

5. MODELOS MECÂNICOS - N GL

O estudo das vibrações livres e forçadas de sistemas mecânicos, com modelos discretos, isto é, com N graus de liberdade, é feito a partir de modelos obtidos através de equações da Dinâmica de Sistemas. Os sistemas dinâmicos reais são representados através de equações diferenciais a derivadas parciais. Entretanto, dentro de determinada faixa finita de frequência, estes sistemas podem ser bem representados por modelos discretos. Estes modelos podem ser obtidos a partir de duas aproximações. Uma delas utiliza a discretização do espaço geométrico de forma conveniente a representar a ação dinâmica na faixa de frequência de trabalho. Outro método utiliza a discretização no espaço de solução das equações diferenciais parciais. Isto equivale a truncar a série infinita de funções da base de solução para um número discreto de funções. Assim a base infinita se torna finita como uma aproximação. A escolha conveniente desta base finita produz modelos de alta precisão, como são os modelos de estruturas obtidos através do Método dos Elementos Finitos. Aqui aplicaremos as equações de movimento de Newton-Euler e de Lagrange.

5.1 - MODELOS MATEMÁTICOS

Com a aplicação das leis do movimento, pode-se mostrar que muitos sistemas mecânicos podem ter como modelo matemático a equação matricial

$$[m]\{\ddot{w}\} + [c]\{\dot{w}\} + [k]\{w\} = \{f\} \quad (5.1)$$

onde

$[m]$ é a matriz-massa do modelo;

$[c]$ é a matriz-amortecimento do modelo;

$[k]$ é a matriz-rigidez do modelo;

$\{w\} = \{w(t)\}$ é o vetor-deslocamento;

$\{\dot{w}\} = \{\dot{w}(t)\} = \frac{d}{dt} \{w\}$ é o vetor-velocidade;

$\{\ddot{w}\} = \{\ddot{w}(t)\} = \frac{d^2}{dt^2} \{w\}$ é o vetor-aceleração e

$\{f\} = \{f(t)\}$ é a vetor-força externa aplicada ao sistema.

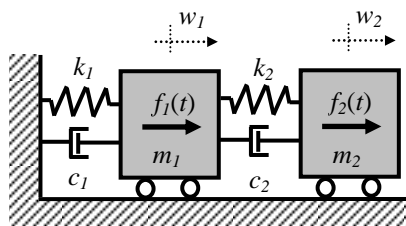


Figura 5.1 - Modelo simples de 2 graus de liberdade.

Para se obter os parâmetros do modelo dado por (5.1) há vários procedimentos derivados das teorias da Mecânica Vetorial ou da Mecânica Clássica. Além disso, é necessário

o conhecimento de métodos para a discretização dos sistemas deformáveis. Neste item será tratado apenas um método que é fundamental para o conhecimento de teorias mais avançadas.

Dois tipos de problemas podem ser escritos como modelos de N graus de liberdade. No primeiro tipo encontram-se casos onde o sistema físico é composto de partes rígidas apoiadas em molas e amortecedores ideais, com N graus de liberdade. Pode haver vários corpos interligados através de conexões cinemáticas e ou molas e amortecedores que impõem N graus de liberdade. O segundo tipo de problema tratado aqui corresponde a corpos deformáveis para os quais admite-se um número finito de formas para a deformação. Este método é conhecido como *método dos modos assumidos*. Os exemplos seguintes ilustram os dois casos apontados.

5.2 - EXEMPLOS

Exemplo 1 - Um sistema mecânico é modelado com 3 graus de liberdade. As massa m_1 , m_2 e m_3 estão acopladas a molas e amortecedores conforme mostra a Fig. 5.2. As forças externas f_1 , f_2 e f_3 atuam nestas massas. Deseja-se obter o modelo matemático com 3 GL, dado por um sistema de equações diferenciais, que descreva as relações entre as forças externas (entradas) e os deslocamentos absolutos (saídas) das massas, indicados como w_1 , w_2 e w_3 .

