

Faculdade de Tecnologia da Baixada Santista  
Curso Superior de Tecnologia em Ciência de Dados

Redes Neurais

Gabriela Duarte Maciel

Santos - SP  
19 de maio de 2023.

## Descrição

Neste projeto, uma rede neural é implementada com o objetivo de classificar números do conjunto inteiro como pares ou ímpares. Lembrando que é possível fazer a classificações de números negativos, pois o resultado de mod será zero ou um, levando em consideração o um negativo, pois caso um número seja negativo, ainda sim é possível classifica-lo. Ademais, o intuito desse modelo é explorar a capacidade da rede neural em aprender padrões e tomar decisões com base nos dados de entrada.

Para construir o gráfico de dados utilizado na rede neural, foram considerados os valores no intervalo de 0 a 1000 do conjunto dos números naturais. Cada número foi associado a uma classe, indicando se ele é par ou ímpar. A partir dessa associação, a rede neural é treinada para aprender a classificar corretamente novos números que lhe forem apresentados.

## Classificação

A rede neural implementada tem o objetivo de classificar se um número do conjunto natural é par ou ímpar. A rede foi treinada utilizando os valores do conjunto natural de 0 a 1000 como dados de entrada. A classificação realizada pela rede neural é baseada em dois pesos ( $w_1$  e  $w_2$ ) e dois vies ( $b_1$  e  $b_2$ ) que foram ajustados durante o treinamento. A rede utiliza uma função de ativação, no caso a função sigmoide, para transformar a combinação linear dos pesos e entradas em uma probabilidade, que representa a chance de o número ser par ou ímpar.

Ao fornecer um número como entrada para a rede neural, ela realiza uma série de cálculos para obter a probabilidade de ser par ou ímpar. Em seguida, é aplicado um limite de decisão de 0.5, para determinar a classificação final. Se a probabilidade for maior que 0.5 o número é classificado como par; caso contrário, é classificado como ímpar.

## Função do erro

A função é responsável por ajustar os valores dos parâmetros ( $x_t$  e  $y_t$ ), atualizando-os na direção do gradiente negativo, até que a diferença entre os valores atualizados e os valores anteriores, representada pelo erro, seja menor que um limite pré-definido que é a tolerância.

A função de erro é calculada usando a fórmula da distância entre os pontos ( $x_{novo}$ ,  $y_{novo}$ ) e ( $x_t$ ,  $y_t$ ) no espaço de parâmetros. Essa fórmula é utilizada para medir a diferença entre os valores antigos e atualizados dos parâmetros, representando a magnitude da atualização realizada em cada iteração do algoritmo.

Ao comparar o valor do erro com o limite de tolerância, a função descent decide se deve continuar o processo de otimização ou se já atingiu um ponto de convergência próximo o suficiente. Caso o erro seja menor que a tolerância, significa que os parâmetros foram otimizados o suficiente e a função retorna os valores atualizados dos parâmetros, juntamente com o número de iterações realizadas.

$$\hat{y}_i = \sigma(w_2 \sigma(w_1 x_i + b_1) + b_2)$$

$$E(w_1, w_2, b_1, b_2) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (y - y_i)^2$$

Função do erro

```
descent :: Double -> Double -> Double -> Double -> Int -> (Double, Double, Int)
descent lr xt yt err i
  | err < tol = (xt, yt, i)
  | otherwise =
    let dfdx = fst (grad xt yt)
        dfdy = snd (grad xt yt)
        xnovo = xt - lr * dfdx
        ynovo = yt - lr * dfdy
        errnovo = sqrt ((xnovo - xt) ** 2 + (ynovo - yt) ** 2)
    in descent lr xnovo ynovo errnovo (i + 1)
```

