

1. Sisteme de proiecție. Punctul

Cuprins

1. Sisteme de proiecție.....	1
1.1. Sistemul Proiecției Centrale	2
1.2. Sistemul Proiecție Paralele.....	3
1.3. Sistemul Proiecției Axonometrice.....	4
1.4. Metoda dublei proiecții paralele ortogonale.....	5
1.5. Metoda triplei proiecții paralele ortogonale.....	7

Introducere

De-a lungul timpului Geometria Descriptivă a utilizat diferite sisteme de proiecție. Fiecare dintre acestea având anumite avantaje dar și dezavantaje. Geometria Descriptivă, în forma sa actuală, folosește Sistemul Proiecției Paralele Ortogonale. El servește nu numai ca bază de studiu în această disciplină dar este și fundamentul Desenului Tehnic. Alături de acest sistem de proiecție în reprezentările grafice se folosește și Sistemul Axonometric de Proiecție.

Durata medie de studiu individual

Timpul alocat studiului acestei teme este de circa 2 ore, incluzând aici și testele de autoevaluare.

Scop

Cunoașterea sistemelor de proiecție utilizate în Geometria Descriptivă.

Obiective

- cunoașterea Sistemului Proiecției Centrale;
- cunoașterea Sistemului Proiecției Paralele;
- cunoașterea Sistemului Axonometric de Proiecție;
- înțelegerea Sistemului Proiecției Paralele Ortogonale.

La sfârșitul acestei teme studenții vor ști elementele care caracterizează sistemele de proiecție prezentate precum și avantajele și dezavantajele lor. Ei vor înțelege motivele pentru care în studiul Geometriei Descriptive se utilizează Sistemul Proiecției Paralele Ortogonale și vor fi capabili să recunoască poziția unui punct din spațiul tridimensional după reprezentarea lui plană.

1.1. Sistemul Proiecției Centrale

Elementele cu ajutorul cărora este definit sistemul proiecției centrale sunt: planul $[P]$, numit **plan de proiecție** sau **planul imaginii** și **centrul de proiecție** O care nu aparține planului $[P]$ dar care este situat la o distanță finită de acesta.

Fie A un punct oarecare al spațiului tridimensional, (fig. 1.1). Dreapta trasată prin punctele O și A intersectează planul $[P]$ într-un punct a numit **proiecția centrală** sau **perspectiva** pe planul $[P]$, din centrul O , a punctului A din spațiu. Dreapta OA se numește **dreaptă proiectantă** sau **rază de proiecție**.

Proiecția centrală se mai numește și **proiecție conică** (fig. 1.2) întrucât dreptele proiectante, duse prin centrul de proiecție O , și punctele unei figuri oarecare formează în totalitatea lor o suprafață proiectantă conică. Proiecția centrală a unei drepte \overline{D} din spațiul tridimensional, este tot o dreaptă

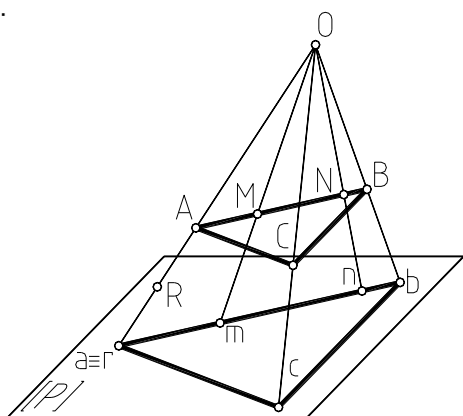


Figura 1.1 Elementele sistemului central de proiecție

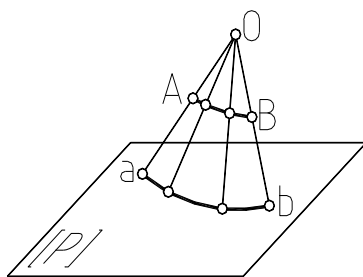


Figura 1.2 Proiecția centrală sau conică

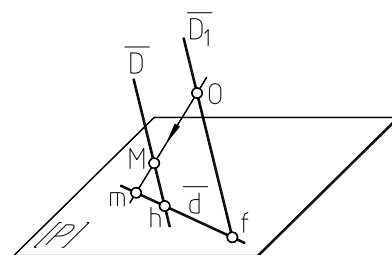


Figura 1.3 Proiecția centrală a dreptei

Aceasta poate fi determinată cu ajutorul urmei h a dreptei \overline{D} și a punctului f (f se numește **punct de fugă** sau **punct limită**). Punctul de fugă este punctul în care dreapta $\overline{D_1}$, care este paralelă cu \overline{D} și care trece prin centrul de proiecție O , intersectează planul de proiecție $[P]$ (fig. 1.3). Prin **urma unei drepte** din spațiul tridimensional se înțelege *punctul în care aceasta intersectează planul de proiecție*.

