PAPEL, QUADRADOS MISTERIOSOS E ... MATEMÁTICA

Coleção: Matemática fora da caixa

Aniura Milanés Barrientos
Gabriel Ribeiro

Projeto Visitas no Mundo da Matemática
Departamento de Matemática da UFMG

2025

Primeira edição: Maio 2025
UFMG - Belo Horizonte
Apoio: FAPEMIG, Chamada 11/2022: Apoio a Projetos de Extensão em Interface com a Pesquisa.

Papel, quadrados misteriosos e ... matemática.
Coleção: Matemática fora da caixa.
Imagens da capa: foto dos autores.

ISBN 978-65-01-47007-8 (Versão Impressa)
ISBN 978-65-01-47006-1 (Versão Digital)

Sumário

Prefácio

Prezada leitora, prezado leitor,

Neste volume da Coleção *Matemática fora da caixa* apresentamos dois brinquedos feitos de papel. Os dois pertencem à família dos *flexágonos* e como tais têm a propriedade de revelar faces escondidas quando são manipulados adequadamente.

De modo mais específico, explicamos como montar esses brinquedos a partir de uma folha de papel vazia ou usando modelos já prontos. Esses modelos são gerados usando arquivos de imagem e programas feitos em Python cuja estrutura é descrita no texto. O código permite gerar modelos mais simples, que podem ser impressos numa impressora doméstica ou modelos um pouco mais complexos, adequados para impressão profissional numa gráfica.

Sobre o conteúdo desenvolvido, ele pode ser aplicado nas aulas de Matemática, em estudos dirigidos ou como referência para trabalhos indicados aos alunos. Esta cartilha também pode ser indicada como material de apoio e desenvolvimento de projetos escolares e feiras de ciências. Fica a dica para você, professora ou professor!

Por fim, não deixe de conferir os nossos contatos no final da apostila. Esperamos receber comentários, críticas e sugestões sobre este material, bem como relatos sobre sua utilização em sala de aula. Isso nos ajudará a aperfeiçoar as nossas próximas publicações. Esperamos também, com este conteúdo, ter contribuído para a construção do saber matemático por meio de jogos e atividades lúdicas.

Aniura Milanés
Belo Horizonte, maio de 2025.

Dois flexágonos.

Cores e formas aparecem e desaparecem uma e outra vez quando manipulamos os flexágonos: brinquedos de papel que, quando dobrados apropriadamente, revelam sua faces escondidas. Eles são montados a partir de diferentes modelos que determinam suas propriedades.

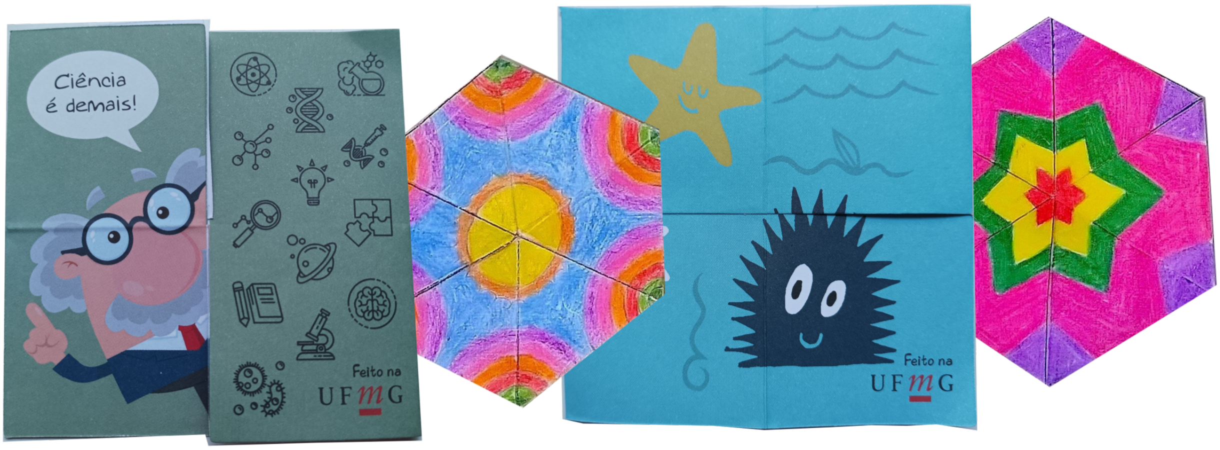


Figura 1.1: Diferentes flexágonos.

Em 1939 o matemático britânico Arthur Stone estudava na Universidade de Princeton. Para poder colocar no seu fichário inglês, as folhas de papel que vendiam nos Estados Unidos, ele precisou cortar delas uma tira de papel e a partir dai, brincando com as tiras, montou o que viria a ser o primeiro flexágono da história.

Outros destacados cientistas, colegas dele na época, foram Bryant Tuckerman, Richard Feynman e John Tukey. Eles ficaram entusiasmados com a descoberta e os quatro se juntaram para formar o que seria o Comitê de Flexágonos de Princeton, que inclusive começou a desenvolver uma teoria sobre esses brinquedos.

De lá para cá muitas outras pessoas têm se dedicado a estudar esse tópico. Existem variados flexágonos e diferentes teorias sobre eles. Neste texto explicaremos como construir especificamente dois flexágonos de forma quadrada. Eles possuem 3 e 6 faces diferentes, respectivamente e ambos possuem propriedades bastante especiais.

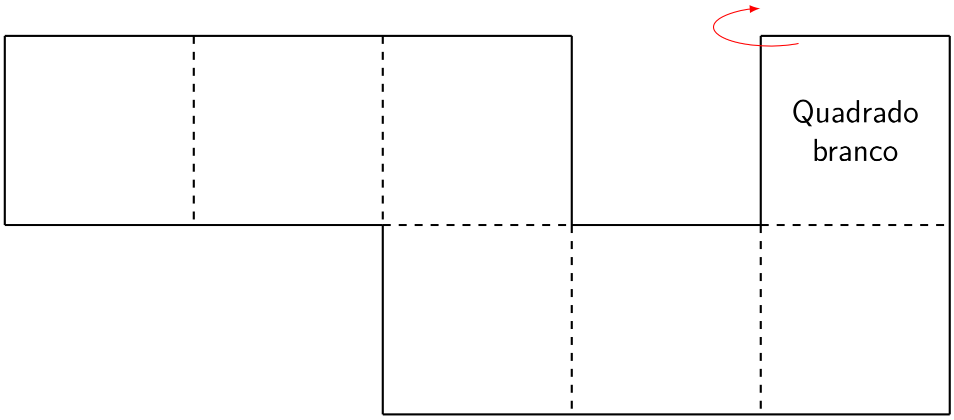
1.1 Um flexágono quadrado de 3 faces.