Função do erro

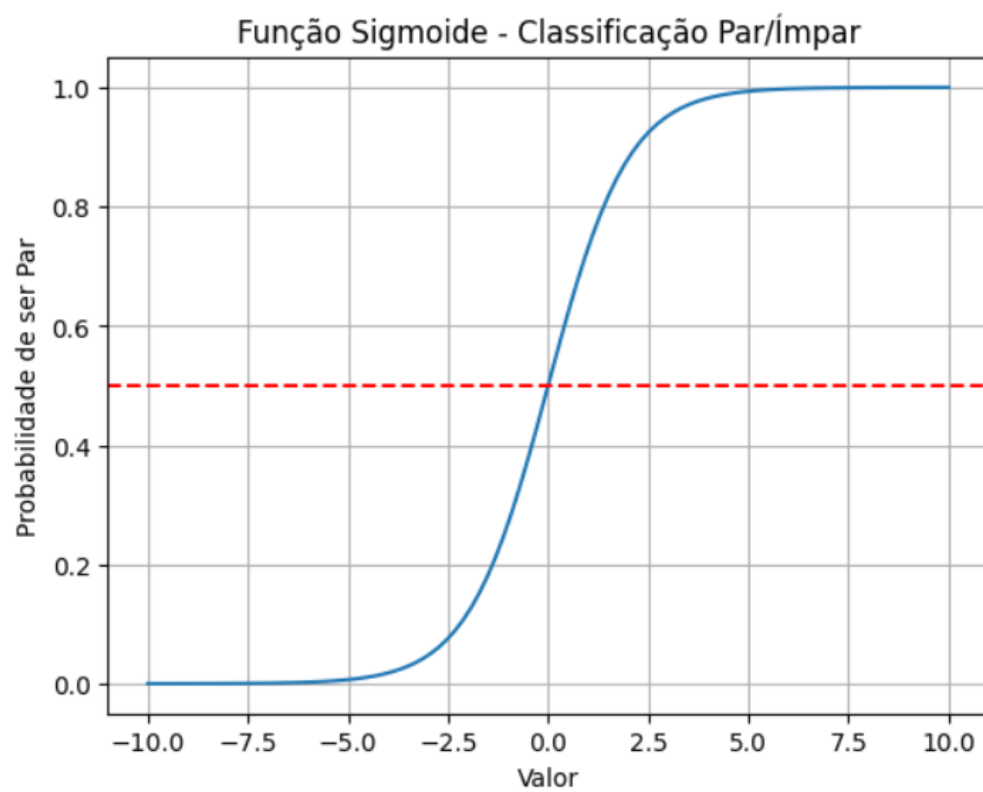
## Parametros

Os parametros utilizados nesta rede neural foram learning rate, com o valor de  $(10 \cdot 10^{-6})$  e vetor inicial, com os valores de  $([18.43878139117114, 18.2805394706888, -9.372209396659654, -8.398746300630092])$

## Sigmoide e Gradiente

A função sigmoide é utilizada para introduzir não-linearidades nas camadas da rede neural, permitindo que o modelo aprenda a representar relações complexas entre os dados de entrada e a saída desejada. A função sigmoide retorna valores entre 0(impar) e 1(par), segundo a classificação realizada nesta rede. Nesse caso se a predição for maior ou igual a 0.5, a rede já considera o número como par, se for menor ele sera um número impar.

Além da função sigmoide, outros conceitos importantes estão envolvidos na implementação dessa rede neural, como o cálculo do gradiente, que é utilizado no treinamento da rede por meio do algoritmo de gradiente descendente. Esse algoritmo ajusta os pesos e os vieses das conexões entre as unidades da rede, buscando minimizar o erro entre as previsões da rede e as saídas desejadas. Para calcular gradiente, foi utilizado as derivadas de cada ponto da função de erro,  $(w_1, b_1, w_2, b_2)$ .



Função sigmoide



$$\frac{\partial E}{\partial w_1} = 0$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial w_1} &= \left[ \frac{1}{2} (y - \underbrace{\sigma(w_2 \cdot \sigma(w_1 x_i + b_1) + b_2)}_{\hat{y}_i})^2 \right]_{w_1} = (y - \hat{y}_i) \cdot (y - \hat{y}_i)_{w_1} \\&= -(y - \hat{y}_i) [\sigma(w_2 \cdot \sigma(w_1 x_i + b_1) + b_2)]_{w_1} \\&= -(y - \hat{y}_i) \sigma'(w_2 \cdot \sigma(w_1 x_i + b_1) + b_2) \cdot [w_2 \cdot \sigma(w_1 x_i + b_1) + b_2]_{w_1} \\&= -(y - \hat{y}_i) \hat{y}_i (1 - \hat{y}_i) w_2 [\sigma(w_1 x_i + b_1)]_{w_1} \\&= -(y - \hat{y}_i) \hat{y}_i (1 - \hat{y}_i) w_2 \sigma(w_1 x_i + b_1) (1 - \sigma(w_1 x_i + b_1)) x_i\end{aligned}$$