În proiecția centrală corespondența este univocă: unui punct A din spațiu îi corespunde o singură proiecție - a , însă unei proiecții îi corespund toate punctele situate pe proiectanta respectivă. Acest adevăr face imposibilă determinarea punctului A din spațiu plecând de la proiecția a din planul $[P]$.

Proiecția centrală a unei figuri geometrice (de exemplu triunghiul ABC – *fig. 1.1*), situată într-un plan paralel cu planul [P], este o imagine (triunghiul abc) asemenea cu figura geometrică proiectată.

1.2. Sistemul Proiecție Paralele

Fie centrul de proiecție O un punct *situat la infinit*. În acest caz razele proiectante *sunt toate paralele* cu o direcție oarecare $\overline{\Delta}$ din spațiul tridimensional. Fie A un punct oarecare al spațiului tridimensional, (*fig. 1.4*). Dreapta paralelă cu direcția $\overline{\Delta}$ dusă prin punctul A intersectează planul [P] în punctul **a**. Punctul **a** se numește **proiecția paralelă oblică** a punctului A din spațiul tridimensional pe planul [P]. Dacă direcția $\overline{\Delta}$ este perpendiculară pe planul de reprezentare [P], **a** este **proiecția paralelă ortogonală** a punctului A pe planul de proiecție [P].

Așadar **sistemul proiecției paralele** este definit de planul de reprezentare [P] și de direcția de proiecție $\overline{\Delta}$. În proiecția paralelă corespondența este univocă: unui punct din spațiu îi corespunde o singură proiecție, însă unei proiecții îi corespund toate punctele situate pe proiectanta respectivă.

Proiecția paralelă a unui punct A din spațiul tridimensional este tot un punct - **a**, iar o dreaptă \overline{D} din spațiu se proiectează după o dreaptă \overline{d} . Când dreapta \overline{D}_1 este paralelă cu direcția proiectantelor, proiecția ei este un punct (*fig. 1.5*)

Proiecția paralelă a unui segment de dreaptă este un segment egal, mai mare sau mai mic decât segmentul din spațiu (*fig. 1.6*). Raportul $\overline{d}/\overline{D}$ se numește **factor de imagine** și se notează cu K. În proiecția oblică K poate lua orice valoare, în timp ce în proiecția ortogonală $K \leq 1$ ($K = \cos\varphi$).

Proiectând o figură geometrică (triunghiul ABC – *fig. 1.4*), situată într-un plan paralel cu planul [P], obținem o imagine congruentă (triunghiul abc).

Menționăm că sistemul proiecției paralele constituie fundamentul teoretic al sistemului de proiecție dublu ortogonal Monge¹.

¹ Gaspard Monge, 1746 – 1818, matematician francez, părintele Geometriei Descriptive moderne. A fondat și a profesat la Ecole Polytechnique.

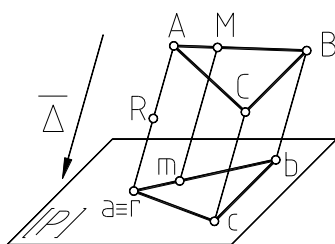


Figura 1.4 Proiecția paralelă. Elementele sale

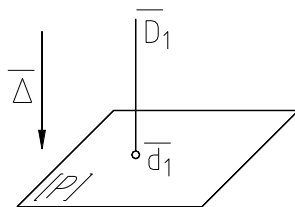


Figura 1.5 Proiecția paralelă a unei drepte paralele cu direcția proiectantelor

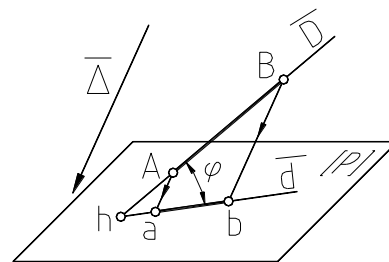


Figura 1.6 Proiecția paralelă a unui segment de dreaptă

1.3. Sistemul Proiecției Axonometrice

Acesta permite o reprezentare intuitivă a obiectelor prin sugerarea celor trei dimensiuni. Reprezentarea care rezultă prin folosirea sistemului axonometric este cunoscută sub denumirea de **reprezentare axonometrică**². Obținerea celor trei dimensiuni într-o singură imagine este posibilă în proiecția paralelă dacă corpul este raportat la un triedru ortogonal: OX, OY, OZ , după care este proiectat pe un plan unde se obține triedrul axonometric $\overline{OX}, \overline{OY}, \overline{OZ}$ și imaginea lui tridimensională. Imaginea axonometrică este, de regulă, deformată deoarece planul axonometric $[P]$ este înclinat față de reperul ortogonal. Dacă direcția de proiecție este oblică față de $[P]$ axonometria se numește **oblică**, iar dacă aceasta este perpendiculară pe planul $[P]$ axonometria este **ortogonală** (fig. 1.7).

