0.4x3 + 0.0x4 <= 1000;

0.5x1 + 0.1x2 + 0.2x3 + 0.0x4 <= 2000;

0.0x1 + 0.0x2 + 0.0x3 + 0.8x4 <= 10;

0.1x1 + 0.1x2 + 0.0x3 + 0.0x4 <= 2000;

x1 >= 0;

x2 >= 0;

x3 >= 0;

x4 >= 0;

OUTPUT LP_SOLVE:

Value of objective function: 33075.00000000

Actual values of the variables:

x1	3958.33
x2	208.333

x3 0

x4 12.5

Portanto, uma solução ótima tem lucro de R$ 33075.00 com 3958,3958.33 litros do produto 1, 208,333 do produto 2, 0 litros do produto 3 e 12,5 litros do produto 4, podemos perceber que a solução gerada como o produto de maior lucro consiste em grande parte de uma matéria prima com baixo limite de produção diária, foi necessário a distribuição entre outros produtos também na produção.

4.3. Situação em que houve alta nos preços dos compostos e a produção está dando prejuízo para todos os produtos.

		Com	pos	tos		
	n/m	1	2	3	4	VALOR
PRO	1	0.2	0.5	1.0	0.1	10
DU	2	1.0	0.1	0.3	0.1	7
TOS	3	0.4	0.2	0.2	0.0	3
	4	0.0	0.0	0.8	0.0	100
	CUSTO	100	200	500	100	
	LIMITE	1000	2000	10	2000	

INPUT:

4 4

10 7 3 100

100 1000

200 2000

500 10

100 2000

0.2 0.5 0.0 0.1

1.0 0.1 0.0 0.1

0.4 0.2 0.0 0.0

0.0 0.0 0.8 0.0

OUTPUT:

max: -120.0x1 + -123.0x2 + -77.0x3 + -300.0x4;

0.2x1 + 1.0x2 + 0.4x3 + 0.0x4 <= 1000;

0.5x1 + 0.1x2 + 0.2x3 + 0.0x4 <= 2000;

0.0x1 + 0.0x2 + 0.0x3 + 0.8x4 <= 10;

0.1x1 + 0.1x2 + 0.0x3 + 0.0x4 <= 2000;

x1 >= 0;

x2 >= 0;

x3 >= 0;

x4 >= 0;

OUTPUT LP_SOLVE:

Value of objective function: 0

Actual values of the variables:

x1 0

x2 0

x3 0

x4 0

Portanto, uma solução ótima tem lucro de R$ 0.00 com 0 litros do produto 1, 0 do produto 2, 0 litros do produto 3 e 0 litros do produto 4, podemos perceber que a solução gerada como a produção de todos os produtos está gerando prejuízo, a solução ótima para maximizar o lucro é a de não produzir.

4.4. Dois produtos com a maior margem de lucro, porém limites de compostos diários distintos.

		Com	pos	tos		
	n/m	1	2	3	4	VALOR
PRO	1	0.2	0.5	1.0	0.1	10
DU	2	1.0	0.1	0.3	0.1	7

TOS	3	0.4	0.2	0.2	0.0	3
	4	0.0	0.1	0.8	0.0	100
	4	0.1	0.0	0.8	0.0	100
	CUSTO	1	1	5	10	
	LIMITE	1000	2000	200	2000	

INPUT:

5 4

10 7 3 100 100

1 1000

1 2000

5 200

10 2000

0.2 0.5 0.0 0.1

1.0 0.1 0.0 0.1

0.4 0.2 0.0 0.0

0.0 0.1 0.8 0.0

0.1 0.0 0.8 0.0

OUTPUT:

max: 8.3x1 + 4.9x2 + 2.4x3 + 95.9x4 + 95.9x5;

0.2x1 + 1.0x2 + 0.4x3 + 0.0x4 + 0.1x5 <= 1000;

0.5x1 + 0.1x2 + 0.2x3 + 0.1x4 + 0.0x5 <= 2000;

0.0x1 + 0.0x2 + 0.0x3 + 0.8x4 + 0.8x5 <= 200;

0.1x1 + 0.1x2 + 0.0x3 + 0.0x4 + 0.0x5 <= 2000;

x1 >= 0;

x2 >= 0;

x3 >= 0;

x4 >= 0;

x5 >= 0;

OUTPUT LP_SOLVE:

Value of objective function: 57765.62500000

Actual values of the variables:

x1	3963.54
x2	182.292
x3	0
x4	0
x5	250

Portanto, uma solução ótima tem lucro de R$ 57765,62 com 3963,54 litros do produto 1, 182,292 do produto 2, 0 litros do produto 3, 0 litros do produto 4,250 litros do produto 5, podemos perceber que mesmo que os produtos x4 e x5 tem o mesmo lucro de produção foi optado pela produção do produto x5 para maximização também do lucro obtido com os outros produtos.

5. Referências

Understanding and Using Linear Programming. Bernd Gärtner e Jiří Matoušek, 2007.