

Equações não Lineares - Métodos Iterativos

1 Método da Bissecção

1.1 Conceituação

O Método da Bissecção é um método numérico para encontrar raízes de funções contínuas. Para aplicá-lo corretamente, é importante saber o que diz o **Teorema do Valor Intermediário**:

Teorema: Se $f(x)$ for uma função contínua em um intervalo fechado $[a, b]$ e $f(a)$ e $f(b)$ tiverem sinais opostos, ou seja, $f(a) \cdot f(b) < 0$, então existe pelo menos um ponto c em $[a, b]$ tal que $f(c) = 0$.

Para aplicar o Método da Bissecção, vamos seguir alguns passos:

1. **Escolha do Intervalo Inicial:** Vamos usar o intervalo $[a, b]$ onde $f(a) \cdot f(b) < 0$.
2. **Cálculo do Ponto Médio:** Definimos c como sendo o ponto médio do intervalo $[a, b]$

$$c = \frac{a + b}{2} \quad (1.1.1)$$

3. **Teste da Raiz:**

- (a) Se $f(a) \cdot f(c) < 0$, então a raiz está no intervalo $[a, c]$, ajustamos $b \leftarrow c$.
- (b) Se $f(a) \cdot f(c) > 0$, então a raiz está no intervalo $[c, b]$, ajustamos $a \leftarrow c$.
- (c) Caso contrário, então $f(c) = 0$ e encontramos a raiz.

4. **Repetição** O processo é repetido que a raiz seja encontrada com a precisão desejada. Podemos usar diferentes critérios para isso:

- (a) $|b - a| < \epsilon$
- (b) $f(c) < \epsilon$

2 Método da Falsa Posição

2.1 Conceituação

O Método da Falsa Posição é uma variação do Método da Bissecção, porém, ele usa uma reta secante entre dois pontos da função para estimar a raiz, sendo mais rápido em alguns casos.

Para utilizar o Método da Falsa Posição, vamos seguir os seguintes passos:

1. **Escolha do Intervalo Inicial:** Vamos usar o intervalo $[a, b]$ onde $f(a) \cdot f(b) < 0$.
2. **Cálculo da Média:** Definimos c como sendo a média “pesada” do intervalo $[a, b]$

$$c = \frac{a \cdot f(b) - b \cdot f(a)}{f(b) - f(a)} \quad (2.1.1)$$

3. **Teste da Raiz:**

- (a) Se $f(a) \cdot f(c) < 0$, então a raiz está no intervalo $[a, c]$, ajustamos $b \leftarrow c$.
- (b) Se $f(a) \cdot f(c) > 0$, então a raiz está no intervalo $[c, b]$, ajustamos $a \leftarrow c$.
- (c) Caso contrário, então $f(c) = 0$ e encontramos a raiz.

4. **Repetição:** O processo é repetido que a raiz seja encontrada com a precisão desejada. Podemos usar diferentes critérios para isso:

- (a) $|b - a| < \epsilon$
- (b) $f(c) < \epsilon$

3 Método do Ponto Fixo

3.1 Conceituação

O Método do Ponto Fixo é uma técnica iterativa que busca encontrar a solução de uma equação ao transformar o problema em encontrar um ponto fixo de uma função.

Para aplicar o Método do Ponto Fixo, vamos executar alguns passos:

1. **Escolha da Função $\phi(x)$:** Dada uma função $f(x)$, queremos encontrar a raiz da equação $f(x) = 0$. Para isso, reescrevemos essa equação na forma:

$$x = \phi(x) \quad (3.1.1)$$

Essa nova função $\phi(x)$ é construída a partir de $f(x)$ e existem várias maneiras de fazer essa transformação, ou seja, podemos obter uma família de funções $\phi(x)$.