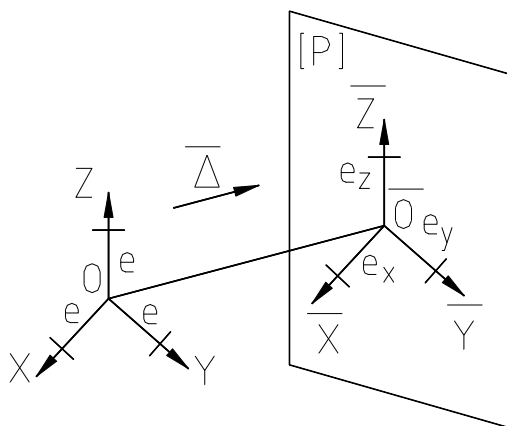


Figura 1.7 Sistemul proiecției axonometrice

² Axonometria a fost fundamentată de matematicianul englez William Farisch (1759-1837), (5). El și-a prezentat teoria în memoriul intitulat „On Isometrical Perspective”- Cambridge 1837. Însă, primele aplicații aparțin inginerului italian Giovanni Codazza (1816-1873), prezentate în memoriul „Sopra un metodo di prospettiva pel disegno di macchine”.

1.4. Metoda dublei proiecții paralele ortogonale

Am arătat că atât în proiecția centrală cât și în cea paralelă corespondența între mulțimea punctelor din spațiu și mulțimea punctelor din plan este univocă. Așadar, nu este posibil să regăsim forma spațială a unui corp plecând de la reprezentarea lui plană. Cel care a rezolvat această problemă a fost Gaspard Monge. El a preluat ideea graficianului Albert Dürer³ de a folosi două plane de proiecție. Așadar, Gaspard Monge introduce un al doilea plan de proiecție pe care-l așează perpendicular pe primul. Primul plan de proiecție primește numele de **plan orizontal** de proiecție și îl notează cu [H], iar pe cel de al doilea îl numește **plan vertical** de proiecție notându-l cu [V]. Dreapta de intersecție dintre cele două plane este cunoscută sub denumirea de **axă de proiecție** sau **linie de pământ** (fig. 1.8).

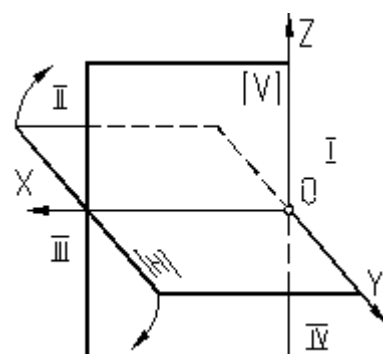


Figura 1.8 Planul orizontal [H], vertical [V] și axa de proiecție OX

Cele două plane împart spațiul în patru subspații care se numesc **diedre**, și care se numerează convențional I...IV de la dreapta la stânga.

Acum, unui punct A din spațiu îi corespund două proiecții, (fig. 1.9), una pe planul vertical de proiecție – **a'** (**proiecție verticală**) și alta – **a** (**proiecție orizontală**) pe planul orizontal de proiecție.

Cele două proiecții **a** și **a'** permit determinarea punctului A din spațiul tridimensional. În felul acesta dubla proiecție ortogonală asigură corespondența biunivocă între cele două spații S_3 și S_2 .

Rotind planul orizontal [H], în jurul axei \overline{OX} , în sensul indicat de săgeți, până când acesta se suprapune peste planul vertical de proiecție [V], menținut fix, se obține un singur desen care poartă denumirea de **epură**. În aceste condiții proiecția orizontală – **a**, a punctului A, se rotește odată cu planul [H] până când ajunge pe aceeași linie de ordine față de axa \overline{OX} , cu proiecția verticală – **a'**.

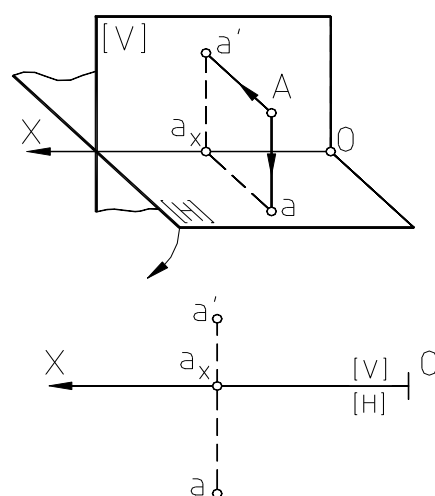


Figura 1.9 Punctul în diedrul I

Reprezentarea unui punct din spațiu în epură se face pe baza coordonatelor sale descriptive (fig. 1.10):

³ Albert Dürer (1471-1528), grafician german care a sugerat primul introducerea unui al doilea plan de proiecție.