Este é possivelmente o flexágono mais simples de montar e, na nossa experiência, faz muito sucesso entre alunos do terceiro ao sexto ano escolar.

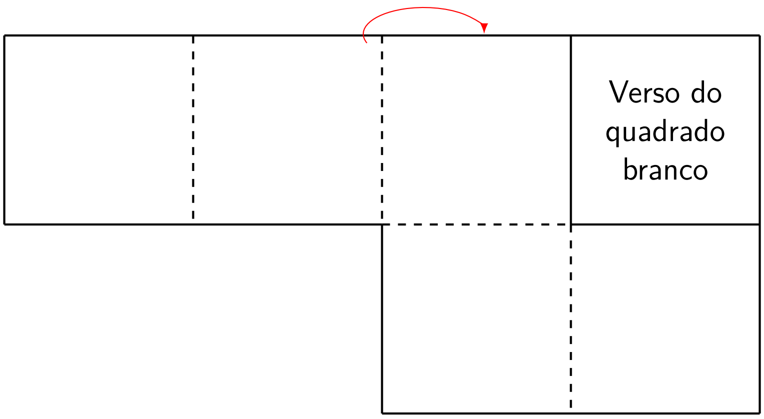
Os flexágonos quadrados às vezes são chamados de *tetraflexágonos*. A quantidade de faces também pode ser usada como prefixo. Assim, poderíamos chamar o flexágono que vamos montar de *tri-tetraflexágono*, mas provavelmente isto não será necessário.

Para montá-lo, podemos usar o roteiro a seguir.

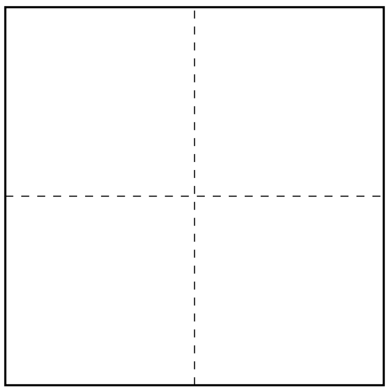
1. Dobre para a esquerda toda a coluna do quadrado branco.



2. Pegue a aba com dois quadrados que está sobrando à esquerda e leve-os para trás.



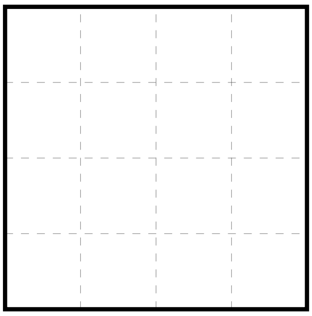
3. Agora basta colar a face do quadrado branco, a qual deve estar encarando outro e voilá, você montou seu flexágono!



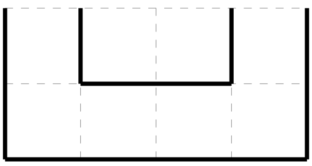
1.2 Um flexágono quadrado de 6 faces.

Vejamos a seguir como montar um flexágono quadrado de seis faces ou *hexa-tetraflexágono* usando um modelo vazio.

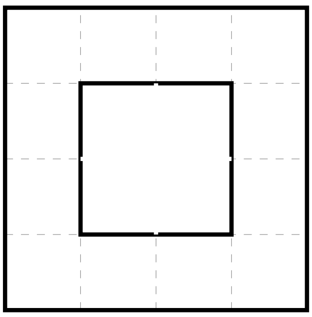
1. Pegue um pedaço de papel quadrado.
2. Dobre o quadrado ao meio e desdobre.
3. Dobre cada um dos retângulos obtidos ao meio e desdobre.
4. Faça o mesmo com o quadrado rotacionado 90^o.
5. Você deve ter dobrado o quadrado original em 16 quadradinhos.



6. Dobre o quadrado ao meio mais uma vez. Você vai obter um retângulo de 4×2 quadradinhos. Corte os dois quadradinhos do meio.



7. Você deve obter um quadrado com um buraco quadrado no meio.



Agora você poderá montar o flexágono. Siga as instruções nas próximas páginas.

Numere cada quadradinho como nas figuras abaixo. Os números entre parênteses devem estar no verso.