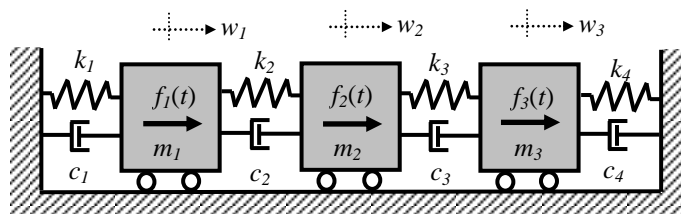


Figura 5.2 - Modelo de 3 graus de liberdade.

Aplicando a lei de Newton para a massa m_1 , obtém-se

$$f_1 - k_1 w_1 - c_1 \dot{w}_1 - k_2 (w_1 - w_2) - c_2 (\dot{w}_1 - \dot{w}_2) = m_1 \ddot{w}_1 \quad (5.2)$$

em m_2 , obtém-se

$$f_2 - k_2 (w_2 - w_1) - c_2 (\dot{w}_2 - \dot{w}_1) - k_3 (w_2 - w_3) - c_3 (\dot{w}_2 - \dot{w}_3) = m_2 \ddot{w}_2 \quad (5.3)$$

e, finalmente, em m_3 , obtém-se

$$f_3 - k_3 (w_3 - w_2) - c_3 (\dot{w}_3 - \dot{w}_2) - k_4 w_3 - c_4 \dot{w}_3 = m_3 \ddot{w}_3 \quad (5.4)$$

Estas três equações de movimento formam um sistema acoplado de três equações diferenciais ordinárias de segunda ordem, que podem ser escritas da seguinte forma:

$$m_1 \ddot{w}_1 + (c_1 + c_2) \dot{w}_1 - c_2 \dot{w}_2 + (k_1 + k_2) w_1 - k_2 w_2 = f_1 \quad (5.5)$$

$$m_2 \ddot{w}_2 - c_2 \dot{w}_1 + (c_2 + c_3) \dot{w}_2 - c_3 \dot{w}_3 - k_2 w_1 + (k_2 + k_3) w_2 - k_3 w_3 = f_2 \quad (5.6)$$

$$m_3 \ddot{w}_3 - c_3 \dot{w}_2 + (c_3 + c_4) \dot{w}_3 - k_3 w_2 + (k_3 + k_4) w_3 = f_3 \quad (5.7)$$

Numa forma matricial, este sistema pode ser escrito como:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{w}_1 \\ \ddot{w}_2 \\ \ddot{w}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 + c_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{w}_1 \\ \dot{w}_2 \\ \dot{w}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix}$$

ou, de forma compacta

$$[m]\{\ddot{w}\} + [c]\{\dot{w}\} + [k]\{w\} = \{f\} \quad (5.8)$$

onde

$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \text{ é a matriz-massa,}$$

$$[c] = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 + c_4 \end{bmatrix} \text{ é a matriz-amortecimento e}$$

$$[k] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 \end{bmatrix} \text{ é a matriz-rigidez.}$$

Os vetores deslocamento, velocidade e aceleração são dados, respectivamente, por:

$$\{w\} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{Bmatrix} \quad \{\dot{w}\} = \begin{Bmatrix} \dot{w}_1 \\ \dot{w}_2 \\ \dot{w}_3 \end{Bmatrix} \quad \{\ddot{w}\} = \begin{Bmatrix} \ddot{w}_1 \\ \ddot{w}_2 \\ \ddot{w}_3 \end{Bmatrix}$$

Observamos que as matrizes deste sistema são simétricas.

As equações de Newton foram usadas para se obter o modelo (5.8) do sistema da Figura 5.2. Agora vamos usar as equações de Lagrange para este mesmo sistema, dadas por

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i \quad (5.9)$$

onde $i = 1, 2, \dots, n$. Neste exemplo $n = 3$ com $q_1 = w_1$, $q_2 = w_2$ e $q_3 = w_3$. As energias cinética e potencial são dadas, respectivamente, por

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{w}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{w}_2^2 + \frac{1}{2} m_3 \dot{w}_3^2 \quad (5.10)$$

e

$$V = \frac{1}{2} k_1 w_1^2 + \frac{1}{2} k_2 (w_1 - w_2)^2 + \frac{1}{2} k_3 (w_2 - w_3)^2 + \frac{1}{2} k_4 w_3^2 \quad (5.11)$$