- **X – abscisa**, distanța de la punct la planul lateral de proiecție [L] (a se vedea tripla proiecție ortogonală). Ea este pozitivă în stânga planului lateral [L] și negativă în dreapta acestuia;

- **Y – depărtarea**, distanța de la punct la planul vertical de proiecție [V]. Ea este pozitivă în fața planului vertical [V] și negativă în spatele acestuia;

- **Z – cota**, distanța de la punct la planul orizontal de proiecție [H]. Ea este pozitivă deasupra planului orizontal [H] și negativă sub acesta.

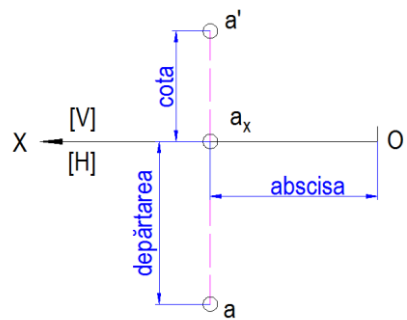


Figura 1.10 Coordonatele descriptive ale punctului

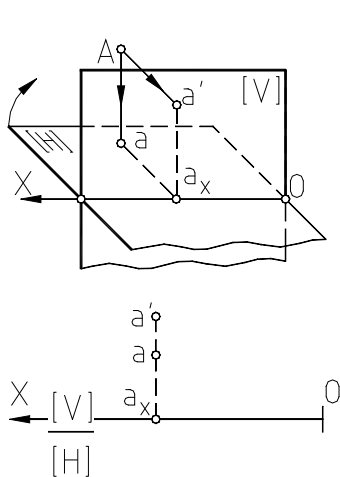


Figura 1.11 Punct în diedrul II

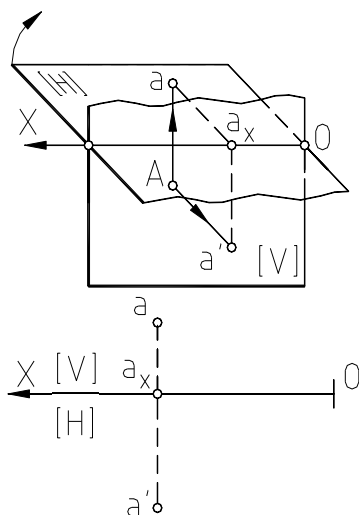


Figura 1.12 Punct în diedrul III

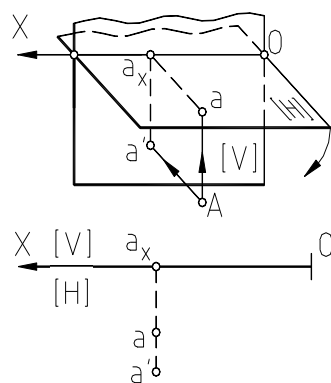


Figura 1.13 Punct în diedrul IV

Se observă că atât planul orizontal de proiecție [H] cât și planul vertical de proiecție [V] sunt împărțite, fiecare, de axa \overline{OX} în câte două semiplane. Astfel, avem:

- *semiplanul orizontal anterior* (în fața axei \overline{OX});
- *semiplanul orizontal posterior* (în spatele axei \overline{OX});
- *semiplanul vertical superior* (deasupra axei \overline{OX});
- *semiplanul vertical inferior* (dedesubtul axei \overline{OX}).

1.5. Metoda triplei proiecții paralele ortogonale

De regulă, reprezentarea dublu ortogonală nu redă complet și sugestiv particularitățile obiectului desenat. De aceea a fost necesară introducerea unui nou plan de proiecție, perpendicular pe primele două. Acesta a fost notat cu [L] și a primit numele de **plan lateral** de proiecție (fig. 1.14).

Cele trei plane de proiecție se intersectează două câte două, după câte o dreaptă generând axele sistemului de proiecție \overline{OX} , \overline{OY} , \overline{OZ} . Așadar, $[H] \cap [V] = \overline{OX}$, $[H] \cap [L] = \overline{OY}$ și $[V] \cap [L] = \overline{OZ}$.

Cele trei plane împart spațiul în opt **triedre** numerotate, de la dreapta la stânga, cu I...VIII. Epura se obține rotind planul [H] în jurul axei \overline{OX} , corespunzător săgeților, până se suprapune cu planul [V], fix și, rotind în jurul axei \overline{OZ} , corespunzător săgeților, planul [L] până când acesta se suprapune cu planul [V].