2. **Determinar a “melhor” função:** Nem toda função $\phi(x)$ irá levar a uma convergência para a raiz. Para escolher a melhor candidata, a função deve satisfazer:

(a) $\phi(x)$ e $\phi'(x)$ são contínuas em $[a, b]$

(b) $|\phi'(x)| \leq k$ para todo $k \in [0, 1)$ e todo x em $[a, b]$

3. **Valor Inicial:** Primeiro escolhemos casualmente um valor inicial para x , podemos utilizar o ponto médio do intervalo $[a, b]$:

$$x_0 = \frac{a + b}{2} \quad (3.1.2)$$

4. **Método Iterativo:** Usamos a seguinte fórmula de maneira iterativa até que o valor de x convirja para um valor estável:

$$x_{n+1} = \phi(x_n) \quad (3.1.3)$$

5. **Repetição:** Repetimos essa fórmula até que os valores se estabilizam. Podemos usar os seguintes critérios de parada:

(a) $|x_{n+1} - x_n| < \epsilon$

(b) $\frac{|x_{n+1} - x_n|}{|x_{n+1}|} < \epsilon$

(c) $f(x_{n+1}) < \epsilon$

4 Método de Newton-Raphson

4.1 Conceituação

O Método de Newton-Raphson usa a reta tangente de uma função para aproximar suas raízes, desde que a função seja diferenciável no intervalo analisado.

Vamos observar como ele pode ser implementado:

1. **Escolha do Intervalo Inicial:** Vamos usar o intervalo $[a, b]$ onde $f(a) \cdot f(b) < 0$.

2. **Escolha estimativa Inicial:** Definimos x_0 como sendo o ponto médio do intervalo:

$$x_0 = \frac{a + b}{2} \quad (4.1.1)$$

3. **Cálculo da Próxima Iteração:** Usamos a seguinte fórmula de maneira iterativa até que o valor de x convirja para um valor estável:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (4.1.2)$$

4. **Repetição:** O processo é repetido que a raiz seja encontrada com a precisão desejada. Podemos usar os seguintes critérios de parada:

- (a) $|x_{n+1} - x_n| < \epsilon$
- (b) $\frac{|x_{n+1} - x_n|}{|x_{n+1}|} < \epsilon$
- (c) $f(x_{n+1}) < \epsilon$

5 Método da Secante

5.1 Conceituação

O Método da Secante é semelhante ao de Newton-Raphson, mas **dispensa o cálculo da derivada**, pois ele utiliza uma aproximação da derivada com base em dois pontos distintos, sendo útil quando a derivada é difícil de obter.

Para aplicar o Método da Secante, vamos realizar alguns passos:

1. **Escolha do Intervalo Inicial:** Vamos usar o intervalo $[a, b]$ onde $f(a) \cdot f(b) < 0$.
2. **Escolha de dois Valores Iniciais:** Vamos escolher x_0 e x_1 pertencentes ao intervalo $[a, b]$ onde também vale o Teorema de Bolzano, ou seja, $f(x_0) \cdot f(x_1) < 0$.
3. **Cálculo da Próxima Iteração:** Usamos a seguinte fórmula de maneira iterativa até que o valor de x convirja para um valor estável:

$$x_{n+1} = \frac{f(x_n) \cdot (x_{n-1}) - f(x_{n-1}) \cdot (x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \quad x \geq 1 \quad (5.1.1)$$

4. **Repetição:** O processo é repetido que a raiz seja encontrada com a precisão desejada. Podemos usar os seguintes critérios de parada:

- (a) $|x_{n+1} - x_n| < \epsilon$
- (b) $\frac{|x_{n+1} - x_n|}{|x_{n+1}|} < \epsilon$
- (c) $f(x_{n+1}) < \epsilon$

Sistemas Lineares - Métodos Exatos

6 Eliminação de Gauss

6.1 Conceituação

O objetivo da Eliminação de Gauss consiste em dado um sistema da forma $Ax = b$, encontrar um sistema análogo da forma $\bar{A}x = \bar{b}$, que seja mais simples de resolver.

Por exemplo, observe o sistema de equações $n \times n$ abaixo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

É trivial mostrar que o sistema acima pode ser escrito da forma $Ax = b$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} \quad (6.1.1)$$

O objetivo é encontrar uma matriz \bar{A} e uma matriz coluna \bar{b} tal que:

$$\begin{bmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & \bar{a}_{13} & \dots & \bar{a}_{1n} \\ 0 & \bar{a}_{22} & \bar{a}_{23} & \dots & \bar{a}_{2n} \\ 0 & 0 & \bar{a}_{33} & \dots & \bar{a}_{3n} \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \bar{a}_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \\ \bar{b}_3 \\ \dots \\ \bar{b}_n \end{bmatrix} \quad (6.1.2)$$

Possibilitando resolver o sistema usando **Retro-Substituição**.