As forças generalizadas Q_i das equações de Lagrange (5.9), podem ser obtidas calculando-se os trabalhos virtuais das forças externas e forças de amortecimento. Assim;

$$\begin{aligned} \delta W = & f_1 \delta w_1 + f_2 \delta w_2 + f_3 \delta w_3 - c_1 \dot{w}_1 \delta w_1 - c_2 (\dot{w}_1 - \dot{w}_2) \delta w_1 - c_2 (\dot{w}_2 - \dot{w}_1) \delta w_2 + \\ & - c_3 (\dot{w}_2 - \dot{w}_3) \delta w_2 - c_3 (\dot{w}_3 - \dot{w}_2) \delta w_3 - c_4 \dot{w}_3 \delta w_3 \end{aligned} \quad (5.12)$$

ou

$$\begin{aligned} \delta W = & [f_1 - (c_1 + c_2) \dot{w}_1 + c_2 \dot{w}_2] \delta w_1 + [f_2 + c_2 \dot{w}_1 - (c_2 + c_3) \dot{w}_2 + c_3 \dot{w}_3] \delta w_2 + \\ & + [f_3 + c_3 \dot{w}_2 - (c_3 + c_4) \dot{w}_3] \delta w_3 \end{aligned} \quad (5.13)$$

O trabalho virtual das forças generalizadas é dado por

$$\delta W = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + Q_3 \delta q_3 \quad (5.14)$$

Como $\delta q_1 = \delta w_1$, $\delta q_2 = \delta w_2$ e $\delta q_3 = \delta w_3$, comparando (5.13) com (5.14), obtém-se

$$Q_1 = f_1 - (c_1 + c_2) \dot{w}_1 + c_2 \dot{w}_2 \quad (5.15)$$

$$Q_2 = f_2 + c_2 \dot{w}_1 - (c_2 + c_3) \dot{w}_2 + c_3 \dot{w}_3 \quad (5.16)$$

$$Q_3 = f_3 + c_3 \dot{w}_2 - (c_3 + c_4) \dot{w}_3 \quad (5.17)$$

Assim, aplicando as equações de Lagrange, dadas por (5.9), obtém-se

$$m_1 \ddot{w}_1 + (k_1 + k_2) w_1 - k_2 w_2 = f_1 - (c_1 + c_2) \dot{w}_1 + c_2 \dot{w}_2 \quad (5.18)$$

$$m_2 \ddot{w}_2 - k_2 w_1 + (k_2 + k_3) w_2 - k_3 w_3 = f_2 + c_2 \dot{w}_1 - (c_2 + c_3) \dot{w}_2 + c_3 \dot{w}_3 \quad (5.19)$$

$$m_3 \ddot{w}_3 - k_3 w_2 + (k_3 + k_4) w_3 = f_3 + c_3 \dot{w}_2 - (c_3 + c_4) \dot{w}_3 \quad (5.20)$$

ou seja

$$m_1 \ddot{w}_1 + (c_1 + c_2) \dot{w}_1 - c_2 \dot{w}_2 + (k_1 + k_2) w_1 - k_2 w_2 = f_1 \quad (5.21)$$

$$m_2 \ddot{w}_2 - c_2 \dot{w}_1 + (c_2 + c_3) \dot{w}_2 - c_3 \dot{w}_3 - k_2 w_1 + (k_2 + k_3) w_2 - k_3 w_3 = f_2 \quad (5.22)$$

$$m_3 \ddot{w}_3 - c_3 \dot{w}_2 + (c_3 + c_4) \dot{w}_3 - k_3 w_2 + (k_3 + k_4) w_3 = f_3 \quad (5.23)$$

Estas equações são iguais às (5.5), (5.6) e (5.7), obtidas através das equações de Newton.

Exemplo 2 - Um sistema mecânico é modelado com 2 graus de liberdade, sendo w a posição da massa m e θ a posição angular da massa M . As massas m e M estão acopladas através de um pino liso e de uma mola de torção k_T . A massa M possui tem centro de massa em G , com momento de inércia I_G . A massa m está acoplada ao suporte S através de duas molas e dois amortecedores conforme mostra a Fig. 5.3. Dado o movimento do suporte $w_S(t)$ determinar o modelo de 2 graus de liberdade deste sistema.