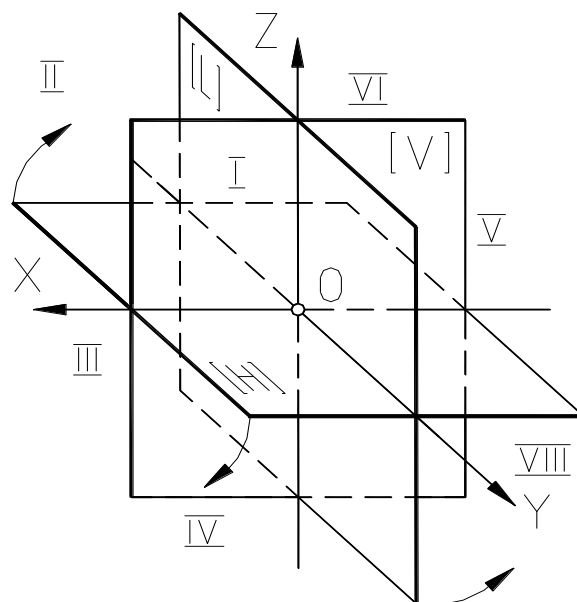


Figura 1.14 Cele opt triedre

Acum unui punct A din spațiu îi corespund trei proiecții: proiecția orizontală – **a**, proiecția verticală – **a'** și **proiecția laterală** (corespunzătoare planului [L]) – **a''**.

În figurile 1.15...1.30 avem reprezentarea punctului în cele opt triedre.