$$\frac{\partial E}{\partial b_1} = 0$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial b_1} &= \left[ \frac{1}{2} (y - \underbrace{\sigma(w_2 \cdot \sigma(w_1 x_i + b_1) + b_2)}_{\hat{y}_i})^2 \right]_{b_1} = (y - \hat{y}_i) \cdot (y - \hat{y}_i)_{b_1} \\&= -(y - \hat{y}_i) [\sigma(w_2 \cdot \sigma(w_1 x_i + b_1) + b_2)]_{b_1} \\&= -(y - \hat{y}_i) \sigma'(w_2 \cdot \sigma(w_1 x_i + b_1) + b_2) \cdot [w_2 \cdot \sigma(w_1 x_i + b_1) + b_2]_{b_1} \\&= -(y - \hat{y}_i) \hat{y}_i (1 - \hat{y}_i) w_2 [\sigma(w_1 x_i + b_1)]_{b_1} \\&= -(y - \hat{y}_i) \hat{y}_i (1 - \hat{y}_i) w_2 \sigma(w_1 x_i + b_1) (1 - \sigma(w_1 x_i + b_1))\end{aligned}$$



Dreamx

spiral

Derivadas dos pontos



$$\frac{\partial E}{\partial w_2} = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial w_2} = \left[ \frac{1}{2} (y - \sigma(w_2 \cdot \sigma(w_1 x_i + b_1) + b_2))^2 \right]_{w_2} = (y - \hat{y}_i) \cdot (y - \hat{y}_i)_{w_2}$$

$$= -(y - \hat{y}_i) [\sigma(w_2 \cdot \sigma(w_1 x_i + b_1) + b_2)]_{w_2}$$

$$= -(y - \hat{y}_i) \hat{y}_i (1 - \hat{y}_i) w_2 [\sigma(w_1 x_i + b_1)]_{w_2}$$

$$= -(y - \hat{y}_i) \hat{y}_i (1 - \hat{y}_i) \sigma(w_1 x_i + b_1).$$

$$\frac{\partial E}{\partial b_2} = 0$$

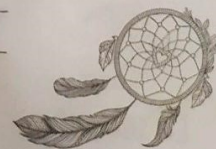
$$\frac{\partial E}{\partial b_2} = \left[ \frac{1}{2} (y - \sigma(w_2 \cdot \sigma(w_1 x_i + b_1) + b_2))^2 \right]_{b_2} = (y - \hat{y}_i) \cdot (y - \hat{y}_i)_{b_2}$$

$$= -(y - \hat{y}_i) [\sigma(w_2 \cdot \sigma(w_1 x_i + b_1) + b_2)]_{b_2}$$

$$= -(y - \hat{y}_i) \hat{y}_i (1 - \hat{y}_i) w_2 [\sigma(w_1 x_i + b_1)]_{b_2}$$

$$= -(y - \hat{y}_i) \hat{y}_i (1 - \hat{y}_i)$$

spiral



Continuação das derivadas dos pontos

# Código de Redes Neurais em Haskell

Este é um algoritmo desenvolvido em Haskell, nele é descrito desde seu início, os calculadas das derivadas, logo após é escrito a função de erro, é passada a tolerância, cálculo da predição, função sigmoide e uma função com os valores para serem classificados. No fim é mostrado no console o resultado de um número aleatório, calculado a sua predição e sua classificação. E também uma função onde testa um conjunto de dados através de um laço de repetição-for. Para melhor visualização foi plotado em um gráfico de dispersão, juntamente com uma linha bem na divisão da predição dos dados.

```
module Main where
import Control.Monad (forM_)

--Derivadas
grad :: Double -> Double -> (Double, Double)
grad w b =
  let dedw = 2 * ((5 - w - b) * (-1) + (7 - 2 * w - b) * (-2) + (9 - 3 * w - b) * (-3) + (10 - 4 * w - b)
    * (-4) + (12 - 5 * w - b) * (-5) + (15 - 6 * w - b) * (-6))
      dedb = -2 * ((5 - w - b) + (7 - 2 * w - b) + (9 - 3 * w - b) + (10 - 4 * w - b) + (12 - 5 * w - b) +
    (15 - 6 * w - b))
  in (dedw, dedb)

-- Função do Erro
descent :: Double -> Double -> Double -> Double -> Int -> (Double, Double, Int)
descent lr xt yt err i
  | err < tol = (xt, yt, i)
  | otherwise =
    let dfdx = fst (grad xt yt)
        dfdy = snd (grad xt yt)
        xnovo = xt - lr * dfdx
        ynovo = yt - lr * dfdy
        errnovo = sqrt ((xnovo - xt) ** 2 + (ynovo - yt) ** 2)
    in descent lr xnovo ynovo errnovo (i + 1)

predict :: Double -> [Double] -> Double
predict xi xs =
  let w1 = xs !! 0
      w2 = xs !! 1
```