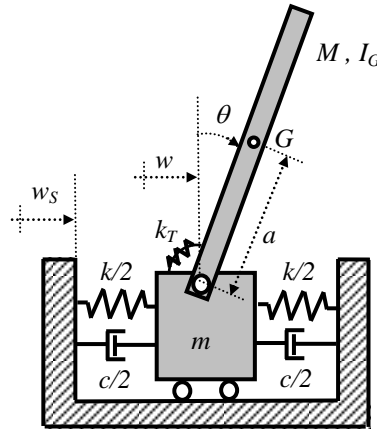


Figura 5.3 - Modelo de 2 graus de liberdade.

Aplicando a lei de Newton para a massa m , na direção x , obtém-se

$$f_I - k(w - w_s) - c(\dot{w} - \dot{w}_s) = m\ddot{w} \quad (5.24)$$

onde f_I é a força que o pino de conexão faz sobre m na direção de w . Aplicando a lei de Newton na massa M , nesta direção:

$$-f_I = M\ddot{w}_G \quad (5.25)$$

onde w_G é o deslocamento do centro de massa G da massa M , igual a:

$$w_G = w + a \sin \theta \quad (5.26)$$

Para ângulos pequenos, pode-se escrever:

$$w_G = w + a \theta \quad (5.27)$$

Substituindo (5.25) e (5.27) em (5.24), obtém-se:

$$-k(w - w_s) - c(\dot{w} - \dot{w}_s) = m\ddot{w} + M(\ddot{w} + a\ddot{\theta}) \quad (5.28)$$

ou

$$(m + M)\ddot{w} + Ma\ddot{\theta} + c\dot{w} + kw = c\dot{w}_s + kw_s \quad (5.29)$$

Aplicando a lei de Newton-Euler na massa M , obtém-se:

$$f_1 a \cos \theta + f_2 a \sin \theta - k_T \theta = I_G \ddot{\theta} \quad (5.30)$$

onde f_1 e f_2 são as forças horizontal e vertical, respectivamente, aplicadas pelo pino de conexão sobre a massa M . Para ângulos pequenos:

$$f_1 a + f_2 a \theta - k_T \theta = I_G \ddot{\theta} \quad (5.31)$$

Pela lei de Newton em M , na direção vertical:

$$f_2 - Mg = M\ddot{v}_G \cong 0 \quad (5.32)$$

ou

$$f_2 = Mg \quad (5.33)$$

Aplicando (5.25), (5.27) e (5.33) em (5.31), obtém-se:

$$-Ma(\ddot{w} + a\ddot{\theta}) + Mga\theta - k_T \theta = I_G \ddot{\theta} \quad (5.34)$$

ou seja

$$Ma\ddot{w} + Ma^2\ddot{\theta} + I_G \ddot{\theta} + k_T \theta - Mga\theta = 0 \quad (5.35)$$

Assim o sistema que representa o modelo de 2 graus de liberdade da Figura 5.3 é dado pelas equações (5.29) e (5.35). Na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} m+M & Ma \\ Ma & Ma^2 + I_G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{w} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{w} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k_T - Mga \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_s \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.36)$$

onde

$$f_s = c\dot{w}_s + kw_s$$

Agora vamos usar as equações de Lagrange para este mesmo caso, ou seja, para o modelo dado na Figura 5.3. Seja a equação de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i \quad (5.37)$$

onde $i = 1, 2, \dots, n$. Neste exemplo $n = 2$ com $q_1 = w$ e $q_2 = \theta$. As energias cinética e potencial são dadas, respectivamente, por

$$T = \frac{1}{2} m \dot{w}^2 + \frac{1}{2} M \dot{w}_G^2 + \frac{1}{2} I_G \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} m \dot{w}^2 + \frac{1}{2} M (\dot{w} + a \dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} I_G \dot{\theta}^2 \quad (5.38)$$

$$V = \frac{1}{2} k (w - w_s)^2 + \frac{1}{2} k_T \theta^2 + Mga \cos \theta \quad (5.39)$$

Aplicando as equações de Lagrange (5.37), obtém-se:

$$m\ddot{w} + M\ddot{w} + Ma\ddot{\theta} + k(w - w_s) = Q_1 \quad (5.40)$$

$$Ma\ddot{w} + Ma^2\ddot{\theta} + I_G\ddot{\theta} + k_T\theta - Mga\theta = Q_2 \quad (5.41)$$