6.2 Processo

Antes de iniciarmos o algoritmo, precisamos encontrar a Matriz Aumentada $[A \mid b]^{(0)}$:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \dots & & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array} \right] \quad (6.2.1)$$

Nesse método, dada uma matriz A_n de ordem n , serão realizados $(n - 1)$ passos, a saber:

Passo 1: Zerar todos os termos abaixo de a_{11}

Passo 2: Zerar todos os termos abaixo de a_{22}

Passo 3: Zerar todos os termos abaixo de a_{33}

\vdots

Passo $n - 1$: Zerar todos os termos abaixo de $a_{n-1,n-1}$

De maneira geral, dizemos que para uma determinada linha L_i em um determinado passo k :

$$L_i \leftarrow L_i - m_{L_i}^{(k)} \cdot L_{\text{pivô}} \quad \text{e} \quad m_{L_i}^{(k)} = \frac{a_{ik}}{a_{kk}} \quad (6.2.2)$$

6.3 Exemplo Prático

Resolva o sistema abaixo usando o método da Eliminação de Gauss:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

Primeiro vamos montar a matriz aumentada do sistema $[A \mid b]^{(0)}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \end{array} \right]$$

Como a matriz A é de dimensão 3, serão feitos 2 passos até o escalonamento ser finalizado.

Passo 1: Zerar todos os termos abaixo de a_{11}

Calculando os fatores multiplicativos de cada linha:

$$m_{L_2}^{(1)} = \frac{a_{21}}{a_{11}} \implies m_{L_2}^{(1)} = \frac{1}{3}$$

$$m_{L_3}^{(1)} = \frac{a_{31}}{a_{11}} \implies m_{L_3}^{(1)} = \frac{4}{3}$$

Calculando as novas linhas:

$$L_2 \leftarrow L_2 - m_{L_2}^{(1)} \cdot L_1 \implies L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{3} \cdot L_1$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - m_{L_3}^{(1)} \cdot L_1 \implies L_3 \leftarrow L_3 - \frac{4}{3} \cdot L_1$$

Após esse passo, temos a seguinte matriz aumentada $[A \mid b]^{(1)}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{-10}{3} & \frac{5}{3} \end{array} \right]$$

Passo 2: Zerar todos os termos abaixo de a_{22}

Calculando os fatores multiplicativos de cada linha:

$$m_{L_3}^{(2)} = \frac{a_{32}}{a_{22}} \implies m_{L_3}^{(2)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} \implies m_{L_3}^{(2)} = 1$$

Calculando as novas linhas:

$$L_3 \leftarrow L_3 - m_{L_3}^{(2)} \cdot L_2 \implies L_3 \leftarrow L_3 - 1 \cdot L_2$$

Após esse passo, temos a seguinte matriz aumentada $[A \mid b]^{(2)}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{array} \right]$$

Ou seja, podemos escrever a seguinte equação matricial:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{5}{3} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.3.1)$$

Resolvendo o sistema de equações usando retro-substituição temos:

$$-4x_3 = 0 \implies x_3 = 0$$

$$\frac{1}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3 = \frac{5}{3} \implies \frac{1}{3}x_2 - 0 = \frac{5}{3} \implies x_2 = 5$$

$$3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1 \implies 3x_1 + 10 - 0 = 1 \implies x_1 = -3$$

Dessa forma, o conjunto solução x é dado por:

$$x = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.3.2)$$

7 Decomposição LU

7.1 Conceituação

Antes de entendermos o algoritmo, vamos entender em que consiste uma decomposição LU .

Teorema: Sendo uma matriz A quadrada de ordem n e dados todos os menores principais A_k com $k = 0, 1, \dots, (n - 1)$, se o $\det(A_k) \neq 0$, dizemos que ela pode ser decomposta em duas matrizes, L e U , ou seja podemos escrever $A = LU$.

