1. Reflexión y transmisión

Cuando la luz o una onda electromagnética se propaga a través de la interfaz entre dos medios, las ecuaciones de Maxwell se deben satisfacer tanto en la interfaz como en los medios que la forman. Las condiciones de contorno para que esto suceda son las siguientes:

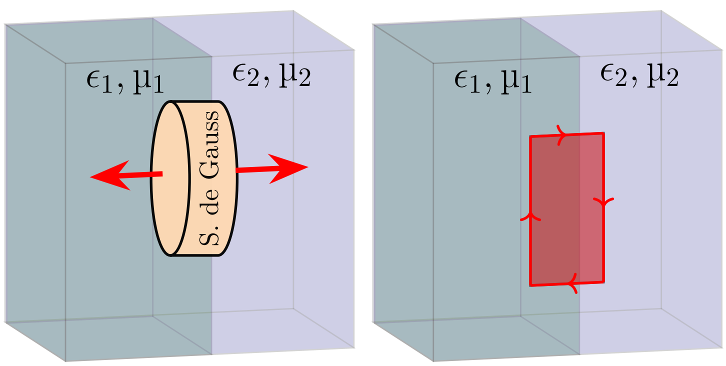
$$\oint \epsilon E \cdot dA = \sum q \tag{1}$$

$$\oint E \cdot ds = -\frac{d}{dt}\int B \cdot dA \tag{2}$$

$$\oint B \cdot dA = 0 \tag{3}$$

$$\oint \frac{B}{\mu} \cdot ds = \int J \cdot dA + \frac{d}{dt}\int \epsilon E \cdot dA \tag{4}$$

1.1. Condiciones de frontera



(a) (b)

Figura 1: My TikZ picture

De la ecuación ecuación (1) tenemos la ley de Gauss en el caso eléctrico, con la cual se define la primera condición de frontera, las condiciones de frontera en la componente del campo eléctrico que es perpendicular a la interfaz. Si los materiales son dieléctricos no habrá carga libre sobre la superficie ($q = 0$).

$$\epsilon_1 E_{1\perp} - \epsilon_2 E_{2\perp} = \sum \cancelto{0}{q} \tag{5}$$

$$\epsilon_1 E_{1\perp} = \epsilon_2 E_{2\perp} \tag{6}$$

Aplicando la ley de Faraday ecuación (2). Si el bucle alrededor del cual se calcula el campo eléctrico (figura 1b) se hace para tener un área infinitesimal el lado derecho pasará a cero dando una relación entre las componentes paralelas del campo eléctrico

$$E_{2\parallel} - E_{1\parallel} = -\frac{d}{dt}\int B \cdot \cancelto{0}{dA} \tag{7}$$

$$E_{1\parallel} = E_{2\parallel} \tag{8}$$

La ley de Gauss para el caso magnético relaciona los componentes paralelos del campo magnético en la interfaz a través del bucle que tiene un área infinitesimal.

$$B_{1\perp}A - B_{2\perp}A = 0 \tag{9}$$

$$B_{1\perp} = B_{2\perp} \tag{10}$$

Finalmente, de la ley de ampere aplicando el bucle en la interfaz (figura 1b)

$$\frac{B_{1\parallel}}{\mu_1}L - \frac{B_{2\parallel}}{\mu_2}L = \int J \cdot \cancelto{0}{dA} + \frac{d}{dt}\int \epsilon E \cdot \cancelto{0}{dA} \tag{11}$$

$$\frac{B_{1\parallel}}{\mu_1} = \frac{B_{2\parallel}}{\mu_2} \tag{12}$$

1.2. Coeficientes de Fresnel

Los coeficientes de reflexión y transmisión en la interfaz (o interfaces en caso de muchas capas) utilizando las condiciones de frontera definidas anteriormente como

$$\epsilon_1 E_{1\perp} = \epsilon_2 E_{2\perp} \tag{13}$$

$$E_{1\parallel} = E_{2\parallel} \tag{14}$$

$$B_{1\perp} = B_{2\perp} \tag{15}$$

$$\frac{B_{1\parallel}}{\mu_1} = \frac{B_{2\parallel}}{\mu_2} \tag{16}$$

pero estas condiciones dependen de la polarización de la luz incidente.