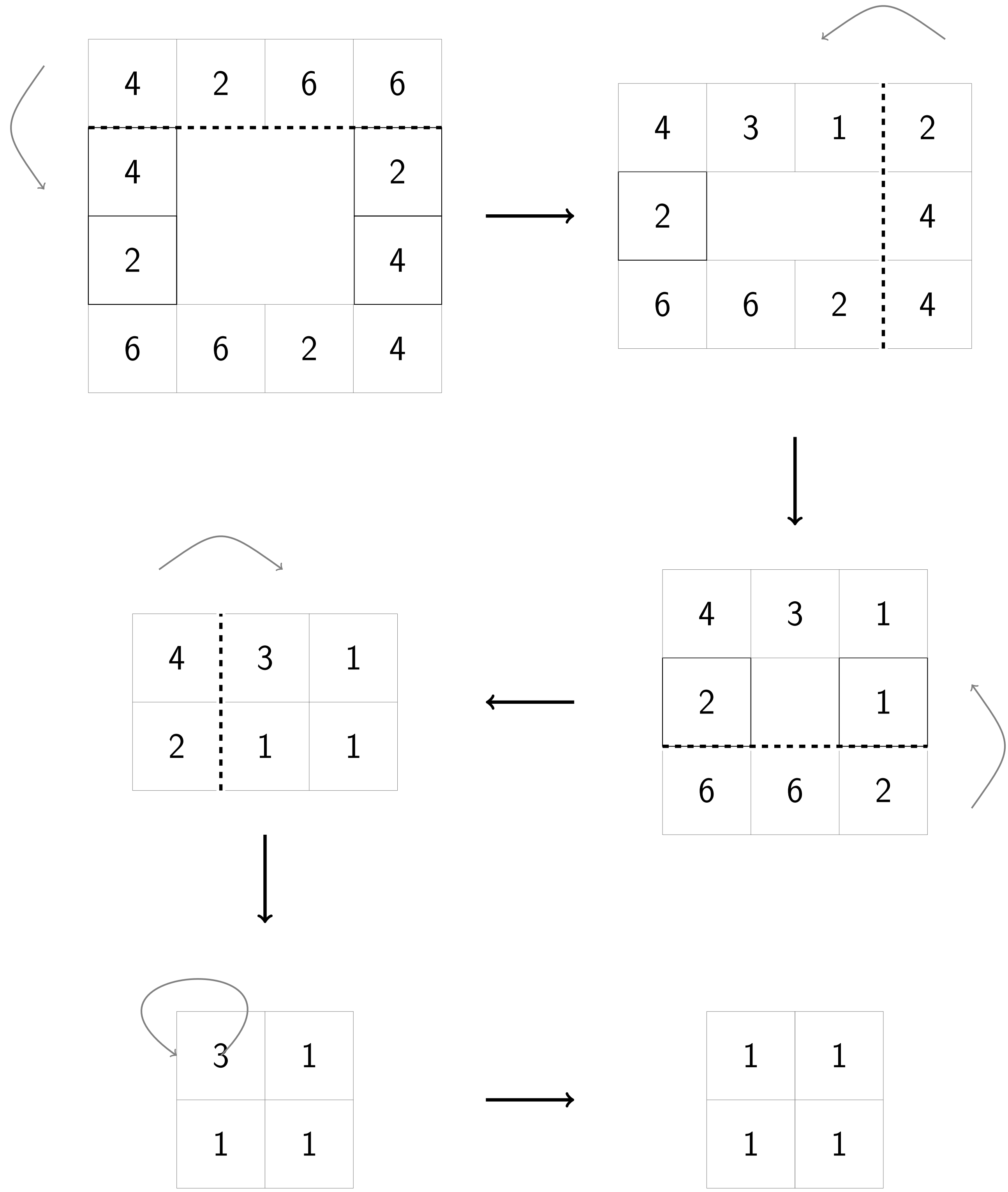
4(3)	2(3)	6(1)	6(5)
4(1)			2(5)
2(5)			4(1)
6(5)	6(1)	2(3)	4(3)

Figura 1.2: Frente

5(6)	1(6)	3(2)	3(4)
5(2)			1(4)
1(4)			5(2)
3(4)	3(2)	1(6)	5(6)

Figura 1.3: Verso

Agora siga o roteiro indicado abaixo. Em cada passo, deve ser dobrada para trás uma faixa de quadrados.



Algumas observações se fazem necessárias.

- O último passo na montagem do flexágono de 6 faces é complicado e importante. Nesse passo é necessário passar para a frente o quadrado de número 1 que ainda não é mostrado. Ele está no canto superior esquerdo abaixo de dois quadradinhos dobrados e para fazer ele passar para a frente é necessário "desenrolar" esses três quadradinhos e "enrolá-los" no sentido contrário. Isto deve ser feito com cuidado para não rasgar o papel.
- O flexágono de 6 faces que foi descrito tem a característica interessantíssima de poder ser montado sem necessidade de cola, apenas cortando e dobrando o papel.

Como manipular os flexágonos montados para que apareçam as diferentes faces?

Para isto é apenas necessário levar para trás dois lados paralelos do quadrado. Não é qualquer posição que permitirá mostrar novas faces, mas se isso for possível, o flexágono abrirá ao meio "como um livro", facilmente.

- Flexágono de 3 faces: se o flexágono abre, na nova posição não poderemos mais fazer isso. Ele mostra a face da frente, a do verso e a escondida. A partir daí podemos apenas voltar.
- Flexágono de 6 faces: uma vez montado, para percorrer todas as faces, ele deve ser aberto ao meio sucessivas vezes. Quando isto não seja mais possível, rotacionamos 90^o no sentido anti-horário e continuamos esse procedimento. Dessa maneira, todas as seis faces serão mostradas na ordem

$$1 \to 3 \to 4 \to 2 \to 1 \to 5 \to 6 \to 2 \to 1.$$

  Apenas a face de número 1 pode ser aberta ao longo de dois eixos diferentes.

Um flexágono que pode nos ajudar a ensinar/aprender.

Os flexágonos são brinquedos instigantes muito versáteis que podem no auxiliar inclusive no ensino/aprendizagem de conteúdos matemáticos. É o que mostraremos a seguir.

2.1 Uma atividade diferente.

- Passo 1: Tomamos um quadrado vermelho de lado 1, o dividimos em 9 quadradinhos e retiramos o do meio, como mostrado na figura 2.1.

  Qual será a área da figura vermelha?

Figura 2.1: Retiramos o quadradinho central do quadrado vermelho 1×1.

- Passo 2: Agora repetimos esse processo com cada um dos 8 quadradinhos vermelhos que restaram. Dividimos cada um deles em 9 quadradinhos e retiramos o do meio.

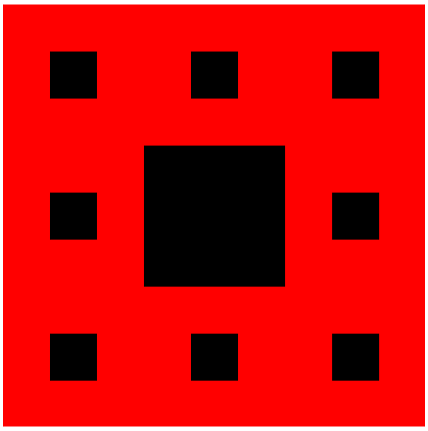


Figura 2.2: Repetimos o processo com cada um dos 8 quadradinhos vermelhos.

Qual será a área da nova figura vermelha?

- Passo 3: Podemos repetir esse processo agora com cada um dos (quantos são?) quadradinhos que restaram. Obteremos a figura a seguir.

  Qual será a área da figura vermelha?

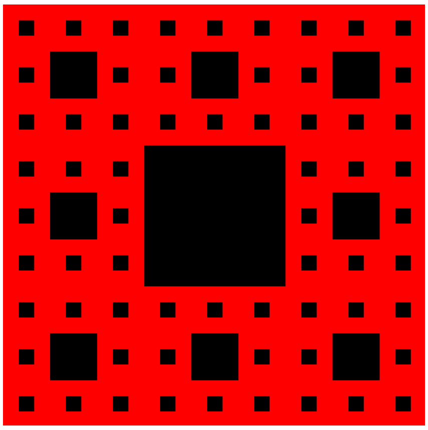


Figura 2.3: Repetimos o processo mais uma vez.