A matriz L é uma matriz triangular inferior com diagonal principal igual a 1, construída a partir dos fatores multiplicativos usados durante o processo de escalonamento da matriz A :

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ m_{L_2}^{(1)} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ m_{L_3}^{(1)} & m_{L_3}^{(2)} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ m_{L_n}^{(1)} & m_{L_n}^{(2)} & m_{L_n}^{(3)} & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (7.1.1)$$

Já a matriz U corresponde à matriz A após o processo de escalonamento, ou seja, é a matriz triangular superior resultante das operações de eliminação:

$$U = \begin{bmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & \bar{a}_{13} & \dots & \bar{a}_{1n} \\ 0 & \bar{a}_{22} & \bar{a}_{23} & \dots & \bar{a}_{2n} \\ 0 & 0 & \bar{a}_{33} & \dots & \bar{a}_{3n} \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \bar{a}_{nn} \end{bmatrix} \quad (7.1.2)$$

7.2 Processo

Seja um sistema de equações lineares da forma $Ax = b$, sendo A uma matriz que **satisfaz as condições de decomposição LU**, então o sistema pode ser escrito da seguinte forma:

$$LUx = b \quad (7.2.1)$$

Ao tomarmos $Ux = y$, podemos substituir na equação acima, obtendo o seguinte sistema:

$$\begin{cases} Ux = y & (ii) \\ Ly = b & (i) \end{cases} \quad (7.2.2)$$

Resolvendo o sistema acima - seguindo a ordem i e ii - encontramos o vetor x que procuramos.

7.3 Exemplo Prático

Resolva o sistema abaixo usando o método da decomposição LU :

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 1x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = -7 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = -5 \end{cases}$$

Primeiro, separando o sistema em uma equação da forma $Ax = b$, vamos verificar se a matriz dos coeficientes A segue as condições de decomposição LU :

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Vamos verificar se para todo $k = 1, 2, 3, \dots, (n-1)$, o $\det(A_k) \neq 0$;

- Para $k = 1$:

$$\det(A_1) = |5| \implies \det(A_1) = 5$$

- Para $k = 2$:

$$\det(A_2) = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \implies \det(A_2) = -1$$

Podemos então usar a decomposição LU . Segue o seguinte sistema:

$$\begin{cases} Ux = y & (ii) \\ Ly = b & (i) \end{cases} \quad (7.3.1)$$

Preciamos encontrar as matrizes L e U , para isso vamos escalonar a matriz A :

Passo 1: Zerar todos os termos abaixo de a_{11}

Calculando os fatores multiplicativos de cada linha:

$$m_{L_2}^{(1)} = \frac{a_{21}}{a_{11}} \implies m_{L_2}^{(1)} = \frac{3}{5}$$

$$m_{L_3}^{(1)} = \frac{a_{31}}{a_{11}} \implies m_{L_3}^{(1)} = \frac{1}{5}$$

Calculando as novas linhas:

$$L_2 \leftarrow L_2 - m_{L_2}^{(1)} \cdot L_1 \implies L_2 \leftarrow L_2 - \frac{3}{5} \cdot L_1$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - m_{L_3}^{(1)} \cdot L_1 \implies L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{5} \cdot L_1$$

Após esse passo, temos a seguinte matriz A :

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{5} & \frac{17}{5} \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{14}{5} \end{bmatrix}$$

Passo 2: Zerar todos os termos abaixo de a_{22}

Calculando os fatores multiplicativos de cada linha:

$$m_{L_3}^{(2)} = \frac{a_{32}}{a_{22}} \implies m_{L_3}^{(2)} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{1}{5}} \implies m_{L_3}^{(2)} = -3$$

Calculando as novas linhas:

$$L_3 \leftarrow L_3 - m_{L_3}^{(2)} \cdot L_2 \implies L_3 \leftarrow L_3 + 3 \cdot L_2$$

Após esse passo, finalizamos o escalonamento da matriz A e obtemos a seguinte matriz U :

$$U = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{5} & \frac{17}{5} \\ 0 & 0 & 13 \end{bmatrix}$$

A matriz L é dada pelos fatores multiplicativos de cada linhas em cada passo:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{5} & 1 & 0 \\ \frac{1}{5} & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Substituindo a matriz L na equação (i), temos que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{5} & 1 & 0 \\ \frac{1}{5} & -3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -7 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Usando retro-substituição para determinar y :

$$y_1 = 0$$

$$\frac{3}{5}y_1 + y_2 = 2 \implies 0 + y_2 = -7 \implies y_2 = -7$$

$$\frac{1}{5}y_1 - 3y_2 + y_3 = -5 \implies 0 + 21 + y_3 = -5 \implies y_3 = -26$$