1.2.1. Polarización-S

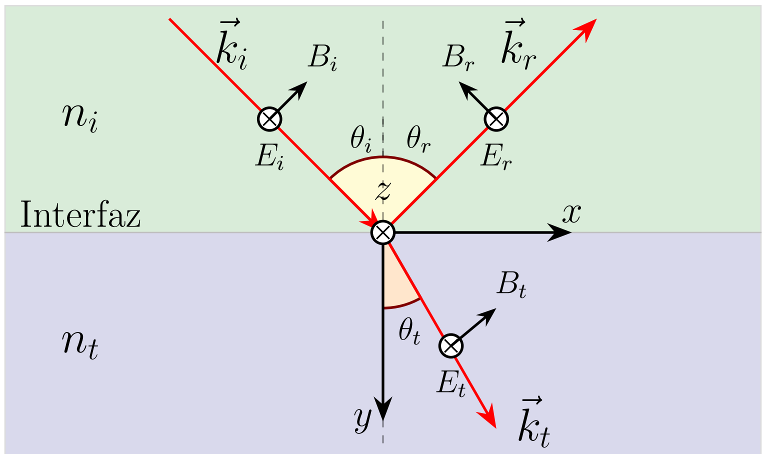


Figura 2: Reflexión y trasmisión de la luz en una interfaz con polarización s

De la figura figura 2 consideremos unicamente la contribución de la polarización s. El campo eléctrico y el campo magnético tangencial, son continuos

$$\vec{E}_i(y=0,t) + \vec{E}_r(y=0,t) = \vec{E}_t(y=0,t) \tag{17}$$

$$\vec{B}_i(y=0,t)\cos\theta_i + \vec{B}_r(y=0,t)\cos\theta_r = \vec{B}_t(y=0,t)\cos\theta_t \tag{18}$$

usando $\theta_i = \theta_r$ y $B = nE/c$ y considerando solo la amplitud de las ondas en la frontera

$$n_i(E_{0r} - E_{0i})\cos\theta_i = -n_t(E_{0r} + E_{0i})\cos\theta_t \tag{19}$$

la reflexión esta dada como $r_{1s} = \dfrac{E_{0r}}{E_{0i}}$, re-ordenando la ecuación anterior

$$r_{1s} = \frac{n_i\cos\theta_i - n_t\cos\theta_t}{n_i\cos\theta_i + n_t\cos\theta_t} \tag{20}$$

para la transmisión $t_\perp = \dfrac{E_{0t}}{E_{0i}}$

$$t_{1s} = \frac{2n_i\cos\theta_i}{n_i\cos\theta_i + n_t\cos\theta_t} \tag{21}$$

1.2.2. Polarización-P

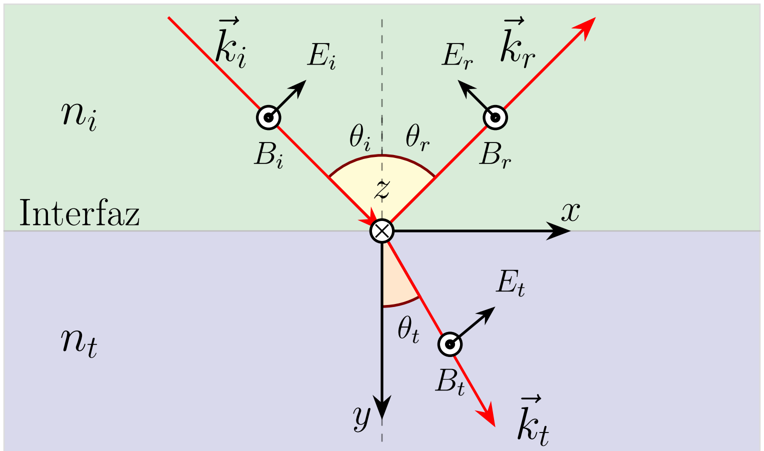


Figura 3: Reflexión y trasmisión de la luz en una interfaz con polarización P

De la figura figura 3 consideremos unicamente la contribución de la polarización p. El campo eléctrico y el campo magnético tangencial, son continuos