- Passo 4, 5, ... 9.

- Passo 10: Imagine que você já removeu "quadradinhos centrais de cada grupo de 9 quadradinhos", 10 vezes. Quantos quadradinhos terá? Qual será a área de cada quadradinho retirado? Qual será a área da figura vermelha?

Esta é uma tarefa interessante por várias razões. Perceba que ela motiva a utilização da notação de potências no contexto de um problema geométrico e, de fato, é bastante útil que os estudantes compreendam que às vezes é mais simples/conveniente escrever um número como uma expressão numérica sem necessariamente calcular seu valor exato.

Resolução:

- Passo 1: Como dividimos o quadrado de área 1 em 9 quadradinhos congruentes, cada um deles tem área $\frac{1}{9}$ e portanto, a área da figura formada por 8 quadradinhos é

$$A_1 = \frac{8}{9}.$$

- Passo 2: Cada um dos 8 quadradinhos de área $\frac{1}{9}$ foi dividido em 9 novos quadradinhos, que terão área $\frac{1}{9} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{81}$. Após retirarmos os quadradinhos centrais teremos 8 novos quadradinhos restando, portanto a área da figura vermelha será

$$A_2 = \frac{8^2}{9^2} = \frac{64}{81}.$$

- Passo 3: Cada um dos 64 quadradinhos do passo anterior dará lugar a novos 8 quadradinhos de área $\frac{1}{81} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{9^3} = \frac{1}{729}$. Como são $64 \times 8 = 8^3 = 512$ quadradinhos, a área da figura vermelha neste caso é

$$A_3 = \frac{8^3}{9^3} = \frac{512}{729}.$$

- Passo 10: Toda vez que dividimos um quadrado em 9 quadradinhos congruentes e removemos o quadradinho central, obtemos uma quantidade de quadradinhos igual a 8 vezes a quantidade que tínhamos inicialmente, mas o lado desses novos quadradinhos é um terço do lado dos quadrados originais, portanto a área se multiplica por $\frac{1}{9}$. Assim, em cada passo a área da superfície vermelha se multiplica por $\frac{8}{9}$.

  É o que mostramos na tabela abaixo.

Passo	Número de quadrados vermelhos	Lado de cada quadrado vermelho	Área da superfície vermelha
0	1	1	1
1	8	$\frac{1}{9}$	$\frac{8}{9}$
2	8^2	$\frac{1}{9^2}$	$\frac{8^2}{9^2}$
3	8^3	$\frac{1}{9^3}$	$\frac{8^3}{9^3}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
10	8^{10}	$\frac{1}{9^{10}}$	$\frac{8^{10}}{9^{10}}$

Portanto, depois de 10 passos, a área da superfície vermelha vai ser $\frac{8^{10}}{9^{10}} \approx 0,308$.

Dada a complexidade desta tarefa, provavelmente seria uma boa ideia aplicá-la como atividade em grupos. Uma outra solução pode ser obtida subtraindo as áreas dos quadrados que são retirados. Seria interessante contrastar grupos que utilizaram diferentes soluções.

A tarefa proposta está baseada nas primeiras iterações da construção do chamado tapete de Sierpinski, que é o conjunto de pontos que resta depois de retirar todos os quadradinhos centrais. Uma propriedade interessante desse conjunto é que sua área é zero, o que é bastante intuitivo, pois o valor da área diminui quando o número de passos aumenta. No entanto, seu perímetro é infinito.

Um desafio que pode ser colocado para os estudantes é calcular o perímetro da superfície vermelha, pelo menos para alguns valores de n e até $n = 10$.

O tapete de Sierpinski é um fractal e como tal tem outras propriedades interessantes. Pode ser uma boa introdução a um tema no qual cada estudante pode aprofundar depois.

As atividades aqui são sugeridas no site https://tasks.illustrativemathematics.org/content-standards/tasks/1523.

2.2 O tapete de Sierpinski dentro de um flexágono.

Mas qual seria a relação do tapete de Sierpinski com os flexágonos? A questão é que podemos montar flexágonos com imagens de iterações do tapete de Sierpinski. Numa sala de aula a montagem do flexágono poderia servir como motivação para introduzir o tema e/ou a atividade investigativa descrita acima.

No apêndice, as figuras A.2 e A.3 tem a frente e o verso do plano de um flexágono cujas faces têm as iterações 1, 2, 3, 4 e 5 do tapete de Sierpinski e na face 6 colocamos as imagens de quatro iterações. Essas figuras devem ser cortadas e coladas mantendo a orientação correta. Colocamos a seguir, como referência, as miniaturas dos planos na posição em que eles devem ser colados.

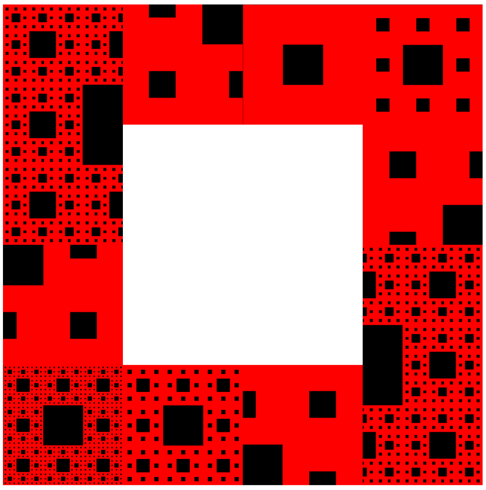


Figura 2.4: Plano frontal do flexágono.

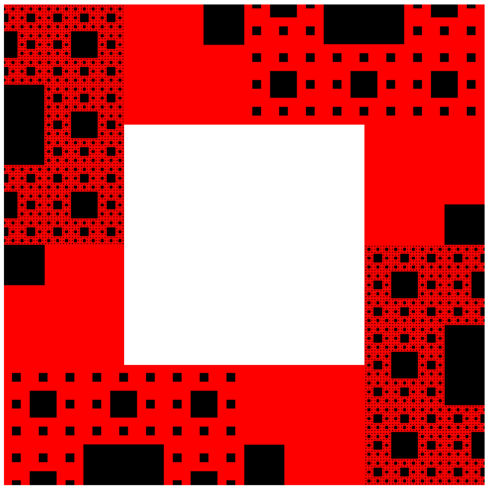


Figura 2.5: Plano traseiro do flexágono.