Assim, o valor de y é dado por:

$$y = \begin{bmatrix} 0 \\ -7 \\ -26 \end{bmatrix}$$

Substituindo a matriz U e y na equação (ii), temos que:

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & \frac{-1}{5} & \frac{17}{5} \\ 0 & 0 & 13 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -7 \\ -26 \end{bmatrix} \quad (ii)$$

Resolvendo o sistema por retro-substituição temos:

$$13x_3 = -26 \implies x_3 = -2$$

$$\frac{-1}{5}x_2 + \frac{17}{5}x_3 = -7 \implies \frac{-1}{5}x_2 + \frac{-34}{5} = -7 \implies \frac{-1}{5}x_2 = \frac{-1}{5} \implies x_2 = 1$$

$$5x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \implies 5x_1 + 2 - 2 = 0 \implies x_1 = 0$$

Dessa forma, o conjunto solução x é dado por:

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

8 Método de Cholesky

8.1 Conceituação

Dado um sistema da forma $Ax = b$, em casos onde a A é **simétrica**, ou seja, $A = A^T$ (é igual à transposta) e **positiva definida**, então usamos o método de Cholesky. Esse método se baseia no seguinte corolário:

Corolário: Se A é simétrica e positiva definida (definição abaixo), então A pode ser decomposta unicamente no produto GG^T , onde G é uma matriz triangular inferior com elementos diagonais positivos.

Seja uma matriz A quadrada de ordem n e dados todos os seus menores principais A_k com $k = 1, 2, 3, \dots, n$, se o $\det(A_k) > 0$, então ela é dita positiva definida.

As matrizes G e G^T são dadas por:

$$G = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ g_{12} & g_{22} & 0 & \dots & 0 \\ g_{13} & g_{23} & g_{33} & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ g_{1n} & g_{2n} & g_{3n} & \dots & g_{nn} \end{bmatrix} \quad G^T = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & \dots & g_{1n} \\ 0 & g_{22} & g_{23} & \dots & g_{2n} \\ 0 & 0 & g_{33} & \dots & g_{3n} \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & g_{nn} \end{bmatrix} \quad (8.1.1)$$

8.2 Processo

Dado um sistema de equações lineares da forma $Ax = b$, sendo A uma matriz de ordem n , simétrica e positiva definida, então o sistema pode ser escrito da seguinte forma:

$$GG^T x = b \quad (8.2.1)$$

Ao tomarmos $G^T x = y$, podemos substituir na equação acima, obtendo o seguinte sistema:

$$\begin{cases} G^T x = y & (ii) \\ Gy = b & (i) \end{cases} \quad (8.2.2)$$

Resolvendo o sistema acima - seguindo a ordem i e ii - encontramos o vetor x que procuramos.

Para calcular cada elemento g_{ij} de G , seguiremos dois caminhos:

1. Elementos diagonais de G :

$$g_{ii} = \left(a_{ii} + \sum_{k=1}^{i-1} g_{ik}^2 \right)^{1/2} \quad (8.2.3)$$

2. Elementos **não** diagonais de G :

$$g_{ij} = \frac{\left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} g_{ik} \cdot g_{jk} \right)}{g_{jj}} \quad (8.2.4)$$

Note que para $i = 1$ ou $j = 1$, temos que $\sum_{j=1}^0 := 0$.

Perceba também que há uma ordem correta para determinar os elementos de G , pois existe uma relação de dependência entre eles. Por isso, os elementos devem ser calculados **por coluna** seguindo a **ordem de cima para baixo, e da esquerda para a direita**.