$$\vec{E}_i(y=0,t)\cos\theta_i + \vec{E}_r(y=0,t)\cos\theta_r = \vec{E}_t(y=0,t)\cos\theta_t \tag{22}$$

$$\vec{B}_i(y=0,t) + \vec{B}_r(y=0,t) = \vec{B}_t(y=0,t) \tag{23}$$

usando $\theta_i = \theta_r$ y $E = cB/n$ y considerando solo la amplitud de las ondas en la frontera

$$n_t(E_{0r} - E_{0i})\cos\theta_i = n_i(E_{0r} + E_{0i})\cos\theta_t \tag{24}$$

la reflexión esta dada como $r_{1p} = \dfrac{E_{0r}}{E_{0i}}$, re-ordenando la ecuación anterior

$$r_{1p} = \frac{n_i\cos\theta_t - n_t\cos\theta_i}{n_i\cos\theta_t + n_t\cos\theta_i} \tag{25}$$

para la transmisión $t_p = \dfrac{E_{0t}}{E_{0i}}$

$$t_{1p} = \frac{2n_i\cos\theta_i}{n_i\cos\theta_t + n_t\cos\theta_i} \tag{26}$$

Los coeficientes de Fresnel quedan definidos como

$$r_{1p} = \frac{n_i\cos\theta_t - n_t\cos\theta_i}{n_i\cos\theta_t + n_t\cos\theta_i} \tag{27}$$

$$t_{1p} = \frac{2n_i\cos\theta_i}{n_i\cos\theta_t + n_t\cos\theta_i} \tag{28}$$

$$r_{1s} = \frac{n_i \cos\theta_i - n_t \cos\theta_t}{n_i \cos\theta_i + n_t \cos\theta_t} \tag{29}$$

$$t_{1s} = \frac{2n_i \cos\theta_i}{n_i \cos\theta_i + n_t \cos\theta_t} \tag{30}$$

La reflectancia (definida como la relación entre la energía refleja y la energía incidente) es simplemente dada por

$$R_p = r_{1p}^2 \tag{31}$$

$$R_s = r_{1s}^2 \tag{32}$$

$$\tag{33}$$

1.2.3. Reflexión en una superficie con un medio absorbente

Las ecuaciones anteriores quedan definidas para un medio transparente es decir sin absorción, para el caso de un medio absorbente el indice de refracción esta definido por una parte real menos una parte imaginaria, esta ultima representa la absorción. Remplazando $n_t = n_t - ik_t$ en los coeficientes de Fresnel ecuaciones (27) a (30)

$$r_{1p} = \frac{n_i \cos\theta_t - (n_t - ik_t)\cos\theta_i}{n_i \cos\theta_t + (n_t - ik_t)\cos\theta_i} \tag{34}$$

$$r_{1s} = \frac{n_i \cos\theta_i - (n_t - ik_t)\cos\theta_t}{n_i \cos\theta_i + (n_t - ik_t)\cos\theta_t} \tag{35}$$

$$\tag{36}$$

1.3. Modelo de tres capas

Aplicando los resultados obtenidos anteriormente se puede determinar la reflexión y transmisión en un capa (no absorbente) con indice de refracción n_1 sobre un substrato con indice de refracción n_2. Considerando un haz incidente sobre la capa se divide en en partes reflejadas y transmitidas. Esta división se produce cada vez que el haz incide una interfaz de modo que los haces reflejados y transmitidos se obtienen sumando la multiplicación de los elementos reflejados y transmitidos.