Geração automática dos flexágonos.

Na conta de Github do nosso projeto foi disponibilizado o código que permite gerar os planos dos flexágonos apresentados aqui, introduzindo as imagens que se deseja colocar nas diferentes faces. A seguir explicaremos brevemente a estrutura desse código. Toda a programação foi feita em Python. Recomenda-se portanto, um conhecimento básico de programação e dessa linguagem para a leitura deste capítulo.

3.1 Configurações para a geração de flexágonos de três faces.

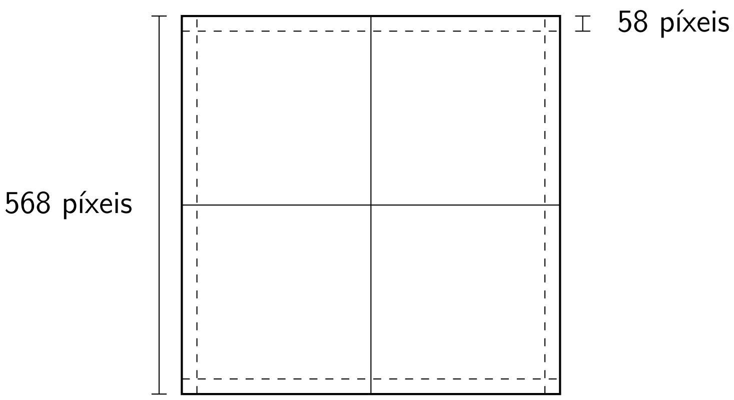
A função `plano()` é responsável, inteiramente, pela geração dos flexágonos e seus argumentos determinam como isso será feito.

```
plano(
    imgF: str =r'minha_imagem_frontal.png',
    imgV: str =r'minha_imagem_verso.png',
    imgE: str =r'minha_imagem_escondida.png',
    grafica: bool = False,
    montagem_simplificada: bool =True)
```

- **imgF**: string contendo o caminho da imagem que deve ficar na frente do flexágono gerado.
- **imgV**: string contendo o caminho da imagem que deve ficar na parte traseira do flexágono gerado.
- **imgE**: string contendo o caminho da imagem que deve ficar escondida ao montar o flexágono e não realizar nenhuma dobradura.
- **grafica**: variável booleana que determina se os planos devem ser gerados visando impressão e corte em gráfica.
- **montagem_simplificada**: variável booleana que determina se este flexágono será montado usando a maneira simplificada. Quando é verdadeiro, imgV e imgE são invertidas no código. Este tipo de montagem é o que foi utilizado na seção 1.1.

Avisos:

- As imagens utilizadas devem ser quadradas, para que não haja distorção visual na interpolação.
- Caso as imagens utilizadas tenham resolução muito baixa, alguma pode ficar com qualidade ruim.
- Ao selecionar o modo gráfica, prefira utilizar imagens que não tenham nada importante nas bordas tracejadas pois elas não aparecerão no flexágono final, como ilustrado na imagem a seguir (escala após interpolação):



Após configurar a função geradora do plano, basta executá-la para gerá-lo. A execução resultará em:

- Dois arquivos .png chamados PlanoTraseiro e PlanoFrontal, no mesmo caminho onde a função geradora do plano foi executada.
- Novas execuções apagarão os arquivos já gerados e sob o mesmo nome. Portanto, caso queira salvar algum flexágono gerado, basta colocar os arquivos numa pasta de sua preferência com o nome que achar melhor.

3.2 Configurações para a geração de flexágonos de seis faces.

Novamente, a função `plano()` é responsável pela geração dos flexágonos e seus argumentos determinam como isso será feito.

```
plano(
img1: str =r'caminho_da_minha_imagem_1.png',
img2: str =r'caminho_da_minha_imagem_2.png',
img3: str =r'caminho_da_minha_imagem_3.png',
img4: str =r'caminho_da_minha_imagem_4.png',
img5: str =r'caminho_da_minha_imagem_5.png',
img6: str =r'caminho_da_minha_imagem_6.png',
grafica: bool = False)
```

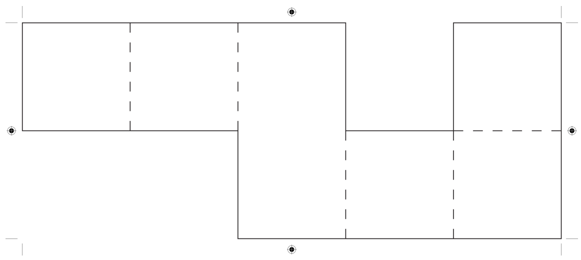
- **img1**: string contendo o caminho da imagem que deve ficar na frente do flexágono gerado.
- **img2**: string contendo o caminho da imagem que deve ficar no verso do flexágono gerado.
- **img3**: string contendo o caminho de uma imagem que deve ficar escondida ao montar o flexágono e não realizar nenhuma dobradura. Ela é a segunda imagem que veremos se seguimos o procedimento descrito na página 8.
- **img4**: string contendo o caminho de uma imagem que deve ficar escondida ao montar o flexágono e não realizar nenhuma dobradura. Ela é a terceira imagem que veremos se seguimos o procedimento descrito na página 8.

- **img5**: string contendo o caminho de uma imagem que deve ficar escondida ao montar o flexágono e não realizar nenhuma dobradura. Ela é a sexta imagem que veremos se seguimos o procedimento descrito na página 8.
- **img6**: string contendo o caminho de uma imagem que deve ficar escondida ao montar o flexágono e não realizar nenhuma dobradura. Ela é a sétima imagem que veremos se seguimos o procedimento descrito na página 8.
- **grafica**: variável booleana que determina se os planos devem ser gerado visando impressão e corte em gráfica.

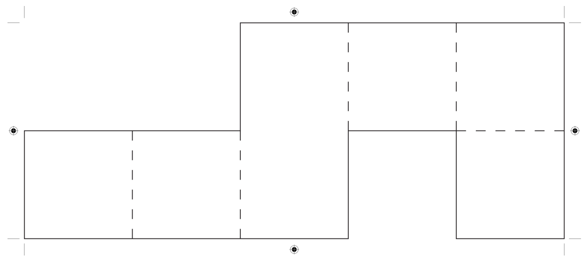
Aqui valem também os avisos que colocamos no final da seção anterior.