Primeiro, vamos separar o sistema em uma equação da forma $Ax = b$ e verificar se a matriz dos coeficientes A segue as condições do método de Cholesky:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 10 & 4 \\ -4 & 4 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Sabendo que A é simétrica, vamos verificar se para todo $k = 1, 2, 3, \dots, n$, o $\det(A_k) > 0$;

- Para $k = 1$:

$$\det(A_1) = |4| \implies \det(A_1) = 4$$

- Para $k = 2$:

$$\det(A_2) = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} \implies \det(A_2) = 36$$

- Para $k = 3$:

$$\det(A_3) = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 10 & 4 \\ -4 & 4 & 9 \end{vmatrix} \implies \det(A_3) = 36$$

Podemos então usar o método de Cholesky. Segue o seguinte sistema:

$$\begin{cases} G^T x = y & (ii) \\ Gy = b & (i) \end{cases}$$

Precisamos encontrar todos os termos g_{ij} de G (e obter G^T conseqüentemente). Para isso, vamos calcular os elementos não nulos de cada coluna, **de cima para baixo e da esquerda para direita**.

Etapa 1: Encontrar elementos da coluna 1

$$g_{11} = \sqrt{a_{11}} \implies g_{11} = \sqrt{4} \implies g_{11} = 2$$

$$g_{21} = \frac{a_{21}}{g_{11}} \implies g_{21} = \frac{2}{2} \implies g_{21} = 1$$

$$g_{31} = \frac{a_{31}}{g_{11}} \implies g_{31} = \frac{-4}{2} \implies g_{31} = -2$$

Etapa 2: Encontrar elementos da coluna 2

$$g_{22} = \sqrt{a_{22} - g_{21}^2} \implies g_{22} = \sqrt{10 - 1} \implies g_{22} = \sqrt{9} \implies g_{22} = 3$$

$$g_{32} = \frac{a_{32} - g_{31} \cdot g_{21}}{g_{22}} \implies g_{32} = \frac{4 - (-2) \cdot 1}{3} \implies g_{32} = \frac{6}{3} \implies g_{32} = 2$$

Etapa 3: Encontrar elementos da coluna 3

$$g_{33} = \sqrt{a_{33} - g_{31}^2 - g_{32}^2} \implies g_{33} = \sqrt{9 - (-2)^2 - 2^2} \implies g_{33} = \sqrt{1} \implies g_{33} = 1$$

Assim, obtemos as seguintes matrizes G e G^T :

$$G = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad G^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.2.5)$$

Substituindo G na equação (i) temos que:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Usando retro-substituição para determinar y :

$$2y_1 = 0 \implies y_1 = 0$$

$$y_1 + 3y_2 = 6 \implies 0 + 3y_2 = 6 \implies y_2 = 2$$

$$-2y_1 + 2y_2 + y_3 = 5 \implies 0 + 4 + y_3 = 5 \implies y_3 = 1$$

Assim, o valor de y é dado por:

$$y = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Substituindo a matriz G^T e y na equação (ii), temos que:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (ii)$$

Resolvendo o sistema por retro-substituição temos:

$$x_3 = 1$$

$$3x_2 + 2x_3 = 2 \implies 3x_2 + 2 = 2 \implies x_2 = 0$$

$$2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \implies 2x_1 + 0 - 2 = 0 \implies x_1 = 1$$

Dessa forma, o conjunto solução x é dado por:

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sistemas Lineares - Métodos Iterativos

9 Método de Gauss-Jacobi

9.1 Conceituação

Primeiramente, observe o sistema de equações $n \times n$ abaixo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

O método visa determinar uma sequência de aproximantes na iteração k de:

$$x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}$$

A partir dos valores iniciais:

$$x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$$

Para isso, vamos seguir o seguinte processo:

$$\begin{aligned} x_1^{(k)} &= \frac{1}{a_{11}} \left(b_1 - a_{12}x_2^{(k-1)} - a_{13}x_3^{(k-1)} - \dots - a_{1n}x_n^{(k-1)} \right) \\ x_2^{(k)} &= \frac{1}{a_{22}} \left(b_2 - a_{21}x_1^{(k-1)} - a_{23}x_3^{(k-1)} - \dots - a_{2n}x_n^{(k-1)} \right) \\ &\dots \\ x_n^{(k)} &= \frac{1}{a_{nn}} \left(b_n - a_{n1}x_1^{(k-1)} - a_{n2}x_2^{(k-1)} - \dots - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k-1)} \right) \end{aligned} \quad (9.1.1)$$

9.2 Critério de Convergência

Antes de aplicarmos o método, é necessário observar se as iterações irão convergir para o resultado desejado. Para isso, é preciso verificar um dos seguintes **critérios de convergência**:

1. Critério das Linhas:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| < |a_{ii}| \quad (9.2.1)$$

2. Critério das Colunas:

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n |a_{ij}| < |a_{jj}| \quad (9.2.2)$$

Satisfeito um dos seguintes critérios, o algoritmo pode ser implementado.