As forças generalizadas Q_i da equação de Lagrange (5.9), podem ser obtidas, calculando-se os trabalhos virtuais das forças externas e das forças de amortecimento. Assim

$$\delta W = -c(\dot{w} - \dot{w}_s)\delta w \quad (5.42)$$

O trabalho virtual da forças generalizadas é dado por

$$\delta W = Q_1\delta q_1 + Q_2\delta q_2 \quad (5.43)$$

Comparando (5.42) com (5.43), sendo $\delta q_1 = \delta w$ e $\delta q_2 = \delta \theta$, obtém-se

$$Q_1 = -c(\dot{w} - \dot{w}_s) \quad (5.44)$$

$$Q_2 = 0 \quad (5.45)$$

Assim, aplicando as equações de Lagrange (5.37) obtém-se

$$m\ddot{w} + M\ddot{w} + Ma\ddot{\theta} + k(w - w_s) = -c(\dot{w} - \dot{w}_s) \quad (5.46)$$

$$Ma\ddot{w} + Ma^2\ddot{\theta} + I_G\ddot{\theta} + k_T\theta - Mga\theta = 0 \quad (5.47)$$

ou

$$(m + M)\ddot{w} + Ma\ddot{\theta} + c\dot{w} + kw = c\dot{w}_s + kw_s \quad (5.48)$$

$$Ma\ddot{w} + (Ma^2 + I_G)\ddot{\theta} + (k_T - Mga)\theta = 0 \quad (5.49)$$

Estas equações formam um sistema igual ao (5.36), obtido através equações de Newton.

Exemplo 3 - Seja uma viga engastada, com seção transversal constante A , comprimento L e momento de segunda ordem de área igual a J , submetida a uma força $p(x,t)$. O material da viga tem módulo de elasticidade E e massa por unidade de volume igual a ρ . Pretende-se obter um modelo com 2 GL para esta viga que descreva de forma aproximada o movimento vertical, dado por $v(x,t)$.

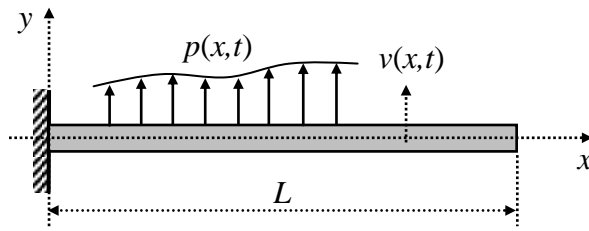


Figura 5.4 - Modelo de 2 graus de liberdade: barra engastada.

O deslocamento vertical desta viga é dado por uma função da posição x e do tempo t , ou seja, $v(x,t)$. Pode-se admitir que

$$v(x,t) = \psi_1(x) \cdot q_1(t) + \psi_2(x) \cdot q_2(t) \quad (5.50)$$

Pode-se tomar quaisquer funções $\psi_1(x)$ e $\psi_2(x)$ linearmente independentes, que satisfaçam as condições de contorno no engastamento, como por exemplo funções do tipo:

$$\psi_i(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \quad (5.51)$$

A função $\psi_1(x)$ será escolhida de tal maneira que $q_1(t)$ represente o deslocamento vertical da extremidade da viga e $\psi_2(x)$ será escolhida de tal maneira que $q_2(t)$ represente o deslocamento angular desta mesma extremidade. As funções aqui utilizadas são chamadas *cubic splines*, e o método utilizado é o *método dos modos assumidos*. Nestas condições, obtém-se as funções:

$$\psi_1(x) = \frac{3}{L^2} x^2 - \frac{2}{L^3} x^3 \quad (5.52)$$

$$\psi_2(x) = -\frac{1}{L} x^2 + \frac{1}{L^2} x^3 \quad (5.53)$$

Desta forma, o sistema passa a ter 2 graus de liberdade, pois uma vez conhecido os deslocamentos, linear $q_1(t)$ e angular $q_2(t)$ da extremidade da viga, todos os demais pontos têm seus movimentos conhecidos através de (5.51).