3.3 O algoritmo de construção dos planos.

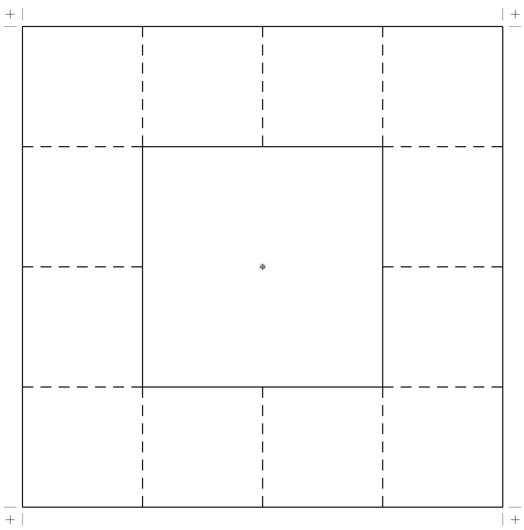
O plano para cada flexágono é gerado à partir de 3 (ou 6) imagens que são inseridas no código pelo usuário. Eles possuem o aspecto das imagens a seguir, com figuras em sua frente e verso.



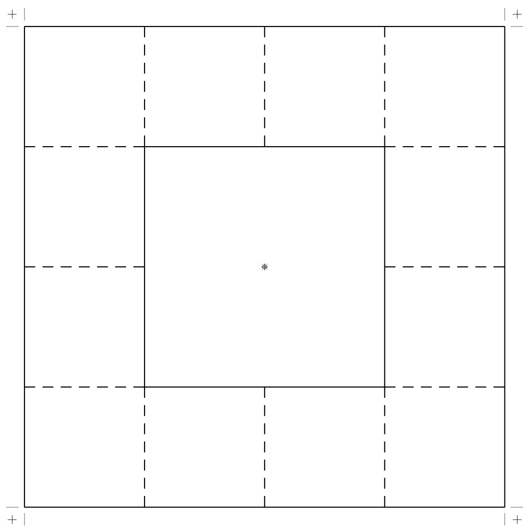
Modelo do plano frontal de um flexágono de três faces.



Modelo do plano traseiro de um flexágono de três faces.



Modelo do plano frontal de um flexágono de seis faces.



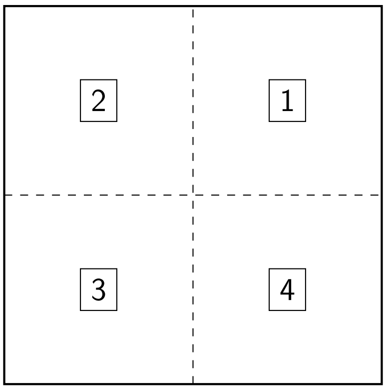
Modelo do plano traseiro de um flexágono de seis faces.

Para gerar esses planos é previsto no código realizar o tratamento das imagens, assim como algumas modificações caso a impressão desejada seja numa gráfica, por exemplo. Vamos falar mais sobre isso no próximo tópico.

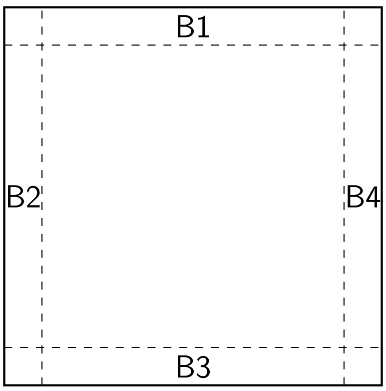
3.4 Tratamento de Imagens.

Para que seja possível gerar o flexágono com as proporções corretas, primeiro fazemos uma interpolação de tamanho. Isto é, precisamos que as imagens inseridas pelo usuário sejam quadrados de 1240×1240px (ou 10×10 cm). Para isso, executamos o algoritmo de reamostragem de Lanczos sobre as imagens para conseguimos alterar seus tamanhos sem interferir demasiadamente na qualidade.

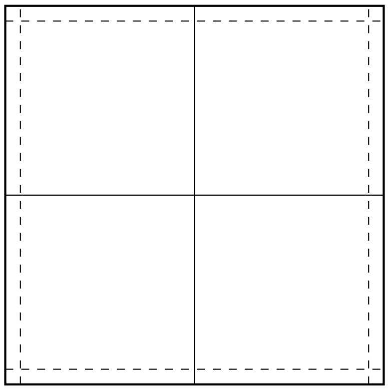
Após o processo de interpolação, as imagens são todas divididas em 4 quadrantes quadrados da seguinte maneira:



Esses quadrantes são importantes pois eles determinam as posições das imagens no plano final. No entanto, eles não são suficientes caso queiramos gerar uma imagem imprimível em gráfica. Para isso precisamos de marcas de corte. Como sempre serão gerados os quadrantes, eles servirão de base para obtermos as marcas de corte. As bordas são contadas no sentido anti-horário, começando pela superior.