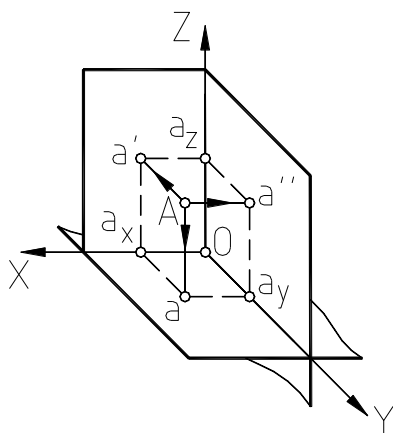


Figura 1.15 - Punct situat în triedrul T_1
– reprezentare în spațiu

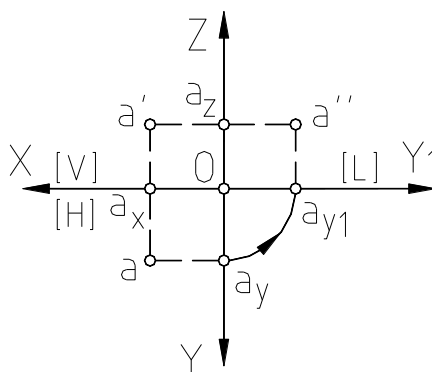


Figura 1.16 - Punct situat în triedrul T_1
– reprezentare în epură

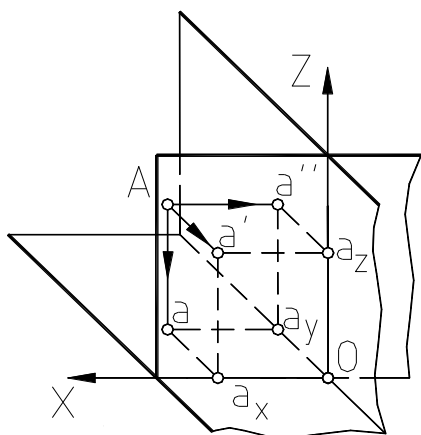


Figura 1.17 - Punct situat în triedrul T_2
- reprezentare în spațiu

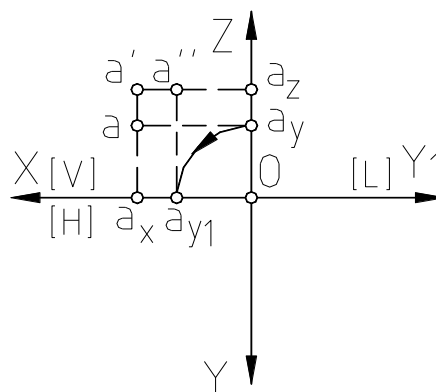


Figura 1.18 - Punct situat în triedrul T_2
- reprezentare în epură

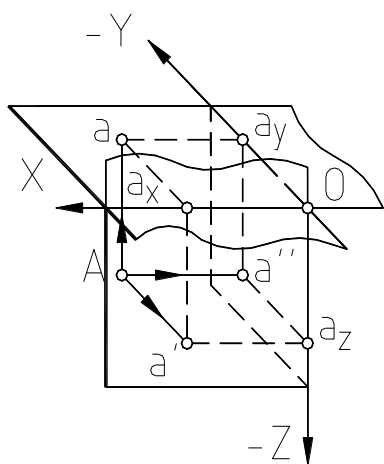


Figura 1.19 - Punct situat în triedrul T_3
- reprezentare în spațiu

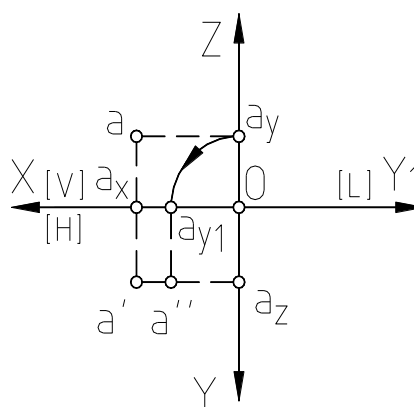


Figura 1.20 - Punct situat în triedrul T_3
- reprezentare în epură

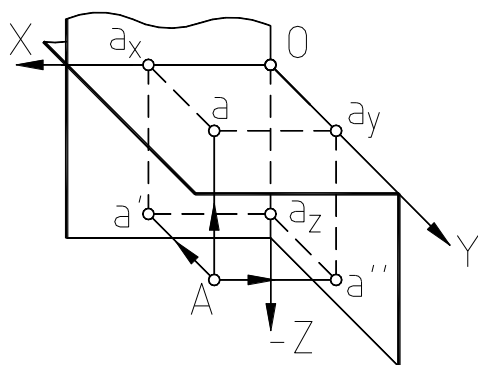


Figura 1.21 - Punct situat în triedrul T_4
- reprezentare în spațiu

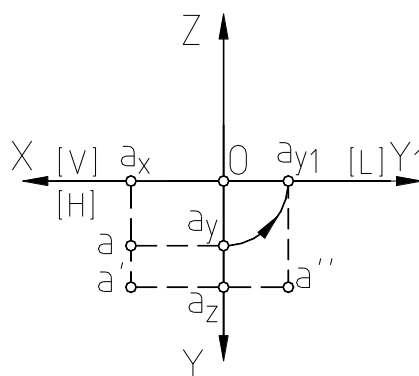


Figura 1.22 - Punct situat în triedrul T_4
- reprezentare în epură

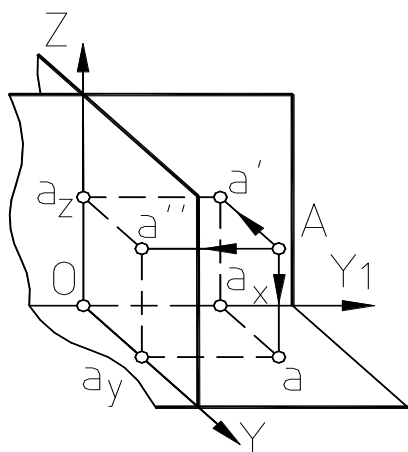


Figura 1.23 - Punct situat în triedrul T_5
- reprezentare în spațiu

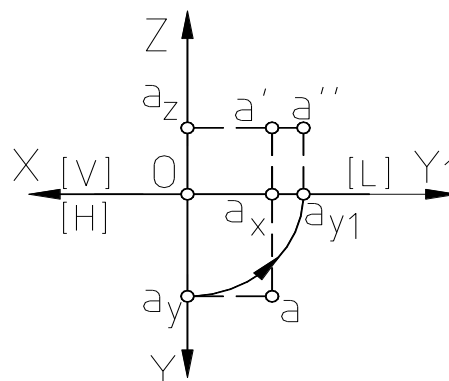