Para a obtenção do modelo deste sistema, a equação mais conveniente a ser aplicada neste caso é a equação de Lagrange, ou seja,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i \quad \text{com } i = 1 \text{ e } 2 \quad (5.54)$$

onde

T é a energia cinética $T = T(q_i, \dot{q}_i, t)$

V é a energia potencial $V = V(q_i, t)$ e

Q_i é a força generalizada correspondente.

As energias cinética e potencial da viga deste exemplo e o trabalho virtual da força generalizada são dadas por

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 dx \quad (5.55)$$

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L E J \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (5.56)$$

$$\sum_{i=1}^2 Q_i \delta q_i = \int_0^L p(x, t) \delta v dx \quad (5.57)$$

Aplicando (5.50) em (5.55), (5.56) e (5.57) obtêm-se

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A [\psi_1(x) \dot{q}_1(t) + \psi_2(x) \dot{q}_2(t)]^2 dx \quad (5.58)$$

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L E J [\psi_1''(x) q_1(t) + \psi_2''(x) q_2(t)]^2 dx \quad \text{onde} \quad \psi''(x) = \frac{d^2 \psi}{dx^2} \quad (5.59)$$

e

$$Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 = \int_0^L p(x,t) [\psi_1(x) \delta q_1 + \psi_2(x) \delta q_2] dx \quad (5.60)$$

Aplicando (5.58), (5.59) e (5.60) nas equações de Lagrange (5.54), obtém-se

$$m_{11} \ddot{q}_1 + m_{12} \ddot{q}_2 + k_{11} q_1 + k_{12} q_2 = Q_1 \quad (5.61)$$

$$m_{21} \ddot{q}_1 + m_{22} \ddot{q}_2 + k_{21} q_1 + k_{22} q_2 = Q_2 \quad (5.62)$$

ou, matricialmente:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} \quad (5.63)$$

onde

$$m_{ij} = \int_0^L \rho A \psi_i(x) \psi_j(x) dx \quad (5.64)$$

$$k_{ij} = \int_0^L E J \psi_i''(x) \psi_j''(x) dx \quad (5.65)$$

e

$$Q_i = \int_0^L p(x,t) \psi_i(x) dx \quad (5.66)$$

Para o caso particular da $\psi_i(x)$ dadas por (5.52) e (5.53), tem-se que:

$$m_{11} = \frac{13}{35} \rho A L \quad m_{12} = m_{21} = -\frac{11}{210} \rho A L^2 \quad m_{22} = \frac{1}{105} \rho A L^3$$

$$k_{11} = 12 \frac{E J}{L^3} \quad k_{12} = k_{21} = -6 \frac{E J}{L^2} \quad k_{22} = 4 \frac{E J}{L}$$

Admitido-se $p(x,t) = p f(t)$ com p constante, obtém-se:

$$Q_1 = \frac{1}{2} p L f(t) \quad Q_2 = -\frac{1}{12} p L^2 f(t)$$

Apêndice 1 - A determinação da função aproximadora $\psi_1(x)$ é feita de tal maneira que $q_1(t)$ represente o deslocamento vertical da extremidade da viga. Para isto, na equação geral

$$\psi_i(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \quad (5.67)$$

deve-se impor as condições de contorno em $x=0$, obrigatórias, e as condições de contorno em $x=L$, convenientes, ou seja:

$$\psi_1(0) = 0 \Rightarrow a_0 = 0 \quad (5.68)$$

$$\psi'_1(0) = 0 \Rightarrow a_1 = 0 \quad (5.69)$$

$$\psi_1(L) = 1 \Rightarrow a_2L^2 + a_3L^3 = 1 \quad (5.70)$$

$$\psi'_1(L) = 0 \Rightarrow 2a_2L + 3a_3L^2 = 0 \quad (5.71)$$

Resolvendo o sistema acima, obtém-se $a_2 = \frac{3}{L^2}$ e $a_3 = -\frac{2}{L^3}$. Logo

$$\psi_1(x) = \frac{3}{L^2}x^2 - \frac{2}{L^3}x^3 \quad (5.72)$$

A determinação da função aproximadora $\psi_2(x)$ é feita de tal maneira que $q_2(t)$ represente o deslocamento angular da extremidade da viga. Para isto, na equação geral (5.67) deve-se impor as condições de contorno em $x=0$, obrigatórias, e as condições de contorno em $x=L$, convenientes, ou seja:

$$\psi_2(0) = 0 \Rightarrow a_0 = 0 \quad (5.73)$$

$$\psi'_2(0) = 0 \Rightarrow a_1 = 0 \quad (5.74)$$

$$\psi_2(L) = 0 \Rightarrow a_2L^2 + a_3L^3 = 0 \quad (5.75)$$

$$\psi'_2(L) = 1 \Rightarrow 2a_2L + 3a_3L^2 = 1 \quad (5.76)$$

Resolvendo o sistema acima, obtém-se $a_2 = -\frac{1}{L}$ e $a_3 = \frac{1}{L^2}$. Portanto

$$\psi_2(x) = -\frac{1}{L}x^2 + \frac{1}{L^2}x^3 \quad (5.77)$$

Apêndice 2 - Para discutir a diferença entre as formulações de Newton e Lagrange, vamos tomar o seguinte exemplo: um sistema mecânico formado por uma barra uniforme de comprimento L , massa m e momento de inércia I em relação ao centro de massa, apoiada em duas molas iguais nas extremidades, cada uma de constante k . Este sistema se move no plano e será modelado com 2 graus de liberdade, através de dois conjuntos de coordenada: no primeiro as coordenada usadas serão o deslocamento do centro de massa w e o deslocamento angular θ , enquanto no segundo serão usados os deslocamentos das extremidades da barra dados por w_1 e w_2 .

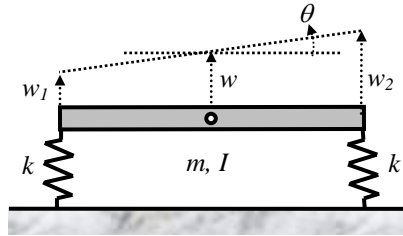


Figura 5.5 - Modelo de 2 graus de liberdade.

Aplicando a lei de Newton para a massa m , a partir da posição de equilíbrio, obtém-se

$$-kw_1 - kw_2 = m\ddot{w} \quad (5.78)$$

e

$$kw_1 \frac{L}{2} - kw_2 \frac{L}{2} = I\ddot{\theta} \quad (5.79)$$

Usando as transformações, para θ pequenos:

$$w = \frac{w_1 + w_2}{2} \quad (5.80)$$

e

$$\theta = \frac{w_2 - w_1}{L} \quad (5.81)$$

obtemos:

$$w_1 = w - \frac{L}{2}\theta \quad \text{e} \quad w_2 = w + \frac{L}{2}\theta \quad (5.82)$$

Substituindo (5.82) em (5.78) e (5.79), obtém-se:

$$-k\left(w - \frac{L}{2}\theta\right) - k\left(w + \frac{L}{2}\theta\right) = m\ddot{w} \quad (5.83)$$

e

$$k\left(w - \frac{L}{2}\theta\right)\frac{L}{2} - k\left(w + \frac{L}{2}\theta\right)\frac{L}{2} = I\ddot{\theta} \quad (5.84)$$

ou seja

$$m\ddot{w} + 2kw = 0 \quad (5.85)$$

e

$$I\ddot{\theta} + \frac{kL^2}{2}\theta = 0 \quad (5.86)$$

Na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{w} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & 0 \\ 0 & \frac{kL^2}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.87)$$

Agora vamos obter o modelo nas coordenadas w_1 e w_2 substituindo as transformações (5.80) e (5.81) nas equações (5.78) e (5.79), obtendo

$$-kw_1 - kw_2 = m\frac{\ddot{w}_1 + \ddot{w}_2}{2} \quad (5.88)$$

e

$$kw_1\frac{L}{2} - kw_2\frac{L}{2} = I\frac{\ddot{w}_2 - \ddot{w}_1}{L} \quad (5.89)$$

ou

$$\frac{m}{2}\ddot{w}_1 + \frac{m}{2}\ddot{w}_2 + kw_1 + kw_2 = 0 \quad (5.90)$$

e

$$-\frac{I}{L}\ddot{w}_1 + \frac{I}{L}\ddot{w}_2 - \frac{kL}{2}w_1 + \frac{kL}{2}w_2 = 0 \quad (5.91)$$