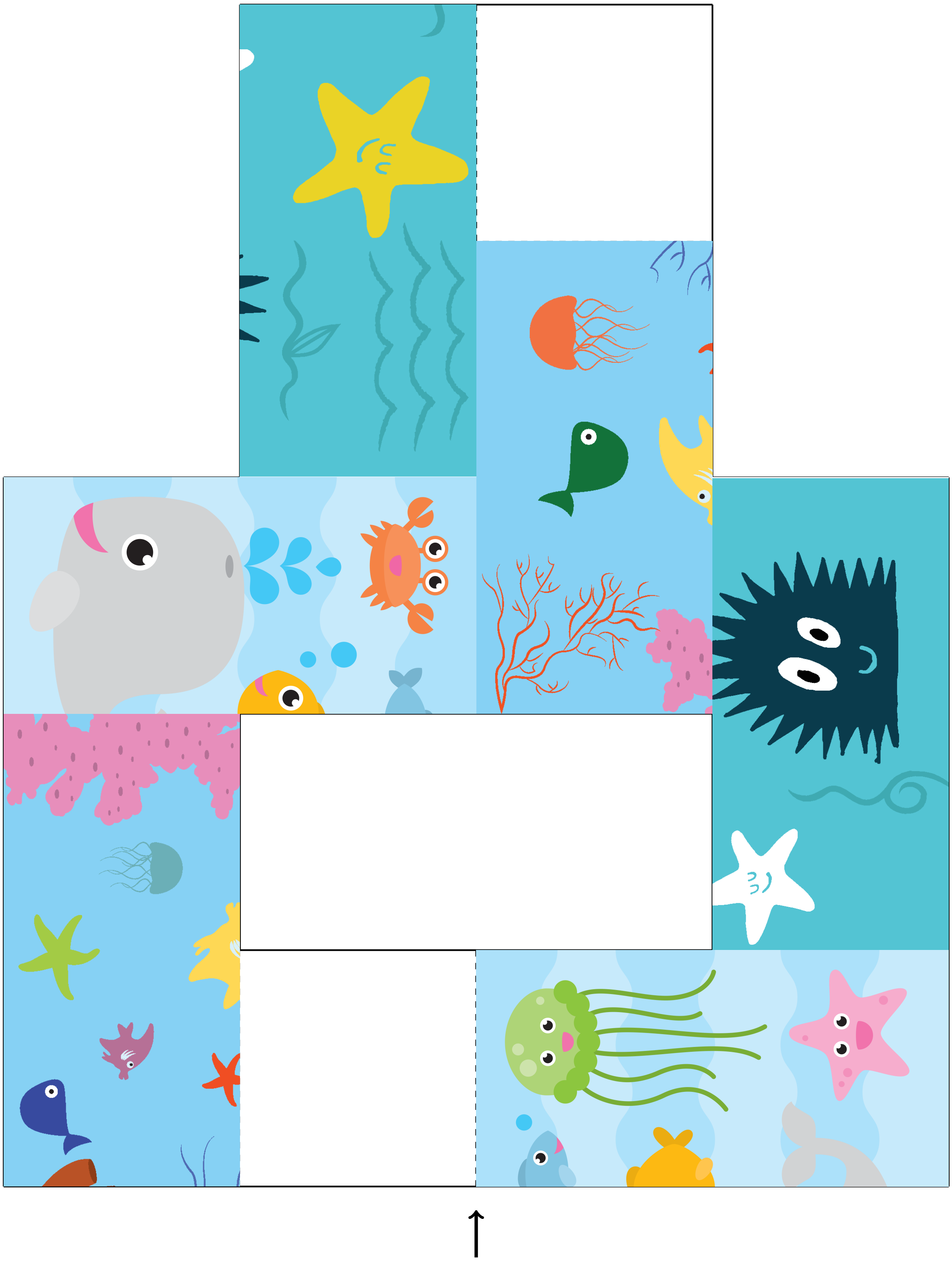


Portanto, da imagem final após a interpolação, quando se deseja ter bordas de corte, a área aproveitada da imagem original é:



Os pedaços de imagem que estão além da linha tracejada serão cortados fora na hora da montagem. Esta é realizada dependendo de cada flexágono, colando os quadrantes e as bordinhas nas posições necessárias, gerando o flexágono como um quebra-cabeças.

Modelos de flexágonos quadrados.



Dobre aqui e cole as duas metades. Use as instruções de montagem na página 2.

Figura A.1: Modelo de flexágono quadrado de 3 faces com figuras

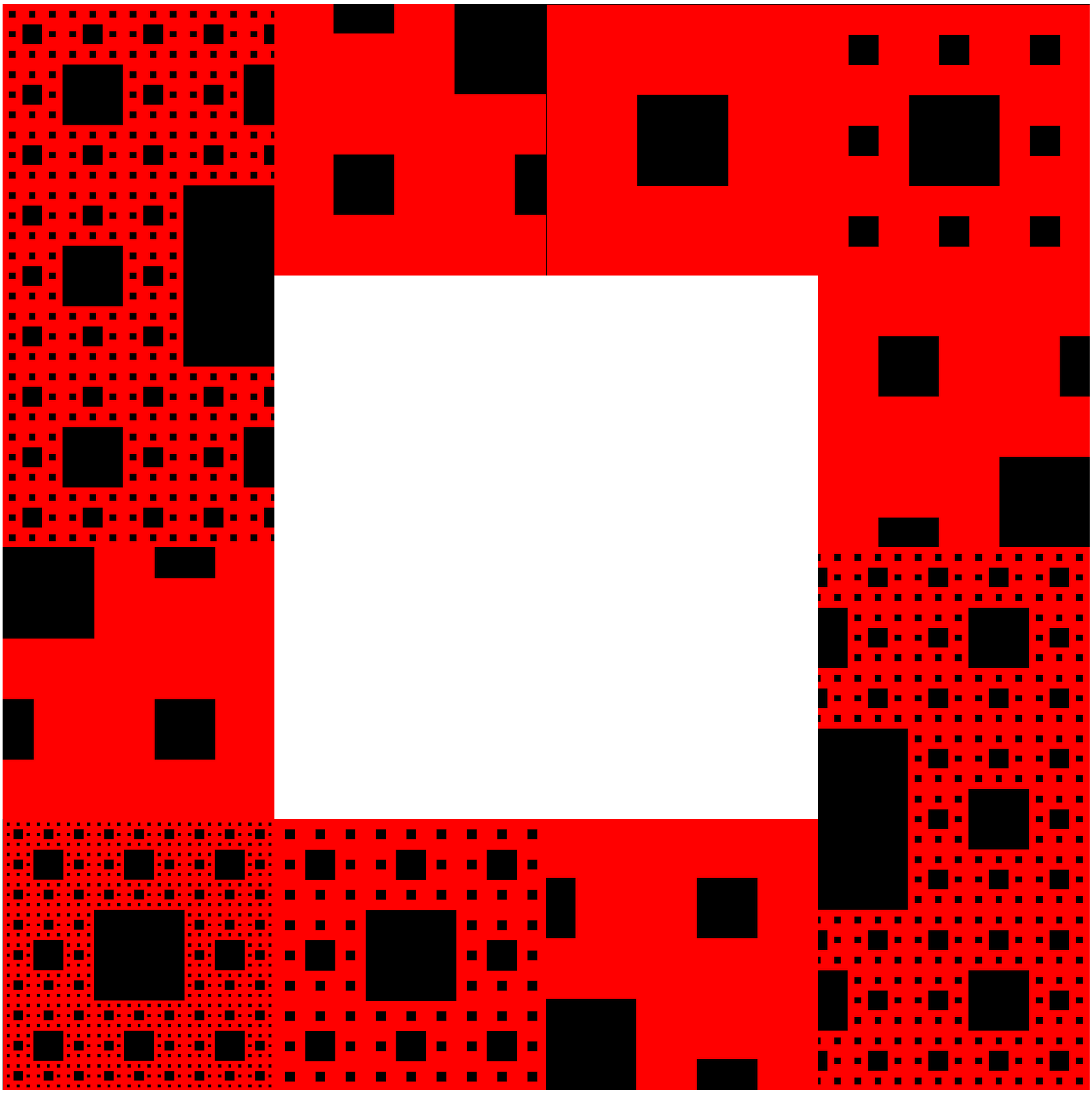


Figura A.2: Modelo de flexágono com iterações do tapete de Sierpinski (frente)

Para montar o plano deste flexágono é necessário cortar a imagem acima e a da próxma página e colar as duas mantendo a orientação. Na sequência, o flexágono pode ser montado como indicado na seção 1.2.