Figura 1.24 - Punct situat în triedrul T_5 - reprezentare în epură

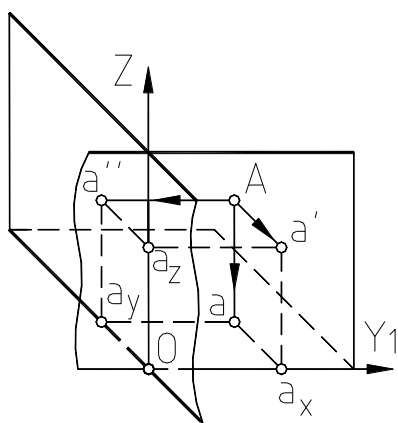


Figura 1.25 - Punct situat în triedrul T_6
- reprezentare în spațiu

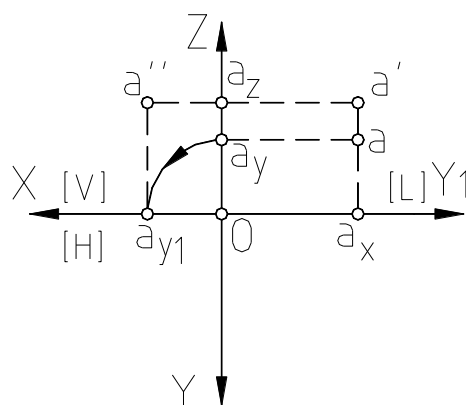


Figura 1.26 - Punct situat în triedrul T_6 - reprezentare în epură

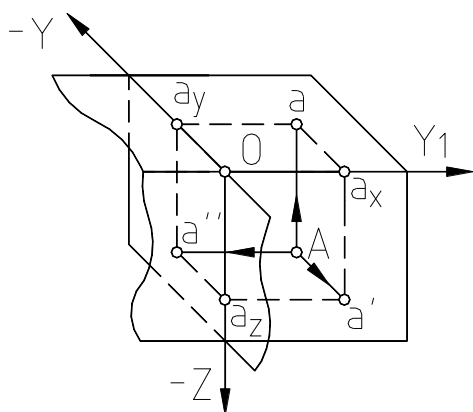


Figura 1.27 - Punct situat în triedrul T_7
- reprezentare în spațiu

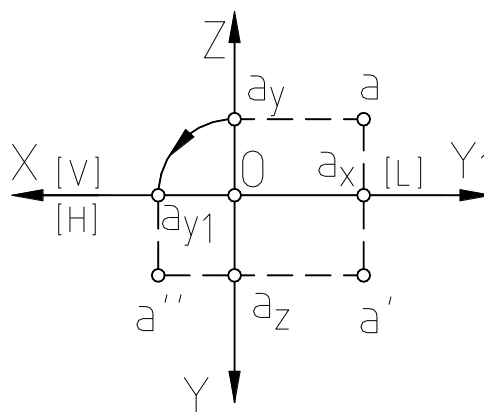


Figura 1.28 - Punct situat în triedrul T_7 - reprezentare în epură

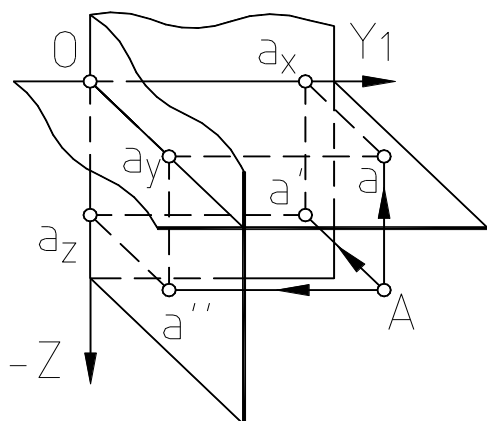


Figura 1.29 - Punct situat în triedrul T_8
– reprezentare în spațiu

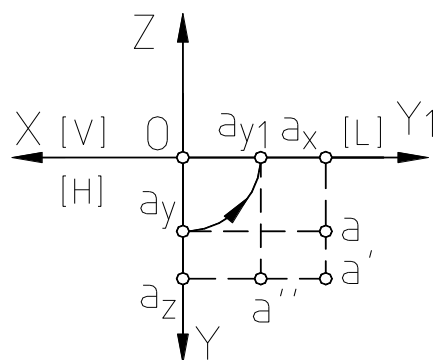


Figura 1.30 - Punct situat în triedrul T_8
– reprezentare în epură

Observație:

Un punct în epură poate fi dat prin proiecțiile sale sau prin coordonatele sale descriptive

Mod de reprezentare	Exprimare prin proiecții (exemplu)	Exprimare prin coordonate descriptive (exemplu)
În dublă proiecție ortogonală	$A(a, a')$	$A(20,35,42)$
În triplă proiecție ortogonală	$A(a, a', a'')$	$A(50,31,27)$