Na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \frac{m}{2} & \frac{m}{2} \\ -\frac{I}{L} & \frac{I}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{w}_1 \\ \ddot{w}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{k}{2} & \frac{k}{2} \\ -\frac{kL}{2} & \frac{kL}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.92)$$

Podemos observar que as matrizes expressas na equação (5.90) não são as matrizes de massa e rigidez do modelo. Vamos obter estas matrizes no modelo obtido através das equações de Lagrange, na forma

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i \quad (5.93)$$

onde $i = 1$ e 2 . Neste exemplo faremos inicialmente $q_1 = w$ e $q_2 = \theta$. As energias cinética e potencial são dadas, respectivamente, por

$$T = \frac{1}{2} m \dot{w}^2 + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 \quad (5.94)$$

$$V = \frac{1}{2} k w_1^2 + \frac{1}{2} k w_2^2 = \frac{1}{2} k \left(w - \frac{L}{2} \theta \right)^2 + \frac{1}{2} k \left(w + \frac{L}{2} \theta \right)^2 \quad (5.95)$$

Aplicando as equações de Lagrange (5.93), obtém-se:

$$m \ddot{w} + 2k w = 0 \quad (5.96)$$

$$I \ddot{\theta} + \frac{kL^2}{2} \theta = 0 \quad (5.97)$$

Que resulta no mesmo modelo obtido através das equações (5.85) e (5.86) ou (5.87). Vamos agora usar as equações de Lagrange para obter o modelo nas coordenadas w_1 e w_2 . Vamos escrever as energias cinética e potencial, dadas em (5.94) e (5.95) nestas coordenadas.

$$T = \frac{1}{2} m \dot{w}^2 + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{\dot{w}_1 + \dot{w}_2}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} I \left(\frac{\dot{w}_2 - \dot{w}_1}{L} \right)^2 \quad (5.98)$$

$$V = \frac{1}{2} k w_1^2 + \frac{1}{2} k w_2^2 \quad (5.99)$$

Aplicando as equações de Lagrange (5.93), com $q_1 = w_1$ e $q_2 = w_2$, obtém-se:

$$\left(\frac{m}{4} + \frac{I}{L^2}\right)\ddot{w}_1 + \left(\frac{m}{4} - \frac{I}{L^2}\right)\ddot{w}_2 + kw_1 = 0 \quad (5.100)$$

$$\left(\frac{m}{4} - \frac{I}{L^2}\right)\ddot{w}_1 + \left(\frac{m}{4} + \frac{I}{L^2}\right)\ddot{w}_2 + kw_2 = 0 \quad (5.101)$$

ou, na forma matricial

$$\begin{bmatrix} \frac{m}{4} + \frac{I}{L^2} & \frac{m}{4} - \frac{I}{L^2} \\ \frac{m}{4} - \frac{I}{L^2} & \frac{m}{4} + \frac{I}{L^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{w}_1 \\ \ddot{w}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.102)$$

As matrizes simétricas expressas na equação (5.102) são, de fato, as matrizes de massa e de rigidez do modelo nas coordenadas w_1 e w_2 . Por outro lado, as matrizes expressas na equação (5.92) não são simétricas e não são as matrizes de massa e rigidez do modelo nestas coordenadas.

Vamos escrever a transformação de coordenadas dada por (5.80) e (5.81) na forma matricial

$$\begin{Bmatrix} w \\ \theta \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{Bmatrix} \quad (5.103)$$

Vamos multiplicar a equação (5.92) pela transposta da matriz de transformação, ou seja

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{m}{2} & \frac{m}{2} \\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{w}_1 \\ \ddot{w}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{k}{2} & \frac{k}{2} \\ -\frac{kL}{2} & \frac{kL}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.104)$$

cujo resultado é idêntico à (5.102), ou seja

$$\begin{bmatrix} \frac{m}{4} + \frac{I}{L^2} & \frac{m}{4} - \frac{I}{L^2} \\ \frac{m}{4} - \frac{I}{L^2} & \frac{m}{4} + \frac{I}{L^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{w}_1 \\ \ddot{w}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.105)$$