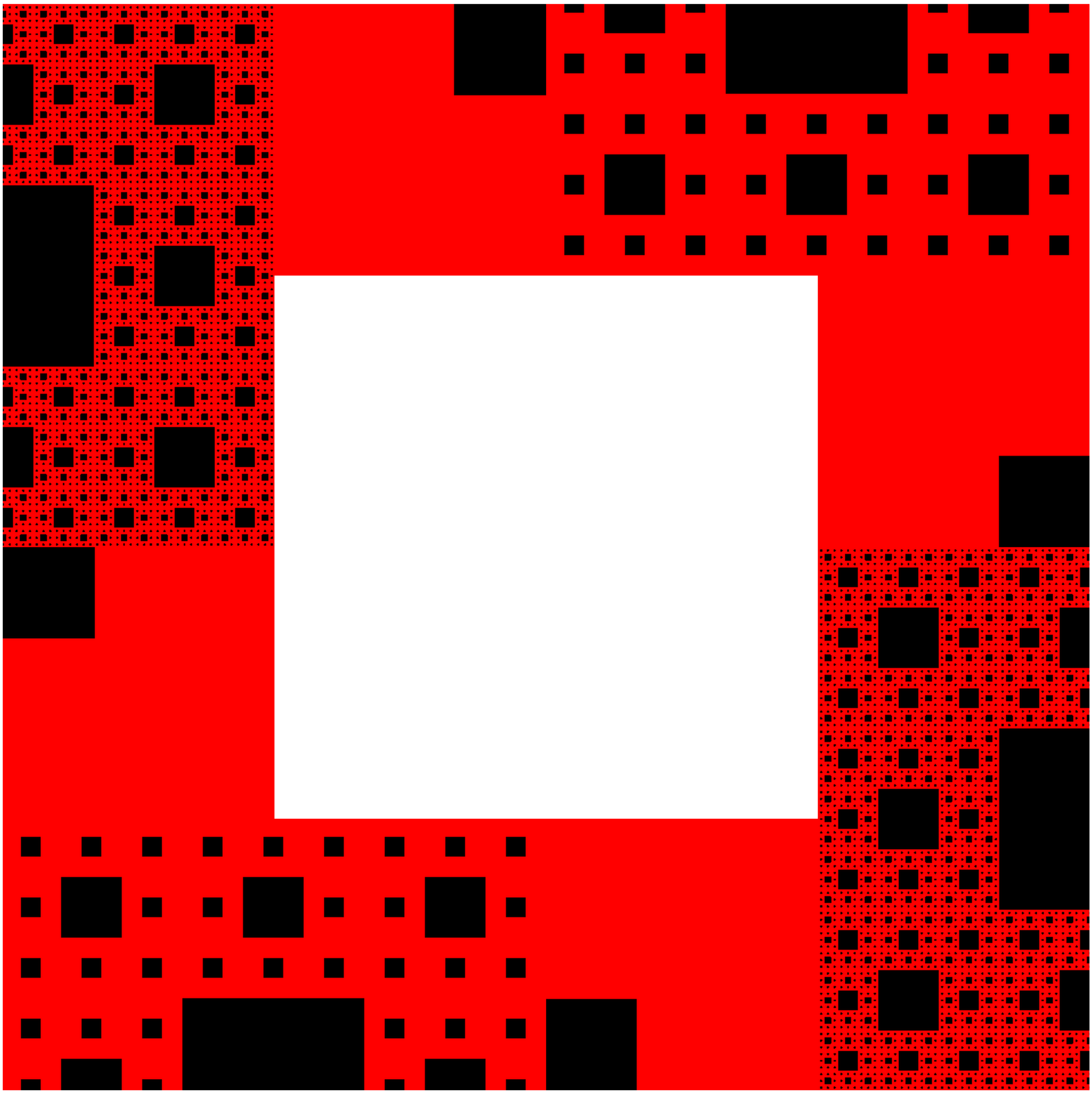


Figura A.3: Modelo de flexágono com iterações do tapete de Sierpinski (verso)

Equipe do Projeto Visitas - 2025

Aniura Milanés Barrientos (Coordenadora)
Gabriel Ribeiro
Isabela Neves Torres
Júlia Brenda Costa Evangelista
Júlia Mariana Dorneles
Júlia Rafaela Gonçalves Lage
Nora Olinda Cabrera Zúñiga
Pablo Diniz Pais

Informações para contato:

@projetovisitas
@projetovisitas
projetovisitas@gmail.com
www.mat.ufmg.br/visitas
youtube.com/c/projetovisitas
https://github.com/ProjetoVisitas

PROJETO VISITAS

O projeto Visitas no Mundo da Matemática desenvolve suas atividades no Departamento de Matemática da UFMG desde 1997. Este projeto tem construído, ao longo dos anos, um rico acervo de atividades lúdicas e jogos matemáticos que são apresentados a turmas de estudantes do Ensino Básico em visitas programadas e a docentes em oficinas organizadas pela equipe.

As publicações da coleção: *Matemática fora da caixa* abordam tópicos sobre a matemática envolvida em jogos e atividades que fazem parte do acervo de nosso projeto.

Esta coleção pode ser utilizada por docentes e estudantes do Ensino Básico por exemplo, em feiras de ciências e no desenvolvimento de projetos escolares. Esperamos que sejam úteis.

PROEX PRÓ-REITORIA DE EXTENSÃO

UFMG UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

ISBN 978-65-01-47007-8

9 786501 470078

ISBN 978-65-01-47006-1

9 786501 470061