Bibliografie

1. **. *Mică Enciclopedie Matematică*. București : Editura Tehnică, 1980.
2. *. *Dicționar de Matematici Generale*. București : Editura Enciclopedică Română, 1974.
3. **Sorin, Aldea**. *Geometrie Descriptivă*. București : Litografia I.P.B, 1977.
4. **Anghel, Alina și Dănăilă, Wanda**. *Geometrie Descriptivă*. Iași : Editura Performantica, 2004.
5. ***. wikipedia. [Interactiv] January 2012. [Citat: 09 Aprilie 2012.]
http://en.wikipedia.org/wiki/William_Farish_%28chemist%29.
6. **Botez, Mihail Ștefan**. *Geometrie Descriptivă*. București : Editura Didactică și Pedagogică, 1965.
7. **Popa, Constantin, Onofrei, Ligia și Popa, Iordache**. *Geometrie Descriptivă*. Iași : Rotaprint, 1991.
8. **Popa, Constantin, și alții**. *Geometrie Descriptivă*. Iași : Casa de Editură Venus, 1998.
9. **Prună, Liviu, și alții**. *Geometrie Descriptivă*. Iași : Editura Tehnică, Științifică și Didactică Cermi, 2002.
10. **Slonovschi, Andrei, Prună, Liviu și Antonescu, Ion**. *Geometrie Descriptivă. Aplicații*. Iași : Editura Tehnopress, 2006.
11. **Tănăsescu, Aurelian**. *Geometrie Descriptivă*. București : Editura Didactică și Pedagogică, 1965.

Teste de autoevaluare

Testul nr.1

Nr. crt.	Întrebare	Adevărat	Fals
1	Sistemul proiecție centrale este definit de un plan numit planul imaginii și de un centru de proiecție numit centrul de proiecție.		
2	Dreapta care trece prin centrul de proiecție și punctul ce urmează a fi proiectat, se numește rază de proiecție.		
3	În sistemul proiecției conice o dreaptă se proiectează tot într-o dreaptă.		

Nr. crt.	Întrebare	Adevărat	Fals
4	Proiecția centrală a unei figuri geometrice, situată într-un plan paralel cu planul imaginii este congruentă cu figura geometrică proiectată.		
5	Sistemul proiecției centrale rezolvă problema fundamentală a Geometriei Descriptive		
6	Sistemul proiecției paralele este definit de planul de proiecție și de direcția razelor de proiecție		
7	În sistemul proiecției paralele o dreaptă se proiectează tot într-o dreaptă.		
8	Proiecția paralelă a unei figuri geometrice, situată într-un plan paralel cu planul de proiecție este congruentă cu figura geometrică proiectată.		
9	Sistemul proiecției paralele rezolvă problema fundamentală a Geometriei Descriptive.		
10	Metoda dublei proiecții ortogonale nu rezolvă problema fundamentală a Geometriei Descriptive.		
11	Coordonatele descriptive ale unui punct sunt: abscisa, depărtarea și cota		
12	Abscisa reprezintă distanța de la punctul proiectat la planul lateral de proiecție.		
13	Depărtarea reprezintă distanța de la punctul proiectat la planul lateral de proiecție.		
14	Cota reprezintă distanța de la punctul proiectat la planul orizontal de proiecție.		
15	Un punct epură poate fi dat numai prin coordonatele sale descriptive.		

Testul nr.2

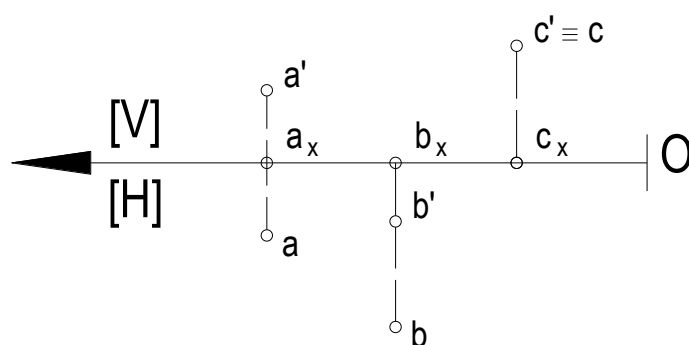


Figura 1.31 – Precizați în ce diedre sunt situate punctele din epură

Precizați în ce diedru sunt situate punctele A(a, a'), B(b, b') și C(c, c')?

În care diedru este situat punctul A(a, a')?	a.)	În diedrul I
	b.)	În diedrul III
	c.)	În diedrul IV
	d.)	În diedrul II
În care diedru este situat punctul B(b, b')?	a.)	În diedrul II
	b.)	În diedrul III
	c.)	În diedrul IV
	d.)	În diedrul II
În care diedru este situat punctul C(c, ac')?	a.)	În diedrul I
	b.)	În diedrul IV
	c.)	În diedrul IV
	d.)	În diedrul II

Răspunsuri la teste

Testul nr.1

Nr. test	Întrebare	Răspuns
Testul nr.1	1	Adevărat
	2	Adevărat
	3	Adevărat
	4	Fals
	5	Fals
	6	Adevărat
	7	Adevărat
	8	Adevărat
	9	Fals
	10	Fals
	11	Adevărat
	12	Adevărat
	13	Fals
	14	Adevărat
	15	Fals

Testul nr. 2

Punct	Varianta
A(a, a')	b.)
B(b, b')	c.)
C(c, c')	d.)