Código em haskell.

```

w2 = xs !! 1
b1 = xs !! 2
b2 = xs !! 3
in sigma (w2 * sigma (w1 * xi + b1) + b2)

-- Função sigmoide
sigma :: Double -> Double
sigma x = 1 / (1 + exp (-x))

func :: Int -> Double
func n
  | n >= 500 = 0.5
  | otherwise = 0.5

neural :: [(Double, Double)] -> [Double] -> [Double]
neural ts xs =
  let w1 = xs !! 0
      w2 = xs !! 1
      b1 = xs !! 2
      b2 = xs !! 3
      f xi = sigma (w2 * sigma (w1 * xi + b1) + b2)
      dedw1 =
        sum
          [ -(yi - f xi)
            * f xi
            * (1 - f xi)
          ]
  in dedw1

```

Continuação do código em haskell.

```

      * w2
      * sigma (w1 * xi + b1)
      * (1 - sigma (w1 * xi + b1))
      * xi
    | (xi, yi) <- ts
  ]
dedw2 =
  sum
    [ -(yi - f xi)
      * f xi
      * (1 - f xi)
      * sigma (w1 * xi + b1)
    | (xi, yi) <- ts
    ]
dedb1 =
  sum
    [ -(yi - f xi)
      * f xi
      * (1 - f xi)
      * w2
      * sigma (w1 * xi + b1)
      * (1 - sigma (w1 * xi + b1))
    | (xi, yi) <- ts
    ]
dedb2 =
  sum
    [ -(yi - f xi)
      * f xi
    ]

```

Continuação do código em haskell.



```

        * f xi
        * (1 - f xi)
        | (xi, yi) <- ts
    ]
    in [dedw1, dedw2, dedb1, dedb2]

descentV :: ([Double] -> [Double]) -> Double -> Int -> Double -> [Double] -> ([Double], Int)
descentV grad lr i err xts
    | err < tol = (xts, i)
    | otherwise =
        let dfdxs = grad xts
            xsnovo = [xt - lr * grad | (xt, grad) <- zip xts dfdxs]
            errnovo = sum [(xnovo - xt) ** 2 | (xnovo, xt) <- zip xsnovo xts] in descentV grad lr (i + 1)
errnovo xsnovo

--Tolerância
tol :: Double
tol = 10 ** (-6)

parOuImpar :: Int -> String
parOuImpar n =
    -- mod/2 == 0 logo 0 == 1, logo impar
    if n `mod` 2 == 0 then "par" else "impar"
main = do
    putStrLn "Digite um valor: "
    input <- getLine
    let value = read input :: Double
    tc = [(fromIntegral n / 1000, func n) | n <- [1 .. 1000]]

```

Continuação do código em haskell.

```

    tc = [(fromIntegral n / 1000, func n) | n <- [1 .. 1000]]
    --Valores Iniciais
    p = descentV (neural tc) 0.01 0 9999 [18.438781391117114, 18.28050394706888, -9.372209396659654,
-8.398746300630092]
    fp = fst p
    putStrLn "Descent"
    print p
    putStrLn $ "Predição para " ++ input
    putStrLn $ if odd (round value) then "impar" else "par"
    print $ predict (value / 1000) fp

--Função para imprimir os valores e suas classificações(Impar-Par)
let numbers = [988, 299, 800, 9, 17, 1000]
forM_ numbers $ \num -> do
    putStrLn (show num)
    if predict (fromIntegral num / 1000) fp >= 0.5
    then putStrLn ("O número " ++ show num ++ " é par")
    else putStrLn ("O número " ++ show num ++ " é ímpar")