9.3 Processo de Parada

Implementado o algoritmo, precisamos de um **critério de parada**. Para sabermos quando finalizar as iterações, utilizamos cálculo do erro relativo com a norma do máximo:

$$\frac{\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_{\infty}}{\|x^{(k)}\|_{\infty}} < \epsilon \quad (9.3.1)$$

10 Método de Gauss-Siedel

10.1 Conceituação

O método de Gauss-Siedel é semelhante ao de Gauss-Jacobi, porém, para o cálculo de uma componente x_n^k , ele utiliza o **valor mais recente** das demais componentes.

Dado o mesmo sistema $n \times n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Vamos determinar uma sequência de aproximantes na iteração k de:

$$x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}$$

Usando os valores iniciais:

$$x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$$

Porém, vamos seguir os seguintes passos:

$$\begin{aligned}
x_1^{(k)} &= \frac{1}{a_{11}} \left(b_1 - a_{12}x_2^{(k-1)} - a_{13}x_3^{(k-1)} - \dots - a_{1n}x_n^{(k-1)} \right) \\
x_2^{(k)} &= \frac{1}{a_{22}} \left(b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k-1)} - \dots - a_{2n}x_n^{(k-1)} \right) \\
x_3^{(k)} &= \frac{1}{a_{33}} \left(b_3 - a_{31}x_1^{(k)} - a_{32}x_2^{(k)} - \dots - a_{3n}x_n^{(k-1)} \right) \\
&\dots \\
x_n^{(k)} &= \frac{1}{a_{nn}} \left(b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - \dots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)} \right)
\end{aligned} \tag{10.1.1}$$

10.2 Critério de Convergência

A verificação se o método Gauss-Siedel converge pode ser feita de dois modos:

1. Critério de Sassenfelt:

$$\max_{1 \leq i \leq n} (\beta_i) < 1 \quad \text{onde} \quad \beta_i = \frac{1}{|a_{ii}|} \left(\sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| \beta_j + \sum_{j=i+1}^n |a_{ij}| \right) \tag{10.2.1}$$

Observe que $\sum_{j=1}^0 := 0$ e $\sum_{j=k}^n := 0$ onde $k > n$ para evitar problemas maiores.

2. Critério de Linhas ou Colunas:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| < |a_{ii}| \quad \text{ou} \quad \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n |a_{ij}| < |a_{jj}| \tag{10.2.2}$$

10.3 Processo de Parada

Para sabermos quando finalizar o cálculo das iterações, calculamos o erro relativo usando norma do máximo, o mesmo critério de parada do método de Gauss-Jacobi:

$$\frac{\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_{\infty}}{\|x^{(k)}\|_{\infty}} < \epsilon \tag{10.3.1}$$

Aproximação de Funções

11 Interpolação Polinomial

11.1 Conceituação

Seja $f(x)$ uma função conhecida em um conjunto de pontos distintos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$, com $y_i = f(x_i)$. O método consiste em encontrar um polinômio $P_n(x)$ de grau n , tal que $P_n(x_i) = f(x_i)$ para todo $i = 0, 1, \dots, n$.

Dada a condição $P_n(x_i) = f(x_i)$, tem-se que:

$$\begin{cases} P(x_0) = a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_nx_0^n = y_0 \\ P(x_1) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_nx_1^n = y_1 \\ P(x_2) = a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \dots + a_nx_2^n = y_2 \\ \dots \\ P(x_n) = a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_nx_n^n = y_n \end{cases}$$

Esse sistema pode ser escrito da forma $V \cdot a = y$, onde V é a Matriz de Vandermonde:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \dots & & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix} \quad (11.1.1)$$

O objetivo é encontrar os valores de $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ que satisfaçam o sistema linear.

Para isso, usa-se os métodos estudados anteriormente.