Los coeficientes de Fresnel para la propagación desde n_0 a n_1 se denotan por r_1 y t_1 como en las ecuaciones (27) a (30). Los coeficientes de propagación desde n_1 a n_0 se denotaran como r_1' y t_1'

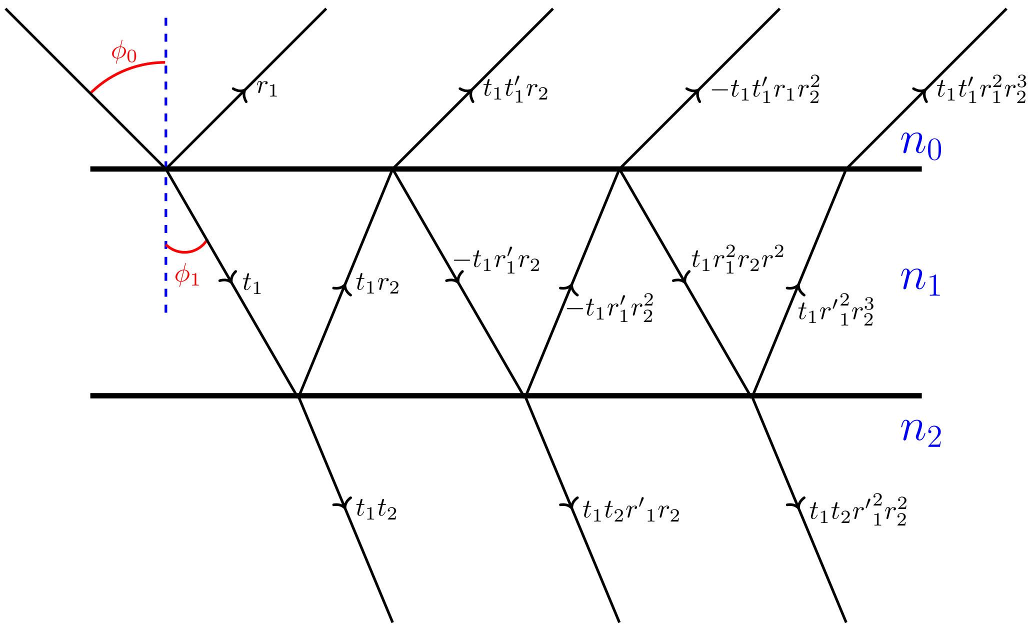


Figura 4

Las amplitudes se exprasn siempre en terminos de r_1 y t_1. Las expresiones dadas abajo serán válidas para cualquier dirección de la polarización siempre que a r y t se les den los valores apropiados de las ecuaciones (27) a (30). Por lo tanto, el segundo sufijo (p ó s) será omitido. De la forma de la expresión para el coeficiente de reflexión de Fresnel vemos que r_1' es igual a $-r_1$. Las amplitudes de los haces sucesivos reflejados en el medio n_0 son dadas por r_1, $t_1t_1'r_2$, $-t_1t_1'r_1r_2^2$,$t_1t_1'r_1r_2^3\ldots\ldots$ y ;as amplitudes que se transmiten por t_1t_2, $-t_1t_2r_1r_2$, $t_1t_2r_1^2r_2^2\ldots\ldots\ldots$ Sea δ_1 el cambio de fase al atravesar la capa .

$$\delta_1 = \frac{2\pi}{\lambda} n_1 d_1 \cos\phi_1 \tag{37}$$

La amplitud de la reflexión es entonces

$$R = r_1 + t_1t_1'r_2e^{-2i\delta_1} - t_1t_1'r_1r_2^2e^{-4i\delta 1} + \ldots \tag{38}$$

se omite el tiempo en el factor de fase $e^{i\delta_1}$, la suma de la serie gemetrica es entonces

$$R = r_1 + \frac{t_1t_1'e^{2i\delta_1}}{1 + r_1r_2e^{-2i\delta_1}} \tag{39}$$

Para un medio no absorbente, se puede simplificar escribiendo los coeficientes de Fresnel para la transmisión en términos de r_1 y r_2. Por conservación de la energía se tiene que

$$t_1 t_1' = 1 - r_1^2 \tag{40}$$

entonces la ecuación (39) resulta

$$R = \frac{r_1 + r_2 e^{-2i\delta_1}}{1 + r_1 r_2 e^{-2i\delta_1}} \tag{41}$$