```

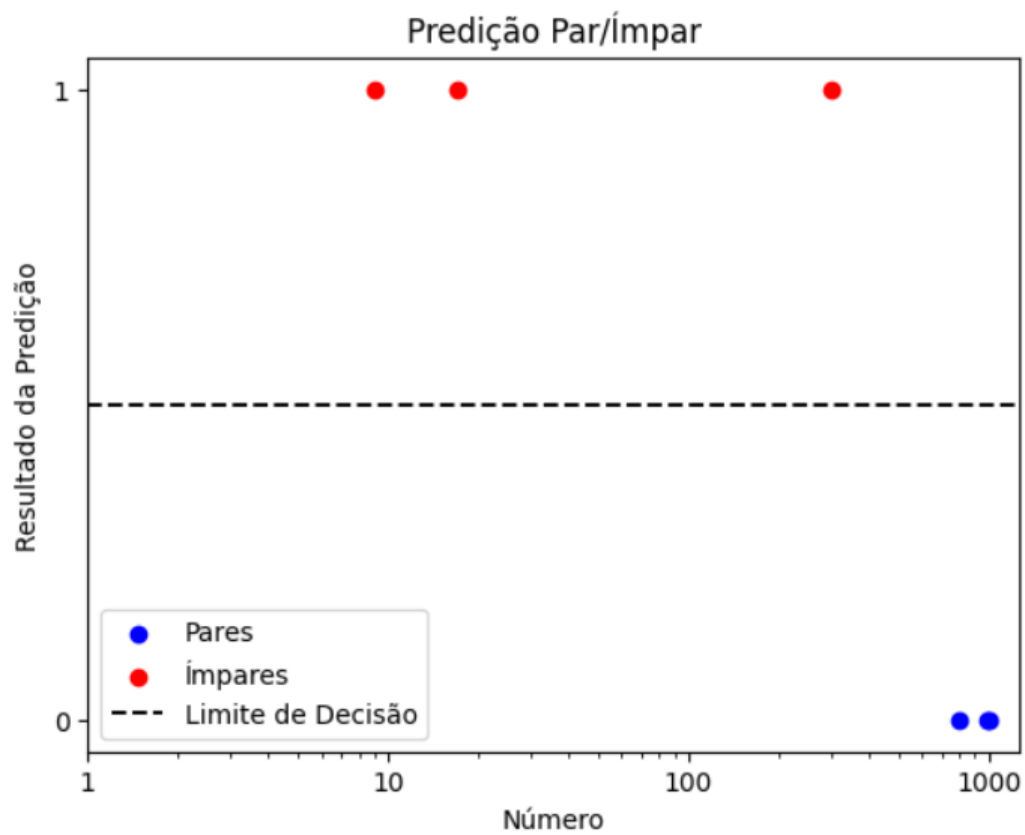
Continuação do código em haskell.

```

> Digite um valor:
90
Descent
([10.720757575003384,15.36017365021452,-15.19387052756457,-1.6344205394757443e-2],1114)
Predição para 90
par
0.49591657900031805
988
0 número 988 é par
299
0 número 299 é ímpar
800
0 número 800 é par
9
0 número 9 é ímpar
17
0 número 17 é ímpar
1000
0 número 1000 é par
> 

```

Resultado no console.



Classificação do conjunto de números do laço-for do console.

## Conclusão

Portanto, o algoritmo apresentado utiliza a técnica de rede neural para realizar a classificação de números como pares ou ímpares. Através do treinamento realizado com a função, o modelo aprende os pesos e bias que são utilizados pela função preditiva. E também com o gradiente descendente, o modelo realiza ajustes nesses valores para melhorar a precisão de sua classificação. Ao analisar o comportamento desta rede neural e os gráficos que o algoritmo gera, podemos considerar que, se um número retornar uma predição menor que 0.5 ele é classificado como ímpar e caso a predição seja maior ou igual a 0.5 ele é considerado como par.

## Link do Github:

[\*gabrielaDuarte\*](https://github.com/gabiduarte435/RedesNeurais)